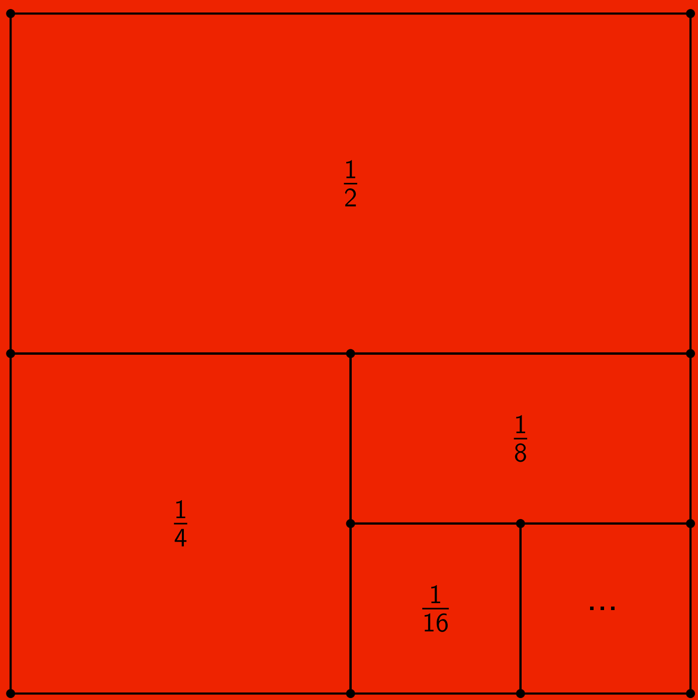
Jahrgang 46 Heft 166 Juni 2026

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. August 2026.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Leininger-Gymnasium Grünstadt** bei Herrn Martin Mattheis, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gibt es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Eine widersprüchliche Regel der Logik

?

Die Mathematiker Quaoar (Q.) und Pnin (P.) unterhalten sich über die Grundlagen der Logik.

Q.: Eine der Regeln, welche die griechischen Logiker/Mathematiker der Logik zugrunde legten, ist der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, dem die Logiker den heute noch gebräuchlichen Namen „tertium non datur" gaben. Er lautet:

(1) Eine Aussage der Logik ist entweder wahr oder sie ist falsch und sie nannten (1) das „tertium non datur": ein Drittes gibt es nicht.

Eine unmittelbare Folge von (1):

(2) Ist eine Aussage S wahr, so ist ihre Negation (Verneinung) $\neg S$ falsch; ist aber S falsch, so ist $\neg S$ wahr.

Übrigens: Das „tertium ..." gilt nicht immer in der alltäglichen Realität.

Beispiel:
Ein Wanderer im Gebirge sagt: „Wenn es regnet, dann werde ich nass."
In vielen Fällen ist diese Aussage wohl wahr; wenn aber der Wanderer einen genügend großen Schirm aufspannt, bevor der Regen einsetzt, dann wird er nicht nass und seine Aussage ist daher nun falsch.

P.: Ich meine, auch in der Logik trifft das „tertium ..." nicht immer zu.
Mein Beispiel: Es seien S_1 und S_2 die nachfolgenden Aussagen. Dann sind $\neg S_1$ und $\neg S_2$ die Negationen von S_1 und S_2.

- S_1: Dieser Satz verwendet den Buchstaben i genau drei Mal.
- $\neg S_1$: Dieser Satz verwendet den Buchstaben i nicht genau drei Mal.
- S_2: Dieser Satz verwendet den Buchstaben i vier Mal.
- $\neg S_2$: Dieser Satz verwendet den Buchstaben i nicht vier Mal.

Für diese vier Aussagen gilt offensichtlich:
S_1 und $\neg S_1$ sind beide wahr sowie S_2 und $\neg S_2$ sind beide falsch.
In beiden Fällen besteht ein Widerspruch zu (2).
Aus dem Prinzip „tertium ..." lassen sich also Widersprüche herleiten?

Q.: Die Sätze S_1 und $\neg S_1$ stimmen Wort für Wort bis auf das Wort „nicht" überein. Das reicht aber nicht hin, damit $\neg S_1$ die Negation von S_1 ist.
Dazu muss noch gelten:

(*) Jeder in S_1 und zugleich in $\neg S_1$ vorkommende Ausdruck muss jeweils die gleiche Bedeutung besitzen.

Wenn man nun im Hinblick auf die Bedingung (*) das in S_1 und in $\neg S_1$ vorkommende Wort „Dieser" durch einen seine jeweilige Bedeutung genauer beschreibenden Ausdruck ersetzt – etwa durch:
„Dieser mit S_1 bezeichnete Satz" bzw. durch „Dieser mit $\neg S_1$ bezeichnete Satz" – so sieht man:
$\neg S_1$ is nicht die Verneinung von S_1. Also ist die Regel (2) nicht auf das Aussagenpaar $(S_1, \neg S_1)$ anwendbar und somit bildet es auch keinen Widerspruch zum „tertium ...".
Ganz entsprechend ergibt sich, dass auch das Aussagenpaar $(S_2, \neg S_2)$ keinen Widerspruch zum „tertium ..." bildet.

P.: Ich sehe es: Mein Beispiel führt zu keinem Widerspruch.

(H. F.)

„Das Denkerchen"

von Horst Sewerin

Auf der Dracheninsel leben 13 graue, 15 blaue und 17 rote Chamäleons. Wenn sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe begegnen, wechseln beide ihre Farbe zu der dritten Farbe, also werden beispielsweise ein graues und ein rotes Chamäleon bei der Begegnung beide blau.
Ist es möglich, dass zu irgendeinem Zeitpunkt alle Chamäleons auf der Insel die gleiche Farbe besitzen? (Die Antwort ist zu begründen!)
Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2026 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 164

In Heft 164 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Heute schlägt Paul eine Wette für Peter vor. Er zeigt ihm das abgebildete 5×7-Rechteck mit den eingezeichneten Linien und erklärt: „Jedes der 35 Einheitsquadrate in dem großen Rechteck enthält eine beliebige ganze Zahl. Du darfst nacheinander jede Zahl in einem der Einheitsquadrate von mir erfragen, bis du mir die Summe aller 35 Zahlen nennen kannst." Peter entgegnet: „Also muss ich alle 35 Zahlen erfragen, um die Summe zu kennen." Paul erwidert: „Nein, denn es gibt noch eine weitere Bedingung. Du erkennst sechs 2×3- bzw. 3×2-Rechtecke, von denen sich zwei in dem mittleren Feld überlappen. Die Summe der Zahlen in jedem dieser Rechtecke ist 0."

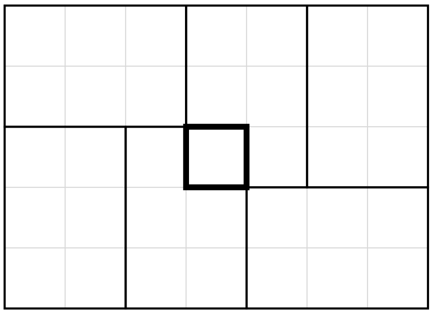


Abbildung 1: Das 5×7-Rechteck mit den sechs Teilrechtecken und dem überlappenden Mittelfeld.

Peter antwortet: „Aha, jetzt wird die Sache spannend. Was ist mein Wettgewinn?“ Paul sagt: „Ich habe noch fünf Schoko-Nikoläuse übrig, die ich dir schenken kann. Bei Deiner ersten Frage bleibt das so, aber mit jeder weiteren Frage erhältst Du einen Nikolaus weniger – natürlich muss Deine Antwort stimmen.“
Peter fragt nach: „Und wenn ich mehr als fünf Fragen brauche?“ „Dann musst Du mir einen Schoko-Nikolaus schenken,“ verlangt Paul.
Wie viele Schoko-Nikoläuse kann Peter bestenfalls gewinnen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Peter kann alle fünf Schoko-Nikoläuse gewinnen.
Er weiß bereits, dass die Summe der 24 Zahlen in den vier Rechtecken, die sich nicht überlappen, Null ist. Er braucht daher nur nach der Zahl in dem mittleren Feld zu fragen, in dem sich die beiden anderen Rechtecke überlappen. Wenn Paul ihm den Wert x dieser Zahl nennt, muss die Summe der fünf anderen Zahlen in jedem der überlappenden Rechtecke $-x$ sein. Also beträgt die Summe aller 35 Zahlen genau:

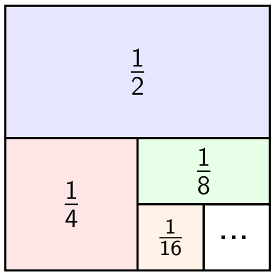
$$4 \cdot 0 + 2 \cdot (-x) + x = -x$$

Richtige Lösungen wurden eingesandt von Emilie Borrmann, Lisa Borrmann, Jasmin Heckel und Lisa Schäfer.

Paul will Peter nicht erlauben, nach der Zahl im mittleren Feld zu fragen. Wie viele Fragen braucht Peter jetzt, um die Wette zu gewinnen? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Beweis ohne Worte
Geometrische Reihe

Es ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$.



(H. F.)

Eine mathematische Miniatur
Gefärbte Ebene

Jeder Punkt der Ebene sei entweder blau (b) oder rot (r) gefärbt.
Dann gibt es zwei gleich gefärbte Punkte vom Abstand 3.

Nachweis:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3.
Wenn A und B von gleicher Farbe sind, dann gilt die Behauptung.
Es seien aber nun A und B verschieden farbig – etwa A ist blau und B ist rot.
Wenn dann C blau ist, dann sind A und C gleich farbig; ist C rot, dann sind B und C gleich farbig.
In beiden Fällen gibt es die Behauptung. (H. F.)

Was uns über den Weg gelaufen ist
Größenvergleich

Welche Zahl ist größer?

$$\sqrt[2]{1^3 + 2^3 + 3^3} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3}$$

Keine ist größer. (H. F.)

Aus den Archiven der Mathematik
Ein Satz von Fibonacci über Quadratzahlen*)
von Hartwig Fuchs

In der Gleichung S, (1) $S = Q + (1 + 3 + 5 + \cdots + Q - 2)$.
Sei Q eine positive, ungerade ganze Zahl.
Dann gilt:
Ist Q eine Quadratzahl, dann sind auch die Reihe $R = 1 + 3 + 5 + \cdots + Q - 2$ und die Summe S Quadratzahlen.

Nachweis

Zunächst eine Summenformel: Für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ ist

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Für die Reihe R gilt dann:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + Q - 2 &= 1 + \cdots + (Q-1) - 2 \cdot \left(1 + \cdots + \frac{Q-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(Q-1)Q - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2} \cdot \left(\frac{Q-1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{2}Q - \frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{Q-1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

und für S ist

$$S = Q + \left(\frac{Q-1}{2}\right)^2 = Q + \frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4} = \left(\frac{Q+1}{2}\right)^2.$$

Beispiel

Für $Q = 7^2 = 49$ ist $R = 24^2 = 576$ und $S = 25^2 = 625$. Es gilt $49 + 576 = 625$.

Bemerkung

Die Gleichung (1) ist eine Formel zur Erzeugung pythagoreischer Tripel (Q, R, S) für ungerade Q.

*) Dieser Satz findet sich in Fibonaccis Schrift „Liber quadratorum“ (Buch von den Quadratzahlen) aus dem Jahre 1222 - ohne den Beweis oben, der in heutiger Formulierung geführt ist.

Mainzer Mathe-Akademie
2. September bis 6. September 2026

Bei der Mainzer Mathe-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern, unter der Anleitung von Professorinnen und Professoren der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathe-Akademie anzumelden, die vom 2. September bis 6. September 2026 an der Universität Mainz stattfindet.
Ein genauer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Unterbringung

Jugendhaus Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:
`https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/`

Mathematische Entdeckungen

Die Geschwister Fabi und Ron möchten für ihre Eltern als Geschenk etwas basteln. Dafür benötigen die beiden Papier von unterschiedlicher Größe, allerdings haben sie in ihrer Bastelkiste nur Schere, Kleber und quadratisches Papier.

a) Wie können Fabi und Ron ein Blatt Papier durch Falten möglichst präzise halbieren oder vierteln?

b) Wie können die Geschwister ein Blatt Papier durch Falten möglichst präzise dritteln? (BL)

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 165

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

Finde die Quadratzahl

Es seien $n = 6ab$, $m = ab6$ natürliche Zahlen in Zifferndarstellung und es gelte $n - 600 = 600 - m$. Dann ist die Summe der Zahlen a und b eine Quadratzahl. Zeige dies. (H. F.)

Lösung:

Es ist $n = 600 + 10a + b$ und $n = 100a + 10b + 6$. Aus $n - 600 = 600 - m$ folgt dann:

$$10a + b = 600 - (100a + 10b + 6)$$
$$\Rightarrow (11a + b) \cdot 10 + b = 594$$

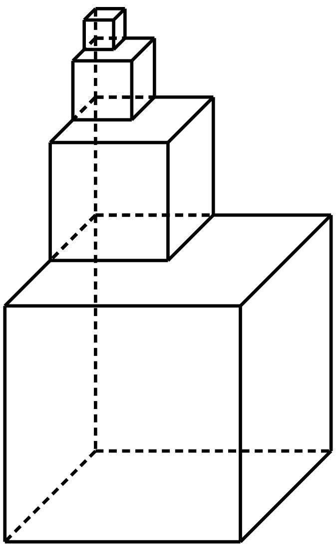
und somit ist $b = 4$. Damit ist $11a = 55$, also $a = 5$. Mithin ist $a + b$ die Quadratzahl 9.

Ein Würfelstapel

Vier undurchsichtige Würfel, mit den Kantenlängen 24cm, 12cm, 6cm und 3cm sollen mit absteigender Größe auf eine undurchsichtige Tischplatte, gestellt werden. Dabei muss jeder Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden Würfels bzw. der Tischplatte ruhen. Zusätzlich darf keiner der Würfel über den Tisch hinausragen.

Wie groß ist der Gesamtflächeninhalt der Oberflächenteile, die sichtbar sind? (AKö)

Lösung:



Jeder der Würfel hat sechs Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche auf der er steht nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der oberen Fläche des größten Würfels. Gleiches gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Für den gesammten Oberflächeninhalt der vier Würfel gilt dann:

$$O_w = 5 \cdot \left(24^2 + 12^2 + 6^2 + 3^2\right) - \left(12^2 + 6^2 + 3^2\right) = 3636.$$

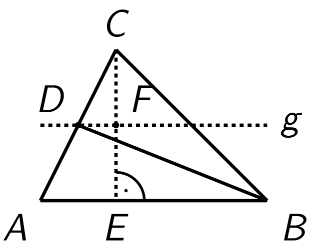
Der Oberflächeninhalt aller sichtbaren Würfelflächen beträgt also $3636\,\text{cm}^2$.

Halbierung einer Dreiecksfläche

Konstruiere im Dreieck ABC einen Punkt D auf der Seite AC, sodass für das Dreieck ABD gilt: Die Fläche von ABD ist halb so groß wie die Fläche von ABC

(H. F.)

Lösung:



Konstruktionsschritte:

- Höhe CE im $\triangle ABC$
- Mittelpunkt F von CE
- Parallele g zu AB durch F
- Schnittpunkt D von g und AC

Die Länge $|EC|$ von EC sei h. Dann gilt:
$|ABC| = \frac{1}{2}|AB| \cdot h$ und $|ABD| = \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2}|ABC|$.

PNIN =?

Man ersetze im Wort *PNIN* verschiedene (gleiche) Buchstaben durch verschiedene (gleiche) Ziffern so, dass man eine vierstellige gerade Quadratzahl erhält, bei der die erste Ziffer doppelt so groß wie die Einerziffer ist. (Keine Computer-Lösung bitte)

(H. F.)

Lösung:

Die dem Wort *PNIN* entsprechende Zahl sein *pnin*. Schreibt man $pnin = (a \cdot 10 + b)^2 = (a^2 + 2ab) \cdot 10 + b^2$ mit positiven ganzen Zahlen a und b, so sieht man: n ist die Einerziffer von b^2.

Nun ist die Einerziffer einer Quadratzahl $0, 1, 4, 5, 6$ oder 9. Daher gilt zunächst:

(1) $n = 0, 1, 4, 5, 6$ oder 9.

Da nun *pnin* als gerade Quadratzahl vorausgesetzt ist, folgt: $n \neq 0, 1, 5$ und 9. Weiter folgt aus der Bedingung $p = 2n$, dass $n < 5$ ist (aus $n \geq 5$ ergibt sich nämlich $p \geq 10$). Damit reduziert sich (1) auf

(2) $n = 4$ und somit $p = 8$, so dass $pnin = 84i4$ ist.

Weil nun $8000 < 84i4 < 9000$ ist und *pnin* das Quadrat einer Zahl mit der Einerziffer 2 ist, folgt: $84i4 = 92^2 = 8464$.

Fazit: $PNIN \rightarrow 8464$.

Spielerei

Finde für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ alle Zahlen z kleiner als 100, die gleich dem n-fachen ihrer Quersumme sind, also dem doppelten, dreifachen usw.

(Wolfgang J. Bühler)

Lösung:

1. Möglichkeit: systematisch alle Zahlen überprüfen, wass mit ein bisschen Kopfrechnen möglich ist.
2. Möglicheit: Ist die Zehnerziffer a und die Einerziffer b, so suchen wir nach den Lösungen der Gleichung $10a + b = n(a + b)$ d. h. $(10 - n)a = (n - a)b$. Somit erhalten wir:

$n = 1, \Rightarrow 9a = b$ mit Lösungen $b = 1, 2, 3, \dots, 9$.
$n = 2 \Rightarrow 8a = b$. Mit $a = 1$ folgt $b = 8$ also $z = 18$. Für $a > 1$ folgt $b > 10$, also keine Lösung.
$n = 3 \Rightarrow 7a = 2b$. a muss also gerade sein. $a = 2 \Rightarrow b = 7$ Lösung $z = 27$. $a > 2 \Rightarrow b > 10$ also keine Lösung.
$n = 4 \Rightarrow 6a = 3b$. Für diesen Fall erhalten wir für $a > 4$ keine Lösungen.
Für $a < 4$ ergeben sich die Folgenden Lösungen:
$a = 1,\ b = 2,\ z = 12$
$a = 2,\ b = 4,\ z = 24$
$a = 3,\ b = 6,\ z = 36$
$a = 4,\ b = 8,\ z = 48$
führen wir dies fort, so ergeben sich $45, 54, 21, 42, 63, 84, 72, 81$ als weitere Lösungen für die Zahl z.

Primzahl-Zwillinge

Bestimme alle Primzahl-Zwillinge der Form $2^n - 1, 2^n + 1$. (H. F.)

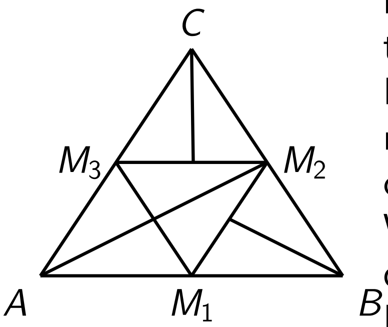
Lösung:

Eine der drei aufeinander folgenden Zahlen $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ ist durch 3 teilbar. Weil 2^n nicht durch 3 teilbar ist, ist entweder $2^n - 1$ oder $2^n + 1$ durch 3 teilbar. Die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist 3. Somit ist entweder $2^n + 1 = 3$ und daher $2^n - 1 = 1$ oder $2^n - 1 = 3$ und somit $2^n + 1 = 5$.
Im 1. Fall ist $2^n - 1$ keine Primzahl. Im 2. Fall sind 3 und 5 Primzahlen und somit die einzige Lösung.

Dreieck im Dreieck

Im Innengebiet eines Dreiecks vom Flächeninhalt 1 liegen 17 Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen können. Zeige: Drei dieser Punkte bilden ein Dreieck mit einem Flächeninhalt, der höchstens $\frac{1}{8}$ ist. (H. F.)

Lösung:



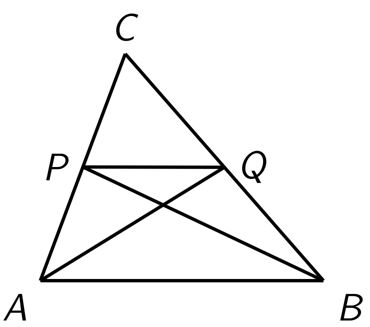
Verbindet man die Seitenmitten M_1, M_2 und M_3 eines Dreiecks ABC, so erhält man vier kongruente und mithin flächengleiche Dreiecke, jedes vom Flächeninhalt $\frac{1}{4}$. Jedes dieser vier Dreiecke Halbiert man. Dann hat jedes dieser acht Dreiecke den Flächeninhalt $\frac{1}{8}$.
Wenn 17 Punkte auf diese 8 Dreiecke verteilt werden, dann gibt es ein Dreieck, das 3 Punkte enthält. Diese 3 Punkte bilden ein Dreieck, dessen Fläche $\leq \frac{1}{8}$ ist.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur die halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. August 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Flächenvergleich



Im Dreieck $\triangle ABC$ seien $P \in AC$ und $Q \in BC$ so gewählt, dass PQ und AB parallel sind. Wenn man dann P mit B und Q mit A verbindet, so gilt:
Die Dreiecke $\triangle AQC$ und $\triangle BCP$ sind flächengleich.
Zeige dies. (H. F.)

II. Rechteck aus Quadraten

Kannst du neun Quadrate mit den Seitenlängen $2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36$ so zusammensetzen, dass sie ein vollständiges Rechteck bilden? (H. F.)

III. Wege im 9-Eck

Es seien $P_1, P_2, \ldots P_9$ die Ecken eines regelmäßigen $9-$Ecks E. Wie viele diagonale Wege durch das Innengebiet von E gibt es,

a) wenn der Weg $\overrightarrow{PQ}$ von P nach Q als verschieden von Weg $\overrightarrow{QP}$ von Q nach P betrachtet wird?

b) wenn die Wege $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QP}$ nicht unterschieden werden? (H. F.)

IV. Magisches Quadrat mit Jahreszahlen

Setze in die sechs leeren Felder natürliche Zahlen so ein, dass ein magisches Quadrat entsteht.

Hinweis: Ein Quadrat ist magisch, wenn die Summe der Zeilen, Spalten und Diagonaleinträge immer das gleiche Ergebnis liefert.

2025		
	2026	
		2027

(MG)

V. Fünfundvierzig

Die Zahl 45 soll so in vier Summanden zerlegt werden, dass alle Resultate gleich sind, wenn man zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten Summanden 2 subtrahiert, den dritten Summanden mit 2 multipliziert und den vierten Summanden durch 2 dividiert. (Hans Engelhaupt)

VI. Eine Domino-Knobelei

Mit Domino-Steinen lassen sich sehr gut Aufgaben bilden. Wendelin ist groß darin, solche selbst zu erfinden. Mit acht Steinen will er ein Zauberquadrat legen, wobei die senkrechten und die waagerechten Reihen jeweils die Summe 16 ergeben sollen. Welche Steine muss er nehmen und wie muss er sie zusammenlegen? (Ulrike Barth)

VII. Gerade oder Ungerade?

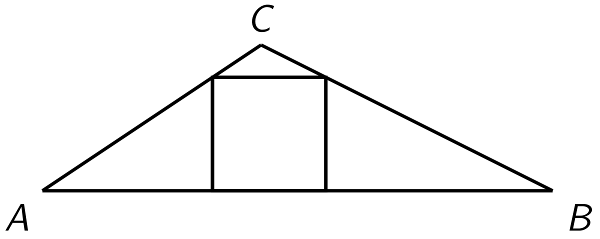
Ist $1^2+2^2+3^3+\ldots+2025^2+2026^2$ eine gerade oder eine ungerade Zahl? (MG)

Neue Aufgaben
Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. August 2026.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1400: Als Differenz zweier Quadrate
Marco behauptet, jede Zahl der Form $10^{n+1} + 1$ (d.h. $100\dots1$) mit einer natürlichen Zahl n lasse sich als Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlichen Zahlen darstellen. Hat er recht? (Wolfgang J. Bühler)

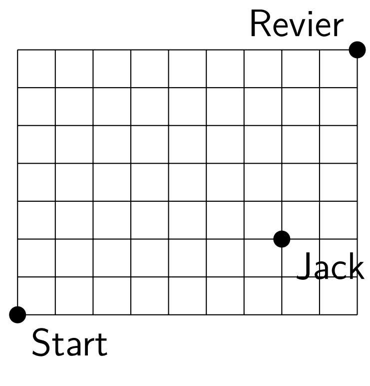
Aufgabe 1401: Quadrat im Dreieck
Zeichne in ein beliebiges Dreieck ein Quadrat, dessen zwei Eckpunkte auf einer Seite des Dreiecks und die beiden anderen Eckpunkte auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks liegen. Ein Beispiel:



(Christoph Sievert)

Aufgabe 1402: Ein Rechteck
Der Umfang eines Rechtecks beträgt 38cm. Das Quadrat über der Diagonalen hat einen Flächeninhalt von 205cm^2. Wie lang und wie breit ist das Rechteck? (AKö)

Aufgabe 1403: Verbrecherjagd



Der Straßenplan des Londoner Stadtteils Whitechapel im Jahre 1888, wird (abstrahiert) als Gitter wie in der Graphik dargestellt. An der angezeigten Kreuzung versteckt sich nach vollbrachter Tat der gefährliche Verbrecher „Jack the Ripper". Er wird von dem wackeren Streifenpolizisten Smith gesucht, der nach einer bewährten Ermittlungsmethode arbeitet: Er startet links unten in dem Gitter und wirft eine (faire) Münze. Je nach Ergebnis geht er Richtung Osten oder Norden bis er an die nächste Kreuzung kommt. Dort wiederholt er das Vorgehen.

Sobald er am Nordrand oder Ostrand von Whitechapel ankommt, geht er schnurstracks in das Polizeirevier in der nordöstlichen Ecke des Viertels und meldet dort Inspektor Abberline – dem Leiter der Ermittlungen – den Erfolg (oder Misserfolg) seiner Suche.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt der Streifenpolizist Smith Jacks Versteck auf seinem zufälligen Weg?

(AcK)

Aufgabe 1404: Wie lange spielst du mit?
Dir wird folgendes Spiel angeboten: In jeder Runde hast du die Wahrscheinlichkeit p, 10 Euro zu gewinnen, und die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$, alles bisher Gewonnene zu verlieren.
Nach jeder gewonnenen Runde kannst du entscheiden, ob du die nächste Runde mitspielen willst. Das Spiel endet also entweder, indem du alles verlierst, oder indem du aussteigst.
Wie lange solltest du mitspielen, wenn du deinen erwarteten Gewinn möglichst groß machen willst, und wie groß ist dann der erwartete Gewinn? (Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 1405: Notizzettel mit Zahlen
Eine bestimmte Anzahl gleicher Notizzettel wird beschriftet: Der erste mit den Zahlen $1, 2, 3$ und 4, der zweite mit den Zahlen $5, 6, 7$ und 8, der dritte mit den Zahlen $9, 10, 11$ und 12 usw. Dann werden die Zettel gemischt und ein Zettel wird zufällig gezogen. Wie lautet seine Beschriftung, wenn die Summe der Zahlen auf den restlichen Zetteln 4784 beträgt? (Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1406: Niemals teilbar durch 5
Es seien x, y und z natürliche Zahlen, von denen keine durch 5 teilbar ist. Dann ist auch jede Summe $x^4 + y^4 + z^4$ nicht durch 5 teilbar. Ist diese Aussage korrekt?

(H. F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 165

Klassen 9–13

Aufgabe 1379: Wert eines Terms

a) Zeige: Der Term $\frac{n}{40} + \frac{10}{n}$ nimmt für alle natürlichen Zahlen n einen Wert von mindestens 1 an.
b) Gib zwei natürliche Zahlen a und b an, für die der Term $\frac{n}{a} + \frac{b}{n}$ für alle natürlichen Zahlen n einen Wert von mindestens 2 annimmt.

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

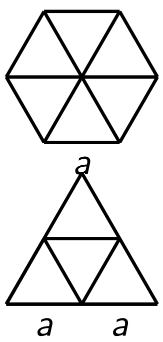
a) Die Ungleichung $\frac{n}{40}+\frac{10}{n} \geq 1$ lässt sich äquivalent umformen in $n^2+400 \geq 40n$ bzw. $n^2 - 40n + 400 \geq 0$ bzw. $(n-20)^2 \geq 0$, wobei für $n = 20$ der wert 0 und sonst auf der linken Seite stets ein positiver Wert angemonnen wird.

b) Die Ungleichung $\frac{n}{a}+\frac{b}{n} \geq 2$ ist äquivalent ztu $n^2+ab \geq 2an$ bzw. $n^2-2an+ab \geq 0$ bzw. $(n-a)^2 - a^2 + ab \geq 0$ bzw. $(n-a)^2 \geq a \cdot (a-b)$. Setzt man hier $a = b$, so ergibt sich die wahre Aussage $(n-a)^2 \geq 0$, wobei das Zeichen $=$ nur für $n = a$ gilt.
Beispiel $\frac{n}{30}+\frac{30}{n} \geq 2$ für alle n.

Aufgabe 1380: Sechseck und Dreieck

Ein regelmäßiges Sechseck und ein gleichseitiges Dreieck haben den gleichen Umfang.
Bestimme (ohne den Satz des Pythagoras) das Verhältnis der Flächen von Sechseck und Dreieck. (H. F.)

Lösung:



Die Längen der Sechseckseiten seien a.
Dann hat das Sechseck den Umfang $6a$, so dass die Seiten des Dreiecks jeweils $2a$ sind.
Man zerlege nun das Sechseck in sechs gleichseitige Dreiecke – ihre Seitenlängen sind jeweils a.
Weiter zerlege man das Dreieck in vier gleichseitige Dreieck, deren Seitenlängen ebenfalls die Länge a haben.
Deshalb sind die Zerlegungsdreiecke von Sechseck und Dreieck kongruent. Daraus folgt für die Flächen F_6 des Sechsecks und F_3 des Dreiecks: $F_6 : F_3 = 6 : 4$.

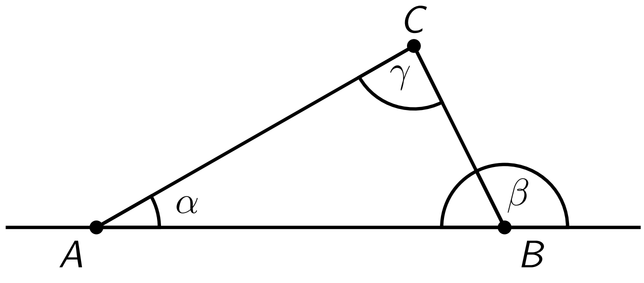
Aufgabe 1381: Zwei Leuchttürme

Zwei Leuchttürme in den Punkten A und B drehen ihre jeweiligen Lichtstrahlen mit gleicher Geschwindigkeit. Dabei „geht“ der von B ausgehende Lichtstrahl um den Winkel γ „vor“.

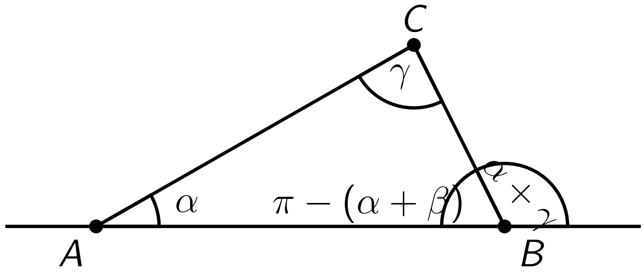
a) In welchem Anteil der Zeit treffen sich die beiden Lichtstrahlen?

b) Welche Kurve beschreibt dabei der Punkt C, in dem sie sich treffen?

(Wolfgang J. Bühler)

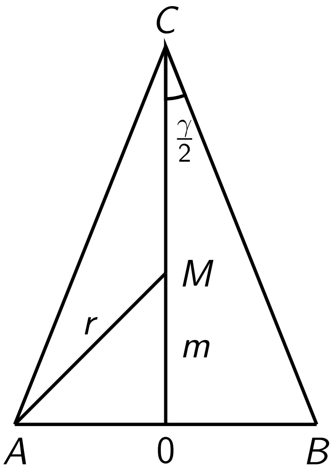


Lösung:
(für $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$)



a) Den Punkt C gibt es wie gezeichnet, wenn $0 < \alpha$ und $\alpha + \beta < \pi$. (In den anderen Fällen schneiden sich die beiden Geraden so, dass man mindestens einen entgegen der Strahlrichtung (Pfeil) gehen muss). Der Anteil der Zeit ist also $\frac{\pi - \gamma}{2\pi}$

b) Der Winkel bei C im Dreieck ABC ist konstant gleich γ. Also liegt der Punkt C immer auf dem Kreisbogen durch A und B, der durch den Winkel C bestimmt wird. (Für $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°$ ist dies der Thales-Kreis).
Bestimmung des Kreismittelpunkts und des Kreisradius:



Wir nehmen an, $\overline{AB} = 2$, $r + m = \arctan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ und $r^2 = m^2 + 1^2$, also $m = c - r = c - \sqrt{m^2 + 1}$. Die beiden Seiten der Gleichung $\sqrt{m^2 + 1} = c - m$ quadrieren wir und erhalten $m^2 + 1 = c^2 - 2cm + m^2$. Daraus ergibt sich $m = \frac{c^2 - 1}{2c}$ und dann $r = c - m = \frac{c^2 + 1}{2c}$.

Bemerkung: Der Fall $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ entspricht dem, dass der Lichtstrahl von B um $\pi - \gamma$ „vorgeht", d.h. eine Vertauschung von A und B und von γ und $\pi - \gamma$.

Aufgabe 1382: Monoid eine Rechenaufgabe

Löse die Gleichung

$$\sqrt{MONOiD} = DDD,$$

wobei verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern vertreten. (AKö)

Lösung:
Da die Zahl und Quadratzahl auf die gleiche Ziffer enden kann für D nur die Ziffer $1, 5$ oder 6 eingesetzt werden.
Nur $D = 5$ führt zur Lösung $\sqrt{308025} = 555$.

Aufgabe 1383: Verletzte Transitivität

Wir haben drei Würfel zur Verfügung, einen roten, auf dessen Seiten die Zahlen $2, 4, 9$ je zweimal vorkommen, einen blauen, auf dem die Zahlen $1, 6, 8$ je zweimal vorkommen und einen gelben, auf dem die Zahlen $3, 5, 7$ je zweimal vorkommen.

a) Du vereinbarst mit deiner Freundin Angelika folgendes Spiel: Jeder wählt sich einen Würfel und wirft damit. Wer die höhere Zahl wirft, gewinnt einen Euro. Solltest Du zuerst deinen Würfel wählen, oder als zweiter einen der beiden Würfel nehmen, die Angelika dir übrig lässt?

b) Wenn der Spieler mit der höheren Zahl die Differenz der beiden Zahlen gewinnt, wie würdest du dann vorgehen?

(Wolfgang J. Bühler nach B. Efron)

Lösung:

a) Wir nennen einen Würfel U besser als V und schreiben $U > V$, wenn die Wahrscheinlichkeit, mit U gegen V zu gewinnen, größer als $\frac{1}{2}$ ist. Wir zeigen dann, dass $R > B > G > R$ gilt. Lässt du Angelika zuerst wählen, dann kannst du immer einen Würfel wählen, der besser ist. Nennen wir X_R, X_B bzw. X_G die Zahl, die bei einem Wurf mit R, B bzw. G erscheint, so gilt:

$$\begin{aligned} P(X_R > X_B) &= P(X_R = 9) + P(X_R \in \{2,4\}, X_B = 1) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}. \\ P(X_B > X_G) &= P(X_B = 8) + P(X_B = 6, X_G \in \{3,5\}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}. \\ P(X_G > X_R) &= P(X_G \in \{5,2\}, X_R \in \{2,4\}) + P(X_G = 3, X_R = 2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Der Erwartungswert des Ergebnisses beim Würfeln mit R, B bzw. G sei E_R, E_B bzw. E_c. Diese Werte ergeben sich als

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5 \\ E_B &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5. \\ E_G &= \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5 \end{aligned}$$

Diese Werte sind alle gleich. Das Spiel ist also fair, unabhängig davon welche Würfel Angelika und du wählen.

Aufgabe 1384: Quersumme der Quersumme

Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. Bildet man von der Quersumme wieder die Quersumme, so erhält man die zweite Quersumme. Wie heißt die kleinste neunstellige Zahl, deren zweite Quersumme 16 ist?

(Klaus Ronellenfitsch)

Lösung:

Die gesuchte natürliche Zahl ist eine der Zahlen 100.000.000 bis 999.999.999. Also hat ihre Quersumme einen Wert von 1 bis 81. Damit hat ihre zweite Quersumme einen Wert von 1 bis 16. Die einzige Zahl von 1 bis 81, deren Quersumme 16 ist, ist 79. Da $79 = 8 \cdot 9 + 7$ ist, besteht die gesuchte neunstellige Zahl aus acht Neunen und einer Sieben. Die kleinste dieser Zahlen ist 799.999.999.

Aufgabe 1385: Eine Frage der Teilbarkeit

Für welche Zahlen $2^n + 1$, n eine natürliche Zahl, gilt:

a) $2^n + 1$ ist durch 3 teilbar?

b) $2^n + 1$ ist durch 5 teilbar?

c) $2^n + 1$ ist durch 15 teilbar?

(H. F.)

Lösung:

a) $2^1 + 1$, $2^3 + 1$, $2^5 + 1$ sind durch 3 teilbar.
Vermutung: 3 teilt $2^n + 1$ für $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.
Die Behauptung gilt für $m = 0$ und sie sei bewiesen für m, also $2^{2m+1} + 1 = 3v$. Dann gilt die Behauptung für $m + 1$ wegen
$$2^{2(m+1)+1} + 1 = 2^{2m+1} \cdot 2^2 + 1 = 2^{2m+1} \cdot 3 + 2^{2m+1} + 1 = 2^{2m+1} \cdot 3 + 3v.$$

b) Es sei $[z]$ die Einerziffer der natürlichen Zahl z. Dann gilt: $\left[2^{4m+1}\right] = 2$; $\left[2^{4m+2}\right] = 4$; $\left[2^{4m+3}\right] = 8$ und $\left[2^{4m+4}\right] = 6$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Daraus folgt $\left[2^{4m+2} + 1\right] = 5$ und somit:
5 teilt $2^{4m+2} + 1$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$

c) Aus (a) und (b) ergibt sich:
Ist eine Zahl 2^n+1 durch 3 teilbar, dann ist n ungerade; ist sie durch 5 teilbar, dann ist n gerade. Daher gibt es keine durch 15 teilbaren Zahlen $2^n + 1$.

Perfekt oder nicht perfekt – das ist nicht die Frage

von Hartwig Fuchs

Bereits in der griechischen Antike hat man über Zahlen und deren elementare Eigenschaften (gerade, ungerade, prim, …) nachgedacht. An der Weiterentwicklung dieser frühen Form der Zahlentheorie hatten Pythagoras (um 580–500 v.

Chr.) und eine Gruppe gleichgesinnter Mathematiker, Naturwissenschaftler und Philosophen größtes Interesse, denn sie waren der Meinung, man könne die Welt allein mit Zahlen erklären.
Sie suchten daher nach Zahlen mit besonderen Eigenschaften, weil solche Zahlen möglicherweise größere Bedeutung für das Weltgefüge haben konnten. Als Kriterium für die „Qualität" einer Zahl galt ihnen dabei deren Teiler. So fanden sie mehrere Zahlen, die man aus ihren multiplikativen Bestandteilen – also aus ihren echten Teilern – additiv darstellen kann.

Beispiel: Für die Zahl 28 mit den echten Teilern 1, 2, 4, 7, 14 gilt: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
Die Pythagoreer nannten Zahlen wie 28 **perfekt**, während andere Zahlen – bei denen die Teilersumme jeweils kleiner bzw. größer als die zugehörige Zahl ist – für sie einen „Mangel" bzw. einen „Überfluss" an Teilern haben.

Perfekte Zahlen

Eine Zahl n heißt perfekt oder auch vollkommen, wenn sie mit der Summe $s(n)$ ihrer echten Teiler übereinstimmt. Eine perfekte Zahl nennen wir eine P-Zahl.
Bereits Euklid (um 300 v. Chr.) hat im 6. Kapitel seines Buches „Elemente" eine Regel zur Berechnung von geraden P-Zahlen gefunden:

Eine Zahl der Form $2^{p-1}(2^p-1)$ ist perfekt, wenn 2^p-1 eine Primzahl ist, $p \geq 2$. (1)

L. Euler (1707–1783) hat 2000 Jahre später bewiesen, dass jede gerade P-Zahl von der in (1) angegebenen Form ist. Trotz der euklidischen Regel haben die Mathematiker der Antike nur die in der folgenden Tabelle stehenden P-Zahlen gekannt:

p	2	3	5	7
2^p-1 prim	$2^2-1=3$	$2^3-1=7$	$2^5-1=31$	$2^7-1=127$
$2^{p-1}(2^p-1)$ perfekt	$2 \cdot 3 = 6$	$4 \cdot 7 = 28$	$16 \cdot 31 = 496$	$64 \cdot 127 = 8128$

Die Schwierigkeit, weitere P-Zahlen neben 6, 28, 496 und 8128 zu berechnen, lag für sie wohl darin, dass die in (1) verlangte Bestimmung der primen unter den sogenannten Mersenne-Zahlen* 2^p-1 zu so großen numerischen Schwierigkeiten führt, dass man selbst heute erst 50 P-Zahlen – darunter die größte mit $p = 77\,232\,977$ (Stand 2018) – kennt.

* Marin Mersenne (1588–1648), ein wichtiger Vermittler von Informationen zwischen Wissenschaftlern zu einer Zeit, in der es noch keine wissenschaftlichen Zeitschriften gab.

Beispiel: Für $p = 13, 17$ und 19 sind die Mersenne-Zahlen $2^p - 1$ prim. Sodass die Zahlen $2^{12}(2^{13}-1) = 33\,550\,336$, $2^{16}(2^{17}-1)$ und $2^{18}(2^{19}-1)$ jeweils perfekt sind. Für $p = 11$ ist $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ nicht prim und daher ist $2^{10}(2^{11} - 1)$ nicht perfekt**.

Einige Eigenschaften perfekter Zahlen

Im Mittelalter, als man nur die aus der Antike überlieferten vier P-Zahlen kannte, hat man auf dieser schmalen Datenbasis eine gewagte Vermutung aufgestellt: *Die nach wachsender Größe geordneten P-Zahlen haben im Wechsel die Einerziffer 6 und 8.*

Das trifft zwar nicht zu, wie der Anfang 6, 8, 6, 8, 6, 6, …der Folge der Einerziffern zeigt. Aber immerhin gilt:

Jede gerade P-Zahl $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ hat die Einerziffer 6 oder 8. (2)

Nachweis. Es sei $E(n)$ die Einerziffer einer Zahl n. Dann gilt für $n = 2^{p-1}(2^p-1)$: $E(2^{p-1}) = 2, 4, 6$ oder 8, sodass $E(2^p) = 4, 8, 2$ oder 6 und daher $E(2^p - 1) = 3, 7, 1$ oder 5 ist. Weil nun $2^p - 1$ mit $E(2^p - 1) = 5$ keine Primzahl ist, folgt für n:

$$E(n) = E(2 \cdot 3) = 6 \quad \text{oder} \quad = E(4 \cdot 7) = 8 \quad \text{oder} \quad = E(6 \cdot 1) = 6.$$

Damit ist (2) bewiesen. □

Für jede gerade P-Zahl $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ gilt: p ist prim. (3)

Nachweis. (3) gilt für die P-Zahlen mit $p = 2$ und $p = 3$. Sei daher nun $p \geq 4$ und p sei nicht prim, also $p = a \cdot b$ mit $a, b > 1$. Nach dem binomischen Satz ist dann:

$$2^p - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 1).$$

Also ist $2^p - 1$ nicht prim und daher n keine P-Zahl – ein Widerspruch. □

Jede gerade P-Zahl $n = 2^{p-1}(2^p-1) > 6$ hat die Form: $n = 9c+1$ mit $c \geq 3$. (4)

** L. Euler hat einen genial einfachen Test zum Nachweis der Zerlegbarkeit von Zahlen $2^p - 1$ mit primen p bewiesen: Es sei p von der Form $p = 4k + 3$ und $2p + 1$ sei eine Primzahl. Dann ist $2^p - 1$ zerlegbar – und umgekehrt. Beispiel: Da $p = 10091 = 4 \cdot 2522 + 3$ und p sowie $2p + 1 = 20183$ Primzahlen sind, ist die 3038-ziffrige Zahl $2^{10091} - 1$ zerlegbar. Versuche nicht, eine Faktorzerlegung zu finden – es könnte sehr viel Zeit beanspruchen!

Nachweis. Für primes p, $p > 2$, gilt: $p-1$ ist gerade, also $p-1 = 2a$ für ein $a \geq 1$. Dann ist:

$$2^{p-1} = (2^2)^a = (3+1)^a = 3^a + 3 \cdot 3^{a-1} + \cdots + 3 \cdot 1 + 1 = 3b+1 \text{ mit einem } b \geq 3$$

sowie $2^p - 1 = 2 \cdot 2^{p-1} - 1 = 2 \cdot (3b+1) - 1 = 6b+1$. Daraus folgt:

$$n = (3b+1)(6b+1) = 18b^2 + 9b + 1 = 9(2b^2 + b) + 1 = 9c + 1.$$

$\square$

Neben der multiplikativen Darstellung in (1) sollen nun noch zwei additive Darstellungen für P-Zahlen angegeben werden. Für jede gerade P-Zahl $2^{p-1}(2^p-1)$ gilt:

$$2^{p-1}(2^p - 1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (2^p - 1). \tag{5}$$

Nachweis. Mit der Formel $1+2+3+\cdots+m = \frac{1}{2}m(m+1)$. Setzt man $m = 2^p - 1$, so ist:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2^p - 1) = \frac{1}{2}(2^p - 1)2^p = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

$\square$

Beispiel: Die P-Zahl $2^6(2^7-1) = 8128$ hat die Darstellung $8128 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 127$.

Für jede gerade P-Zahl $2^{p-1}(2^p - 1)$, $p \geq 3$, gilt:

$$2^{p-1}(2^p - 1) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2^{\frac{p+1}{2}} - 1)^3. \tag{6}$$

Nachweis. Zunächst gilt:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2m-1)^3 = m^2(2m^2 - 1). \tag{6'}$$

Die Gleichung gilt für $m = 1$ und sie gelte für m. Dann ist für $m+1$:

$$1^3 + 3^3 + \cdots + (2m-1)^3 + (2m+1)^3 = 2m^4 - m^2 + (2m+1)^3 = 2(m+1)^4 - (m+1)^2.$$

Setzt man nun $m = 2^{\frac{p-1}{2}}$, so ist $m^2 = 2^{p-1}$ und $2m^2 = 2^p$. Damit folgt (6) aus (6'). $\square$

Beispiel: Die P-Zahl $n = 2^{16}(2^{17}-1) = 8\,589\,869\,056$ hat mit $2^{\frac{17-1}{2}} = 2^8 = 256$ die Darstellung $n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 511^3$.

Zwei ungelöste Probleme

- Eine Zahl $2^{p-1}(2^p-1)$ ist genau dann eine P-Zahl, wenn die Mersenne-Zahl $2^p - 1$ prim ist. Es gibt daher ebenso viele P-Zahlen wie prime Mersenne-Zahlen. Da die Frage ungeklärt ist, ob es endlich viele oder unendlich viele prime Mersenne-Zahlen gibt, weiß man auch nicht, ob die Menge der geraden P-Zahlen endlich oder unendlich ist.

- Die Aussagen (1)–(6) handeln ausschließlich von geraden P-Zahlen. Und da man bis heute noch keine ungerade P-Zahl gefunden hat, stellt sich die Frage: Gibt es überhaupt solche Zahlen?

Man hat allerdings schon Einiges über sie herausgefunden. Es sei u eine ungerade P-Zahl; ihre Primfaktorzerlegung sei:

$$u = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r} \quad \text{mit } r \text{ verschiedenen Primfaktoren } p_i \text{ und } e_i \geq 1. \tag{7}$$

L. Euler hat bewiesen, dass für eine ungerade P-Zahl gilt: e_1 und p_1 sind Zahlen der Form $4k + 1$ und e_j mit $j = 2, 3, \dots, r$ sind gerade Zahlen. Erst in den letzten Jahrzehnten hat man ein wenig mehr herausgefunden: $r \geq 9$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r \geq 101$. Das bedeutet, u hat mindestens 9 verschiedene sowie insgesamt mindestens 101 Primfaktoren. Unter diesen ist der größte $> 10^8$ und für einen gilt $p_i^{e_i} > 10^{62}$.
Diese Ergebnisse lassen vermuten, dass ungerade P-Zahlen nicht klein sind. Tatsächlich konnte gezeigt werden, dass für jede ungerade perfekte Zahl u gilt: $u > 10^{1500}$ (Stand 2012). Euler selbst urteilte einmal so: „Ob es eine ungerade vollkommene Zahl gibt, ist eine äußerst schwierige Frage."

Mehrfach perfekte Zahlen

Eine Zahl $n > 1$ heißt k-fach perfekt, wenn für ihre Teilersumme $S(n)$ gilt:

$$S(n) = k \cdot n \quad \text{für eine Zahl } k \geq 1. \tag{8}$$

Für $k = 1$ ist (8) die Definition der P-Zahlen.**
Es folgt eine Liste der jeweils kleinsten k-fach perfekten Zahlen für $k \leq 4$:

k	1	2	3	4
kleinstes n mit $S(n) = k \cdot n$	6	120	30240	14182439040

Es ist nicht bekannt, ob es zu jedem $k \in \mathbb{Z}^+$ eine k-fach perfekte Zahl gibt. Auch weiß man nicht, ob es ungerade k-fach perfekte Zahlen gibt.

* Ein schönes Beispiel dafür findet sich in der Schrift „Gesetze" des Philosophen Platon (427–348 v. Chr.), mit der er seine Vorstellung vom idealen Staat entwickelt. Die Städte dieses Staates sollten 5040 männliche Einwohner haben. Warum 5040? Die Zahl 5040 besitzt 59 Teiler, darunter insbesondere 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10. Damit ergeben sich 59 Möglichkeiten, die Männer nach Bedarf in Gruppen mit gleicher Mitgliederzahl einzuteilen.

** Hinweis zur Notation im Originaltext: Hier wird $S(n)$ als Summe aller Teiler inklusive n selbst definiert, während $s(n)$ auf den vorherigen Seiten die Summe der echten Teiler exklusive n war. Daher gilt $S(n) = s(n) + n$.

Nicht perfekte Zahlen

Eine Zahl n ist nicht perfekt, wenn n und die Teilersumme $s(n)$ ihrer echten Teiler nicht übereinstimmen – wenn also $s(n) \neq n$ gilt.
Diejenigen unter den nicht perfekten Zahlen, deren Teilersumme $s(n)$ den kleinstmöglichen Abstand 1 von n haben – für die daher $s(n) = n-1$ oder $s(n) = n+1$ gilt –, nennt man **fast perfekte Zahlen**.
Es sei zunächst n eine fast perfekte Zahl mit $s(n) = n - 1$.

Beispiel: Die Zahlen 2 mit $s(2) = 1$, 4 mit $s(4) = 1 + 2 = 3$ und 8 mit $s(8) = 1 + 2 + 4 = 7$ sind fast perfekt.
Jede Potenz 2^k von 2 mit $k = 1, 2, 3, \dots$ ist fast perfekt. Denn die Summe der echten Teiler von 2^k ist eine geometrische Reihe:

$$s(2^k) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1. \tag{9}$$

Wegen (9) gibt es unendlich viele fast perfekte Zahlen.

Offene Fragen:

- Gibt es von 2^k verschiedene fast perfekte Zahlen?
- Insbesondere: Gibt es ungerade fast perfekte Zahlen?

Es ist keine fast perfekte Zahl n mit $s(n) = n + 1$ bekannt. Möglicherweise gibt es solche Zahlen nicht.

Defiziente Zahlen

Es sei n eine Zahl mit einer Teilersumme $s(n)$, die $< n$ ist. Solch eine Zahl nennt man **defizient***** – kurz: n ist eine D-Zahl.
Die fast perfekten Zahlen 2^k $(k \geq 1)$ mit $s(2^k) = 2^k - 1$ sind minimal defizient; dagegen ist jede Primzahl $p \geq 2$ maximal defizient, weil $s(p) = 1$ ist – vgl. (10).

Zwei Regeln zum Aufspüren von D-Zahlen:

$$\text{Jede Potenz } p^k,\ k \geq 1,\ \text{einer Primzahl } p \geq 2 \text{ ist eine D-Zahl.} \tag{10}$$

Nachweis. Für $k = 1$ gilt: Jede Primzahl p hat nur den echten Teiler 1, so dass $s(p) = 1 < p$ ist. Es sei nun $k > 1$. Dann hat p^k die echten Teiler $1, p, p^2, \dots, p^{k-1}$ mit der Summe $s(p^k) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{k-1}$. Dies ist eine geometrische Reihe mit der Summe $s(p^k) = \frac{p^k - 1}{p-1} < p^k$. □

*** Defizit = Mangel, Abundanz = Überfluss

Jedes nicht perfekte Produkt $p \cdot q$ aus Primzahlen p und q $(p \neq q)$ ist eine D-Zahl. (11)

Nachweis. Es sei $p > q$. Nach Voraussetzung ist $p = 3, q = 2$ ausgeschlossen, weil man sonst mit $p = 3, q = 2$ das perfekte Produkt $3 \cdot 2 = 6$ erhält. Es sei daher $p \cdot q \geq 10$. Die echten Teiler von $p \cdot q$ sind $1, p$ und q. Daher gilt:

$$s(p \cdot q) = 1 + p + q \leq 1 + p + (p - 2) = 2p - 1 \leq p \cdot q - 1 < p \cdot q$$

□

Beispiel: Alle Zahlen $7p$, $p = 1$ oder p prim – also 7, 14, 21, …– sind D-Zahlen. Wegen (9) und auch nach (10) gibt es unendlich viele D-Zahlen.

Abundante Zahlen

Eine Zahl n heißt **abundant** – kurz: n ist eine A-Zahl –, wenn die Summe $s(n)$ ihrer echten Teiler $> n$ ist. Die Folge der A-Zahlen beginnt mit 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, …
Diese kurze Liste vermittelt den Eindruck, dass gilt:

Jede Zahl $6n$, $n \geq 2$, und jede Zahl $20n$, $n \geq 1$, ist eine A-Zahl. (12)

Nachweis. Neben möglicherweise anderen Teilern hat $6n$ the Teiler $1, n, 2n, 3n$ und $20n$ hat mindestens die Teiler $1, n, 2n, 4n, 5n, 10n$, so dass $s(6n) \geq 1 + 6n > 6n$ und $s(20n) \geq 1 + 22n > 20n$ ist. □

Mit (12) erhält man keineswegs alle A-Zahlen: So ist 56 wegen $s(56) = 1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 14 + 28 = 64$ eine von (12) nicht erfasste A-Zahl. Insbesondere fehlen ungerade A-Zahlen. Aber es gibt sie. Charles de Bouelles (1479–1567) hat vermutlich als Erster eine von ihnen entdeckt, und zwar 45045. Ungerade A-Zahlen sind wohl selten: Unter den ungeraden Zahlen $< 10\,000$ sind nur 23 Zahlen abundant. Wegen (12) weiß man, dass es unendlich viele A-Zahlen gibt.

Untersuche nun selbst:

Wenn man für $n = 3, 4, 5, \ldots, 11$ die Größe der Zahlen $3n$ und $s(3n)$ vergleicht, dann ergibt sich dabei ein Muster:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$3n$	9	12	15	18	21	24	27	30	33
$s(3n) < 3n$ oder $s(3n) > 3n$?	< 9	> 12	< 15	> 18	< 21	> 24	< 27	> 30	< 33

- Gibt es ein kleinstes n, mit dem das Muster abbricht?

Rubrik der Löserinnen und Löser
Stand nach Heft 165

Adernach, KSG
Kl. 6: Nils Boxberger 3.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 6: Emil Nies 27;
Kl. 7: Luca Schwarz 12.
Kl. 8: Christina Karst 36.
Kl. 10: Lisa Schäfer 26.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 6: Lilly Schäfer 15;
Kl. 13: Moritz Groh 23.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Gymnasium Calvanienberg:
Kl. 7: Simon Hagemann 8;
Kl. 9: Anna-Franziska Hagemann 13.
Kl. 11: David Hagemann 18, Jonas Löcher 20.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Otto-Schule:
Kl. 5: Nik Paolo Wagner 5;
Kl. 6: Marleen Groitl 7.

Bingen, Stefan-George Gymnasium:
Kl. 6: Anna Jockers 38;
Kl. 7: Oskar Bellenbaum 1;
Kl. 8: Mais Alkhateeb 42,5, Tim Jockers 77,5;

Birkenfeld, Gymnasium Birkenfeld:
Kl. 12: Joschua Jung 66.

Eckartsberg, Christian-Weise-Gymnasium:
Kl. 6: Maxi Lingott 39.

Essenheim, Grundschule:
Kl. 1: Nora Menzel 28.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 6: Jonas Günther 10, Ben Schneider 2, Sophia Clausen 35.
Kl. 9: Philip Mühlbeyer 19.

Freiburg, Friedrich-Gymnasium:
Kl. 5: Anna Petzold 30,5.

Grünstadt, Leininger-Gymnasium:

Kl. 7: Ben Oberreuther 10,5, Jasmin Heckel 12.
Kl. 10: Erik Eberlein 23, Niklas Gelhausen 16,5, Lars Noll 16,5, Till Radünz 16,5.

Hör-Grenzhausen, Gymnasium im Kannenbäckerland:
Kl. 9: Zeynep Muslugüme 87.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 8: Imran Aouzi 19.

Lampertheim, Gauß-Gymnasium:
Kl. 10: Timon Bamberg 14.

Linz, Martinus-Gymnasium:
Kl. 10: Vladyslav Pochynok 61.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 8: Jonas Dürkes 48.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 10: Lukas Dürkes 27.

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 9: Ioan Salaru 44,5.

Marzling, Josef-Hofmiller-Gymnasium:
Kl. 9: Stephanos Dimitriou 85.

Mühlheim an der Ruhr, Otto-Pankok-Schule:
Kl. 10: Nazar Cherpak 21.

München, Theodolinden-Gymnasium Bayern:
Kl. 7: Richard Li 17.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 8: Martin Schroff 20, Sophia Kiehn 20.
Kl. 9: Nola Bernhardt 11.
Kl. 10: Daniel Laibach Muniz 10;

Neuwied, Werner-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 8: Lixin Hou 51.

Nieder-Olm, Gymnasium:
Kl. 7: Nolwenn Büttenbender 33, Dmytro Rybnik 30.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 12: Fabian Schwörer 6, Nadine Sliwa 3.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 11: Jasmin Borrmann 42;
Kl. 13: Emilie Borrmann 40.

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 13: Nils Angel 72.

Schkeuditz, Wilhelm-Ostwald-Gymnasium:
Kl. 9: Renzo Pereira 9.

Schwäbisch Gmünd, Landesgymnasium für Hochbegabte:
Kl. 7: Yunqi Li 57.

Speyer, Gymnasium am Kaiserdom:
Kl. 5: Maximilian Weidl 4.

Stendal, Werner von Siemens Gymnasium:
Kl. 7: Marlin Jacob 17.

Tangermünde, Diesterweg-Gymnaisum:
Kl. 11: Mai Linh Dang 68.

Wangen, Rupert-Neß-Gymnasium:
Kl. 10: Felix Fügenschuh 7.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 7: Lisa Anton 8.

Wörth, Europa-Gymnasium:
Kl. 11: Leonid Vasiler 72.

ohne Schule:
Kl. 11: Jonas Meitzel 17.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2025/26 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*. da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

- π **in Stein:** In Nörten-Hardenberg (nördlich von Göttingen) hat Bilian Prof-

fen das wachsende Kunstwerk „π in Stein“ initiiert: quadratische Fußwegplatten aus rotfarbigem Granit, darin eingemeißelt sind die Nachkommastellen von π. Das Kunstwerk „π in Stein“ ist einen Besuch wert. Weitere Informationen unter

  `https://www.pi-in-stein.com`.

- **Soziale Netzwerke:** Monoid ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:

  `www.facebook.com/monoid.matheblatt`
  `www.facebook.com/monoid.redaktion`
  `www.instagram.com/monoid.matheblatt`

  Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu Monoid finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
  Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite

  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Gregor Salaru
Webauftritt und Korrektur der eingesandten Lösungen: Gregor Salaru
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Jahrgang 46 Heft 166 Juni 2026

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum
Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid