

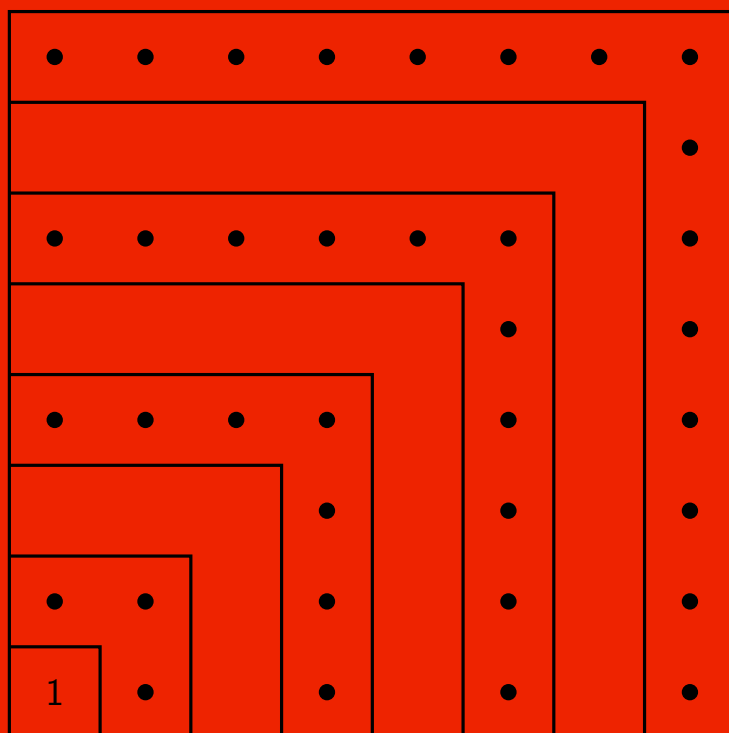
Jahrgang 46

Heft 167

September 2026

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. November 2026.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

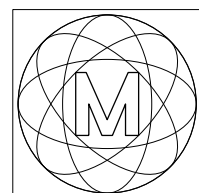
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Einladung zur MONOID-Jahresfeier

Alle Freunde und Förderer von MONOID sind herzlich eingeladen, an der MONOID-Feier 2026 teilzunehmen. Dabei werden unter anderem Preise an erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2025/26 vergeben. Die Feier findet am

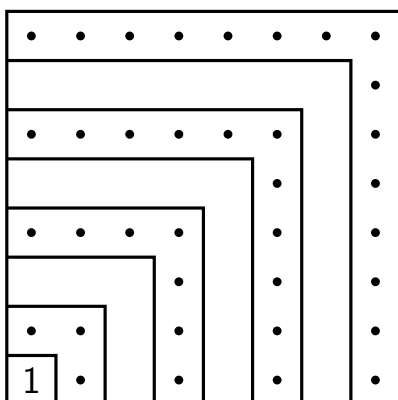
Samstag, den 28. November 2026,
ab 10 Uhr,
in der Alten Mensa der Universität Mainz

statt. Den Festvortrag wird Prof. Dr. Duco van Straten halten.

Alle Preisträgerinnen und Preisträger werden auch gesondert per Post eingeladen.

Im Anschluss an die Feier, gegen 12:30 Uhr, sind alle Gäste zu einem kleinen Imbiss und Austausch herzlich eingeladen.

Beweis ohne Worte Ein Satz aus der Zeit des Pythagoras



Die Summe aus einer beliebigen Anzahl aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen – beginnend mit 1 – ist stets eine Quadratzahl.

H. F.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Peter hat die letzte Wette mit Paul verloren, aber die beiden sind sich über den Wettgewinn nicht einig. So verabreden sie folgendes Spiel:

Die Zahlen $0, 1, 2, \dots, 1024$ stehen auf einem Zettel. Paul streicht 512 dieser Zahlen, darauf streicht Peter 256 der verbleibenden Zahlen, darauf Paul weitere 128 Zahlen, Peter 64 Zahlen und so fort.

Nachdem jeder fünfmal die Hälfte der vorher entfernten Zahlen gestrichen hat, verbleiben auf dem Zettel genau zwei Zahlen. Peter muss die positive Differenz dieser beiden Zahlen in Gummibärchen an Paul abliefern.

Wie viele Gummibärchen muss Peter an Paul geben, wenn beide aus ihrer Sicht optimal spielen?

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2026 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 165

In Heft 165 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Stella hat auf dem Dachboden gekramt und eine alte Balkenwaage gefunden. Leider hat diese einen Fehler: Ihre Schalen sind nur dann (scheinbar) im Gleichgewicht, wenn das Verhältnis der Gewichte in der linken und rechten Schale $3 : 4$ beträgt.

Außerdem fand Stella bei der Waage ein Gewichtsstück von 6 kg. Um einen Teig zu backen, benötigt sie genau 1 kg Mehl. Der Mehlvorrat ist hinreichend groß, und es gibt Plastikbeutel beliebiger Größe, deren Gewicht vernachlässigbar ist. So fragt Stella ihre Freundin Leonie, mit der sie gemeinsam backen will, ob sie eine Idee hat, wie beide mit der alten Waage die gewünschte Mehlportion abwiegen können. Leonie überlegt ein wenig und macht Stella dann einen Vorschlag.



Wie können die beiden die Mehlportion von 1 kg abwiegen?

Lösung

Stella soll zuerst das Gewichtsstück auf die linke Waagschale legen und auf der rechten Waagschale so viel Mehl in eine Tüte füllen, dass Gleichgewicht herrscht. Dafür braucht sie 8 kg Mehl. Nun soll sie das Gewichtsstück auf der linken Schale durch so viel Mehl ersetzen, dass wieder Gleichgewicht herrscht. Dabei sind links 6 kg Mehl abgewogen.

Wenn sie nun das Gewichtsstück und die 6-kg-Tüte Mehl gleichzeitig auf die rechte Waagschale legt, befinden sich dort insgesamt 12 kg. Die Waage würde dann durch 9 kg auf der linken Schale ins Gleichgewicht gebracht. Stella hat bereits zu Beginn 8 kg Mehl in einer Tüte abgewogen, die sie auf die linke Schale stellt. Eine weitere Tüte auf dieser Schale füllt sie bis zum Gleichgewicht und hat darin 1 kg Mehl erhalten.

Richtige Lösungen wurden eingesandt von Anna-Franziska Hagemann, Lixin Hou, Lisa Schäfer und Leonid Vasilev.

Während des Backens überlegt Leonie, ob es für beliebige Verhältniszahlen $a : b$, bei denen die Waage scheinbar im Gleichgewicht ist, stets möglich ist, 1 kg abzuwiegen. Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Ein Blick hinter die Kulissen

Das erratene Geburtstags-Datum

Mathis behauptet im Kreise seiner Freunde, er könne mit einem ganz einfachen Trick von jedem unfehlbar Tag und Monat seines Geburtstages herausbekommen. Neugierig geworden fragen ihn die Freunde, wie sein Trick funktioniert.

Mathis erklärt:

Multipliziert das Tagesdatum t eures Geburtstages, $1 \leq t \leq 31$, mit 20 und addiert dazu die Monatszahl m , $1 \leq m \leq 12$. Schließlich nennt ihr mir euer Rechenergebnis – das ist alles, was ihr machen müsst.

Matheo will Mathis Behauptung überprüfen:

Er rechnet kurz und nennt dann die Zahl 551, worauf Mathis nach einigen Augenblicken sagt: „Du hast am 27. November Geburtstag.“
Erstaunt bestätigt Matheo diese Aussage.

Wie macht das Mathis?

Des Rätsels Lösung

Es sei e die von Matheo errechnete ganze Zahl.

Dann ist $e = 20t + m$, sodass auch $e - m$ eine ganze Zahl ist.

Zugleich ist $e - m$ wegen $e - m = 20t$ und $e - 12 \leq e - m \leq e - 1$ ein eindeutig bestimmtes Vielfaches von 20.

Deshalb kann man aus der Kenntnis von e den eindeutigen Wert von m finden,

für den $e - m$ ein Vielfaches von 20 ist.

Danach errechnet man t aus der Gleichung $t = (e - m) : 20$.

Beispiel: Matheos Geburtstag

Es ist $e = 551$.

Dann ist $551 - m$ nur für $m = 11$ durch 20 ohne Rest teilbar.

Mit $m = 11$ gilt dann $t = (551 - 11) : 20 = 540 : 20 = 27$.

Matheo hat also am 27.11. (27. November) Geburtstag.

Von den Voraussetzungen eines Beweises

von Hartwig Fuchs

Ein Ziel mathematischer Theorien $\mathcal{T}$ ist der Nachweis der Gültigkeit (*Wahrheit*) bestimmter Aussagen (*Behauptungen*) von $\mathcal{T}$.

Ein solcher Nachweis ist ein *logisches Konstrukt*:

Ausgehend von einer Liste L vorgegebener Aussagen $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ begründet man mit logischen und mit in $\mathcal{T}$ geltenden Regeln, dass eine Behauptung $\mathcal{B}$ eine in $\mathcal{T}$ wahre Aussage ist.

Man sagt dann: $\mathcal{B}$ ist **bewiesen (hergeleitet)**.

Grundlegendes

Damit ein logisches Konstrukt der Beweis einer Behauptung $\mathcal{B}$ ist, müssen alle Aussagen in der Liste L die grundlegende Bedingung (1) erfüllen, die durch das fundamentale Gesetz (2) der Logik begründet ist:

- (1) Die Aussagen $\mathcal{V}_i$, ($1 \leq i \leq n$) in einer Liste L müssen wahr sein.
- (2) Aus wahren Aussagen kann man nur wahre Aussagen herleiten.

Beispiel 1: Folgen einer Nichtbeachtung von (1)

Aus den arithmetischen Aussagen $\mathcal{V}_1 : n - (-n) = 2n$ und $\mathcal{V}_2 : 1 = -1$ als Voraussetzung kann man die Aussagen herleiten:

$\mathcal{B}_1 : 1 - (-1) = 2$ (wahr) und $\mathcal{B}_2 : 1 - (-1) = 1 - 1 = 0$ (falsch).

Und aus $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ folgt $2 = 0$ im Widerspruch zur arithmetischen Aussage $2 \neq 0$.

Die Aussagen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ weisen auf eine Eigenschaft hin, die jede Falschaussage in einem logischen Konstrukt besitzt:

- (3) Aus einer Falschaussage kann man wahre und falsche Aussagen herleiten.

Daher spielen Falschaussagen als Voraussetzungen in Herleitungen eine fatale Rolle, denn mit ihnen erlangt man nicht die mit einem Beweis angestrebte Gewissheit, dass das Bewiesene wahr ist.

Und das ist der Grund, weshalb die Voraussetzungen eines Beweises die Bedingung (1) erfüllen müssen.

Notwendige oder/und hinreichende Voraussetzungen

Voraussetzungen für den Beweis einer Behauptung $\mathcal{B}$ können sich unterscheiden in ihrer Bedeutung, die sie für die Herleitung von $\mathcal{B}$ haben: Sie können zu wenig oder zu viel Informationen für den Beweis von $\mathcal{B}$ enthalten.

Beispiel 2: Notwendige oder hinreichende Voraussetzung

Es seien E, F und G Punktmengen in der Ebene mit $E \subset F \subset G$ und P, Q Punkte mit $P \in E$ sowie $Q \in G, Q \notin F$.

- (a) Wenn P in E liegt, dann ist P auch in F enthalten. Daher ist mit der Voraussetzung $\mathcal{V} : P \in E$ die Aussage $\mathcal{B} : P \in F$ bewiesen.

Voraussetzungen, die mindestens so viel an Information enthalten, wie man zum Beweis einer Behauptung braucht, nennt man *hinreichend*. Die Voraussetzung $\mathcal{V}$ in (a) ist somit hinreichend.

- (b) Wenn Q nicht in E liegt, dann ist Q jedoch in G enthalten.

Nur mit der Voraussetzung $\mathcal{V} : Q \notin E$ ist daher die Behauptung $\mathcal{B} : Q \in (F - E)^*$ nicht beweisbar – denn Q könnte in $G - F$ liegen.

Voraussetzungen, die für den Beweis einer Behauptung zwar unverzichtbar, aber zu wenig Informationen enthalten, nennt man *notwendig*. Die Voraussetzung $\mathcal{V}$ in (b) ist daher notwendig.*

Vollständige Listen von Voraussetzungen

Eine Liste L von Voraussetzungen, mit denen die Herleitung einer Behauptung gelingt, nennen wir *vollständig*.

Beispiel 3: Eine vollständige Liste L

Es seien x und y reelle Zahlen, für die $\mathcal{V}_1 : x \cdot y > 0$ vorausgesetzt sei. Dann gilt $\mathcal{B} : \text{Für jedes Zahlenpaar } (x, y) \text{ ist } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

* in $F - E$ ist die Punktmenge, die aus den Punkten von F ohne die Punkte von E besteht.

Nachweis:

Zunächst: Die Voraussetzung $\mathcal{V}_1$ ist notwendig, denn ohne sie könnte z.B. $x = 0$ sein und dann wäre $\mathcal{B}$ sinnlos oder z.B. für $x = -1, y = 1$ wäre $\mathcal{B}$ falsch.

Mit $\mathcal{V}_1$ allein ist also $\mathcal{B}$ nicht beweisbar. Das gelingt erst mit der weiteren Voraussetzung $\mathcal{V}_2 : (x - y)^2 \geq 0$.

Aus $\mathcal{V}_2$ folgt nämlich $x^2 + y^2 \geq 2xy$ und wegen $\mathcal{V}_1$ ist $(x^2 + y^2) : xy \geq 2$, woraus $\mathcal{B}$ folgt.

Die Liste $L = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ ist mithin vollständig.

Bestimmung vollständiger Listen

Im Vorfeld eines Beweises steht man vor der Aufgabe, eine vollständige Liste L der benötigten Voraussetzungen zu finden – ein nicht immer einfaches Problem, denn meist weiß man vorab nicht, mit welcher Voraussetzung ein Beweis gelingt.

Deshalb startet man einen Beweis oft mit einer unvollständigen Liste L . Wenn sich dann im Verlauf einer Herleitung herausstellt, dass eine benötigte Voraussetzung (a) eine allgemein bekannte Aussage oder (b) eine unmittelbar als wahr erkennbare Aussage oder (c) eine als wahr nachgewiesene Aussage ist, so ist es logisch zulässig, sie nachträglich in die Liste L aufzunehmen.

Problemspezifische Vervollständigung einer Liste L

Beispiele

(a) Eine bekannte Tatsache als Voraussetzung

In der Figur sei K_0 ein Halbkreis mit einem Durchmesser der Länge $2r$. Wenn man dann für zwei Halbkreise K_1 und K_2 $\mathcal{V}_1 : K_1$ und K_2 sind kongruent voraussetzt, so gilt

$\mathcal{B}$: Die Flächen von K_1 und K_2 sind zusammen genau so groß wie die Fläche der krummlinig begrenzten Figur F .

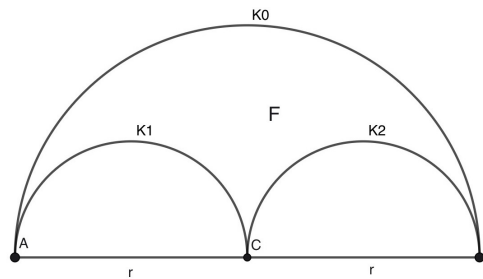
Nachweis:

Aus der bekannten Formel für die Fläche eines Kreises K vom Radius r als Voraussetzung $\mathcal{V}_2 : |K| = \pi \cdot r^2$ sowie der Voraussetzung $\mathcal{V}_1$ folgt

$$\frac{1}{2}(|K_1| + |K_2|) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2 \text{ und}$$

$$|F| = |K_0| - \frac{1}{2}(|K_1| + |K_2|) = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Somit gilt $\mathcal{B}$ und daher ist die Liste $L = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ vollständig.



(b) Eine leicht zu findende Voraussetzung im Verlauf einer Herleitung

Es gelte $\mathcal{V}_1 : m = \frac{5n+1}{2n+1}$ für $n = 2, 3, 4, \dots$

Dann gilt $\mathcal{B}$: Es gibt kein n , für das m eine ganze Zahl ist.

Nachweis:

Aus $\mathcal{V}_1$ folgt $m = \frac{2(2n+1)+n-1}{2n+1} = 2 + \frac{n-1}{2n+1}$ und aus der leicht erkennbar wahren Aussage $\mathcal{V}_2 : n - 1 < 2n + 1$ als zweiter Voraussetzung ergibt sich unmittelbar, dass $0 < \frac{n-1}{2n+1} < 1$ ist für $n \geq 2$.

Daher trifft die Behauptung $\mathcal{B}$ zu und die Liste $L = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ ist vollständig.

(c) Eine nicht naheliegende wahre Aussage als Voraussetzung

Es sei $S_n = n^4 + 4^n$ für natürliche Zahlen n . Dann gilt

$\mathcal{B}$: Die Summe S_n ist nur für $n = 1$ eine Primzahl.

Nachweis:

Für $n = 1$ ist S_1 eine Primzahl.

$\mathcal{V}_1$: Es sei nun $n \geq 2$.

Ist n gerade, dann ist S_n eine gerade, nicht prime Zahl > 2 .

Ist n ungerade, so ist $n = 2k + 1$ mit $k \geq 1$.

Dann gilt $S_n = n^4 + 4 \cdot 4^{2k} = n^4 + 4 \cdot (2^k)^4$.

Aus der letzten Summe rechts folgt mit einer Formel, die einem nicht alle Tage über den Weg läuft – nämlich mit der binomischen Formel

$\mathcal{V}_2 : a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ von Sophie Germain (1776–1831).

Wenn man dort $a = n$ und $b = 2^k$ setzt, erkennt man, dass S_n ein Produkt von zwei Zahlen ≥ 3 , also nicht prim ist.

Damit gilt $\mathcal{B}$ mit der vollständigen Liste $L = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$.

Methodische Vervollständigung einer Liste L

Bei manchen mathematischen Problemen gelingt es oft nicht, alle zu einem Beweis benötigten Voraussetzungen zu finden. Es gibt jedoch einige Methoden, die in vielen Fällen einen Ausweg aus solchen Situationen bilden. Sie unterliegen einem genialen Grundgedanken:

Findet man eine benötigte Voraussetzung nicht, so erfinde man stattdessen eine! Solche Voraussetzungen nennt man Annahmen.

Wichtig: Eine als Voraussetzung verwendete Annahme ist nur als eine wahre Aussage deklariert – sie muss es aber nicht sein.

Wir beschreiben nun Vorgehensweisen, die mit Annahmen arbeiten, welche zunächst als inakzeptabel erscheinen – die jedoch durch ihre Erfolge in Herleitungen nachträglich eine Rechtfertigung erfahren:

Eine zu beweisende Behauptung $\mathcal{B}$ oder ihre Negation $\neg\mathcal{B}$ wird als wahr angenommen und als Voraussetzung der Liste L hinzugefügt.

Beispiel 4: Eine zu beweisende Behauptung als Voraussetzung

(a) Es gelten $\mathcal{V}_1$: x, y und z seien reelle Zahlen. Wir behaupten

$\mathcal{B}$: Für jedes Tripel (x, y, z) gilt die Ungleichung U_1 : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Da $\mathcal{V}_1$ keinerlei Hinweis gibt, welche Voraussetzungen einen Beweis von $\mathcal{B}$ ermöglichen, machen wir die Annahme $\mathcal{A}$:

$\mathcal{B}$ trifft zu zur 2. Voraussetzung $\mathcal{V}_2$ – mal sehen, was man damit erreicht.

Nachweis von $\mathcal{B}$:

Aus U_1 folgt nach Multiplikation mit 2 und Umordnung die bekanntlich wahre Ungleichung U_2 : $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$.

Wenn man diesen Schluss umkehrt, gelangt man von U_2 zu U_1 und nach der Regel (2) ist U_1 wahr – $\mathcal{B}$ trifft also zu.

(b) Man beweise die Behauptung $\mathcal{B}$: Die Gleichung G : $\sqrt{x^2 + 5} = x + 1$ hat mindestens eine reelle Lösung x .

Bevor man mit dem Rechnen loslegt, muss man sich dagegen absichern, dass man damit nicht etwas Sinnloses tut – wenn nämlich G gar keine reellen Lösungen hat. Daher trifft man die Annahme $\mathcal{A}$: G hat Lösungen.

Nachweis von $\mathcal{B}$:

Aus $\mathcal{A}$ und G folgt, dass $x^2 + 5 = x^2 + 2x + 1$ und daher $x = 2$ ist.

Nun ist jedoch $x = 2$ nur dann eine Lösung, wenn man nachweisen kann, dass $\mathcal{A}$ wahr ist. Das ist tatsächlich der Fall, weil für $x = 2$ gilt: $\sqrt{4 + 5} = 2 + 1$. Damit ist $\mathcal{B}$ nachgewiesen.

Beweise wie im Bsp. 4 nennt man **Rückschlüsse**:

Aus der Annahme $\mathcal{A}$, eine zu beweisende Behauptung $\mathcal{B}$ sei wahr, leitet man eine Aussage $\mathcal{C}$ her, von der man (a) entweder weiß, dass sie wahr ist oder (b), dass man ihre Wahrheit beweisen kann. Wenn man dann mit $\mathcal{C}$ als Voraussetzung zeigen kann, dass die Annahme $\mathcal{A}$ gilt, dann hat man mit der logischen Regel (2) die Behauptung $\mathcal{B}$ bewiesen.

Beispiel 5: Die Negation einer zu beweisenden Behauptung als Voraussetzung

Jede der 12 Kanten eines Würfels soll mit einer der Zahlen 1, 2, ..., 12 numme-

riert werden, wobei keine dieser Zahlen mehrfach verwendet wird.

Man beweise:

$\mathcal{B}$: Es gibt keine Nummerierung, bei der die Summe der von einer Ecke ausgehenden 3 Kanten bei allen 8 Ecken gleich ist und S sei die Summe aller Zahlen s . Da in S jede Kantenummer zweimal vorkommt, gilt $S = 8 \cdot s = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 12) = 12 \cdot 13$, so dass $s = 19,5$ ist – eine offensichtlich falsche Aussage. Nach der logischen Regel (2) muss daher die Annahme $\mathcal{A}$ falsch sein. Es gilt somit $\mathcal{B}$.

Beweise wie im Beispiel 5 nennt man **Widerspruchsbeweise**:

Aus der Annahme $\mathcal{A}$, dass die Negation $\neg \mathcal{B}$ einer zu beweisenden Aussage $\mathcal{B}$ wahr sei, leitet man eine Aussage $\mathcal{C}$ her, für die man nachweisen kann, dass sie falsch ist. Nach der logischen Regel (2) ist das nicht möglich, wenn $\mathcal{A}$ wahr ist. Daher ist $\mathcal{A}$ falsch und somit ist $\mathcal{B}$ wahr.

Eine weitere Methode, bei der eine zu beweisende Behauptung teilweise als Voraussetzung benutzt wird.

Beispiel 6: Die vollständige Induktion

Behauptung $\mathcal{B}$: n verschiedene Geraden mit gemeinsamem Schnittpunkt S zerlegen die Ebene in $2n$ Sektoren.

Nachweis von $\mathcal{B}$:

Annahme $\mathcal{A}$: Die Behauptung $\mathcal{B}$ gilt für eine beliebig gewählte Zahl – etwa für $n = k$.

Nach $\mathcal{A}$ ist die Ebene durch k Geraden mit Schnittpunkt S in $2k$ Sektoren zerlegt. Eine weitere Gerade durch S liegt dann in zwei Sektoren, die sie beide in jeweils zwei Sektoren zerlegt. Somit folgt aus $\mathcal{A}$:

(*) Gilt die Behauptung $\mathcal{B}$ für eine beliebig gewählte Zahl k , so gilt sie auch für $k + 1$.

Die Aussage (*) ist nur gültig, wenn die Annahme $\mathcal{A}$ wahr ist – und das beweist man so: $\mathcal{B}$ gilt für $k = 1$ und wegen (*) gilt dann auch $\mathcal{B}$ für $k = 2$, woraus die Gültigkeit von $\mathcal{B}$ für $k = 3$ folgt; so fortfahrend zeigt sich schließlich, dass $\mathcal{B}$ für das beliebig gewählte k wahr ist.

Das logische Prinzip *vollständige Induktion* sagt nun:

Gilt eine Aussage $\mathcal{B}$ für $k = 1$ und folgt aus der für ein beliebiges k als gültig angenommenen Aussage $\mathcal{B}$ die Aussage $\mathcal{B}$ für $k + 1$, so gilt $\mathcal{B}$ für jedes n , $n = 1, 2, 3, \dots$

Nach dem Induktionsprinzip gilt daher die Behauptung $\mathcal{B}$ in Beispiel 6 für jedes n , $n = 1, 2, 3, \dots$

Bestimmung nur bedingt vollständiger Listen $\vee$

Beispiel 7

Christian Goldbach (1690–1764) hat eine berühmte Vermutung aufgestellt, die in heutiger Formulierung lautet:

G_g : Jede gerade Zahl $n \geq 4$ ist eine Summe zweier Primzahlen;

G_u : Jede ungerade Zahl $n \geq 7$ ist eine Summe dreier Primzahlen.

Während ein vollständiger Beweis von G_g m.W. bis heute nicht gelungen ist, ist die Vermutung G_u extrem leicht beweisbar unter der

Annahme: G_g trifft zu.

Nachweis:

Ist n , $n \geq 7$, eine ungerade Zahl so ist $n - 3$ gerade und ≥ 4 , so dass nach Annahme $n - 3 = p_1 + p_2$ mit Primzahlen p_1, p_2 ist. Daher ist $n = p_1 + p_2 + 3$ – es gilt also G_u .

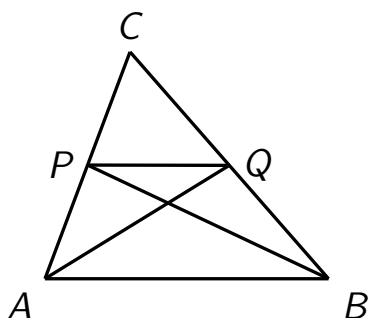
Die Rückführung einer Behauptung B_1 oder ihrer Negation $\neg B_1$ auf eine andere Behauptung B_2 – sei diese bewiesen oder unbewiesen – ist eine der häufigsten Vorgehensweisen bei der Herleitung einer Behauptung.

Dabei ist B_1 bewiesen, wenn B_2 zutrifft; ist jedoch B_2 noch unbewiesen, so gilt B_1 erst unter der Bedingung, dass für B_2 ein Beweis geliefert ist.

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 166

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

Flächenvergleich



Im Dreieck $\triangle ABC$ seien $P \in AC$ und $Q \in BC$ so gewählt, dass PQ und AB parallel sind. Wenn man dann P mit B und Q mit A verbindet, so gilt:

Die Dreiecke $\triangle AQC$ und $\triangle BCP$ sind flächengleich.
Zeige dies. (H. F.)

Lösung:

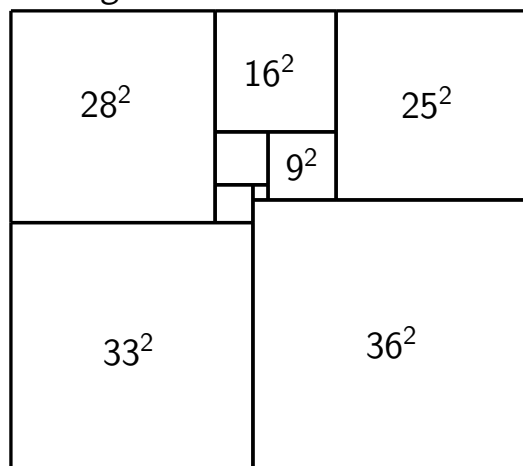
Die beiden Dreiecke $\triangle QPA$ und $\triangle QPB$ haben die gleiche Basis PQ und wegen $PQ \parallel AB$ haben sie auch die gleiche Höhe. Daher gilt $|\triangle QPA| = |\triangle QPB|$. Addiert man nun auf beiden Seiten jeweils $|\triangle CPQ|$, so folgt:

$$|\triangle AQP| + |\triangle CPQ| = |\triangle AQC| = |\triangle BQP| + |\triangle CPQ| = |\triangle BCP|.$$

Rechteck aus Quadraten

Kannst du neun Quadrate mit den Seitenlängen 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36 so zusammensetzen, dass sie ein vollständiges Rechteck bilden? (H. F.)

Lösung:



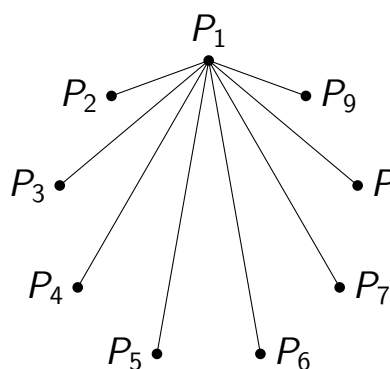
Die drei nicht bezeichneten Quadrate im Rechteck sind das 2^2 , 5^2 und das 7^2 -Quadrat.

Wege im 9-Eck

Es seien $P_1, P_2, \dots, P_9$ die Ecken eines regelmäßigen 9-Ecks E . Wie viele diagonale Wege durch das Innengebiet von E gibt es,

- wenn der Weg $\overrightarrow{PQ}$ von P nach Q als verschieden von Weg $\overrightarrow{QP}$ von Q nach P betrachtet wird?
- wenn die Wege $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QP}$ nicht unterschieden werden? (H. F.)

Lösung:



- Von der Ecke P_1 gehen sechs gerichtete Diagonalwege $\overrightarrow{P_1 P_i}$, $i = 3, 4, \dots, 8$ aus. Gleiches gilt für die acht anderen Ecken $P_2, P_3, \dots, P_9$. Somit gibt es $9 \cdot 6 = 54$ gerichtete Diagonalwege in E .
- In (a) ist mit einem Weg $\overrightarrow{PQ}$ stets auch der Weg $\overrightarrow{QP}$ mitgezählt. Wenn man aber $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QP}$ als den ungerichteten Weg PQ zwischen P und Q betrachtet, dann ist in (a) jeder solcher Weg doppelt gezählt. Die Anzahl der ungerichteten Diagonalwege in E ist somit $\frac{1}{2} \cdot 54 = 27$.

Magisches Quadrat mit Jahreszahlen

Setze in die sechs leeren Felder natürliche Zahlen so ein, dass ein magisches

Quadrat entsteht.

Hinweis: Ein Quadrat ist magisch, wenn die Summe der Zeilen, Spalten und Diagonaleinträge immer das gleiche Ergebnis liefert.

2025		
	2026	
		2027

(MG)

Lösung:

2025	2024	2029
2030	2026	2022
2023	2028	2027

Fünfundvierzig

Die Zahl 45 soll so in vier Summanden zerlegt werden, dass alle Resultate gleich sind, wenn man zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten Summanden 2 subtrahiert, den dritten Summanden mit 2 multipliziert und den vierten Summanden durch 2 dividiert.

(Hans Engelhaupt)

Lösung:

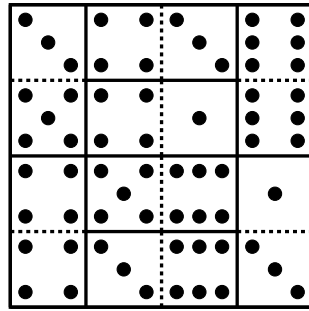
Durch Probieren findet man $8 + 12 + 5 + 20 = 45$.

Eine Domino-Knobelei

Mit Domino-Steinen lassen sich sehr gut Aufgaben bilden. Wendelin ist groß darin, solche selbst zu erfinden. Mit acht Steinen will er ein Zauberquadrat legen, wobei die senkrechten und die waagerechten Reihen jeweils die Summe 16 ergeben sollen. Welche Steine muss er nehmen und wie muss er sie zusammenlegen?

(Ulrike Barth)

Lösung:



Gerade oder Ungerade?

Ist $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2025^2 + 2026^2$ eine gerade oder eine ungerade Zahl? (MG)

Lösung:

Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade, das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade. Die gesuchte Summe hat also 1013 gerade und 1013 ungerade Summanden. Da ihre Summe der 1013 Summanden wieder ungerade ist, ist auch die gesuchte Summe ungerade.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. November 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Trifft die Ungleichung zu?

Es seien x , y und z (paarweise) verschiedene natürliche Zahlen größer eins. Zeigen Sie: Wie auch immer x , y und z gewählt sind, stets gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{z}\right) < \frac{57}{5}$$

(H. F.)

II. Farbige Würfelseiten

Ein Quader Q mit den Kantenlängen 8, 9 und 10 sei außen blau angemalt. Q werde nun in Würfel der Seitenlänge 1 zerlegt. Wie viele Würfel haben dann genau 2 blau gefärbte Seitenflächen? (H. F.)

III. Grenzproblem

Finde eine geometrische Figur, die

- a) aus vier von Kurven begrenzten Gebieten,
- b) aus vier von Strecken begrenzten Gebieten

so zusammengesetzt ist, dass jedes Gebiet mit jedem anderen Gebiet eine gemeinsame Grenze besitzt.

(H. F.)

IV. Gewichtsstücke

Peter nimmt an einer Mathe-AG teil. Ein Tagesziel lautet:

Erstelle aus einem Tonklumpen mit einer Gewichtsmasse von 121 Gramm für eine alte Balkenwaage die fehlenden Gewichtstücke her, sodass man mit diesen alle ganzzahligen Massen von 1 Gramm bis 121 Gramm abwiegen kann. Wie schwer muss jedes einzelne der Gewichtsstücke sein?

(AKö)

V. Kreuzzahl-Rätsel

1		2	3		4
	5			6	
7		8		9	
10	11		12		13
		15			

Waagerecht

- w2: kleinste Vielfaches von w6
- w6: Quadratzahl
- w7: größte Potenz von 2
- w10: 3^n , n eine gerade Zahl
- w15: Zahl mit Quersumme 5

Senkrecht

- s1: kleinste Primzahl
- s3: Zahl mit Querprodukt 0
- s4: ein Palindrom
- s5: kleinst mögliche Zahl
- s6: eine Kubikzahl
- s8: kleinstes Vielfaches von 8
- s9: $s_{10} + 100$
- s10: größtmögliche Zahl
- s11: $3 \cdot w_6$
- s12: $\frac{1}{2} \cdot s_8 + 2 \cdot s_{10}$
- s13: Vielfaches von 13
- s14: Spiegelzahl von s10

(H. F.)

VI. Fünfer Potenzen

Wie viele der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2026 lassen sich als Potenz von 5 mit natürlichen Zahlen als Exponenten oder als Summe von solchen schreiben? (MG)

VII. Ein Teilbarkeitsproblem

Jede Zahl $11^{10n} - 1$ ist durch 100 teilbar, $n = 1, 2, 3, \dots$. Trifft das zu? (H. F.)

**Wir freuen uns auf Dich
bei der Jahresfeier!**

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. November 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1407: Zahlenpyramide

Konstruktion der Zahlenpyramide: Man setzt zwischen die Ziffern 4 und 8 des mittleren Ziffernblock 48 der n -ten Zeile, $n \geq 2$, den Ziffernblock 48 und man erhält die $(n+1)$ -te Zeile.

49
4489
444889
44448989
⋮

Zeige, dass in jeder Zeile der Zahlenpyramide eine Quadratzahl steht.

(H. F.)

Aufgabe 1408: Alternierende Summe von Kubikzahlen

Berechne den Wert der Summe $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 99^3 - 100^3 + 101^3$.

(Klaus Ronellenfitch, Walldorf)

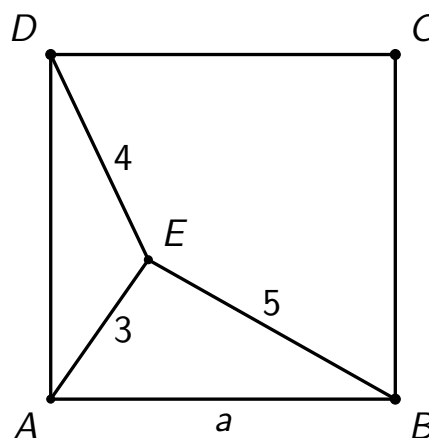
Aufgabe 1409: Konstruktion eines Vierecks

Von einem beliebigen Viereck $ABCD$ sind nur die Seitenmitten E von AB , F von BC und G von CD sowie der Diagonalschnittpunkt S gegeben. Konstruiere das Viereck $ABCD$ und begründe deine Konstruktion.

(Klaus Ronellenfitch)

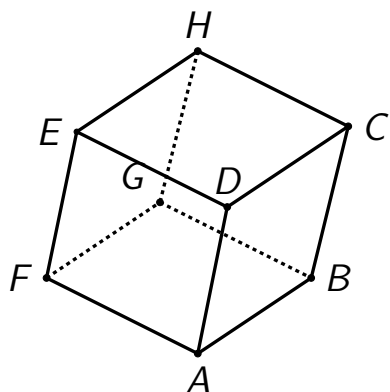
Aufgabe 1410: Flächeninhalt eines Quadrat

Welchen Flächeninhalt hat dieses Quadrat?



(Christoph Sievert)

Aufgabe 1411: Würfel auf der Ecke



Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 soll auf der Ecke A aufgestellt werden, dass die Raumdiagonale AH senkrecht auf der Grundfläche steht. Welchen Winkel bildet dann die Seitenfläche $ABCD$ mit der Grundfläche? (Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1412: Ungerade Summe

In einem Kasten liegen $n = 2m$ rote und n gelbe Zettel, jeweils mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ bedruckt. n Schüler greifen nacheinander je einen roten und einen gelben Zettel und notieren die Summe der beiden Zahlen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der das Produkt dieser Summen ungerade ist.

(WJB)

Aufgabe 1413: Zahl gesucht

Ermittle die kleinste natürliche Zahl n , die beim Teilen durch 3 den Rest 1, durch 5 den Rest 3, durch 7 den Rest 5, durch 9 den Rest 7 und durch 11 den Rest 9 lässt.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Gelöste Aufgaben aus MONOID 166

Klassen 9–13

Aufgabe 1400: Als Differenz zweier Quadrate

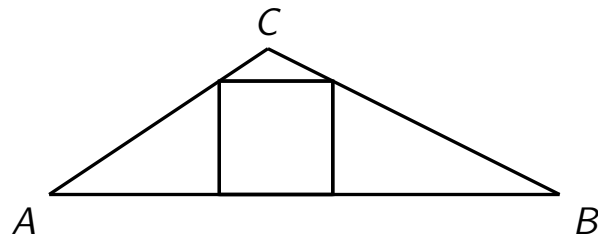
Marco behauptet, jede Zahl der Form $10^{n+1} + 1$ (d.h. $100 \dots 1$) mit einer natürlichen Zahl n lasse sich als Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlichen Zahlen darstellen. Hat er recht? (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Wegen $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$ lässt sich sogar jede ungerade Zahl $z \geq 3$ so darstellen.

Aufgabe 1401: Quadrat im Dreieck

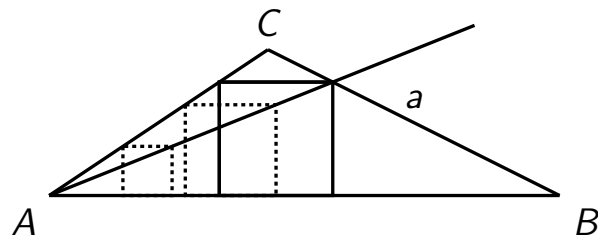
Zeichne in ein beliebiges Dreieck ein Quadrat, dessen zwei Eckpunkte auf einer Seite des Dreiecks und die beiden anderen Eckpunkte auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks liegen. Ein Beispiel:



(Christoph Sievert)

Lösung:

Ein schönes Beispiel, wie man ein Problem durch Vereinfachung lösen kann:



zeichne verschiedene Quadrate, deren 4. Eckpunkt (noch) nicht auf einer Dreiecksseite liegt. Die 4. Eckpunkte liegen auf einer Geraden durch A. Dort, wo die Gerade a schneidet, liegt ein Punkt des Quadrats. Begründung für die Lösung: Strahlensätze.

Aufgabe 1402: Ein Rechteck

Der Umfang eines Rechtecks beträgt 38cm. Das Quadrat über der Diagonalen hat einen Flächeninhalt von 205cm^2 . Wie lang und wie breit ist das Rechteck?
(AKö)

Lösung:

Sei x die Länge und y die Breite des Rechtecks. Für den Umfang gilt dann: $2x + 2y = 38$. Die Länge der Diagonalen ist dann $\sqrt{x^2 + y^2}$. Laut aufgabenstellung gilt für $x^2 + y^2$ ein Flächeninhalt von 205cm^2 . Aus der Gleichung $2x + 2y = 38$ folgt $y = 19 - x$.

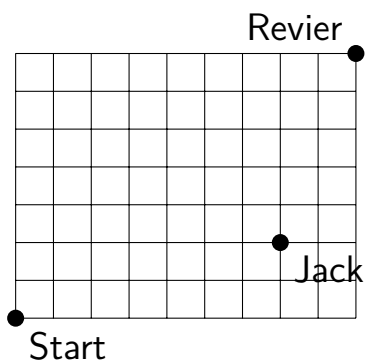
Durch einsetzen in $x^2 + y^2 = 205$ erhält man

$$x^2 + (19 - x)^2 = 205$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 19x + 78 = 0$$

Lösen der Gleichung führt zu $x_1 = 13$, $x_2 = 6$. Das Rechteck ist also 13cm lang und 6cm breit.

Aufgabe 1403: Verbrecherjagd



Der Straßenplan des Londoner Stadtteils Whitechapel im Jahre 1888, wird (abstrahiert) als Gitter wie in der Graphik dargestellt. An der angezeigten Kreuzung versteckt sich nach vollbrachter Tat der gefährliche Verbrecher „Jack the Ripper“. Er wird von dem wackeren Streifenpolizisten Smith gesucht, der nach einer bewährten Ermittlungsmethode arbeitet: Er startet links unten in dem Gitter und wirft eine (faire) Münze. Je nach Ergebnis geht er Richtung Osten oder Norden bis er an die nächste Kreuzung kommt. Dort wiederholt er das Vorgehen.

Sobald er am Nordrand oder Ostrand von Whitechapel ankommt, geht er schnurstracks in das Polizeirevier in der nordöstlichen Ecke des Viertels und meldet dort Inspektor Abberline – dem Leiter der Ermittlungen – den Erfolg (oder Misserfolg) seiner Suche.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt der Streifenpolizist Smith Jacks Versteck auf seinem zufälligen Weg?

(AcK)

Lösung:

Jack's Position befindet sich 9 Schritte vom Start entfernt: sieben nach rechts und zwei nach oben. Der Polizist trifft Jack genau nach seinem neunten Schritt, oder er trifft ihn gar nicht. Unter diesen neun Schritten müssen genau zwei nach Norden erfolgen. Wir beschreiben die ersten neun Schritte durch eine Buchstabenfolge, zum Beispiel *NNONOOONN*. Das soll heißen, dass der Polizist erst nach Norden geht, dann noch einmal nach Norden, dann nach Osten, dann wieder nach Norden und so weiter. Weil es für jeden Buchstaben zwei Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$ mögliche Buchstabenfolgen. Jede von diesen Folgen kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit, weil die Münze, mit der geworfen wird, fair ist. Der Polizist trifft Jack genau dann, wenn in der Buchstabenfolge genau zwei Mal *N* auftaucht. Wie viele Folgen der Länge neun mit genau zwei *N*s gibt es? Es wird einfacher, wenn wir ein rotes und ein grünes *N* in die Folge schreiben. Wenn wir also *OONONOOOO* und *OONONOOOO* unterscheiden, bekommen wir doppelt so viele Möglichkeiten. Das sieht schwieriger aus, ist aber einfacher zu berechnen.

Wählen wir zunächst die Position des roten *N* aus: Es gibt dafür neun Möglichkeiten. Danach wählen wir die Position des grünen *N* aus. Dafür gibt es noch acht Möglichkeiten, weil eine Position schon vom roten *N* versperert ist. Insgesamt gibt es also $8 \cdot 9 = 72$ Möglichkeiten, wenn wir beide *N*s unterscheiden. Weil wir das aber nicht tun wollten, müssen wir die 72 noch halbieren. Es gibt

also 36 Möglichkeiten, zwei nicht unterscheidbare N s in der Buchstabenfolge der Länge neun unterzubringen. Insgesamt waren es 512 mögliche Folgen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, Jack zu finden, beträgt also $\frac{36}{512} = \frac{9}{128} = 7,03\%$.

Aufgabe 1404: Wie lange spielst du mit?

Dir wird folgendes Spiel angeboten: In jeder Runde hast du die Wahrscheinlichkeit p , 10 Euro zu gewinnen, und die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$, alles bisher Gewonnene zu verlieren.

Nach jeder gewonnenen Runde kannst du entscheiden, ob du die nächste Runde mitspielen willst. Das Spiel endet also entweder, indem du alles verlierst, oder indem du aussteigst.

Wie lange solltest du mitspielen, wenn du deinen erwarteten Gewinn möglichst groß machen willst, und wie groß ist dann der erwartete Gewinn? (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

Nach der n -ten gespielten und gewonnenen Runde erwartest du einen zusätzlichen Gewinn von 10 Euro mit Wahrscheinlichkeit p und einen Verlust der vorher gewonnenen $10n$ Euro mit Wahrscheinlichkeit q .

Der erwartete „Nutzen“ des Mitspielens in der $n + 1$ -sten Runde ist dann $10p - 10nq = (10 + 10n)p - 10n$.

Ist dieser positiv, d. h. $n(p - 1) + p > 0$, bzw. $n < \frac{p}{1-p}$ so spielst du die nächste Runde; sobald $n \geq \frac{p}{1-p}$ steigst du aus.

Dein Gewinn ist also $10N$, wenn du in den ersten $N = \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid n < \frac{p}{1-p}\right\}$ Runden erfolgreich bist und 0 sonst. Dabei besitzt ersteres die Wahrscheinlichkeit p^N . Der erwartete Gewinn ist also $10Np^N$.

Aufgabe 1405: Notizzettel mit Zahlen

Eine bestimmte Anzahl gleicher Notizzettel wird beschriftet: Der erste mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4, der zweite mit den Zahlen 5, 6, 7 und 8, der dritte mit den Zahlen 9, 10, 11 und 12 usw. Dann werden die Zettel gemischt und ein Zettel wird zufällig gezogen. Wie lautet seine Beschriftung, wenn die Summe der Zahlen auf den restlichen Zetteln 4784 beträgt?

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Stehen auf den Zetteln die Zahlen von 1 bis n , so ist ihre Summe $s = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Die größte Zahl auf einem Zettel ist eine Viererzahl, also stehen auf einem Zettel die Zahlen $4x, 4x - 1, 4x - 2$ und $4x - 3$ mit der Summe $z = 16x - 6$. Die Restsumme der Zahlen ist $r = s - z$.

Nach Voraussetzung gilt $4784 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - (16x - 6)$, woraus folgt:

$9568 = n \cdot (n + 1) - 32x + 12$, also $n \cdot (n + 1) - 9556 = 32x$. Die linke Seite der Gleichung muss also durch 32 teilbar sein. Da $n \cdot (n + 1) - 9556$ positiv ist,

muss $n \geq 98$ sein ($97 \cdot 989506 < 9556$).

Für $T(n) = n \cdot (n+1) - 9556$ sind $T(98) = 146$ und $T(99) = 344$, beide nicht durch 32 teilbar, aber $T(100) = 533 = 32 \cdot 17$.

Ergebnis: Auf den 25 stehen die Zahlen von 1 bis 100 mit der Summe 5050. Auf dem gezogenen 17. Zettel stehen die Zahlen 65, 66, 67 und 68 mit der Summe 266. Die Restsumme ist $5050 - 266 = 4784$.

Aufgabe 1406: Niemals teilbar durch 5

Es seien x, y und z natürliche Zahlen, von denen keine durch 5 teilbar ist. Dann ist auch jede Summe $x^4 + y^4 + z^4$ nicht durch 5 teilbar. Ist diese Aussage korrekt? (H. F.)

Lösung:

Es sei $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ die Menge der möglichen Einerziffern von x, y und z . Dann ist $E_4 = \{0, 1, 5, 6\}$ die Menge der möglichen Einerziffern von x^4, y^4 und z^4 . Wir betrachten nun die mögliche Summe aus drei Elementen von E_4 , wobei Summen, die sich nur durch vertauschte Summanden unterscheiden, nicht als verschieden angesehen werden.

Mit S_i bezeichnen wir die Summen mit dem ersten Summanden i , $i \in E_4$.

Annahme: die Summe S_0 ist durch 5 teilbar.

Es sei $S_0 = 0 + k + m$ mit $k, m \in E_4$, wobei $S_0 = 0$ oder 5 oder 10 ist. Dann gilt notwendiger Weise: $k = 0$ oder $k = 5$ und $m = 0$ oder $m = 5$. Daraus folgt, dass die Zahlen x, y und z durch 5 teilbar sind – im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist die Annahme falsch.

Annahme: die Summe $S_1 = 1 + k + m$ mit $k, m \in E_4$ ist ein Vielfaches von 5, also $S_1 = 5$ oder 10.

Dann gibt es aber zu $k = 0, 1, 5$ oder 6 kein $m \in E_4$ so, dass $S_1 = 5$ oder 10 ist. Die Annahme ist falsch.

Wäre $S_5 = 4 + k + m$ mit $k, m \in E_4$ ein Vielfaches von 5, so wäre $k = 0$ oder 5 und $m = 0$ oder 5, also auch x, y und z ein Vielfaches von 5 im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wäre $S_6 = 6 + k + m$ mit $k, m \in E_4$ ein Vielfaches von 5, dann wäre für $k = 0, 1, 5$ oder 6 das jeweils zugehörige m nicht aus E_4 – ein Widerspruch.

Damit ist gezeigt: keine Summe S_i mit $i \in E_4$ ist ein Vielfaches von 5.

Eine Teilbarkeitsregel für 7

Für jede der Zahlen t , $t = 2, 3, 4, \dots, 10$ gibt es eine Regel R_t , mit der man – ohne Division! – entscheiden kann, ob eine ganze Zahl $z \geq 0$ durch t ohne Rest teilbar ist.

Wenn t ein Teiler von z ist, dann schreiben wir $t \mid z$.

Es sei $z = a_n \dots a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung der Zahl $z \geq 0$.

$R_2 : 2 \mid z$; falls a_0 eine gerade Zahl ist;

$R_3 : 3 \mid z$; wenn $3 \mid (a_n + \dots + a_1 + a_0)$ gilt;

$R_4 : 4 \mid z$; falls $4 \mid a_1 a_0$ ist;

$R_5 : 5 \mid z$; wenn $a_0 = 0$ oder $a_0 = 5$ ist;

$R_6 : 6 \mid z$; wenn $2 \mid z$ und $3 \mid z$ gilt;

$R_7 : 7 \mid z$; ?

$R_8 : 8 \mid z$; wenn $8 \mid a_2 a_1 a_0$ zutrifft;

$R_9 : 9 \mid z$; wenn $9 \mid (a_n + \dots + a_1 + a_0)$ gilt;

$R_{10} : 10 \mid z$; wenn $a_0 = 0$ ist.

Die Regeln R_t sind allgemein bekannt – außer der Regel R_7 für die Teilbarkeit einer Zahl durch 7. Und dabei ist sie ganz einfach – auch ihr Beweis.

Regel R_7

Für eine ganze Zahl $z = a_n \dots a_1 a_0$ gilt die Teilbarkeitsregel

$R_7 : 7 \mid a_n \dots a_1 a_0$ dann, aber auch nur dann, wenn $7 \mid a_n \dots a_1 - 2a_0$ zutrifft.

Beispiel: Für $z = 392$ gilt: $7 \mid 39 - 2 \cdot 2$, und siehe da, $7 \mid 392$; ist jedoch $z = 521$, so ist 7 weder ein Teiler von $52 - 2 \cdot 1$ noch von 521.

Beweis von R_7

Mit m sei die Zahl $a_n \dots a_1$ bezeichnet. Dann ist $z = 10m + a_0$.

1. Teil des Beweises:

Es gelte $7 \mid m - 2a_0$. Daraus folgt $7 \mid 10(m - 2a_0) + 21a_0 \Rightarrow 7 \mid 10m + a_0$, also $7 \mid z$.

Der Beweis von R_7 ist nicht vollständig. Zu seiner Vollständigkeit ist noch zu zeigen: Wenn $7 \mid z$ gilt, dann muss $7 \mid m - 2a_0$ zutreffen.

2. Teil des Beweises:

Es gelte $7 \mid 10m + a_0$. Daraus folgt $7 \mid 21m - 2(10m + a_0) \Rightarrow 7 \mid m - 2a_0$, wie behauptet.

In konkreten Anwendungen von R_7 auf große Zahlen $z = 10m + a_0$ wird man meist nicht unmittelbar erkennen, ob $z_1 = m - 2a_0$ durch 7 teilbar ist. Dann

wird man R_7 auf z_1 anwenden und gegebenenfalls danach den „ R_7 -Prozess“ so lange wiederholen, bis man zu einer Zahl z_k gelangt, bei der sich zeigt, ob $7 \mid z_k$ zutrifft oder nicht.

Wenn dann $7 \mid z_k$ gilt, so folgt daraus:

$7 \mid z_k \Rightarrow 7 \mid z_{k-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow 7 \mid z_1$ und schließlich $7 \mid z$.

Beispiel mit $k = 4$:

$$z \Rightarrow z_1 \Rightarrow z_2 \Rightarrow z_3 \Rightarrow z_4$$

$$7 \mid 538.594? \Rightarrow 7 \mid 53851? \Rightarrow 7 \mid 5383? \Rightarrow 7 \mid 532? \Rightarrow 7 \mid 49. \Rightarrow 7 \mid 538.594$$

Anhang

Es gibt eine Teilbarkeitsregel für 19, die kaum jemand kennt – weil sie praktisch keine Anwendung findet.

Es seien $z = a_n \dots a_1 a_0 \geq 0$ und $m = a_n \dots a_2$, so dass $z = 100m + a_1 a_0$ ist.

Dann gilt:

$R_{19} : 19 \mid a_n \dots a_1 a_0$ dann, aber auch nur dann, wenn $19 \mid a_n \dots a_2 + 4a_1 a_0$ zutrifft.

Beweis

1. Teil des Beweises:

Es gelte $19 \mid m + 4a_1 a_0$. Daraus folgt mit $19 \cdot 21 = 399$:

$$19 \mid 100(m + 4a_1 a_0) - 19 \cdot 21a_1 a_0 \Rightarrow 19 \mid 100m + a_1 a_0, \text{ also } 19 \mid z.$$

2. Teil des Beweises:

Es gelte $19 \mid 100m + a_1 a_0$. Daraus folgt:

$$19 \mid 19(5m - a_1 a_0) + 5(m + 4a_1 a_0). \text{ Weil mit der Voraussetzung } 19 \mid 5(m + 4a_1 a_0) \text{ gilt } \Rightarrow 19 \mid m + 4a_1 a_0.$$

Eine besondere Aufgabe

Eine Zahl mit 11 bemerkenswerten Eigenschaften

von Hartwig Fuchs

Es gibt genau eine neunziffrige natürliche z , für die gilt:

- (1) In der Zifferndarstellung von z kommt jede der Ziffern $1, 2, \dots, 9$ genau ein Mal vor;

- (2) die zwei ersten Ziffern von z bilden eine Zahl, die ein Vielfaches von 2 ist;
- (3) die drei ersten Ziffern von z bilden eine Zahl, die ein Vielfaches von 3 ist;
- ...
- (8) die acht ersten Ziffern von z bilden eine Zahl, die ein Vielfaches von 8 ist;
- (9) die neunziffrige Zahl z ist ein Vielfaches von 9;
- (10) die aus den drei letzten Ziffern von z gebildete Zahl ist eine Kubikzahl.

H.F.

Lösung:

Es sei $z = z_1 z_2 \dots z_9$ die Zifferndarstellung von z .

Zunächst gilt: Die Ziffern z_2, z_4, z_6, z_8 sind gerade wegen (2), (4), (6), (8) und keine von ihnen ist 0 wegen (1).

Daraus folgt wegen (1): die Ziffern z_1, z_3, z_5, z_7, z_9 sind ungerade.

(11) Wegen (5) ist dann $z_5 = 5$

(12) Aus (10) folgt: $z_7 z_8 z_9$ ist eine ungerade Kubikzahl k^3 mit $k^3 < 1000$ – also ist $k^3 = 5^3 = 125$ oder $= 7^3 = 343$ oder $= 9^3 = 729$.

Da $k^3 = 125$ wegen (11) und $k^3 = 343$ wegen (1) auszuschließen sind, ist $z_7 z_8 z_9 = 729$, so dass $z_7 = 7, z_8 = 2, z_9 = 9$ gilt.

(13) Aus (11) und (12) folgt: $z_3 = 1$ oder $z_3 = 3$ sowie $z_4 = 4, 6$ oder 8 .

Wegen (4) ist $z_1 z_2 z_3 z_4$ und damit auch $z_3 z_4$ ein Vielfaches von 4. Für $z_3 = 1$ ist $z_3 z_4 = 16$ und für $z_3 = 3$ ist $z_3 z_4 = 36$. Daher ist $z_4 = 6$.

(14) Es ist $z_1 z_2 z_3 65 z_6 = z_1 z_2 z_3 000 + 65 z_6$, wobei $z_1 z_2 z_3 000$ wegen (2) und (3) sowie $65 z_6$ wegen (6) Vielfache von 6 sind. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn für $65 z_6$ gilt: $z_6 = 4$

(15) Wegen (12), (13), (14) bleibt für z_2 nur die Ziffer 8 übrig, also $z_2 = 8$.

(16) Nach (11) – (15) ist nur noch zu entscheiden:

Ist $z_1 = 1$ und dann $z_3 = 3$ oder $z_1 = 3$ und dann $z_3 = 1$? Daher gilt:
 $z = 183.654.729$ oder $z = 381.654.729$.

Nun ist aber nur 3.816.547 ein Vielfaches von 7, so dass
 $z = 381.654.729$ ist.

(17) Aus (11) – (16) folgt eine weitere Eigenschaft der Zahl z :

Sie ist die einzige Zahl, welche die Bedingungen (1) – (10) erfüllt.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

$$\begin{array}{cccc}
 & M & O & N & I \\
 & M & O & N & I \\
 + & D & o & o & o \\
 \hline
 & I & N & O & M
 \end{array}$$

Ersetze in der Figur die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine korrekte Addition entsteht. Wie heißt dann die dem Wort MONOID zugeordnete Zahl?

Hinweis: o ist die Ziffer Null.

Lösung

Die Spalten der Addition seien von links nach rechts mit S_1, S_2, S_3, S_4 bezeichnet. U_i sei ein evtl. auftretender Additionsübertrag von der Spalte S_i in die Spalte S_{i-1} , $i = 2, 3, 4$.

$S_4 \Rightarrow I + I$ ist gerade, also ist M gerade.

$S_1 \Rightarrow M + M + D + U_2 = I \leq 9$; daher ist $M \leq 4$.

Es sei $M = 4$.

$S_4 \Rightarrow I + I = 4$ oder $I + I = 14$ und daher $I = 2$ oder $I = 7$ – in beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu S_1 .

Also ist $M = 2$ und daher gilt wegen $I \geq 2M + D \geq 4$ (vgl. S_1):

$S_4 \Rightarrow I + I = 10 + M = 12$ und somit ist $I = 6$.

$S_1 \Rightarrow 4 + D + U_2 = 6$.

Es sei $D = 2$ und damit $S_2 : 2O + U_3 = N$.

Für $U_3 = 0 \Rightarrow S_2 : 2O = N$ und $S_3 : 2N + 1 = O$, woraus $3N = -2$ folgt; für $U_3 = 1 \Rightarrow S_2 : 2O = N - 1$ und $S_3 : 2N + 1 = 10 + O$, woraus $3N = 17$ folgt.

In beiden Fällen ist N nicht ganzzahlig $\Rightarrow D \neq 2$. Also ist $D = 1$.

Aus $D = 1$ folgt $U_2 = 1$, so dass gilt $S_2 : 2O + U_3 = 10 + N$.

Für $U_3 = 0 \Rightarrow S_2 : 2O = 10 + N$ und $S_3 : 2N + 1 = O$, woraus $3N = 8$ folgt;

für $U_3 = 1 \Rightarrow S_2 : 2O + 1 = 10 + N$ und $S_3 : 2N + 1 = 10 + O$, woraus $3N = 27$ folgt.

Somit ist $N = 9$ und $O = 9$.

Die Addition, die der Figur zuzuordnen ist, lautet:
 $2996 + 2996 + 1000 = 6992$ – und das ist korrekt.
 Und MONOID = 299961.

Interessante Apps im Blick

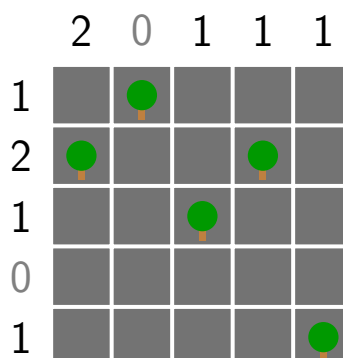
Zelte und Bäume

von Silke Schneider

Bei dem Spiel handelt es sich um ein Rasterfeld, bei dem man zu vorgegebenen Bäumen noch Zelte setzen muss. Das Spiel startet mit einem quadratischen Rasterfeld, das schwarz ist und auf dem nur Bäume stehen. Durch Antippen der Felder kann man darauf Grünflächen (einmal antippen) oder Zelte (zweimal antippen) erzeugen. Alle schwarzen Flächen müssen nun gefüllt werden. Die Zahlen am Rand des Rasters geben Hinweise darauf, wie viele Zelte in der jeweiligen Reihe oder Spalte stehen. Die Zelte dürfen sich nicht berühren – auch nicht diagonal.

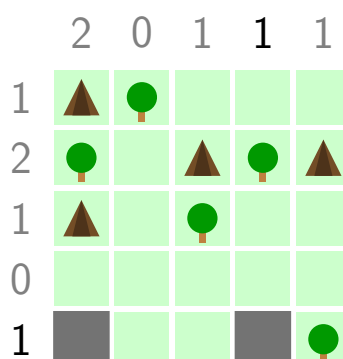
Spielfeld im Anfangszustand

Im folgenden Bild sieht man ein unausgefülltes Spielfeld:



Spielfeld im fast gelösten Zustand

Das nächste Bild zeigt dieses Spielfeld fast ausgefüllt:



Das Spiel kann sowohl online als auch offline gespielt werden. Je größer das Rasterfeld, desto schwieriger werden die Level.

Weiterführende Informationen

- **Altersfreigabe:** Freigegeben ab 0 Jahren
- **Downloads:** Über 1.000.000 Downloads
- **Anbieter:** Google Commerce Ltd.
- **Größe:** 55,86 MB
- **Genre:** Logik-Puzzle

Rubrik der Löserinnen und Löser

Stand nach Heft 166

Adernach, KSG

Kl. 6: Nils Boxberger 3.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning):

Kl. 6: Emil Nies 27;

Kl. 7: Luca Schwarz 12.

Kl. 8: Christina Karst 75.

Kl. 10: Lisa Schäfer 37.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:

Kl. 6: Lilly Schäfer 15;

Kl. 13: Moritz Groh 23.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Gymnasium Calvanienberg:

Kl. 7: Simon Hagemann 8;

Kl. 9: Anna-Franziska Hagemann 13.

Kl. 11: David Hagemann 18, Jonas Löcher 20.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule:

Kl. 5: Nik Paolo Wagner 5;

Kl. 6: Marleen Groitl 7.

Bingen, Stefan-George Gymnasium:

Kl. 5: Ida Marx 10;

Kl. 6: Anna Jockers 54;
Kl. 7: Oskar Bellenbaum 1;
Kl. 8: Mais Alkhateeb 62, Tim Jockers 108;

Birkenfeld, Gymnasium Birkenfeld:

Kl. 12: Joschua Jung 66.

Eckartsberg, Christian-Weise-Gymnasium:

Kl. 6: Maxi Lingott 39.

Essenheim, Grundschule:

Kl. 1: Nora Menzel 38.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag):

Kl. 6: Jonas Günther 10, Ben Schneider 2, Sophia Clausen 35.

Kl. 9: Philip Mühlbeyer 19.

Freiburg, Friedrich-Gymnasium:

Kl. 5: Anna Petzold 30,5.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium:

Kl. 7: Ben Oberreuther 32, Jasmin Heckel 12.

Kl. 8: Yuna Klabunde 7, Mats Frommherz 12.

Kl. 10: Erik Eberlein 74, Niklas Gelhausen 87, Lars Noll 51, Till Radünz 87.

Hör-Grenzhausen, Gymnasium im Kannenbäckerland:

Kl. 9: Zeynep Muslugüme 109.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:

Kl. 8: Imran Aouzi 19.

Lampertheim, Gauß-Gymnasium:

Kl. 10: Timon Bamberg 14.

Linz, Martinus-Gymnasium:

Kl. 10: Vladyslav Pochynok 82.

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:

Kl. 12: Lean Idrizaj 13;

Mainz, Maria-Ward-Schule:

Kl. 8: Jana Valentina Ivic 15;

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 8: Jonas Dürkes 48.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 10: Lukas Dürkes 27.

Mainz, Willigis-Gymnasium:

Kl. 9: Ioan Salaru 55.

Marzling, Josef-Hofmiller-Gymnasium:

Kl. 9: Stephanos Dimitriou 118.

Mühlheim an der Ruhr, Otto-Pankok-Schule:

Kl. 10: Nazar Cherpak 21.

München, Theodolinden-Gymnasium Bayern:

Kl. 7: Richard Li 17.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis):

Kl. 8: Martin Schroff 42, Sophia Kiehn 48.

Kl. 9: Nola Bernhardt 11.

Kl. 10: Daniel Laibach Muniz 79;

Neuwied, Werner-Heisenberg-Gymnasium:

Kl. 8: Lixin Hou 83.

Nieder-Olm, Gymnasium:

Kl. 7: Nolwenn Büttenbender 52, Dmytro Rybnik 45.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:

Kl. 12: Fabian Schwörer 6, Nadine Sliwa 3.

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 11: Jasmin Borrmann 58;

Kl. 13: Emilie Borrmann 56.

Saarburg, Gymnasium:

Kl. 13: Nils Angel 93.

Schkeuditz, Wilhelm-Ostwald-Gymnasium:

Kl. 9: Renzo Pereira 9.

Schwäbisch Gmünd, Landesgymnasium für Hochbegabte:

Kl. 7: Yunqi Li 57.

Speyer, Gymnasium am Kaiserdom:

Kl. 5: Maximilian Weidl 4.

Stendal, Werner von Siemens Gymnasium:

Kl. 7: Marlin Jacob 34.

Tangermünde, Diesterweg-Gymnasium:

Kl. 11: Mai Linh Dang 91.

Wangen, Rupert-Neß-Gymnasium:

Kl. 10: Felix Fügenschuh 7.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:

Kl. 7: Lisa Anton 8.

Wörth, Europa-Gymnasium:

Kl. 11: Leonid Vasilev 94.

ohne Schule:

Kl. 11: Jonas Meitzel 17.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Gregor Salaru

Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Gregor Salaru, Maximilian Wendt

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Inhalt

Einladung zur MONOID-Jahresfeier	3
H. Fuchs: Beweis ohne Worte	3
H. Sewerin: Das Denkerchen	4
H. Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen	5
H. Fuchs: Von den Voraussetzungen eines Beweises	6
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 166	12
Neue Mathespielereien	15
Neue Aufgaben	17
Gelöste Aufgaben aus MONOID 166	18
Eine Teilbarkeitsregel für 7	22
H. Fuchs: Eine besondere Aufgabe	24
H. Fuchs: Monoidale Knobelei	26
Silke Schneider: Interessante Apps im Blick	27
Rubrik der Löserinnen und Löser	28
Redaktion	31

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>

