

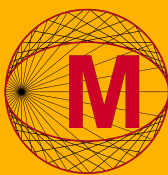
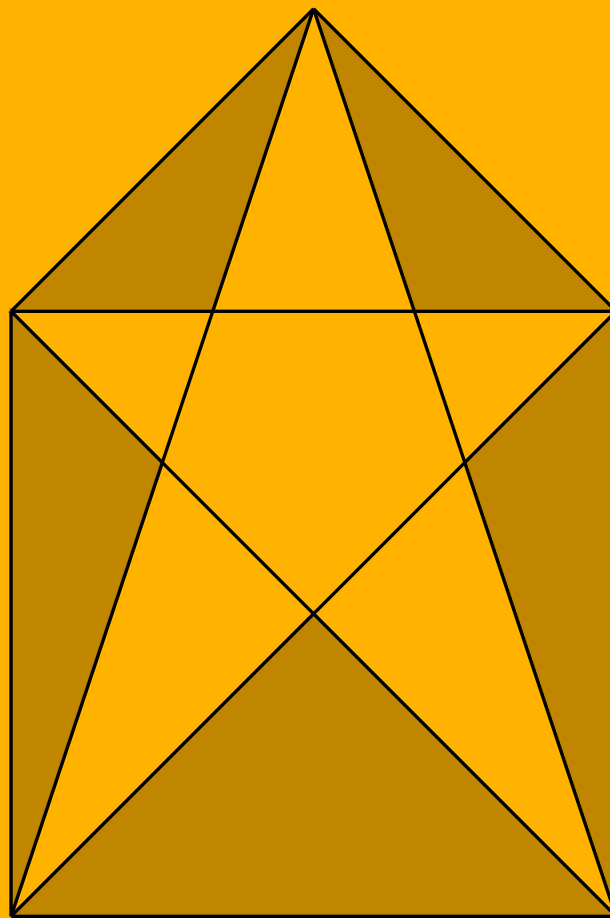
Jahrgang 45

Heft 164

Dezember 2025

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. Februar 2026.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

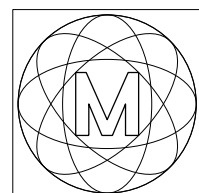
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Vier Tage universitäre Mathematik

Die Mainzer Mathe-Akademie 2025

von Till Radünz

Am Mittwoch, 10.09.2025 um 17.00 Uhr, startete die Mainzer-Mathe-Akademie 2025 an der Jugendherberge Don Bosco in Mainz. Nach der Verteilung der Zimmer begann das Programm mit dem ersten Abendessen. Anschließend trafen sich die etwa 30 Teilnehmer im Gemeinschaftsraum, um den Abend zum Kennenlernen und gemeinsamen Spielen zu nutzen. Das traditionelle Namensspiel mit „Hein dem Schwein“ durfte natürlich nicht fehlen.



Am nächsten Tag machten sich die Teilnehmer auf den Weg durch Mainz an die Johannes Gutenberg-Universität. Angekommen im Institut für Mathematik, warteten sie gespannt im Hilbert-Raum auf die Dozenten, um unsere Kurse zu wählen. Drei Dozenten stellten jeweils ein Thema vor, welches ihr Kurs behandeln würde. Nun war es an der Zeit, sich zwischen den Kursen „Catalanzahlen“ mit Prof. Dr. Hartung, „Fehlercodes“ mit Prof. Dr. Eberhardt oder „Der Klang der Mathematik“ mit Dr. Werth zu entscheiden.

In den Kursen wurde den Teilnehmern in mehreren Unterrichtseinheiten täglich das entsprechende Thema erklärt. Zwischen den Stunden gab es eine Kaffeepause, in der sich alle Lernenden über das Erarbeitete in den verschiedenen Kursen unterhielten. Das Mittagessen nahmen die Schüler in der Mensa der Universität ein, um frisch gestärkt in die Nachmittagskurse zu starten.

Nach dem Absolvieren der dritten Unterrichtseinheit stand eine Führung der Teilnehmer über den ganzen Campus der Universität an. Die Schüler besuchten die Bibliothek, die einzelnen Fachbereiche und die größten Hörsäle in der Uni. Im Anschluss an die Führung hatten die Schüler nun Zeit, eigenständig in Dreiergruppen, die Stadt zu erkunden. In den drei Stunden sollten sie eine Mathe-Rallye in Mainz absolvieren und zusammen zu Abend essen.

Freitags standen vier Unterrichtseinheiten an, welche die Weiterführung der Inhalte vom Donnerstag waren. Am Abend grillte Herr Mattheis auf dem Gelände des Jugendgästehauses das nach Wunsch der Teilnehmer gewählte Grillgut.

Am Samstag gab es vormittags zwei Unterrichtsstunden, am Nachmittag arbeiteten die Kursteilnehmer die Abschlusspräsentationen zu den Themen aus. Der Vortrag von Dr. Manfred Lehn „Somewhere under the rainbow“ über die Berechnungen und Beweise von Regenbögen war das mathematische Highlight des Tages. Abends wurde nochmals geübt, um die Präsentationen für den Sonntag zu perfektionieren.

Nun war es so weit. Die Schüler, Lehrer und Dozenten versammelten sich am Sonntagmorgen im Hauptraum des Jugendgästehauses Don Bosco, um ihre Präsentationen vorzutragen. Es war interessant, die spannenden Vorträge der anderen Kurse anzuhören und in das entsprechende Thema einzutauchen.

Anschließend wurden noch Teilnehmerurkunden verteilt und jeder bekam eine MMA-Tasse, ein Buch und das aktuelle Monoid Heft. Alles in allem war die MMA 2025 ein voller Erfolg und ich werde nächstes Jahr auf jeden Fall wieder teilnehmen.

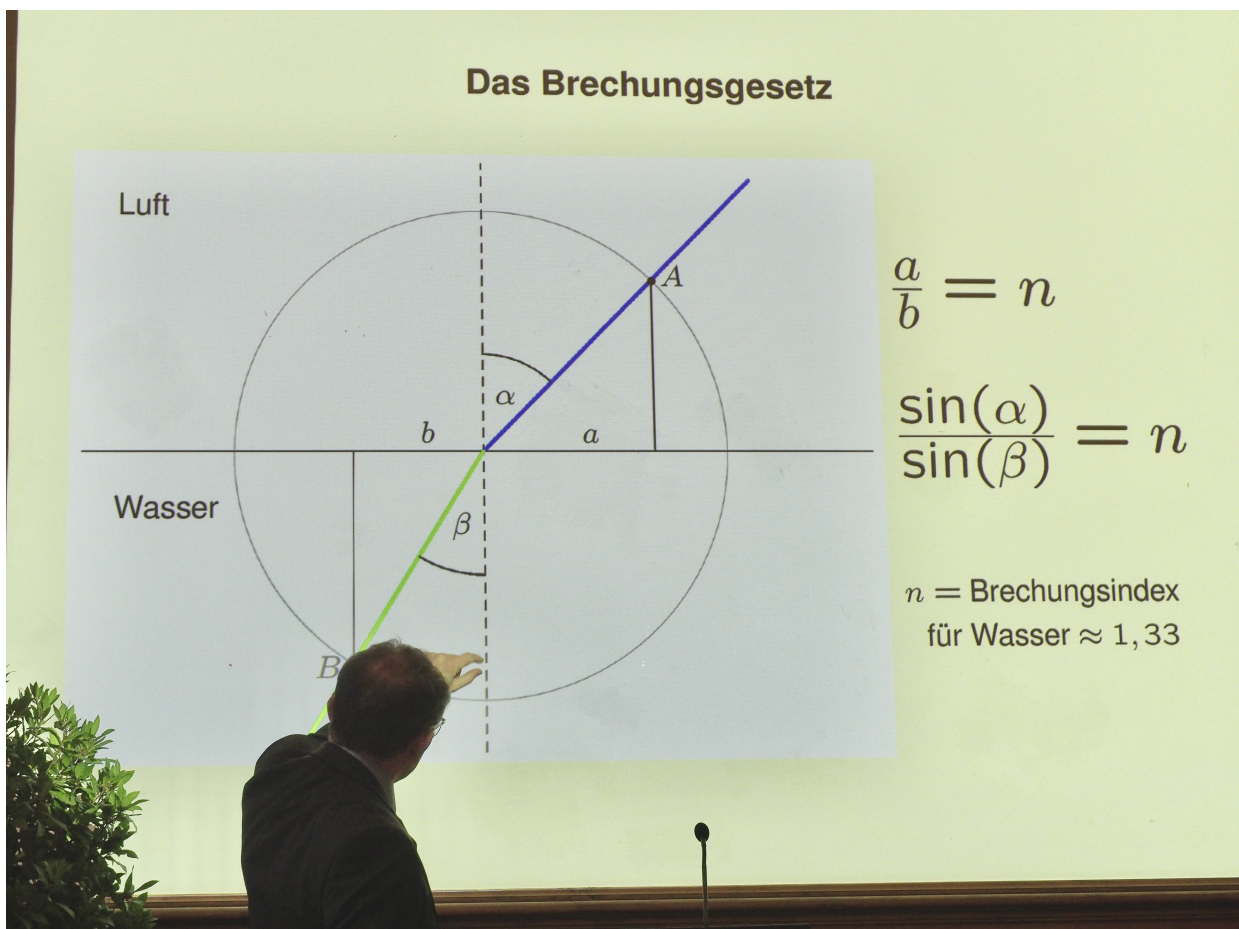
MONOID-Jahresfeier 2025

von Silke Schneider

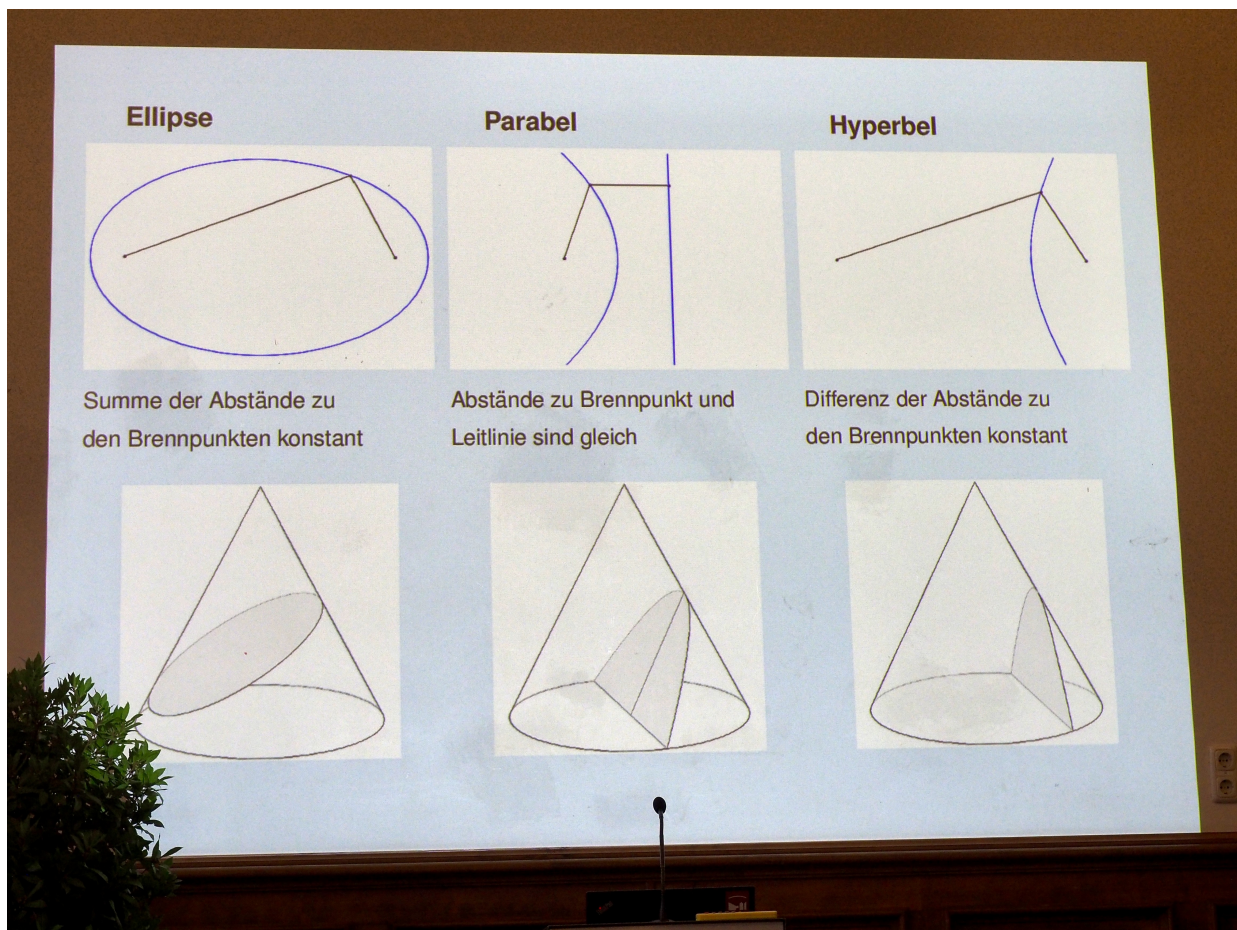
Am Samstag, den 15. November 2025, wurden die Preisträgerinnen und Preisträger des MONOID-Jahrgangs 2024/25 in der Alten Mensa der Universität Mainz geehrt.

In feierlichem Rahmen wurden die Preise übergeben. Den äußerst spannenden Festvortrag „Somewhere under the rainbow“ hielt Prof. Dr. Manfred Lehn. Er erklärte, auch für Nicht-Mathematiker verständlich, das Zustandekommen und die Vervielfältigung eines Regenbogens. Dabei wurden sowohl mathematische und geschichtliche als auch physikalische Aspekte berücksichtigt. Auch der obligatorische Goldschatz am Fuße des Regenbogens fehlte nicht und wurde am Ende des Vortrags in Form von Schokoladentalern an die Anwesenden verteilt.

Impressionen von der MONOID-Jahresfeier



Prof. Dr. Manfred Lehn beim Festvortrag: „Somewhere under the rainbow“



Auszug über Kegelschnitte



Marcel Gruner: Mathematische Zaubertricks

Was uns über den Weg gelaufen ist Vorsicht vor voreiligen Schlüssen

von Hartwig Fuchs

Die Flächen der Dreiecke A_1 und A_2 mit den Seitenlängen 13, 13, 10 und 13, 13, 24 sind gleich groß! Wahr oder falsch?

Lösung

Ein Dreieck A mit den Seitenlängen 5, 12, 13 ist rechtwinklig, denn $5^2 + 12^2 = 13^2$ (Umkehrung des Satzes von Pythagoras). Ergänzt man nun A wie in Figur 1 zu den Dreiecken A_1 mit den Seitenlängen 13, 13, 10 und A_2 mit den Seitenlängen 13, 13, 24, dann sieht man:

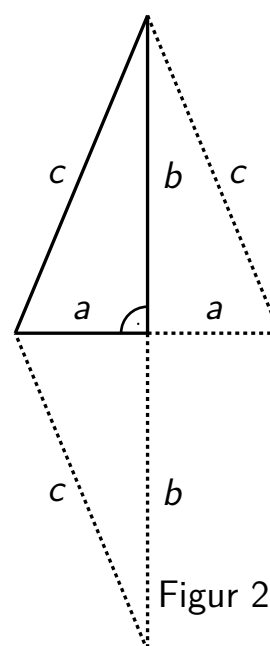
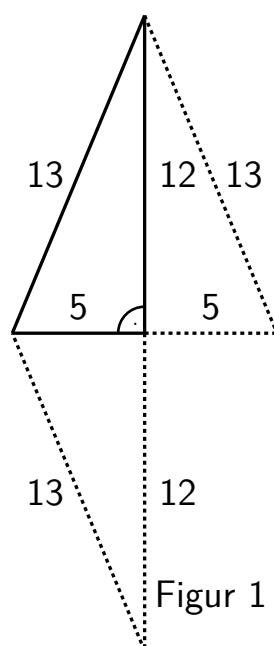
$$|A_1| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \quad \text{und} \quad |A_2| = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$$

Es gibt unendlich viele Dreieckspaare B_1 und B_2 mit der gleichen Eigenschaft wie A_1 und A_2 .

Es sei B ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c . Dann sieht man in Figur 2:

Die Dreiecke B_1 und B_2 mit den Seitenlängen $c, c, 2a$ und $c, c, 2b$ haben die gleiche Fläche, denn

$$|B_1| = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab \quad \text{und} \quad |B_2| = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot a = ab.$$



Jahreszahlaufgaben

von Hartwig Fuchs

Seitenlängen von Dreiecken

Die Längen der Seiten eines Dreiecks ABC seien ganze Zahlen. Wie lang ist dann die Seite AB , wenn $|AC| = 2025$ und $|BC| = 2026$ ist?

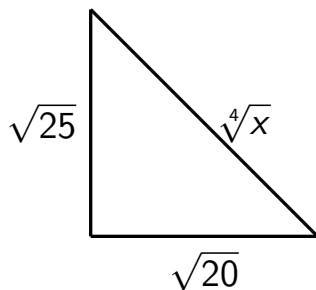
Überraschend einfach

Wie viele ganze Zahlen n gibt es, für die gilt:

$$n^{8104} < 2025^{2026}?$$

Bemerkung: 2025^{2026} hat in Dezimaldarstellung 6699 Ziffern.

Hypotenusenlänge eines Dreiecks



Bestimme x im nebenstehenden Dreieck so, dass es rechtwinklig ist.

Welche bemerkenswerte Beziehung besteht dann zwischen der Länge der Dreieckseiten?

Ein bemerkenswertes Produkt

Berechne das Produkt

$$P = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2024}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2025}\right).$$

Vielfache

Wie viele positiven ganzen Zahlen < 2026 gibt es, die ein Vielfaches von 7 oder 9 oder ein Vielfaches von 7 und 9 sind?

Einerziffern

Begründe, dass $S = 2^{2024} + 3^{2025} + 4^{2026}$ ein Vielfaches von 5 ist.

Die Lösungen zu den hier gestellten Aufgaben findest du auf Seite 31.

Eine kleine Logelei

von Hartwig Fuchs

Die Mathematiker Quaoar (Q) und Pnin (P) sitzen zusammen in der Mensa bei Kaffee und Kuchen und unterhalten sich.

P zu Q : Bei meinen historischen Studien zu Bolzano habe ich eine hübsche auf ihn zurückgehende Logelei entdeckt.*

Wie Sie wissen, gilt in der Logik das unumstößliche Gesetz:

(1) Ist eine Aussage wahr (falsch), so ist ihre Verneinung falsch (wahr).

Bolzano hat nun behauptet: Die beiden folgenden Aussagen A und B widersprechen nicht der Regel (1).

(A) Dieser Satz besteht aus sechs Wörtern.

(B) Dieser Satz besteht nicht aus sechs Wörtern.

Lässt sich Bolzanos Behauptung aufrecht erhalten, lieber Kollege?

Q zu P : Bei oberflächlicher Betrachtung wird man die Aussage B für die Verneinung der Aussage A halten. Dann sollte B falsch sein wegen (1), denn A ist wahr. – aber das trifft nicht zu!

Wäre nämlich B die Verneinung von A , dann müsste mit dem Ausdruck

„Dieser Satz“ in (B) der gleiche Satz wie in (A) gemeint sein. – also A .

„Dieser Satz“ in (B) bezieht sich jedoch auf einen Satz mit sieben Wörtern – also auf B .

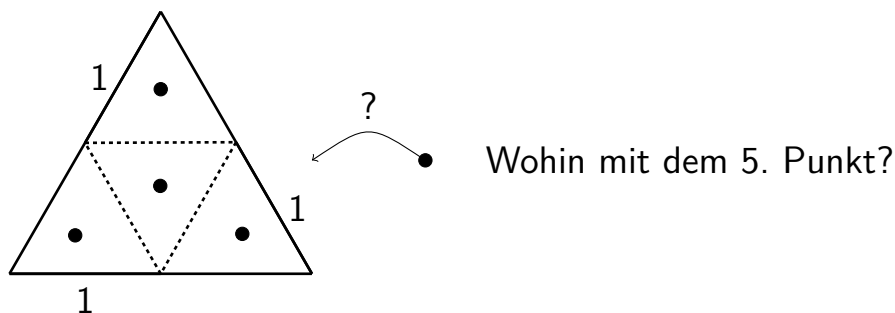
B ist daher nicht die Verneinung von A . – Die beiden Aussagen A und B bilden zusammengenommen somit keinen Widerspruch zu Regel (1), auch wenn sie beide wahr sind. Bolzano hat also Recht mit seiner Behauptung.

Zufrieden mit sich selbst trinkt Quaoar seinen Kaffee und verabschiedet sich von Pnin mit den Worten: Eine schöne Logelei haben Sie da aus dem Schutt der Geschichte ausgegraben.

Beweis ohne Worte Fünf Punkte im Dreieck

In Innengebiet eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 2 liegen fünf Punkte. Zeige: zwei dieser Punkte haben einen Abstand, der kleiner als 1 ist.

Beweis ohne Worte



H. F.

* Bernhard Bolzano (1781 - 1848), Theologe, Philosoph und Logiker, gilt als Wegbereiter von Georg Cantors Mengentheorie.

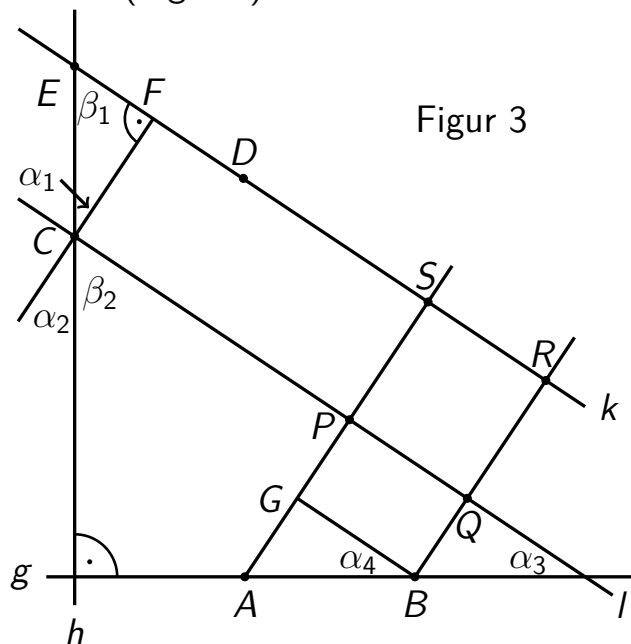
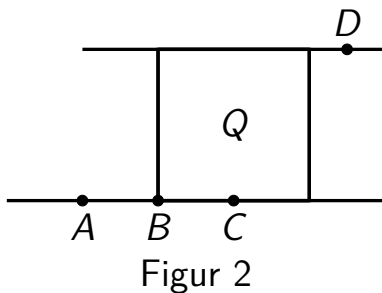
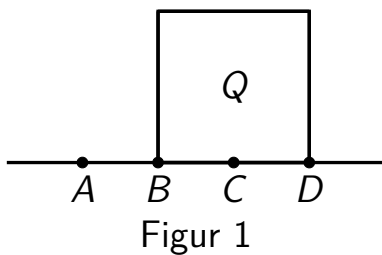
Die besondere Aufgabe

von Hartwig Fuchs

In der Ebene seien vier Punkte A, B, C und D beliebig verteilt. Dann gibt es stets ein Quadrat, auf dessen Seiten oder deren Verlängerungen die gegebenen Punkte liegen. Zeige dies.

Lösung

1. Fall (Figur 1): Alle vier Punkte liegen auf einer Geraden g . Dann beweist jedes Quadrat, von dem eine Seite in g liegt, die Behauptung.
2. Fall (Figur 2): Drei der vier Punkte liegen in einer Geraden g . Dann wird die Behauptung von jedem Quadrat bewiesen, von dem eine Seite in g und eine zweite Seite in einer Parallelen zu g durch den vierten Punkt liegt.
3. Fall: Keine drei der gegebenen Punkte liegen in einer Geraden. Falls A, B, C und D die Eckpunkte eines Quadrates sind, dann sind wir fertig. Deshalb sei dieser Fall im Folgenden ausgeschlossen (Figur 3).



Es sei g die Gerade durch die Punkte A und B und h sei die zu g orthogonale Gerade durch C .

Auf h tragen wir von C aus eine Strecke der Länge $|AB|$ ab – ihr zweiter Endpunkt sei E .

Wir verbinden E und D durch die Gerade k und konstruieren die Parallele zu k durch C sowie die beiden Orthogonalen zu k durch A und durch B . Dann ist das Rechteck $PQRS$ ein Quadrat, das die Behauptung beweist – es bleibt nur noch zu zeigen, dass $|PS| = |PQ|$ ist.

Mit den Bezeichnungen der Figur 3 gilt:

$\alpha_2 = \alpha_1$ und wegen $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 90^\circ$ ist nach dem Strahlensatz $\beta_2 = \beta_1$.

Nun ist $\alpha_2 + \beta_2 = \beta_2 + \alpha_3 = 90^\circ$, so dass $\alpha_2 = \alpha_3$ ist.

Wegen $\alpha_3 = \alpha_4$, ist also $\alpha_4 = \alpha_1$. Damit sind die Dreiecke ABG und CFE kongruent, denn sie stimmen in ihren drei Winkeln sowie der Länge der Seite AB und der Seite CE überein. Daraus folgt $|CF| = |BG|$ und das Rechteck $PQRS$ ist ein Quadrat.

Alternative Lösung von Achim Klenke

Zunächst legen wir ein Koordinatensystem so, dass A und B auf der x -Achse liegen. Dann verschieben wir in x -Richtung, bis C auf der y -Achse liegt. Der Punkt D habe die Koordinaten d_x und d_y . Falls $d_x = 0$ ist, nehmen wir das Quadrat $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$, denn alle Punkte liegen auf den Achsen. Falls $d_x \neq 0$ ist, nehmen wir das Quadrat $(0, 0), (0, d_x), (d_x, d_x), (d_x, 0)$.

Die Verlängerungen zweier Seiten bilden x -Achse und y -Achse und enthalten A, B und C . Die Gerade durch $(d_x, 0)$ und (d_x, d_x) enthält D .

Graphisch sieht man diese Lösung schön mit folgendem scratch-Programm:

<https://scratch.mit.edu/projects/1250866431>

Mathematische Entdeckungen

1. In der Ebene seien fünf Punkte A, B, C, D und E beliebig verteilt. Gibt es für jedes $n \geq 5$ ein regelmäßiges n -Eck, auf dessen Seiten oder deren Verlängerungen die gegebenen Punkte liegen?
2. Kann für je fünf Punkte im d -dimensionalen Raum stets ein Würfel, Tetraeder usw. so gewählt werden, dass die Punkte auf den begrenzenden Ebenen liegen?
3. Gibt es fünf Punkte in der Ebene, so dass diese *nicht* auf den Verlängerungen der Seiten eines Quadrats liegen können? (RaC und Ack)

Bitte begründe jeweils Deine Antwort.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2026 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Zur Aufgabe aus Heft 162

In Heft 162 stellten wir euch folgende Aufgabe:

Nach einigem Probieren ist es gelungen, die Zahl 2008 nur mithilfe der Zahlen Zwei (bzw. mit Drei, mit Vier), den arithmetischen Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ und Potenzen sowie Klammern so zu schreiben:

$$2008 = 2 \cdot \left((2^2 \cdot 2 + 2)^{2+2 \div 2} + 2^2 \right) \text{ und auch so}$$

$2008 = (3 \cdot 3 + 3 \div 3)^3 \cdot (3 - 3 \div 3) + 3 \cdot 3 - 3 \div 3$ sowie in der Form
 $2008 = 4 \cdot (4^4 - 4 - 4 \div 4) \cdot (4 - 4 \div 4 - 4 \div 4)$ zu schreiben.

- a) Wie du siehst, wurde die Zahl Zwei zehnmal, die Zahl Drei zwölfmal und die Zahl Vier elfmal verwendet. Kannst du eine Darstellung von 2008 angeben, die mit weniger als zehn Zahlen Zwei (mit weniger als zwölf Zahlen Drei, als elf Zahlen Vier) auskommt?
- b) Wie viele Zahlen Fünf, Sechs, Sieben brauchst du für eine Darstellung von 2008? (H. F.)

Lösung

Hierzu gab es keine Einsendungen, daher nur mögliche Entdeckung zu a):

- a) $2008 = 2\sqrt{2^{22}} - 2 \cdot (22 - 2)$ – nur acht Zweien.
 $2008 = 333 \cdot (3 + 3) + 3 \cdot 3 + 3 \div 3$ – nur neun Dreien
 $2008 = (4^4 - 4 - 4 \div 4) \cdot (4 + 4)$ – nur sieben Vieren

In den Extremen liegen die Lösungen

von Hartwig Fuchs

Mathematik kann man nur betreiben, wenn man ein Arsenal von Beweis-Strategien und -Techniken zur Verfügung hat. Ein heuristisches Prinzip ist das Anordnungsprinzip, welches insbesondere in seiner speziellen Form des Extremalprinzips von Bedeutung ist.

Das Anordnungsprinzip

Wenn man die Elemente einer Menge M mit einer Ordnungsrelation – wie etwa mit der Relation $\leq$, oder $>$ bei Zahlenmengen – anordnen kann, so ergibt sich in manchen Fällen die Möglichkeit, Aussagen über Element von M zu beweisen.

Beispiel: Schneewittchen und die sieben Zwerge – ein Anordnungsprinzip

Die sieben Zwerge sitzen abends vor ihrem Häuschen und reden über ihre heutige Goldausbeute von 95g. Schneewittchen mischt sich ein – sie möchte Einzelheiten darüber wissen. Darauf einer der Zwerge: Ich verrate nur soviel:

- Wir haben alle verschieden viel Gold gefunden (in ganzen Grammzahlen gewogen);
- Vier von uns haben zusammen weniger Gold gefunden als die übrigen Drei.

Schneewittchen nach einigen Überlegungen: Ich kann euch sagen,

- (1) wieviel Gold vier von euch höchstens und drei von euch mindestens gefunden haben;

(2) wieviel Gold der am wenigsten erfolgreiche Schürfer höchstens gefunden hat.

Schneewittchen hat so überlegt: Es seien $a_1, a_2, \dots, a_7$ die von den Zwergen gefundenen Goldmengen in Gramm – da sie sämtlich verschieden sind, kann man sie der Größe nach anordnen, etwa so: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Es seien nun $S_{14} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ und $S_{57} = a_5 + a_6 + a_7$.

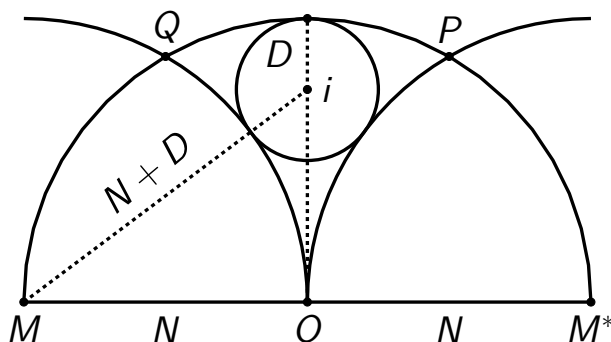
Nach Voraussetzung ist: $S_{14} + S_{57} = 95$ und $S_{14} < S_{57}$.

Daraus folgt $2 \cdot S_{14} < S_{14} + S_{57} = 95$, sodass $S_{14} < \frac{1}{2} \cdot 95$ ist. Für (1) gilt daher $S_{14} \leq 47$ und somit $S_{57} \geq 48$.

Aus $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ folgt $a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + (a_1 + 3) < \frac{95}{2}$. Daher ist $4 \cdot a_1 + 6 \leq 47$, woraus $a_1 \leq 10$ folgt, sodass (2) zutrifft.

In diesem Beispiel sind nur zwei Informationen über die Menge $M = 0, 1, 2, \dots, 95$ gegeben. Damit allein sind die Behauptungen (1) und (2) nicht beweisbar. Erst mit der Anordbarkeit von M als zusätzliche Voraussetzungen sind die Schlüsse zum Beweis von (1) und (2) möglich.

Monoidale Spielerei



In der Figur sei das krummlinig begrenzte Dreieck OPQ der Durchschnitt des Kreises um O mit dem Komplement der Kreise um M und M^* mit dem jeweils gleichen ganzzahligen Radius N . Der Kreis mit Mittelpunkt i und dem Radius D , D eine positive ganze Zahl, berühre die drei anderen Kreise so wie in der Figur.

Wenn nun MO und Oi die Längen der Verbindungsstrecken der Punkte M und O sowie der Punkte O und i bezeichnen, dann gilt:

$$MO + N + Oi + D \text{ ist ein Vielfaches von } 12$$

. Einen Nachweis findest du in diesem Heft auf Seite 24.

H. F.

Wo liegt der Fehler?

Für jede reelle Zahl r gilt: $r + 1 = r$.

Setze $r + 1 = x$ und $2r + 1 = y$. Aus $(r + 1)^2 = r^2 + 2r + 1$ folgt dann $x^2 = r^2 + y$ und daher $x^2 - y = r^2$. Durch Subtraktion von ry erhält man $x^2 - y - ry = r^2 - ry$. Wegen $-y - ry = -ry$ ergibt sich damit $x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 = r^2 - ry + \frac{1}{4}y^2$, woraus folgt:

$$(1) \quad (x - \frac{1}{2}y)^2 = (r - \frac{1}{2}y)^2.$$

Also ist

$$(2) \quad x - \frac{1}{2}y = r - \frac{1}{2}y,$$

und daher gilt:

$$x = r \text{ und somit } r + 1 = r$$

Wo liegt der Fehler?

H. F.

Die Lösung findest du auf Seite 29

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 163

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Trockenobst

Herr Winter möchte von seiner großen Apfelernte einen Teil als Wintervorrat trocknen. Er bereitet 10 kg Apfelscheiben vor und überlegt, wie viel Trockenobst er davon bekommen wird.

Wenn frische Äpfel 80 % Wasser enthalten und getrocknete Äpfel nur noch 20 %, wie viel Trockenobst erhält Herr Winter dann? (Christa Elze)

Lösung:

10 kg frische Äpfel enthalten 8 kg Wasser, davon verdunsten x kg:

$$8 - x = 0,2 \cdot (10 - x)$$

$$6 = 0,8 \cdot x$$

$$7,5 = x$$

Also verdunsten 7,5 kg Wasser und es bleiben 2,5 kg Trockenobst.

Oder bezüglich der „Trockenmasse“:

10 kg Äpfel enthalten 2 kg „Trockenmasse“, diese 2 kg entsprechen 80 % in y kg Trockenobst

$$2 = 0,8 \cdot y$$

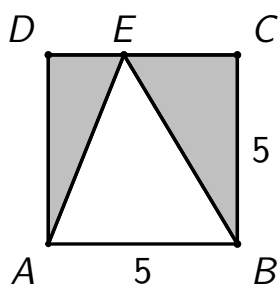
$$y = 2,5$$

Also bleiben 2,5 kg Trockenobst.

II. Flächenvergleich

Im Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 5 sei E ein beliebiger Punkt der Seite CD . Wie groß sind dann die Flächen der Dreiecke AED und BCE zusammen im Vergleich zur Fläche des Dreiecks ABE ? (H. F.)

Lösung:



Die Höhe der drei Dreiecke ist jeweils 5. Dann gilt:

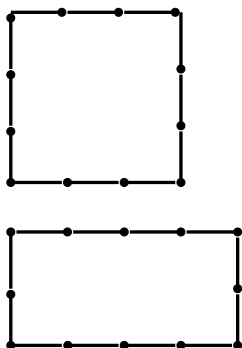
$$|ABE| = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{25}{2} \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned} |AED| + |BCE| &= \frac{1}{2}|DE| \cdot h + \frac{1}{2}|EC| \cdot h \\ &= \frac{1}{2}(|DE| + |EC|) \cdot h = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Die beiden grauen Dreiecke haben die gleiche Fläche wie $\triangle ABE$.

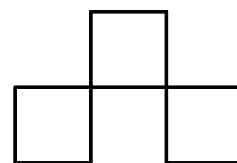
III. Mit zwölf Streichhölzern

Mit zwölf Streichhölzern lässt sich z. B. ein Quadrat mit neun Flächeneinheiten oder ein Rechteck mit acht Flächeneinheiten legen:



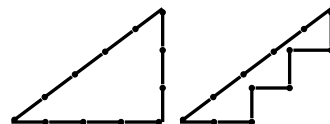
Aufgabe: Lege mit zwölf Streichhölzern eine Fläche mit drei Flächeneinheiten. (Christoph Sievert)

Hinweis: Die rechts nebenstehende Zeichnung ist keine Lösung, da dies keine zusammenhängende Fläche ist.



Lösung:

Das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 hat einen Umfang von zwölf Längeneinheiten und einen Inhalt von sechs Flächeneinheiten. Legt man nun vier Hölzer um, so dass drei Flächeneinheiten wegfallen, so erhält man das entstehende Siebeneck mit nur noch drei Flächeneinheiten.



IV. Zahl gesucht

Ermittle die kleinste natürliche Zahl n , die beim Teilen durch 3 den Rest 1, beim Teilen durch 5 den Rest 3, beim Teilen durch 7 den Rest 5, beim Teilen durch 9 den Rest 7 und beim Teilen durch 11 den Rest 9 lässt.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Ist n die gesuchte Zahl, so ist $n + 2$ durch 3, 4, 5, 7, 9 und 11 teilbar, also auch durch deren kleinstes gemeinsames Vielfaches $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3465$. Also ist $n = 3463$ die gesuchte Zahl.

V. Eine sichere Sache

In einem Behälter befinden sich Kugeln, die nur durch ihre Farbe unterscheidbar sind und zwar: zwei rote, drei schwarze, fünf blaue, sechs grüne und elf gelbe Kugeln.

Mathis soll nun mit verbundenen Augen so viele Kugeln aus dem Behälter nehmen, dass sich darunter mit Sicherheit fünf Kugeln von gleicher Farbe befinden. Wie viele Kugeln muss Mathis dazu mindestens aus dem Behälter herausholen? (H. F.)

Lösung:

Wir nehmen den ungünstigsten Fall an: Mathis hat aus dem Behälter zwei rote, drei schwarze, vier blaue, vier grüne und vier gelbe Kugeln, also insgesamt 17 Kugeln entnommen, unter denen sich keine fünf Kugeln gleicher Farbe befinden. In dem Behälter liegen dann nur noch eine blaue, zwei grüne und sieben gelbe Kugeln. Wenn er nun noch eine weitere Kugel nimmt, dann muss diese blau, grün oder gelb sein. Dann aber befindet sich unter den herausgenommenen Kugeln fünf von dieser Farbe.

Mathis muss also mindestens 18 Kugeln nehmen, um die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen.

VI. Zahlenrätsel

	4		
			2
2			
		4	

In jedes der leeren Felder ist jeweils eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzusetzen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte alle vier Zahlen verschieden, aber in jeder Diagonalen die Zahlen gleich sind. (H. F.)

Lösung:

Es gibt zwei Lösungen, nämlich:

1	4	2	3
4	1	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1

3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4
1	2	4	3

VII. Tripel dreier Zahlen

Für welche Tripel von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist ihr Produkt ein ganzzahliges Vielfaches ihrer Summe?

- Gib ein solches Tripel an.
- Begründe, dass es unendlich viele Lösungen gibt. (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

- a) Eine Lösung ist das Tripel $(3, 4, 5)$, denn $3 + 4 + 5 = 12$ und $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 = 5 \cdot 12$.
- b) Wir betrachten das Zahlentripel $(a - 1, a, a + 1)$ und n eine ganze Zahl. Wir fragen dann, ob $(a - 1) \cdot a \cdot (a + 1) = n((a - 1) + a + (a + 1)) = 3na$ ist; also ob $(a - 1) \cdot (a + 1) = 3n$ ist. Denn $n = \frac{(a-1)(a+1)}{3}$ ist genau dann ganzzahlig, wenn $a - 1$ oder $a + 1$ durch drei teilbar ist. Dies ist der Fall, wenn a kein Vielfaches von drei ist.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

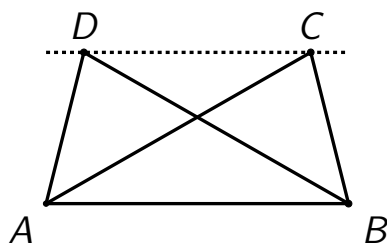
I. Bei welcher Temperatur gefriert Wasser?

In Mitteleuropa werden Temperaturen in Grad Celsius gemessen: Wasser gefriert bei 0°C und kocht bei 100°C . In den USA werden dagegen Temperaturen in Grad Fahrenheit angegeben: Wasser gefriert bei 32°F und kocht bei 212°F . Für welche Temperaturen stimmen die beiden Maßzahlen überein?

II. Jahreszahlen-Aufgabe

Wenn man die Zahl $n = (2 + 0 + 2 + 4)^{2+0+2+5} + (2 + 0 + 2 + 5)^{2+0+2+6}$ durch $2 + 0 + 2 + 5$ teilt, dann bleibt ein Rest $2 + 0 + 2 + 5$. Trifft dies zu? (H. F.)

III. Parallele Strecken



Zwei Dreiecke ABC und ABD haben die gleiche Fläche. Zeige: Die Verbindungsstrecke von C und D ist jeweils parallel zu AB . (H. F.)

IV. Uhr rückwärts

- a) Uhrmacher Willi Wirrkopf hat eine Uhr gebaut, bei der beide Zeiger falsch herum laufen. Er stellt die Uhr um 12 Uhr richtig. Wie oft (wenn überhaupt) zeigt die Uhr während 12 Stunden die richtige Zeit?

- b) Nachdem Herr Wirrkopf auf seinen Fehler aufmerksam gemacht wird, stellt er den Stundenzeiger so ein, dass dieser richtig läuft, vergisst aber, auch den Minutenzeiger richtig einzustellen. Beantworte die gleiche Frage wie in a).
(Wolfgang J. Bühler)

V. Finde die Zahl

Bestimme alle dreiziffrigen positiven ganzen Zahlen n mit den Dezimaldarstellungen $n = abc$, bei denen die ihren Ziffern entsprechenden Zahlen a, b und c alle folgenden drei Bedingungen erfüllt sind: (H. F.)

$$(1) a > b > c$$

$$(2) a + b + c = 16$$

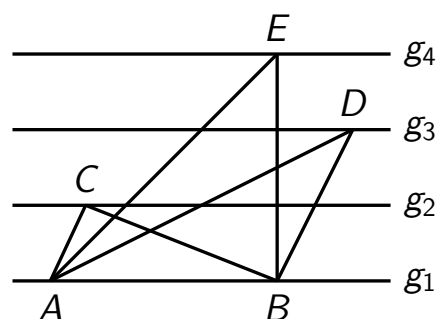
$$(3) a \cdot b \cdot c = 96$$

VI. Flächenvergleich

In der Ebene seien vier parallele Geraden $g_1, \dots, g_4$ gegeben.

Der Abstand zweier benachbarter Geraden betrage a . Es seien nun jeweils beliebig gewählt: die Punkte A und B auf g_1 , C auf g_2 , D auf g_3 und E auf g_4 .

Vergleiche die Flächen der Dreiecke ABC , ABD mit der Fläche des Dreiecks ABE . (H. F.)



VII. Erzeugung von Primzahlen

Es sei p eine der Primzahlen 3, 5, 11 und 29.

Für welche positiven ganzen Zahlen $x \leq p - 1$ ist dann die Summe $2 \cdot x^2 + p$ eine Primzahl? (H. F.)



Die MONOID-Redaktion wünscht allen
L(o)eserinnen und L(o)esern ein frohes Jahr

$$\left(2 \cdot \left(2^{22} + 2^2 + 2 - 2 \div 2\right) + \sqrt{2^{2+2 \div 2} + 2^2 \cdot 2 - 2 \div 2}\right)^2 + 2 \div 2$$

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1386: Fünf Quadratzahlen

Zu jeden drei ungeraden Zahlen r, s und t gibt es stets eine ganze Zahl u , sodass $r^2 + s^2 + t^2 + u^2$ eine Quadratzahl ist.

Beispiel: Für 1, 3, 5 sei $u = 17$. Dann ist $1^2 + 3^2 + 5^2 + 17^2 = 18^2$. Trifft die Behauptung zu? (H. F.)

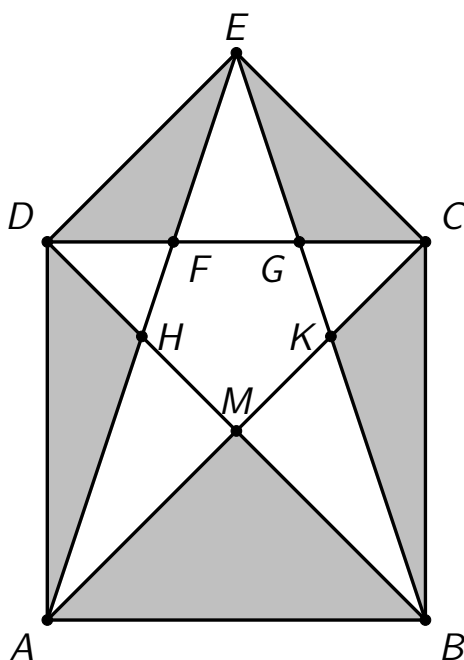
Aufgabe 1387: Eine Ungleichung

Für jede reelle Zahl $x > 0$ gilt: $x + \frac{4}{x^2} \geq 3$. Zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1388: Der Lexikonartikel

In einem vielbändigen Lexikon sind die Seiten fortlaufend durch alle Bände hindurch von eins bis 15607 nummeriert. Marilyn liest einen dreiseitigen Artikel. Sie bemerkt: „Wenn ich zum Produkt der drei Seitenzahlen sieben addiere, dann ergibt sich die Gesamtseitenzahl des Lexikons.“ Auf welchen Seiten steht der Artikel? (H. F.)

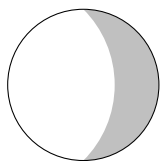
Aufgabe 1389: Flächenverhältnis



In der Abbildung ist $ABCD$ ein Quadrat, die Strecken DE und AC sowie BD und CE sind jeweils parallel.

In welchem Verhältnis steht die Summe der Flächeninhalte der fünf gefärbten Dreiecke zu dem Flächeninhalt des Fünfecks in der Mitte? (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1390: Mondsichel



Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt K und Radius r sowie ein zweiter Kreis m , dessen Mittelpunkt M auf k liegt und der k in zwei Punkten schneidet, die auf einem Durchmesser von k liegen.

Welcher Anteil des Kreises k ist nicht grau? (H. F.)

Aufgabe 1391: Teilbarkeit durch 24

Zeige: Die Termwerte von $T(n) = n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24$ sind für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ durch 24 teilbar.

Tipp: Der Ausdruck $P(n) = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ ist sicher für alle n durch 24 teilbar, denn $P(n)$ ist ein Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, von denen sicher eine durch 3, eine durch 4 und eine andere durch 2 teilbar ist.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1392: Exponential-Gleichung

Sei x eine positive reelle Zahl. Bestimme die reellen Lösungen der Gleichung $x^{x+9} = 8 \cdot \sqrt[3]{2^x}$.

Tipp: Logarithmus zur Basis 2 hilft.

(H. F.)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 163

Klassen 9–13

Aufgabe 1379: Summe gesucht

Für drei Zahlen a, b und c gilt: $\frac{256}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{4} = \frac{20}{c}$. Bestimme den Wert von $a + b + c$. *Tipp: Multiplizieren hilft weiter.* (Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Der Wert der vier Quotienten sei z . Multipliziert man die ersten drei Quotienten miteinander, so erhält man $z^3 = \frac{256ab}{4ab} = 64$. Also ist $z = 4$.

Wegen $\frac{256}{a} = 4$ ist $a = \frac{256}{4} = 64$. Wegen $\frac{b}{4} = 4$ ist $b = 16$. Wegen $\frac{20}{c} = 4$ ist $c = 5$. Probe mit dem zweiten Quotienten: $\frac{a}{b} = \frac{64}{16} = 4 = z$ stimmt.

Also: $a + b + c = 64 + 16 + 5 = 85$.

Aufgabe 1380: Ganzzahlige Lösungen

Die folgende Aufgabe fand ich in einem alten MONOID-Heft.*

„Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $(*) 2x^2 + 2(p-q)x - p = 0$ Lösungen in der Menge der ganzen Zahlen?“ Als Lösung wurde damals gefunden: „die Gleichung hat Lösungen in $\mathbb{Z}$, wenn $p = 0$ und $q \in \mathbb{Z}$.“

Ich habe weitere Lösungen gefunden.

* Martin Mettler: MONOID-Kollektaneen; 10 (1992)

Zeige, dass $p = 0$ mit $q \in \mathbb{Z}$ tatsächlich zu ganzzahligen Lösungen der Gleichung (*) führt. (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Für $p = 0$ reduziert sich (*) zu $0 = 2x^2 - 2qx = 2x(x - q)$ mit den Lösungen $x_1 = 0, x_2 = q$. Für $q \in \mathbb{Z}$ sind beide Lösungen ganzzahlig.

Bemerkung: Weitere Lösungen findet man nach dem folgenden Schema:

Die Gleichung $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ hat die (einzige) Lösung $x = -a$. Setzen wir $a = \frac{p-q}{2}$ und $a^2 = -\frac{p}{2}$ so ist (nachdem wir (*) durch 2 dividieren) die Gleichung (*) von dieser Form. Damit $a^2 = -\frac{p}{2} = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(p-q)^2}{4}$ und $x = -a = \frac{q-p}{2} \in \mathbb{Z}$ ist, muss p von der Form $-2a^2$ also $|p - q| = 2a$ und damit $q = -2a + p$ oder $q = 2a + p$ und $x = a$ sein.

Zur Probe rechnen wir

$$2x^2 + 2(p - q)x - p = 2 \cdot (-a)^2 + 2(2a) \cdot (-a) - (-2a^2) = a^2(2 - 4 + 2) = 0$$

bzw.

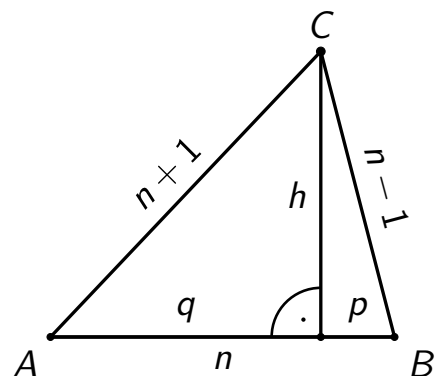
$$2x^2 - 2(p - q)x - p = 2 \cdot a^2 + 2(-2a) \cdot a + 2a^2 = 0$$

Aufgabe 1381: In einem Dreieck

In einem Dreieck seien die Längen der drei Seiten aufeinander folgende natürliche Zahlen $(n-1), n$ und $(n+1)$ mit $n \geq 4$. Zeichnet man die Höhe auf der Seite der mittleren Länge (also n) ein, wird n in die Abschnitte q und p geteilt (s. Abbildung).

Zeige: Dann gilt: $q - p = 4$.

(Christoph Sievert)

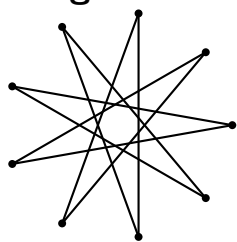


Lösung:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $h^2 = (n+1)^2 - q^2$ und $h^2 = (n-1)^2 - p^2$. Durch Gleichsetzen erhält man: $(n+1)^2 - q^2 = (n-1)^2 - p^2$.

Und es folgt $(q - p) \cdot (q + p) = 4n$. Da $p + q = n$ ist, folgt so $(q - p) \cdot n = 4n$. Also gilt $q - p = 4$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 1382: Summe im Stern



An die Ecken eines neun-zackigen Sterns sollen ganze Zahlen geschrieben werden. Kann man diese Zahlen so wählen, dass die Summe von je zwei Zahlen, die den Endpunkten einer Strecke des Sterns zugeordnet sind, ungerade ist? (H. F.)

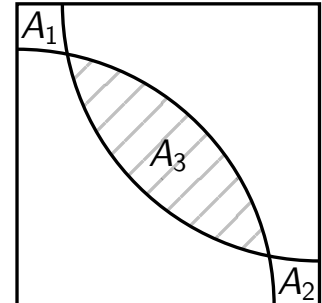
Lösung:

Annahme: Alle neun Summen $S_1, S_2, \dots, S_9$, die im Stern möglich sind, seien ungerade. Dann ist die Summe $S = S_1 + S_2 + \dots + S_9$ ungerade.

Da aber jede der neun gewählten Zahlen an den Endpunkten von zwei Strecken geschrieben ist, kommt jede Zahl in zwei Summanden von S vor. Daher ist S gerade – im Widerspruch zur Annahme. Somit können nicht alle Summen $S_1, S_2, \dots, S_9$ ungerade sein.

Aufgabe 1383: Viertelkreise

Einem Quadrat sind zwei gleichgroße Viertelkreise eingeschrieben, deren Mittelpunkte auf gegenüberliegenden Eckpunkten des Quadrates liegen. Das Quadrat habe eine Längeneinheit (LE) als Seitenlänge. Gilt für den Radius der beiden Viertelkreise $r > \frac{1}{\sqrt{2}}LE$, so entsteht das Bild der Abbildung.



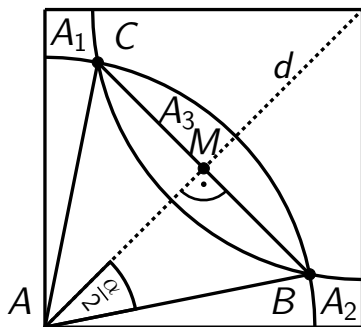
- Für welchen Radius gilt: $A_1 + A_2 = A_3$?
- Wie groß ist dann die Fläche A_3 ?

(Christoph Sievert)

Lösung:

- Wenn $A_1 + A_2 = A_3$ gilt, dann ist der Flächeninhalt des Quadrates gleich dem summarischen Flächeninhalt der beiden Viertelkreise, also gilt:

$\frac{1}{2}\pi r^2 = 1$. Somit ist $r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Begründung: Addiert man die Flächeninhalte beider Viertelkreisteile, wird A_3 zweimal einbezogen und A_1 sowie A_2 nicht, aber mit $A_1 + A_2 = A_3$ erhält man exakt die ganze Quadratfläche.



- Im Dreieck ABM gilt für den eingezeichneten Winkel:

$\frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{d}{r}\right)$. Mit $\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ der halben Diagonalen und $r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ergibt sich so $\alpha \approx 55,19^\circ$.

$\frac{A_3}{2}$ lässt sich dann als Differenz aus der Fläche des Kreisausschnittes ABC und der Dreiecksfläche ABC berechnen. Die Gesamtfläche lässt sich dann wie folgt ermitteln:

$$A_3 = 2 \left(\frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin(\alpha) \right) \approx 0,091 \text{ Flächeneinheiten.}$$

Aufgabe 1384: Eine ganze Zahl als Summe zweier Quadratzahlen

Für eine ungerade ganze Zahl $n > 1$ gilt:

n kann nur dann als eine Summe aus zwei Quadratzahlen a^2, b^2 beschrieben werden, wenn $n = 4k + 1$ ist für eine ganze Zahl k . Begründe dies. (H. F.)

Lösung:

Vorweg: Jede positive ganze Zahl besitzt eine Darstellung $n = 4k + r$ mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ und k eine ganze Zahl; jede gerade ganze Zahl a lässt sich durch

$a = 2p$ und jede ungerade ganze Zahl b durch $b = 2m + 1$ darstellen, p und m ganze Zahlen darstellen.

Nach Voraussetzung ist n ungerade. Sei daher $n = 4k + r$, wobei $r = 1$ oder $r = 3$ ist.

Weiter gilt: a ist gerade und b ist ungerade (oder umgekehrt). Also sei $a = 2p$ mit $a^2 = 4p^2$ und $b = 2m + 1$ mit $b^2 = 4m^2 + 4m + 1$.

Es gelte nun $n = a^2 + b^2$. Dann haben wir

$$n = 4k + r = a^2 + b^2 = 4p^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 4(p^2 + m^2 + m) + 1.$$

Daraus folgt, dass $r = 1$ sein muss.

Beispiel: $29 = 4 \cdot 7 + 1$ – tatsächlich gilt: $29 = 5^2 + 2^2$.

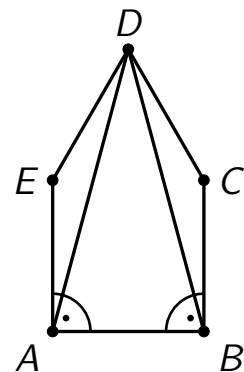
Dagegen hat $31 = 4 \cdot 7 + 3$ keine Darstellung $31 = a^2 + b^2$ mit ganzen a und b .

Aufgabe 1385: Teilflächenverhältnis

Ein symmetrisches Fünfeck $ABCDE$ habe gleich lange Seiten mit rechten Winkeln bei A und B (s. Abbildung). Sein Flächeninhalt sei X .

Verbindet man die Ecken A und B geradlinig mit D , so entsteht ein Dreieck ABD . Sein Flächeninhalt sei Y . Bestimme das Flächenverhältnis $X : Y$ und vereinfache so weit wie möglich.

(Klaus Ronellenfitsch)



Lösung:

Die Figur besteht aus einem Quadrat $ABCE$ und einem gleichseitigen Dreieck ECD . Wir nehmen an, dass $|AB| = 1$ ist.

Dann gilt: $X = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}$ und $Y = \frac{1}{2} \cdot 1 \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

$$\text{Also ist } X : Y = \frac{1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}} = \frac{(4 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{8 - 2\sqrt{3} - 3}{4 - 3} = 5 - 2\sqrt{3} \approx 1,54$$

Mathematische Miniatur

Eine Falle

Kann man positive ganze Zahlen so schreiben, dass sie größer statt kleiner werden, wenn man von ihrer Darstellung etwas wegnimmt? H. F.

Lösung

Die Antwort lautet „Ja“, wenn die Zahlen in römischer Darstellung geschrieben sind.

Beispiele: $V \leftarrow IV$; $IX \leftarrow X$; $XC \leftarrow C$
 $5 > 4$ $9 < 10$ $90 < 100$

Nachweis der Spielerei von Seite 13

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $MO^2 + Oi^2 = Mi^2$. Daraus folgt wegen $MO = N$, $Oi = N - D$ und $Mi = N + D$:

$N^2 + (N - D)^2 = (N + D)^2$, so dass $N^2 = 4ND$ ist. Also gilt:

$$(\bullet) \quad N = 4D.$$

Damit ergibt sich:

$MO + N + Oi + D = N + N + (N - D) + D = 3N = 3 \cdot 4D$ ein Vielfaches von 12.

Hättest du es gewusst? Was ist eine Parität und was kann man damit machen?

von Hartwig Fuchs

Eine Wahrsagerin besitzt ein sehr erfolgreiches Geschäftsmodell. Sie hat drei weiße und vier schwarze Kugeln in eine Schale gelegt. Eine schwarze legt sie auf den Tisch und immer, wenn ihre Kunden sie über den Ausgang eines künftigen Ereignisses befragen, bittet sie die Besucher ohne hinzusehen zwei Kugeln aus der Schale zu nehmen und dann eine Kugel zurückzulegen nach der Regel:

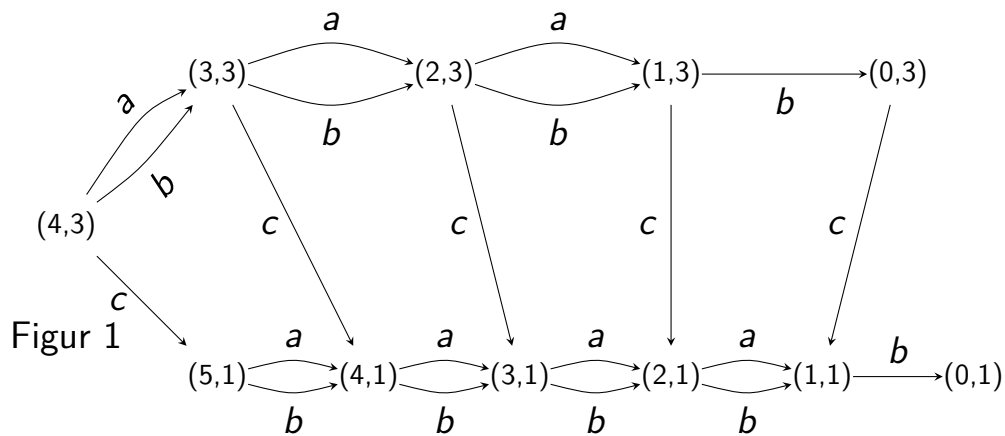
- a) Sind beide Kugeln schwarz, so soll eine davon wieder in die Schale gelegt werden;
- b) Sind sie verschieden farbig, so soll die weiße Kugel in die Schale zurückgelegt werden;
- c) Sind beide Kugeln weiß, so ist eine schwarze Kugel in die Schale zu legen.

Dieser Vorgang soll so oft wiederholt werden, bis nur noch eine Kugel in der Schale ist.

Die letzte Kugel wird die Frage der Besucher beantworten: Ist sie weiß (bzw. schwarz), so wird das künftige Ereignis einen guten (bzw. keinen guten) Ausgang nehmen.

Das Ergebnis des Kugelexperiments entspricht immer den Erwartungen der Besucherinnen: Die letzte Kugel ist stets weiß! Wieso?

Wir beschreiben das Kugelexperiment grafisch. Dabei bezeichne ein Zahlenpaar (s, w) die Anzahl der weißen (w) und der schwarzen (s) Kugeln, die sich jeweils in der Schale befinden. Nach den drei Regeln a , b und c sind dann die folgenden Verläufe des Kugelorakels möglich:



Die Darstellung 1 zeigt: Aus dem Zustand (s, w) gelangt man mit a und auch mit b in den Zustand $(s - 1, w)$, mit c in den Zustand $(s + 1, w - 2)$. Also verringert sich die Anzahl der Kugeln von einem Zustand zum nächsten um 1 – das Experiment ended also stets mit genau einer Kugel; die Anzahl der weißen Kugeln bleibt jedoch unverändert oder sie vermindert sich um zwei. Weil nun im Startzustand die Anzahl der weißen Kugeln ungerade ist, bleibt sie es auch im gesamten Verlauf des Experimentes – die letzte Kugel muss daher weiß sein.

Was ist eine Parität?

Die Parität ist eine Eigenschaft ganzer Zahlen:*

Zwei ganze Zahlen haben die gleiche Parität, wenn sie beide gerade oder aber beide ungerade sind.

- Die Zahlen $0, \pm 2, \pm 4, \dots$ haben die gleiche Parität, denn sie sind alle gerade, ebenso haben die Zahlen $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ die gleiche Parität – sie sind alle ungerade.
- Alle Zahlen $a, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots$ haben die gleiche Parität für gerade a ; dies gilt nicht, wenn a ungerade ist.
- Für ganze Zahlen a, b gilt: $a + b$ und $a - b$ haben die gleiche Parität. Denn haben a und b die gleiche Parität, dann sind $a + b$ und $a - b$ beide gerade; haben a und b verschiedene Paritäten, dann sind $a + b$ und $a - b$ beide ungerade.

Was kann man mit der Parität machen?

Die Begründung, wieso das Kugelexperiment der Wahrsagerin stets zum gewünschten Ergebnis führt, ist ein Beispiel dafür, wie ein Problem manchmal mithilfe der Parität gelöst werden kann – und zwar dann, wenn die Fakten oder die Situationen, um die es geht, durch ganze Zahlen charakterisierbar sind: Die Anzahl der weißen Kugeln in der Schale der Wahrsagerin hat in allen Stufen des Experimentes die gleiche Parität – sie ist jeweils ungerade.

* Zahl bedeutet im Folgenden stets ganze Zahl.

Arbeiten mit Paritäten

Nach dem Prinzip „Learning by doing“ sollen nun einige durch Mitwirkung von Paritäten gelöste Probleme beschrieben werden. Zunächst:

Zwei Vorübungen für das Problemlösen mit Paritäten

- (a) Jede ganze Zahl n hat eine Darstellung vom Typ $n = g_1 + g_2 + \dots + g_k + u_1 + u_2 + \dots + u_l$, g_i gerade, $i = 1, 2, \dots, k$, u_j ungerade $j = 1, 2, \dots, l$ und $k + l = n$. Dann gilt:
- (•) Die Anzahl l der ungeraden Summanden hat die gleiche Parität wie n .

Nachweis

Ist n gerade (ungerade), dann ist die Summe $u_1 + u_2 + \dots + u_l$ gerade (ungerade), was nur der Fall ist, wenn l gerade (ungerade) ist. Daraus folgt: n und l sind von gleicher Parität.

- (b) Es sei $k_1, k_2, \dots, k_n$ eine Zahlenfolge, die man durch Umordnung der n -Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$, n ungerade, erhält. Dann gilt:
- (•) Das Produkt $P = (k_1 - 1)(k_2 - 2) \dots (k_n - n)$ ist eine gerade Zahl.

Nachweis

Annahme: P ist ungerade.

Dann ist jeder Faktor $k_i - i$, $1 \leq i \leq n$, ungerade (wäre auch nur ein Faktor $k_i - i$ gerade, so wäre P gerade).

Somit ist $S = (k_1 - 1) + (k_2 - 2) + \dots + (k_n - n)$ eine Summe aus ungeradzahlig vielen ungeraden Summanden. Also:

- (1) S ist ungerade.

Nun gilt aber wegen $S = 0$:

- (2) S ist gerade.

Nach (1) und (2) hätte also die Zahl S zwei verschiedene Paritäten. Weil das nicht möglich ist, muss die Annahme falsch sein; es gilt die Behauptung.

Parität in der Zahlentheorie

Es sei n eine natürliche Zahl und $2n + 1$ sowie $3n + 1$ seien Quadratzahlen.

- (•) Dann ist n ein Vielfaches von 8.

Nachweis

- (1) Es sei $2n + 1 = a^2$.

Mit a^2 ist auch a ungerade und somit $a = 2g + 1$ für eine Zahl g . Aus (1) folgt: $2n + 1 = (2g + 1)^2 = 4g^2 + 4g + 1$, sodass $n = 2g^2 + 2g$ und mithin ist n ein Vielfaches von 4.

- (2) Es sei $3n + 1 = b^2$.

Da n gerade ist, sind b^2 und damit auch b ungerade. Daher ist $b = 2h + 1$ für eine Zahl h .

Subtrahiert man nun (1) von (2), so erhält man n und

$n = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = (2h+2g+2)(2h-2g) = 4 \cdot (h+g+1)(h-g)$. Weil nun $h+g$ und $h-g$ die gleiche Parität besitzen (warum?) jedoch $h+g+1$ und $h-g$ verschiedene Paritäten, so ist ihr Produkt gerade und somit ein Vielfaches von 2.

Folglich ist n ein Vielfaches von 8.

Parität in der Geometrie

In der mit einem Koordinatensystem versehenen Ebene sei ein Fünfeck F gegeben, dessen Eckpunkte jeweils Gitterpunkte sind.**

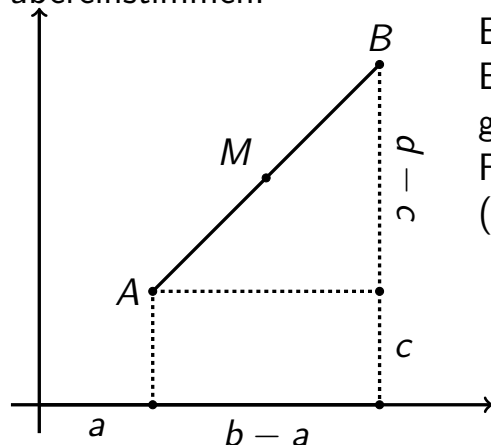
Dann besitzt F zwei benachbarte Eckpunkte A und B , für die gilt:

- (•) Der Mittelpunkt M der Fünfeckseite AB ist ein Gitterpunkt

Nachweis

Für vier Eckpunkte von F sind hinsichtlich der Parität ihrer Koordinaten nur die Kombinationen (g, g) , (g, u) , (u, g) , (u, u) möglich, wobei g eine gerade und u eine ungerade Koordinate bezeichnet.

Nach dem Schubfachprinzip muss dann der Paritätstyp des Koordinatenpaares des 5. Eckpunktes von F mit einem der oben genannten vier Paritätstypen übereinstimmen.



Es seien daher $A = (a, c)$ und $B = (b, d)$ zwei Eckpunkte von F , für die (a, c) und (b, d) vom gleichen Paritätstyp sind.

Für die Koordinaten des Mittelpunktes $M = (p, q)$ der Strecke AB gilt dann:

$$p = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$q = c + \frac{1}{2}(d - c) = \frac{1}{2}(c + d)$$

Da nun a und b sowie c und d jeweils von gleicher Parität und daher $a+b$ sowie $c+d$ gerade Zahlen sind, folgt:

p und q sind ganze Zahlen, sodass M ein Gitterpunkt ist.

Parität in der Algebra

Es sei $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen a, b, c ; $f(0)$ sowie $f(-1)$ seien ungerade. Dann gilt:

- (•) Die Gleichung $f(x) = 0$ hat höchstens zwei ganzzahlige Lösungen.

** Punkte mit ganzzahligen Koordinaten heißen Gitterpunkte.

Nachweis

Wegen $f(0) = c$, hat die Zahl c die gleiche Parität wie $f(0)$ und $f(-1)$.

Aus $f(-1) = -1 + a - b + c$ folgt $f(-1) - c = -1 + a - b$. Weil $f(-1) - c$ eine gerade Zahl ist, muss $a - b$ ungeradzahlig sein. Also gilt

(1) a und b haben verschiedene Paritäten.

Es seien nun $f(0)$ und $f(-1)$ nach Voraussetzung ungerade.

Wir nehmen an: $f(x) = 0$ hat drei ganzzahlige Lösungen r, s und t .*** Dann gilt:

$$f(x) = (x - r)(x - s)(x - t) = x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + st + tr) - rst.$$

Nun ist $rst = c$, c eine ungerade Zahl. Also sind r, s und t ungerade, daher sind auch $a = -(r + s + t)$ sowie $b = rs + st + tr$ ungerade. Daraus folgt:

(2) a und b haben die gleiche Parität.

Die Aussagen (1) und (2) bilden einen Widerspruch – die Annahme ist somit falsch.

Parität und Algorithmen

Es sei s_0 die Summe $1 + 3$. Man ersetze nun den Summanden 1 in s_0 durch 5 oder 7. Das Ergebnis bezeichnen wir mit $s_1 = 1 + b$, $b = 7$ oder $b = 9$. Auf die gleiche Weise verfähre man mit s_1 und man erhält $s_2 = 1 + \dots$ und ebenso ergebe sich $s_3 = 1 + \dots$ usw.

Befindet sich dann in einer der so konstruierten, hinreichend langen Zahlenfolge $s_0, s_1, s_2, \dots$ die Zahl 2025^{2026} ?

Lösung

Wir zeigen, dass in jeder Folge $s_0, s_1, s_2, \dots$ alle Folgeglieder die gleiche Parität haben. Für jede aus s_0 entwickelte Zahlenfolge $s_0, s_1, s_2, \dots$ gilt nämlich:

$$(1) \quad s_{n+1} = s_n - 1 + 5 = s_n + 4 \text{ oder } s_{n+1} = s_n - 1 + 7 = s_n + 6, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Aus (1) folgt: Jedes Folgeelement s_{n+1} ergibt sich aus seinem Vorgänger s_n durch Addition einer geraden Zahl und daher haben sämtliche Zahlen $s_i, i \geq 0$, die gleiche Parität. Weil nun s_0 gerade ist, gilt das auch für jedes s_i . Somit kommt die ungerade Zahl 2025^{2026} nicht in der Folge $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ vor.

Eine Bemerkung zum Schluss

Das Paritätsprinzip stellt nur eine mit einem etwas abschreckenden Namen versehene Variante einer umfassenden mathematischen Methode dar.

Diese Methode erlaubt auch das Arbeiten mit anderen Paaren von komplementären Zahleneigenschaften – also Eigenschaften, durch die eine Zahlenmenge in disjunkte Teilmengen zerlegbar ist, zum Beispiel mit Paaren wie (positiv, negativ) auf der Menge der von Null verschiedenen ganzen Zahlen oder (prim,

*** Eine Gleichung 3. Grades $f(x) = 0$ hat höchstens drei Lösungen.

zerlebar) auf der Menge $\{2, 3, 4, \dots\}$ oder (perfekt, nicht perfekt) auf der Menge $\{2^{n-1} \cdot (2^n - 1) | n = 1, 2, 3, \dots\} \dots$

Lösung zu: Wo liegt der Fehler von Seite 13

Bis zur Gleichung (1) sind alle Gleichungen korrekt. $(1) \Rightarrow (2)$ bedeutet: Radizieren. Beim Radizieren ist stets zu beachten: Aus der Gleichheit zweiter Quadratzahlen kann man nicht auf die Gleichheit der nicht quadrierten Zahlen schließen. Genau diese Regel hat man beim Übergang von (1) zu (2) nicht beachtet. Ersetzt man nämlich in (1) x durch $r + 1$ und y durch $2r + 1$, so lautet

(1): $(+\frac{1}{2})^2 = (-\frac{1}{2})^2$ – eine korrekte Gleichung, aus der aber nicht folgt:

Wegen $\sqrt{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Mathematische Miniatur Wo steckt die Zahl 2026?

2										
3	4	5								
6	7	8	9	10						
11	12	13	14	15	16	17				
							...			

Wenn man das Zahlenschema immer weiter fortgesetzt denkt, in welcher Zeile und in welcher Position in dieser Zeile befindet sich die Zahl 2026?
H. F.

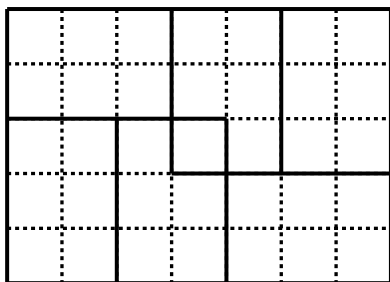
Lösung

Sieht man sich die jeweils größte Zahl in einer Zeile des Schemas genauer an, so bemerkt man eine Gesetzmäßigkeit: Für jedes $n > 1$ gilt: Das letzte Element der n -ten Zeile ist $n^2 + 1$. Daraus folgt wegen $2026 = 45^2 + 1$: 2026 ist das letzte Element der 45-ten Zeile.

„Das Denkerchen“ von Horst Sewerin

Heute schlägt Paul eine Wette für Peter vor. Er zeigt ihm das abgebildete 5×7 -Rechteck mit den eingezeichneten Linien und erklärt: „Jedes der 35 Einheitsquadrate in dem großen Rechteck enthält eine beliebige ganze Zahl. Du darfst nacheinander jede Zahl in einem der Einheitsquadrate von mir erfragen, bis du mir die Summe aller 35 Zahlen nennen kannst.“ Peter entgegnet: „Also muss ich alle 35 Zahlen erfragen, um die Summe zu kennen.“ Paul erwidert: „Nein,

denn es gibt noch eine weitere Bedingung. Du erkennst sechs 2×3 - bzw. 3×2 -Rechtecke, von denen sich zwei in dem mittleren Feld überlappen. Die Summe der Zahlen in jedem dieser Rechtecke ist 0.“ Peter antwortet:



„Aha, jetzt wird die Sache spannend. Was ist mein Wettgewinn?“ Paul sagt: „Ich habe noch fünf Schoko-Nikoläuse übrig, die ich dir schenken kann. Bei Deiner ersten Frage bleibt das so, aber mit jeder weiteren Frage erhältst Du einen Nikolaus weniger – natürlich muss Deine Antwort stimmen.“

Peter fragt nach: „Und wenn ich mehr als fünf Fragen brauche?“ „Dann musst Du mir einen Schoko-Nikolaus schenken,“ verlangt Paul.

Wie viele Schoko-Nikoläuse kann Peter bestenfalls gewinnen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2026 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 162

In Heft 162 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Um die Klasse während einer Vertretungsstunde zu beschäftigen, schreibt die Lehrkraft zunächst 162 von Null verschiedene reelle Zahlen an die Tafel. Dann erlaubt sie den Kindern, nacheinander jeweils zwei Zahlen a und b an der Tafel auszuwählen, sie wegzuwischen und stattdessen die Zahlen $a + \frac{b}{2}$ sowie $b - \frac{a}{2}$ auf die leeren Plätze zu schreiben.

Ist es möglich, dass nach einigen dieser Schritte wieder die ursprünglichen 162 Zahlen an der Tafel stehen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Wir bilden die Summe der Quadrate der beiden neuen Zahlen und erhalten

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2.$$

Das ist wegen $a, b \neq 0$ größer als die Summe der Quadrate der beiden alten Zahlen. Also vergrößert sich jedes Mal diese Summe und kann niemals mehr ihren ursprünglichen Wert annehmen. Daher lassen sich die 162 Ausgangszahlen nicht wiederherstellen.

Ist die Rückkehr zu den ursprünglichen Zahlen möglich, wenn a und b durch $a + b$ und $a - b$ ersetzt werden sollen? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Lösungen der Aufgaben zum neuen Jahr von S. 8

Seitenlängen von Dreiecken

Nach der Dreiecksungleichung gilt: $|AC| + |AB| > |BC|$, woraus folgt:
 $2025 + |AB| > 2026$ und daher ist $|AB| > 1$.

Überraschend einfach

Aus der $n^{8104} < 2025^{2026}$ folgt: $(n^4)^{2026} < (45^2)^{2026}$. Daher $n^4 < 45^2$ und $n^2 < 45$. Da die Lösungen dieser Ungleichungen gleich sind, gilt dies für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$ wodurch wir 13 Zahlen erhalten.

Hypotenusenlänge eines Dreiecks

Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{25})^2 = \sqrt{x}$. Aus $\sqrt{x} = 45$ folgt $x = 45^2 = 2025$. Also gilt die bemerkenswerte Gleichung: $20 + 25 = \sqrt{2025}$.

Ein bemerkenswertes Produkt

Man kann

$$P = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2024}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2025}\right)$$

umformen zu

$$P = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2026}{2025} = 2026.$$

Vielfache

Die Anzahl der Vielfachen von x , $x \geq 1$ ganzzahlig, mit $x \leq 2026$ ist die größte Lösung g der Ungleichung $gx \leq 2026$.

Es sei $x = 7$: Dann ist $g = 289$ die größte Lösung von $g \cdot 7 \leq 2026$.

Für $x = 9$ ist $g = 225$ die größte Lösung von $g \cdot 9 \leq 2026$ und

für $x = 7 \cdot 9 = 63$ ist $g = 32$ die größte Lösung von $g \cdot 63 \leq 2026$.

Da alle Vielfachen von 63 sowohl in der Anzahl 289 der Vielfachen von 7 als auch in der Anzahl 225 der Vielfachen von 9 mitgezählt sind – also doppelt gezählt werden, gilt:

Es gibt $289 + 225 - 32 = 482$ Zahlen < 2026 , die Vielfache von 7, 9 und 63 sind.

Einerziffern

Es sei $E(n)$ die Einerziffer der natürlichen Zahlen n in Dezimaldarstellung. Dann ist $E(2^4) = 6$ und $E(4^2) = 6$.

Weil für jede Potenz 6^m , $m = 1, 2, 3, \dots$ $E(6^m) = 6$ ist, gilt:

$$E(2^{2024}) = E\left((2^4)^{506}\right) = E(6^{506}) = 6 \text{ und}$$

$$E(4^{2026}) = E\left((4^2)^{1013}\right) = E(6^{1013}) = 6.$$

$$\text{Da } E(3^4) = 1 \text{ ist, gilt: } E(3^{2025}) = E\left((3^4)^{506} \cdot 3\right) = 3.$$

Somit ist $E(S) = E(6 + 3 + 6) = 5$ und S ist ein Vielfaches von 5.

Erratum

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal Fehler ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch in Heft 163:

- **Lösungen von Aufgabe 1372 aus Heft 162 (S. 24)**

Bei der Lösung von Aufgabenteil b) gibt es einen Vorzeichenfehler. Die Lösungen der kubischen Gleichung sind $x_1 = x_3 = 5$ und $x_2 = -6$

MONOID–Preisträger 2025

Das Goldene M: Joshua Jung (Gymnasium Birkenfeld)

MONOID-Fuchs: Stephanos Dimitriou (Josef-Hofmiller-Gymnasium)

Forscherpreis: Lea Amend (Otto-Schott-Gymnasium, Mainz), Jasmin Borrmann (Gymnasium Oberusel)

Sonderpreis: Niklas Gelhausen (Leininger-Gymnasium, Grünstadt), Till Radünz (Leininger-Gymnasium, Grünstadt)

1. Preise: Nils Angel, Mai Linh Dang, Jonas Dürkes, Tim Jockers, Daniel Lai-bach Muñiz, Ioan Salaru, Martin Schroff.

2. Preise: Lea Amend, Mais Alkhateeb, Matej Berger, Emilie Borrmann, Jasmin Borrmann, Christina Karst, Johannes Kiehn, Eleanor Kondla, Philip Mühlbeyer, Lars Noll, Lisa Schäfer.

3. Preise: Sophia Clausen, Erik Eberlein, Sophia Kiehn, Kadir Koçyiğit, Nico Mathy, Philipp Mühl, Victor Mayer, Youssuf Mehana, Ben Schneider, Henry Urschel.

4. Preise: (MONOID-Jahresabonnements): Jonas Döring, Baris Eski, Quirin Fritsch, Nelly Harth, Lean Idriizaj, Anna Jockers, Fritz Krüger, Emil Nies, Felix Pick, Dominik Piotrowski, Nina Pucklitsch, Sina Marie Uherek Reyes, Silas Salloch, Robert Schmitt, Mara Schollmeyer, Stefan Wolfert.

Die MONOID-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgerinnen und Preisträgern des Schuljahres 2024/2025 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die Preise für die Träger des Goldenen M und des MONOID-Fuchses hat Herr Dr. Ralf Genannt gespendet.

Die Sonderpreise sowie die 1. und 4. Preise wurden von dem Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gesponsert.

Der Forscherpreis sowie die 2. und 3. Preise wurden durch das Sondervermögen „Wissen schafft Zukunft“ zur Verbesserung der Studienbedingungen an der Johannes Gutenberg-Universität finanziert.

Die MONOID-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich.

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 162

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 5: Emil Nies 5;

Kl. 7: Quirin Fritsch 12, Christina Karst 42, Felix Pick 2, Sina Marie Uherek Reyes 12;

Kl. 8: Robert Schmitt 14;

Kl. 9: Lisa Schäfer 65.

Bingen, Stefan-George Gymnasium

Kl. 5: Anna Jockers 14;

Kl. 6: Jonas Döring 12;

Kl. 7: Mais Alkhateeb 50, Tim Jockers 71.

Birkenfeld, Gymnasium Birkenfeld

Kl. 11: Joschua Jung 98,5.

Eschborn, Heinrich-von-Kleist Schule:

Kl. 12: Dominik Piotrowski 15.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag):

Kl. 5: Sophia Clausen 25, Ben Schneider 18;

Kl. 7: Philip Mühlbeyer 37;

Kl. 8: Nico Mathy 33,5.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:

Kl. 8: Stephanos Dimitriou 100.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium

Kl. 7: Fritz Krüger 14, Henry Urschel 16,5, Stefan Wolfert 5;

Kl. 9: Erik Eberlein 18, Till Radünz 107 Niklas Gelhausen 108,5, Nelly Harth 10, Lars Noll 64,5.

Ingelheim, Sebastian-Münster Gymnasium:

Kl. 12: Eleanor Kondla 41.

Linz, Martinus-Gymnasium

Kl. 9: Vladyslav Pochynok 16.

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:

Kl. 7: Baris Eski 2;

Kl. 10: Lean Idrizaj 3;

Kl. 12: Matej Berger 49, Kadir Koçyiğit 17.

Lübbecke, Wittekind-Gymnasium

Kl. 9: Youssuf Mehana 17.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 7: Jonas Dürkes 81;

Kl. 8: Mara Schollmeyer 2.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 10: Lea Amend 43, Victor Mayer 22.

Mainz, Willigis-Gymnasium:

Kl. 8: Ioan Salaru 97.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis):

Kl. 7: Philipp Mühl 19, Sophia Kiehn 31,5, Nina Pucklitsch 14,5, Martin Schroff 75,5;

Kl. 9: Daniel Laibach Muñoz 83,5;

Kl. 10: Johannes Kiehn 64.

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 10: Jasmin Borrmann 36;

Kl. 11: Emilie Borrmann 48.

Saarburg, Gymnasium:

Kl. 12: Nils Angel 86,5.

Tangermünde, Diesterweg-Gymnasium:

Kl. 10: Mai Linh Dang 85.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2025/26 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Der Professor und das liebe π :** Am π -Tag, also Samstag, den 14. März 2026, um 19:30 Uhr gastiert Prof. Timm Sigg mit seinem Programm „Der Professor und das liebe π “ bei der Kleinkunsthöhle Neuwied (JuSch, Thea-

terplatz 1, 56564 Neuwied).

Timm Sigg ist nicht nur Mathematikprofessor, sondern auch Musikkabarettist. Selbstironisch, einführend und wortwitzig geht er den wesentlichen Fragen des Lebens nach wie: „Hat Pippi Langstrumpf die Mathematik revolutioniert?“ oder „Warum gibt es bald keine Ingenieure mehr?“ Es ist voraussichtlich die letzte Möglichkeit, dieses Programm zu sehen.

Weitere Informationen und Eintrittskarten gibt es unter

www.kleinkunstbuehne-neuwied.de

oder beim Schlosstheater Neuwied (Telefon 02631/22288). Die Karten kosten im Vorverkauf jeweils 20 € (inklusive VVK-Gebühr) und 23 € an der Abendkasse.

- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:

www.facebook.com/monoid.matheblatt

www.facebook.com/monoid.redaktion

www.instagram.com/monoid.matheblatt

Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.

Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite

<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf, mit freundlicher Unterstützung von Maryna Samrtaseva

Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Inhalt

T. Radünz: Vier Tage universitäre Mathematik	3
S. Schneider: MONOID-Jahresfeier 2025	4
H. Fuchs: Was uns über den Weg gelaufen ist	7
H. Fuchs: Jahreszahlaufgaben	8
H. Fuchs: Eine kleine Logelei	8
H. Fuchs: Beweis ohne Worte	9
H. Fuchs: Die besondere Aufgabe	10
Mathematische Entdeckungen	11
H. Fuchs: In den Extremen liegen die Lösungen	12
Monoidale Spielerei	13
Wo liegt der Fehler?	13
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 163	14
Neue Mathespielereien	17
Neue Aufgaben	19
Gelöste Aufgaben aus MONOID 163	20
Eine Falle	23
H. Fuchs: Hättest du es gewusst?	24
Mathematische Miniatur	29
H. Sewerin: Das Denkerchen	29
Lösungen der Aufgaben zum neuen Jahr	31
Erratum	32
MONOID-Preisträger 2025	32
Rubrik der Löserinnen und Löser	33
Mitteilungen	34
Redaktion	35

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>

