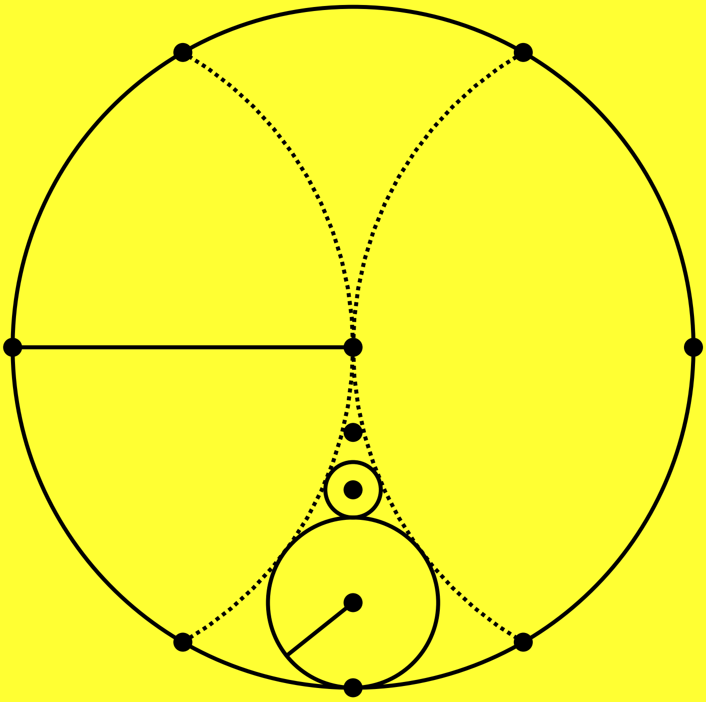
Jahrgang 44 Heft 159 Sept. 2024

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

¯ _H\§_XI Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Sʁ} ~H\ʁe0}¤_j j0j L0} be9 0j UŚP sind in erster Linie die *g 9§\0 q_0e0}0_0j* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **8ee0 ~H\ʁe0}**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *i 0«0j 8«TX9@0j* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Gnhq«§0}]S9j*, *g 9§\0 h 9§_ H\0 Nj§L0Hc«jX0j* und *ŌK0jc0}H\0jō* werden bei der Vergabe des *Sn} H\0}q}0_ 0* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **oUu i n®0 h @0} ©·©Vu**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

`n\9 j j0 W«§0j@0}X] ª j_®0} _§Þ§
^j §_§«§ Tʁ} g 9§\0 h 9§_c
g m i m^K] | 0L9c§_n j
UU·kk g 9_j¶

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: hnjn_L>h9§\0h9§_cu«j_]h9_j¶uL0

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Mm i m^K-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Ne_ 9@0§\]d9jXXÞ 0}]W´h j9 _«h 8e¶0´** bei Frau Susanne Lüning, am **d_j9] [_eX0}] W´h j9 _«h ?9L b}0«¶j9H** bei Frau Julia Gutzler, am **d0_j_jX0}]W´h j9 _«h W}ʁj §9L§** bei Herrn Martin Mattheis, **b9}ne_j0j]W´h j9 _«h S}9jc0j§\9e** bei Frau Jasmin Haag, an der **S]`]d]W0 9h§ H\«e0 [9L9h9}** bei Herrn Matthias Grasse, am **g 9}§_j«]W´h j9 _«h d_j¶** bei Herrn Helmut Meixner und am **W´h j9 _«h i 9Hc0j\0_h** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Mm i m^K-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Mm i m^K-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

N_je9L«jX ¶«} g mim^K]`9\}0 T0_0}

Alle Freunde und Förderer von Monoid sind herzlich eingeladen, an der Monoid-Feier 2024 teilzunehmen. Dabei werden unter anderem Preise an erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2023/24 vergeben. Die Feier findet am

Samstag, den 16. November 2024,
ab 10 Uhr,
in der Alten Mensa der Universität Mainz

statt. Den Festvortrag „Geometrie mit Stangen" wird Prof. Dr. Rainer Kaenders halten.
Alle Preisträgerinnen und Preisträger werden auch gesondert per Post eingeladen.
Die Veranstaltung wird musikalisch begleitet. Im Anschluss an die Feier, gegen 12:30 Uhr, sind alle Gäste zu einem kleinen Imbiss und Austausch herzlich eingeladen.

?0°0_ _j 0_j0} µ0_e0

®nj [9}§°_X S«H\

Für jedes reelle $a > 0$ gilt: $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Begründe dies in einer Zeile.

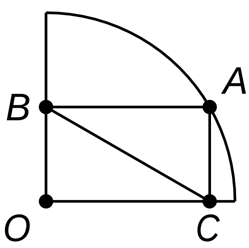
dǸ «jX

$a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2$

g 9§\0 h 9§_ H\0 g _j_9§«}

dÞjX0 0_j0} [´qn§0j« 0

®nj [9}§°_X S«H\



Ein Punkt A liege auf einem Viertelkreis mit dem Kreismittelpunkt O und dem Radius r; B und C seien Punkte auf den Radien – wie in der Figur – so dass für das Dreieck ABC gilt:
ABC ist rechtwinklig bei A und seine Seite AB ist parallel zu OC. Bestimme die Länge $|BC|$ von BC.

dǸ «jX

Wegen $AB \parallel OC$ gilt $\angle ABO = \angle OCA = \angle BOC = 90^\circ$. Daher ist $ABOC$ ein Rechteck. Für die Diagonalen in diesem Rechteck gilt: $|BC| = |OA| = r$.

K_0 @0 njL0}0 8«TX9@0
p}_h§0_e0} ®nj S0}h9§¶9\e]µ°_ee_jX0j
®nj [9}§°_X S«H\

Es sei $2[n] = 2^{(2^n)}$, n eine ganze Zahl größer Null. Dann gilt

(1) $2[n] - 1$ hat mindestens n verschiedene Primteiler p_i mit $p_1 > 2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

i9H\°0_ h_§ ®nee §ÞjL_X0} ^jL«c§_nj

Für $n = 1$ gilt (1) wegen $2[1] - 1 = 3$.
Die Behauptung (1) sei für ein beliebiges $n \geq 1$ bewiesen. Sie gilt dann auch für $n + 1$.
Zunächst: Ist p_i ein Teiler von $2[n] - 1$, $1 \leq i < n$, so gilt $2[n] - 1 = k_i p_i$ mit einem ganzzahligen Faktor k_i. Daraus folgt:

(2) Kein p_i ist ein Teiler von $2[n] + 1$, da $p_i > 2$ ist.

Wegen $2[n+1] = 2^{2^{n+1}} = 2[n]^2$ gilt $2[n+1]^2 - 1 = (2[n] - 1)(2[n] + 1)$ und deshalb ist jeder Teiler p_i von $2[n] - 1$ auch ein Teiler von $2[n + 1] - 1$, jedoch ist keiner von ihnen ein Teiler von $2[n] + 1$. Folglich besitzt $2[n + 1] - 1$ mindestens einen von jedem p_i verschiedenen Primteiler – und somit hat $2[n + 1] - 1$ mindestens $n + 1$ verschiedene Primteiler.

?0h0}c«jXI

Sʁ} µ9\e0j $F_n = 2^{2^n} + 1$J $n = 0, 1, 2, \dots$ Ś h9j j0jj§ _0 S0}h9§¶9\e0j Ś X_@§ 0 rjnH\s c0_j0 L0} 8« 9X0 ros Tʁ} L_0 µ9\e0j $2^{(2^n)}$J n 0 0j§ q}0H\0jL0 ?0\9«q§«jXu µ«jÞH\ § _jL L_0 TʁjT µ9\e0j F_nJ $n = 0, 1, 2, 3, 4$ Ś L9 _jL 3, 5, 17, 257, 65537 Ś 9ee0 9h§ p}_h¶9\e0ju ?_ \0«§0 \9§ h9j c0_j0j ¯0X X0T«jL0j Ś nT0}j 0 _\j ʁ@0}\9«q§ X_@§ ŚJ °_0 h9j ¶« 0_j0} 8« 9X0 ʁ@0} L_0 8j¶9\e L0} p}_h§0_e0} ®nj j_H\§ q}_h0j S0}h9§]µ9\e0j X0e9jX0j cÑjj§0u

¯n e_0X§ L0} S0\e0}y
®nj [9}§°_X S«H\

Wenn man die linke Seite der Gleichung

(1) $1 + \frac{4x - 10}{1 - x} = \frac{3x - 9}{2 - x}$

mit $x \neq 1$ und $x \neq 2$ umformt zu

(2) $\frac{(1 - x) + (4x - 10)}{1 - x} = \frac{3x - 9}{2 - x}$,

so folgt aus (2)

(3) $\frac{3x - 9}{1 - x} = \frac{3x - 9}{2 - x}$

Da in (3) die Zähler übereinstimmen, sind dort auch die Nenner gleich. Also ist $1 \quad x = 2 \quad x$ und daher ist $1 = 2$. Wegen $1 + 1 = 2 + 1$ ist dann auch $2 = 3$; usw. Also gilt:

(4) Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Wo liegt der Fehler?

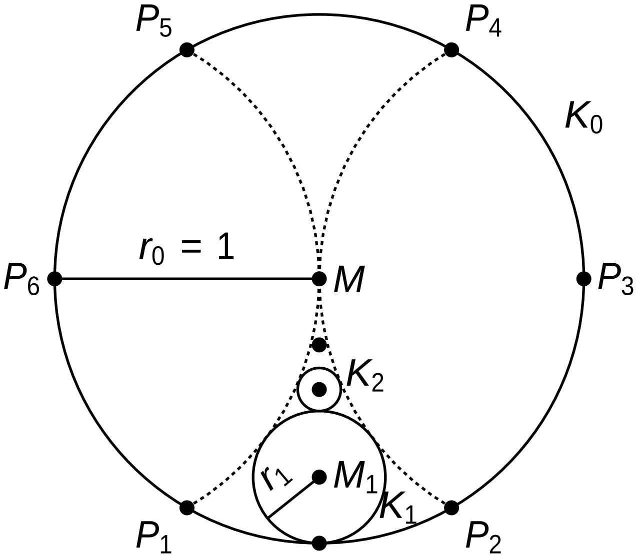
dǸ «jX

Der zu diesem Ergebnis führende Trugschluss entsteht so:
Aus $\frac{k}{m} = \frac{k}{n}$ mit ganzen Zahlen k, m, n folgt nur dann $m = n$, wenn $k \neq 0$ ist. Genau diese Bedingung erfüllt die Gleichung (1) nicht, denn aus (1) folgt $x \quad 3 = 0$ und somit auch $3x \quad 9 = 0$. Damit sind die Zähler in (3) beide null. Dann aber folgt aus der richtigen Gleichung $\frac{0}{1 \ x} = \frac{0}{2 \ x}$ nicht, dass $1 \quad x = 2 \quad x$ eine wahre Aussage ist.
Und daher kann man aus dieser Gleichung auch keine zutreffenden Schlüsse ziehen – insbesondere nicht die Behauptung (4) begründen.

N_j0 9j H\9«e_H\0 p9}9Ln²_0

®nj [9}§°_X S«H\

Es sei K_0 ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r_0 = 1$; die Kreispunkte



$P_1, P_2, \dots, P_6$ seien Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Das krummlinig begrenzte Dreieck MP_1P_2 sei D. Es sei nun K_1 der größte Kreis mit Mittelpunkt M_1 und Radius r_1, der jede Seite von D von innen berührt; ganz entsprechend sei K_2 mit Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 der größte Kreis, der die Seiten MP_1 und MP_2 von D von innen und K_1 von außen berührt – so wie in der Figur – entsprechend $K_3, K_4, \dots$. Dann gilt:

(1) Die Umfänge aller Kreise $K_1, K_2, K_3, \dots$ sind zusammen halb so groß wie der Umfang des Kreises K_0.

Die Aussage (1) widerspricht wohl dem, was uns die geometrische Anschauung sagt. Aber auf elegante Weise lässt sich zeigen, dass (1) zutrifft. Der Umfang des Kreises K_0 mit dem Radius $r_0 = 1$ beträgt $2 \ $. Wegen $2r_1 + 2r_2 + \dots = r_0 = 1$ ist die Summe der Umfänge von $K_1, K_2, K_3, \dots$:
$2 \ r_1 + 2 \ r_2 + 2 \ r_3 + \dots = \ (2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \dots) = \ .$

K0} ~H\}0_@0}J L0} j_H\§ ¶Þ\e0j cnjj§0

®nj [9}§°_X S«H\

Bei einer Friedensverhandlung am Limes saßen sich Römer auf vierbeinigen Stühlen und einige Germanen auf dreibeinigen Hockern gegenüber; fünf Germanen verfolgten die Gespräche im Stehen. Der stets zu Späßen aufgelegte römische Schreiber Scriba, der das Protokoll der Verhandlungen an einem vierbeinigen Tisch schrieb, vermerkte in seinem Bericht:
Ich zähle insgesamt 43 Beine. Alle Stühle und Hocker waren besetzt.
Übrigens: ein Germane hatte nur ein Bein.
Einige Wochen später erhielt Julius Cäsar in Rom das Protokoll. Nachdem er es gründlich studiert hatte – in Staatsangelegenheiten nahm er es sehr genau – ordnete er an: Der Schreiber Scriba ist unverzüglich zu entlassen.
Die politischen Gegner des Julius C., die dem Imperator schon lange einen von Willkür geprägten Regierungsstil nachweisen wollten, beauftragten den Staatsarithmeticus um die mathematische Bestätigung, dass Scriba grundlos entlassen worden war.
Der Arithmeticus machte sich ans Werk.
Ausgehend von der Annahme, dass Scriba korrekt gezählt hatte, machte er die folgende Nachzählung, bei der er die Anzahl sitzender Römer mit r und die der sitzenden Germanen mit g bezeichnete.

µÞ\e«jX L0} ?0_j0

Sitzende Römer:	$(2+4)r$	$=$	$6r$	Beine
Tisch:			4	Beine

(a) Der einbeinige Germane stand

sitzende Germanen:	$(2+3)g$	$=$	$5g$	Beine
stehende Germanen:	$4\ \ 2+1$	$=$	9	Beine

(b) Der einbeinige Germane saß

sitzende Germanen:	$(2+3)g\quad 1$	$=$	$5g\quad 1$	Beine
stehende Germanen:	$5\ \ 2$	$=$	10	Beine

W0 9h§¶9\e L0} ?0_j0

(a) $(6r+4)+(5g+9)=43$ – also $6r+5g=30$

(b) $(6r+4)+(5g\quad 1)+10=43$ – also $6r+5g=30$

dǸ «jX L0 p}n@e0h

Aus der in beiden Fällen (a) und (b) gültigen Gleichung $6r+5g=30$ folgt:
g ist eine gerade Zahl – zunächst also ist $g=0,2,4$ oder 6.
Es gilt aber: $g \neq 0$ wegen des einbeinigen Germanen und $g \neq 6$, denn $r \neq 0$

wegen des Schreibers Scriba. Für $g = 2$ und $g = 4$ ist r nicht ganzzahlig. Es zeigt sich somit:
Die eingangs getroffene Annahme des Arithmeticus war falsch – Julius C. hatte daher Scriba nicht willkürlich, sondern wohlüberlegt entlassen.

g njn_L9e0 S}9X0

®nj [9}§°_X S«H\

Mit den Buchstaben M, O, N, I, D seien positve reelle Zahlen – die auch gleich sein dürfen – bezeichnet. Hat dann die Gleichung

(1) $M^2 + O^2 + N^2 + O^2 + I^2 + D^2 = 2(M + O + N + O + I + D)$ 6

eine Lösung?

dǸ «jX

Die Gleichung (1) lässt sich umformen in die Gleichung

$$(M^2 \quad 2M+1)+2(O^2 \quad 2O+1)+(I^2 \quad 2I+1)+(N^2 \quad 2N+1)+(D^2 \quad 2D+1)^2 = 0$$

$$, \quad (M \quad 1)^2 + 2(O \quad 1)^2 + (N \quad 1)^2 + (I \quad 1)^2 + (D \quad 1)^2 = 0$$

$$, \quad M = O = N = O = I = D = 1$$

[0}nj]K}0_0Hc0

®nj [9}§°_X S«H\

Pythagoras von Samos (um 500 v. Chr.) hat rechtwinklige Dreiecke in dem nach ihm benannten Satz durch eine numerische Eigenschaft so charakterisiert:
Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Katheten von Länge a, b und der Hypotenuse mit Länge c gilt

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ – und umgekehrt.

Dieser Satz führte P. – für den ganze Zahlen sehr wichtig waren – zu der naheliegenden Frage: Welches sind die pythagoreischen Dreiecke – das sind rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen – und wie findet man sie? Er hat eine heute allgemein bekannte Methode zur Lösung dieses Problems gefunden.
Es sei D ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen a, b und c, Umfang s und Fläche f. Dann gilt:
Das Dreieck D ist mit $c > a, b$ pythagoreisch, wenn

(2) $a = 2uv$, $b = u^2 \quad v^2$ und $c = u^2 + v^2$ ist und man daher $s = 2u(u + v)$ und $f = uv(u^2 \quad v^2)$ setzt, wobei u und v beliebig wählbare ganze Zahlen mit $u > v \quad 1$ sind.

?0_ q_0e o

Für $u = 2$, $v = 1$ erhält man aus (2) das pythagoreische Dreieck mit $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $s = 12$ und $f = 6$.

Bei der Aussage (2) ist zu klären:

(a) Gibt es überhaupt ein Dreieck D mit den in (2) definierten Seitenlängen?

Das ist der Fall, wenn die drei Dreiecksungleichungen $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$ zutreffen – und das tun sie. Zum Beispiel gilt wegen $u > v$, dass $b + c = u^2 \quad v^2 + u^2 + v^2 = 2u^2 > 2uv = a$.

(b) Ist das Dreieck D rechtwinklig?

Für die Zahlen a, b und c in (2) gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (überprüfe dies selbst!). Aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras folgt daher, dass D rechtwinklig ist. Damit ist nachgewiesen: Die mit (2) erzeugten Dreiecke sind pythagoreisch.

Die Frage des Pythagoras nach ganzzahligen Dreiecken lässt sich in naheliegender Weise verallgemeinern zu der Frage: Wie findet man Dreiecke, bei denen Seitenlängen, Umfang und Fläche rationale Zahlen sind? Solche Dreiecke gibt es. Man nennt sie *[0}nj]K}0_Hc0*, um an den griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 10 - 70 n. Chr) zu erinnern, der wie Pythagoras nach numerischen Zusammenhängen in Dreiecken suchte.

Mit der folgenden Regel lassen sich alle Heron-Dreiecke erzeugen.

(2) Es seien $k > 0$, $u > 1$, $v > 1$ rationale Zahlen. Dann erzeugt jedes Tripel (k, u, v) ein Heron-Dreieck D, wenn für dessen Seitenlängen a, b, c und Umfang s sowie Fläche f gilt:
$a = k\ \ u + \frac{1}{u}\ $, $b = k\ \ v + \frac{1}{v}\ $, $c = k\ \ u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v}\ $,
$s = 2k(u + v)$, $f = k^2\ \ u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v}$

?0_ q_0e ©

(a) Für $u = 2, v = 3, k = \frac{6}{5}$ ist das Dreieck D in Bsp. 1 das pythagoreische Heron-Dreieck mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.

(b) Für $u = v = 2$, $k = \frac{1}{3}$ ist D das gleichschenklige Heron-Dreieck mit $a = b = \frac{5}{6}$ und $c = 1$.

Zum Nachweis der Behauptung (2) zeigen wir:

Die Dreiecksungleichungen $a + b > c$, $b + c > a$ und $a + c > b$, welche die Existenz eines Dreiecks D der Seitenlängen a, b und c garantieren, sind erfüllt.

Vorweg: Aus $u > 1$, $v > 1$ folgt $1 > \frac{1}{u}$, $1 > \frac{1}{v}$, so dass $u > \frac{1}{v}$ und $v > \frac{1}{u}$ ist.

Eine Zahl r heißt rational, wenn $r = \frac{s}{t}$ mit ganzen Zahlen s und t sowie $t \neq 0$ ist.

Heron hat z.B. den Satz bewiesen: Ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c hat die Fläche $f = \sqrt{s(s \quad a)(s \quad b)(s \quad c)}$ mit $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

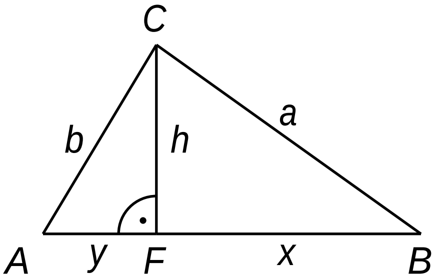
Damit gilt:

$$a + b = k \quad u + \frac{1}{u} + v + \frac{1}{v} \quad > k \quad u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v} \quad = c;$$

$$b + c = k \quad v + \frac{1}{v} + u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v} \quad > k \quad \frac{1}{u} + u \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \quad = a;$$

$$c + a = k \quad u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v} + u + \frac{1}{u} \quad > k \quad \frac{1}{v} + v \quad \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \quad = b.$$

Die Folgerung $b + c > a$ ist möglich wegen $v > \frac{1}{u}$ und die Folgerung $c + a > b$ aufgrund von $u > \frac{1}{v}$.
Wir wollen nun noch der Frage nachgehen: Wie wurden die Gleichungen (2) hergeleitet?



Es sei ABC ein Heron-Dreieck D mit den Seitenlängen a, b, c und mit der Fläche f. Die Länge des Lotes aus C auf AB sei h; der Lotfußpunkt F zerlege AB in Teilstrecken der Längen x und y (vgl. Figur). Dann gilt:

(3) h, x und y sind rational.

i 9H\ °0_

Da die Strecke c und die Fläche f des Dreiecks D rational sind, folgt aus $f = \frac{1}{2}hc$, dass h rational ist.
Für die Dreiecke BCF und AFC gilt der Satz von Pythagoras:

(3) $h^2 = a^2 \quad x^2$ sowie

(3') $h^2 = b^2 \quad y^2$.

Daraus folgt:

(4) $a^2 \quad b^2 = x^2 \quad y^2 = (x \quad y)(x + y)$.

Weil in (4) a^2, b^2 und $x + y = c$ rational sind, ist auch $x \quad y$ rational und aus $(x + y) + (x \quad y) = 2x$ folgt: x ist rational und somit auch $y = c \quad x$.
Herleitung von (2) mit (3): Das Dreieck D mit der Höhe h kann man durch eine Ähnlichkeitsabbildung in ein Dreieck D^0 mit dem Seitenlängen a^0, b^0, c^0 und der Höhe $h^0 = 1$ transformieren. Für D^0 lautet dann (3): $1 = (a^0 + x)(a^0 \quad x)$. Setzt man nun $a^0 + x = u$, so muss $a^0 \quad x = \frac{1}{u}$ sein.
Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich:

(5) $a^0 = \frac{1}{2} \quad u + \frac{1}{u}$ sowie $x = \frac{1}{2} \quad u \quad \frac{1}{u}$.

Welche Zahlen u sind in (5) zulässig?
Es ist $a^0 + x = u$ sowie nach der Dreiecksungleichung $a^0 + x > h^0 = 1$. Folglich gilt (5) für jedes rationale $u > 1$.
Auf die gleiche Weise wie (5) erhält man mit der Setzung $b^0 + y = v$ und $b^0 \quad y = \frac{1}{v}$:

(6) $b^0 = \frac{1}{2} \ v + \frac{1}{v}$ sowie $y = \frac{1}{2} \ v \quad \frac{1}{v}$, $v > 1$ rational.

Für die Seitenlängen $c^0 = x + y$, den Umfang $s^0 = a^0 + b^0 + c^0$ und die Fläche $f^0 = \frac{1}{2}h^0c^0$ mit $h^0 = 1$ von D^0 gilt dann:

(7) $c^0 = \frac{1}{2} \ u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v}$, $s^0 = u + v$, $f^0 = \frac{1}{4} \ u \quad \frac{1}{u} + v \quad \frac{1}{v}$, $v > 1$ rational.

Wenn man nun das Dreieck D^0 durch eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem rationalen Faktor $2k$, $k > 0$ in das ursprünglich gegebene Heron-Dreieck D transformiert, dann gilt für D:

$a = 2ka^0$, $b = 2kb^0$, $c = 2kc^0$, $s = 2ks^0$ und $f = (2k)^2 f^0 = k^2 \ u \quad \frac{1}{v} + v \quad \frac{1}{v}$.

Damit ergeben sich aus (5) - (7) unmittelbar die Gleichungen in (2).

Weil nun D ein beliebig vorgegebenes Heron-Dreieck ist, gilt die Erzeugungsregel (2) für jedes Heron-Dreieck.

8«TX9@0

Man finde eine Regel zur Erzeugung aller heronischer Dreiecke mit ganzzahligen Größen a, b, c, s und f. Die Lösung zu dieser Aufgaben ist auf Seite 27 zu finden.

ŌK9 K0jc0}H\0jō

®nj [n} § ~0°0}_j

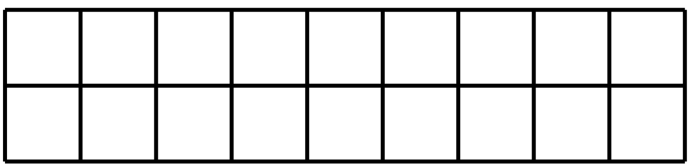
Es ist eine triviale Aufgabe, ein 10x10-Quadrat in 100 kongruente Vierecke zu zerlegen, die jeweils einen Umkreis besitzen, dessen Durchmesser $\sqrt{2}$ beträgt. Aber kann man ein 10x10-Quadrat auch in 100 kongruente Vierecke zerlegen, die jeweils einen Umkreis besitzen, dessen Durchmesser $\sqrt{3}$ beträgt? (Die Antwort ist zu begründen!)

[_j °0_ I Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2024 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

dǸ «jX L0} 8«TX9@0 9« [OT§ oU¢

In Heft 157 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Robinson Crusoe und sein Gefährte Freitag langweilen sich auf ihrer Insel. Daher zeichnet Robinson ein 9x2-Rechteck in den Sand und schlägt Freitag folgendes Spiel vor:



Jeder Spieler markiert abwechselnd entweder ein Feld oder zwei benachbarte (mit einer gemeinsamen Kante versehene) Felder des Rechtecks, wobei Robinson beginnt. Wer das letzte Feld markiert, gewinnt.

Für welchen der Spieler gibt es eine sichere Gewinnstrategie? (Die Antwort ist zu begründen!)

dÑ «jX

Robinson kann mit seinem ersten Zug das Spielfeld in zwei symmetrische Teile aufspalten, indem er die beiden mittleren Felder markiert. Nun braucht er nur noch nach jedem Zug von Freitag dessen Markierung symmetrisch nachzumachen und hat damit sicher den letzten Zug zum Gewinn. Wenn Robinson diese Symmetrie zu Beginn nicht erzeugt, kann er auch gewinnen, doch ist dann eine Begründung wesentlich komplizierter.

Eine weitgehend richtige Lösung wurde von Daniel Laibach Muniz eingesandt.

Auch dieses Spiel wurde rasch langweilig, und so schlug Freitag als Variante vor, beim Markieren von zwei Feldern auf die Bedingung der Nachbarschaft zu verzichten. Hat auch hier der erste Spieler eine Gewinnstrategie? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

dÑ «jX L0} ^jTn}h 9§_c]8«TX9@0 9« gmim^K oU¢

In Heft 157 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Schreibe ein Computerprogramm, das nach einem geschickten „Branch and Bound“ – Verfahren Affenpuzzle löst. Hinweis: Auf einem modernen Computer sollte das hier gezeigte 5x5-Puzzle in etwa einer Sekunde erledigt sein.
Eine noch größere Herausforderung ist es, mit einem Programm neue Affenpuzzle zu generieren, die lediglich vier Lösungen besitzen. Bitte beachte, dass alle Spielkarten unterschiedlich sein müssen, da man sonst ja durch Vertauschen bereits mehrere Lösungen erzeugen könnte. Du kannst auch die Zahl der Farben variieren oder das Puzzle mit gleichseitigen Dreiecken oder Sechsecken gestalten. Schicke uns Deine Lösung! Die erste Einsendung eines 7x7-Puzzles auf Basis von quadratischen Affenpuzzlekarten mit vier Farben mit einem korrekten Nachweis, dass es lediglich vier Lösungen besitzt (die durch Drehen um 90 ineinander überführbar sind), wird mit untenstehendem Buch prämiert. Der Nachweis darf selbstverständlich auch mit Software erbracht werden, falls diese auf einem handelsüblichen Rechner in unter einem Tag Laufzeit das Ergebnis berechnet.

(JG)

¯0_§0}0 ^jTn}h9§_nj0j

Auf der Webseite °°°u9@0j§0«0}]_jTn}h9§_cuL0 findest Du die Open-Access-Kapitel des Buchs „Abenteuer Informatik“ zum freien Herunterladen und viele weitere Aktivitäten.
Hier noch die Bibliographie des vollständigen Buches:
Jens Gallenbacher „Abenteuer Informatik: IT zum Anfassen für alle von 9 bis 99 – vom Navi bis Social Media“,
5. Auflage, Springer Nature Verlag, 2021, ISBN 978-3-662-63738-8

dǸ «jX

Eine Lösung für diese Aufgabe wurde von Dr. Gero Scholz verfasst und kann als Code auf unserer Website unter

\§§q I¤¤hnjn_Luh9§\0h9§_cu«j_]h9_j¶uL0¤8« @e_Hc8«TK_0^jTn}h9§_cuq\q

eingesehen werden.

8j H\9«e_H\0 8jnh9e_0

®nj [9}§°_X S«H\

Prof. Quaoar, Mathematiker mit besonderem Interesse an den Problemen, die im Zusammenhang mit dem Unendlichen in der Mathematik auftreten, spricht in einer seiner Vorlesungen über sein Lieblingsthema.
Prof. Q.: Man stellt sich das Unendliche oft als ein einheitliches Ganzes vor, das nur eine erkennbare Eigenschaft besitze: seine Unendlichkeit eben. Aber das ist ein Irrtum, wie man seit Georg Cantor (1845 - 1918), dem Begründer der Mengentheorie, weiß. Er hat gezeigt, dass das Unendliche eine hoch-komplexe Struktur mit bemerkenswerten Eigenschaften besitzt. Diese Eigenschaften sind meist alle logisch problemlos – oft aber sind sie anschaulich nur schwer oder gar nicht akzeptabel.
Diese Kluft zwischen mathematischer Realität und der Anschauung will Prof. Q. nun anhand einiger Eigenschaften der Menge der nicht negativen rationalen Zahlen (kurz: r-Zahlen) aufzeigen. Dabei spielt die „Dichte“ der r-Zahlen in dieser Menge eine Rolle.

Prof. Q: Es sei B die Menge der r-Zahlen $\frac{m}{n}, n \neq 0$ und m, n positive ganze Zahlen, m und n ohne gemeinsamen Teiler $\neq 1$.
Dann gilt die anschaulich unmittelbar einleuchtende Behauptung:

(1) Die r-Zahlen liegen in B „dicht beieinander“.

Die Mathematiker präzisieren „Dichte“ so:

(2) Zu jeden zwei r-Zahlen $a, b \in B$ mit $a < b$ gibt es stets eine r-Zahl $c \in B$, so dass $a < c < b$ ist – zum Beispiel ist $c = \frac{a+b}{2}$ eine solche Zahl.

Die Elemente von B erfüllen die Bedingung (2). Damit ist die intuitive Vorstellung von „Dichte“ in (1) in eine mathematische Form gebracht.

N_j0 0} §0 9j H\9«e_H\0 8jnh9e_0

Jede r-Zahl lässt sich geometrisch so veranschaulichen:
In der Ebene sei eine Halbgerade h mit dem Anfangspunkt O gegeben. Man ordnet dann einer r-Zahl a denjenigen Punkt von h zu, der den Abstand a von O besitzt. Der so festgelegte Punkt sei der *}9§_nj9e0 p«jc§* a (kurz: r-Punkt a) genannt und P sei die Menge aller r-Punkte a. Die umkehrbar eindeutige Zuordnung $B \leftrightarrow P$ bewirkt, dass gilt:

(3) Die r-Punkte liegen in P „dicht beieinander“,

– was geometrisch bedeutet: „zwischen“ jeden zwei r-Punkten a, b liegt stets ein r-Punkt c, etwa der Punkt, welcher der Zahl $c = \frac{a+b}{2}$ entspricht.

Man kann nun für r-Punkte a, b eine Beziehung „a vor b“ definieren, die zusammen mit (3) zu einer bemerkenswerten anschaulichen Anomalie führt.
Wegen (3) scheint es ausgeschlossen, dass man die r-Punkte wie Perlen in einer Kette aneinander oder wie Quadratzahlen der Größe nach in eine Liste aufführen kann – mathematisch ausgedrückt: in einer Folge anordnen kann. Und doch ist das möglich!

Prof. Q.: Es sei P_1 die Menge der r-Punkte a von P, die zwischen den Punkten 0 und 1, 1 eingeschlossen, liegen.
Dann ist $a = \frac{1}{1}$ oder $a = \frac{m}{n}$ mit $1 \quad m < n$, m und n ohne gemeinsamen Teiler $\neq 1$.
Wir fassen nun die r-Punkte a mit gleicher Summe $S = m + n$ zusammen zu einer Gruppe G_s und ordnen die Gruppen G_s, $s = 2, 3, 4, \ldots$ nach wachsender Größe von s zu einer Folge an. Daraus folgt – da jede Gruppe G_s nur endliche viele Elemente – besitzt:

(4) Die r-Zahlen aus P_1 sind in einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ anordenbar.

?0_ q_0e o

Aus der folgenden Tabelle liest man ein Anfangsstück der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ab.

$S = m + n$	2	3	4	5	6	7	8	...
$\frac{m}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}\,\frac{2}{5}\,\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}\,\frac{3}{5}$	...
Gruppe G_s	(a_1)	(a_2)	(a_3)	(a_4, a_5)	(a_6)	(a_7, a_8, a_9)	(a_{10}, a_{11})	...

Damit folgt: $P_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

Intuition: Das Wesentliche einer Sache unmittelbar durch Anschauung erkennen.
Die Halbgerade h bezeichnet man üblicher Weise als *Zahlenstrahl*.

µ°0_ °0_§0}0 9j H\9«e_H\0 8jnh9e_0j

Prof. Q: Die r-Punkte b der Menge P, $b = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden m 1, n 1, können auf die gleiche Weise wie die r-Punkte der Teilmenge P_1 von P nach der Größe der Summen $s = m + n$ in jeweils endliche Gruppen G_s^0 eingeteilt und diese Gruppen dann in einer Folge angeordnet werden. Daraus folgt:

(5) Die r-Punkte von P sind in einer Folge $b_1, b_2, b_3, ...$ anordenbar.

?0_ q_0e ©

Ein Anfangsstück der Folge $b_1, b_2, b_3, ...$

$s = m + n$	2	3	4	5	6	...
$\frac{m}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{3}{2}\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}\frac{5}{1}$	...
Gruppe G_s^0	(b_1)	(b_2, b_3)	(b_4, b_5)	(b_6, b_7, b_8, b_9)	(b_{10}, b_{11})	...

Womit folgt: $P = fb_1, b_2, b_3, ...g$.
Die jeder intuitiven geometrischen Vorstellung widersprechende Aussage (5) führt unmittelbar zu einer weiteren viel diskutierten anschaulichen Anomalie. Schreibt man die beiden Folgen aus (4) und (5) so wie in der Figur

a_1	a_2	a_3	a_4	...	untereinander, so sieht man, dass für $i = 1, 2, 3, ...$ gilt:
l	l	l	l		Jedem r-Punkt a_i ist der r-Punkt b_i und umgekehrt
b_1	b_2	b_3	b_4	...	jedem r-Punkt b_i ist der r-Punkt a_i zugeordnet.

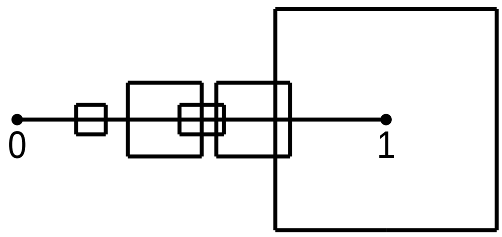
Daraus ergibt sich die unbezweifelbare Aussage, zugleich aber auch die anschauliche Anomalie:

(6) Die Teilmenge P_1 der Punktemenge P enthält gleich viele Punkte wie P.

i nH\ 0_j0 9j H\9«e_H\0 8jnh9e_0

Prof. Q.: Es sei T die Teilstrecke der Strecke mit den Endpunkten 0 und 1, in der alle r-Punkte $a_1, a_2, a_3, ...$ von P_1 (vgl. (4)) liegen. Für $i = 1, 2, 3, ...$ sei a_i der Mittelpunkt eines Quadrates Q_i mit zwei zum Zahlenstrahl parallelen Seiten. Dann gilt:

(7) Für jedes Quadrat Q_i, $i = 1, 2, 3, ...$ kann man die Länge l_i seiner Seiten so festlegen, dass die Quadrate Q_i zusammen die Strecke T nicht überdecken.



i 9H\ °0_

Vorweg: Für jedes d mit 1 $< d <$ 1 gilt $1 + d + d^2 + ... + d^n = \frac{1 \quad d^{n+1}}{1 \quad d}$ (man sieht dies, wenn man die Gleichung mit 1 d multipliziert).
Nun zu (7). Für d sei $0 < d < 1$ und es gelte $l_1 = d, l_2 = d^2, l_3 = d^3, ...$ Dann ist für jedes n 1:

$$l_1 + l_2 + l_3 + ... + l_{n+1} = d \quad 1 + d + d^2 + ... + d^n \quad = d \quad \frac{1 \quad d^{n+1}}{1 \quad d}.$$

Wenn n gegen unendlich strebt, dann konvergiert d^{n+1} gegen null. Somit gilt:

(8) $l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots = \frac{d}{1\;\,d}$.

Ist nun z.B. $d = \frac{1}{11}$, so gilt $l = \frac{1}{10}$ und geometrisch bedeutet das:
Die Quadrate Q_i zusammen überdecken nur 10% der Strecke T der Länge 1 – ein Ergebnis, das wegen (3) im Grunde mit der Anschauung unvereinbar ist.

Die Behauptung (7) trifft immer dann zu, wenn in (8) $l < 1$, also $\frac{d}{1\;\,d} < 1$ und daher $d < \frac{1}{2}$ ist. Sie bleibt sogar gültig für den gesamten Zahlenstrahl. Das ergibt wie oben die Behauptung (7) – man ersetzte dort nur die Folge der r-Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots$ aus der Strecke T durch die Folge $b_1, b_2, b_3, \dots$ der r-Punkte des ganzen Zahlenstrahls.

Prof. Q.: Die Behauptung (7) und ihre Verallgemeinerung werfen natürlich die Frage auf: Welche Art von Punkten liegen in den von Quadraten nicht überdeckten Lücken der Strecke T und des Zahlenstrahls?
Es sind nicht-rationale Punkte wie $\sqrt{2}$ und – aber das ist ein anderes, tiefliegendes Thema.

?0h0}c«jX

Die anschaulichen Anomalien (4) und (5) gehen zurück auf Überlegungen von Georg Cantor; (6) war allerdings schon Galileo Gelilei (1564 - 1642) oder vielleicht auch schon früher bekannt. Und Axel Harnack (1851 - 1888) hat im Jahr 1885 die anschauliche Anomalie (7) entdeckt.

N_j 8e§O} q}n@eO h

®nj [9}§°_X S«H\

Ein Lehrer (L) unterhält sich mit seiner Kollegin (K).
L: „Sie haben drei Kinder. Wie alt sind sie?"
K: „Wenn man ihre Alter (in ganzen Jahren) addiert, dann erhält man 13."
L: „Damit finde ich keine Antwort auf meine Frage."
K: „Das Produkt der Alter meiner Kinder ist 36."
L: „Auch damit kann ich das Alter der Kinder nicht bestimmen."
K: „Mein ältestes Kind hat rote Haare."
L: „Jetzt weiß ich, was ich wissen wollte."
Die letzte Aussage von K erlaubt es auch dem Leser, das Alter der Kinder zu bestimmen.

dǸ «jX

Es gibt 14 Kombinationen für die Darstellung von 13 als eine Summe. Für jede dieser Kombinationen ist das Produkt der drei Summanden bestimmbar.

Alter der Kinder

	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4
	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	3	4	5	4
	11	10	9	8	7	6	9	8	7	6	7	6	5	5
Q	11	20	27	32	35	36	36	48	56	60	63	72	75	80

Die untere Zeile zeigt das Produkt aus den Altern der einzelnen Kinder.
Die zweite Aussage von K belegt:
Die Kinder sind $1, 6, 6$ oder $2, 2, 9$ Jahre alt – denn in jedem anderen Fall folgt aus der Tabelle: Das Produkt der Alter ist ungleich 36.
Aus der 3. Aussage von K folgt: Ein Kind ist älter als die beiden Anderen. Also sind die Kinder $2, 2$ und 9 Jahre alt.

dǸ «jX0j L0} g 9§\0 q_0e0}0_0j
9« g mim^K oUP
Sʁ} L_0 aʁjX0}0j ~H\ʁe0}¤_jj0j L0} be9 0j UŚP

^u 8« ª jXe0_H\«jX0j TneX0j ª jXe0_H\«jX0j

Ersetze jeweils mit Begründungen in 1. bis 5. die Kästchen durch eines der Symbole $>$, $<$, oder $=$, sodass man jeweils eine wahre Aussage erhält.

1. Aus $x > y$, $y > 0$ folgt $2x + z \quad \frac{1}{2}y + z$;
2. aus $x > y$, $z < 0$ folgt $xz \quad yz + 1$;
3. aus $x < y < 0$ folgt $x^2 \quad y^2$;
4. aus $0 < x < y < 1$ folgt $xy \quad \frac{1}{xy}$;
5. aus $x < 1$ folgt $x^3 \quad x^2$.

[_j °0_ I Sʁ} µ9\e0j a, b, c X_e§I $a < b$) $a + c < b + c$ n°_0 $ac < bc$J T9ee $c > 0$ «jL $ac > bc$J T9ee $c < 0$u (H.F.)

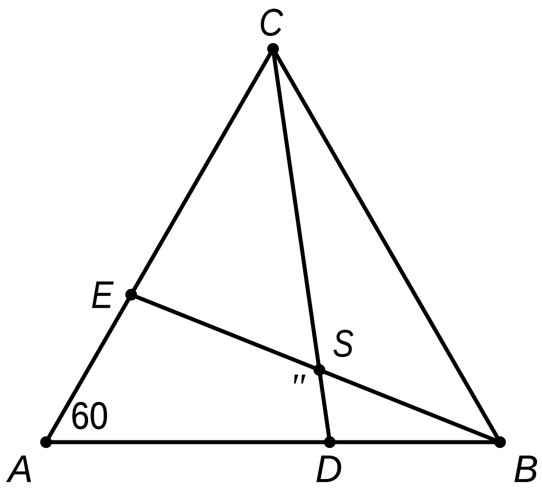
dǸ «jXI

1. $2x + z > \frac{1}{2}y + z$, denn $x > y$) $2x + z > 2y + z > \frac{1}{2}y + z$.
2. $xz < yz + 1$, denn aus $z < 0$ und $x > y$) $xz < yz < yz + 1$.
3. $x^2 > y^2$, denn $x > 0$, $y > 0$ und aus $x < y$) $x > y$) $(x)^2 = x^2 > (y)^2 = y^2$.
4. $xy < \frac{1}{xy}$, denn aus $0 < x < 1$ und $0 < y < 1$) $0 < xy < 1$) $1 < \frac{1}{xy}$.
5. Es sei $x = 0$) $x^3 = x^2$;
   es sei $x < 0$) $x^3 < 0$ und $x^2 > 0$, so dass $x^3 < x^2$ ist;
   es sei $x > 0$. Aus $x < 1$) $x^3 = x^2 \ x < x^2 \ 1 = x^2$. Also ist $x^3 < x^2$.

^^u ¯_jcOe XO «H\§

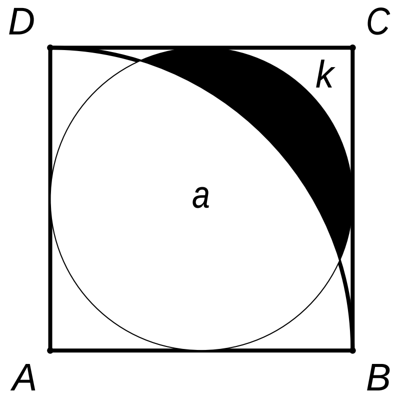
In einem gleichseitigen Dreieck *ABC* sei ein Punkt *D* auf der Seite *AB* und ein Punkt *E* auf der Seite *AC* so gewählt, dass *jAEj* = *jBDj* ist. Bestimme die Winkel, die die Strecken *BE* und *CD* in ihrem Schnittpunkt *S* bilden. (H.F.)

dÑ «jXI



Die Dreiecke *ABE* und *BCD* sind kongruent, da *jABj* = *jBCj* sowie *jAEj* = *jBDj* und
^*BAC* = ^*ABC* = 60 (SWS-Satz).
Mit den Bezeichnungen der Winkel in der Figur gilt dann: = . Im Dreieck *BSD* ist dann = 180
und im Dreieck *BCD* gilt: + + 60 = 180 und daher + (180) + 60 = 180 . Also ist = 60 und sein Nebenwinkel " = 120 .

^^^u SeÞH\0j®0}Xe0_H\ ] 0_j 9j H\9«e_H\0 p9}9Ln²



Es sei *k* der Kreis, der die vier Seiten des Quadrates *ABCD* von innen berührt, *v* sei der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt *A* und dem Radius *r* = *jABj*.
Es sei *m* die Fläche des schwarzen „Mondes“ und *s* sei die Gesamtfläche der drei schraffierten „Sicheln“. Gilt nun $m > s$ oder $m = s$ oder $m < s$? Begründe deine Entscheidung. (H.F.)

dÑ «jXI

Es sei *a* die Fläche des zentralen weißen Gebietes. Dann hat der Kreis *k* die Fläche $\frac{1}{2}AB^{\;2} = a + m$. Mit *jABj* = *r* gilt daher

(1) $a + m = \frac{1}{4}\ r^2$

Für die Fläche des Viertelkreises *v* gilt: $a + s = \frac{1}{4}$ $jABj^2$, so dass

(2) $a + s = \frac{1}{4}\ \ r^2$

gilt, Aus (1) und (2) ergibt sich: m=s.

^-u µ_¸0}j®0}§9« H\«jX

Wenn man bei 2-ziffrigen natürlichen Zahlen die Ziffern vertauscht, dann sind einige der neuen Zahlen größer als die alten Zahlen – z.B. erhält man aus 45 die Zahl 54. Wie oft kommt das vor bei Vertauschung der Ziffern der 10, 11, 12, ..., 99 ? (H.F.)

dÑ «jXI

Es sei $A(10 \quad n \quad 99)$ die Anzahl der neuen Zahlen, die größer als die alten Zahlen n sind, $10 \quad n \quad 99$.

Es gilt

$A(10 \quad n \quad 19) = 8$, $A(20 \quad n \quad 29) = 7$, $A(30 \quad n \quad 39) = 6$, ..., $A(80 \quad n \quad 89) = 1$ und $A(90 \quad n \quad 99) = 0$)

$A(10 \quad n \quad 99) = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

-u ~«h h0jL9} §0ee«jX ®nj p}_h¶9\e0j

Bilde aus den Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, 12, 13$

a) 7 zweigliedrige Summen, die sechs verschiedene Primzahlen darstellen;

b) 2 Summen, welche die kleinstmögliche und die größtmögliche Primzahl ergeben.

(H.F.)

dÑ «jXI

a) $0 + 13 = 13$, $1 + 6 = 7$, $2 + 3 = 5$, $4 + 7 = 11$, $5 + 8 = 13$, $9 + 10 = 19$, $11 + 12 = 23$

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 13 = 91$. Weil $91 \quad 2 = 89$ und 89 eine Primzahl ist, gilt: die größtmögliche Primzahl ist $1 + 3 + 4 + \ldots + 12 + 13 = 89$ und die kleinstmögliche Primzahl ist $0 + 2 = 2$.

-^u K_®_ _nj }0 § 1

Welches ist die kleinste positive ganze Zahl n, die bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 jeweils den Rest 1 übrig lässt? (H.F.)

dÑ «jXI

Die Zahl $k = 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$ ist durch $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9 ohne Rest teilbar. Gleiches gilt dann für $m = 5 \ 7 \ 8 \ 9 = 2520$.

Daher erfüllt jede Zahl $n = a \ 2520 + 1$, $a = 1, 2, 3, \ldots$ (und nicht nur diese) die vorgegebenen Bedingungen.

Für $a = 1$ ergibt sich dann die gesuchte kleinste Zahl $n = 2521$.

-^^u N_j p}nL«c§ «jL 0_j_X0 0_j0} ¦0_e0}

Für jede natürliche Zahl n, $n \quad 1$, gilt: Das Produkt

$$P_n = (n + 1)(n + 2) \ \ldots \ (2n)$$

mit $P_1 = 2$, $P_2 = 3 \ 4$ und so weiter hat die Teiler 2^m mit $m = 1, 2, 3, \ldots, n$ und $\frac{P_n}{2^n}$ ist dabei immer eine ungerade Zahl.

Zeige dies. (H.F.)

dÑ «jXI

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{P_n}{2^n} &= \frac{(n+1)(n+2)\ \ \dots\ \ (2n)}{2^n} \\ &= \frac{1\ \ 2\ \ 3\ \ \dots\ \ n(n+1)\dots(2n)}{1\ \ 2\ \ 3\ \ \dots\ \ n\ \ 2^n} \\ &= \frac{1\ \ 2\ \ 3\ \ \dots\ \ (2n)}{2\ \ 4\ \ 6\ \ \dots\ \ (2n)} \\ &= 1\ \ 3\ \ 5\ \ \dots\ \ (2n\quad 1),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

i 0«0 g 9§\0 q_0e0}0_0j

Sʙ} L_0 aʙjX0}0j ~H\ʙe0}¤_jj0j L0} be9 0j UŚP

Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.

Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.

Einsendeschluss: 15. November 2024.

Weitere Informationen auf Seite 2.

ᐞu W0cʙ}¶§0 }9§_nj9e0 µ9\e0j

Eine rationale Zahl $\frac{x}{y}$, wobei x und y natürliche Zahlen sind, nennen wir *X0cʙ}¶§*, wenn 1 der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

Wie viele rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ gibt es, für die gilt: $x > 0, y > 0$ und $x + y = 90$?

(H.F.)

ᐞᐞu µ_¸0}j «h h0

Wie groß ist die Summe der **µ_¸0}j** aller Zahlen

a) von 0 bis 100 ?

b) von 0 bis 1000

(H.F.)

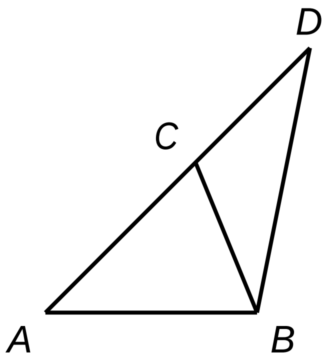
ᐞᐞᐞu N_j0 8«TX9@0 ®nj d0nj9}Ln L9 -_jH_

Leonardo da Vinci (1452 - 1519), der große Künstler und erfindungsreiche Konstrukteur mechanischer Maschinen, interessierte sich sehr für die Mathematik. Die folgende Aufgabe stammt von ihm.

Gegeben seinen zwei kongruente Kreise, die sich in den Punkten P und Q schneiden, $P \neq Q$.

Dann ist jeder Punkt der Geraden durch P und Q gleich weit von den Mittelpunkten M_1 und M_2 der beiden Kreise entfernt.
Begründe, dass Leonardo Recht hat. (H.F.)

^-u ~§«hqT°_jce_X0 K}0_0Hc



Es sei ABC ein beliebiges, jedoch nicht gleichschenkliges Dreieck mit $jACj > jBCj$. Mann verlängere AC über C hinaus bis zu einem Punkt D, wobei $jCDj = jBCj$ sei.

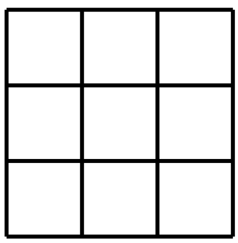
a) Zeige: $= \frac{1}{2}$

b) Zeige nun: Der Winkel ^ABD ist größer als 90 .

[_j °0_ I ^h K}0_0Hc X_e§I L0} X}ŇŻ0}0j ~0_§0 e_0X§ L0} X}ŇŻ0}0 ¯_jc0e X0X0j ʁ@0}u

(H.F.)

-u ?«j§0 w«9L}9§0



Neun gleich große Quadrate seien wie in der Figur angeordnet. Färbe jedes Quadrat mit einer der Farben schwarz (S), weiß (W) oder grau (G), so dass gilt:

jedes schwarze Quadrat hat mit genau einem grauen Quadrat,

jedes graue Quadrat hat mit genau einem weißen Quadrat,

jedes weiße Quadrat hat mit genau einem schwarzen Quadrat,

jeweils genau eine Seite gemeinsam. (H.F.)

-^u ?0 njL0}0 w«9L}9§¶9\e0j

Bestimme rechnerisch alle vierstelligen Quadratzahlen, deren ersten beiden und letzten beiden Ziffern übereinstimmen. Gesucht sind also alle Quadratzahlen mit der Form $xxyy$. (Wolfgang J. Bühler)

-^^u 8j¶9\e ®nj ¦0_e0}j

Es sei p eine Primzahl. Bestimme die Anzahl der Teiler von $20p$.

[_j °0_ I ªj§0} H\0_L0 L_0 SÞee0 $p = 2, 3, 5$ *«jL* p *7u* (H.F.)

i 0«0 8«TX9@0j

bȩ9 0j kŚo¨

Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.

Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.

Einsendeschluss: 15. November 2024.

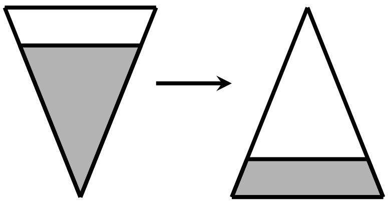
Weitere Informationen auf Seite 2.

8«TX9@0 o¨U©I WȩO_H\«jX h_§ ¨0}]pn§0j¶0j

Finde alle reellen Lösungen der Gleichung $3^{3x} + 3^{2x} + 3^{x} = 39$.

(Klaus Ronellenfitsch)

8«TX9@0 o¨U¨I ¯9 0} _h b0X0ȩ



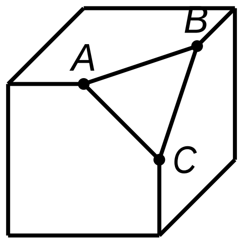
Ein 8cm hohes kegelförmiges Gefäß (Spitze unten, siehe Bild) ist bis 1 cm unter dem oberen Rand mit Wasser gefüllt. Nun deckt man die obere Gefäßfläche dicht ab und dreht das Gefäß um.

Wie hoch ist jetzt das Gefäß mit Wasser gefüllt?

(Klaus Ronellenfitsch)

?0h0}c«jXI N TÞȩȩ§ ®_0ȩȩ0_H\§ 9«TJ L9 L0} |9L_« L0 c0X0ȩ] TÑ}h_X0j W0TÞŻ0 j_H\§ 9jX0X0@0j _ §u N} q_0ȩ§ 9@0} @0_h N}] X0@j_ c0_j0 |nȩȩ0J L9 0} _H\ @0_ L0} ?0 §_h h«jX Xȩ0_H\«jX L0} [Ǹ\0 h \0}9« cв}¶§u [_j °0_ I -0}°0jL0 L_0 ~§}9\ȩ0j Þ§¶0u

8«TX9@0 o¨UVI 8@X0 H\j_§§0j0} ¯в}T0ȩ



Welcher Bruchteil des Würfels ist abgeschnitten, wenn die Punkte A, B und C jeweils die Mittelpunkte der Kanten sind?

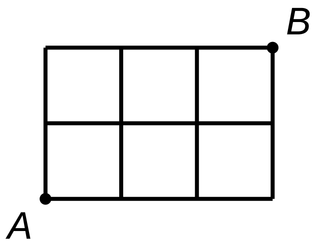
Hinweis: Kopfrechnen reicht, Taschenrechner wird nicht gebraucht.

(Christoph Sievert)

8«TX9@0 o¨UUI |«jL°9jL0}°0X0

Das Wegenetz zeigt verschiedene Wege von A nach B.

a) Wie viele kürzeste „Rundwanderwege“ gibt es von A nach B und wieder zurück nach A?



b) Wie viele „Rundwanderwege ohne Wegwiederholung“ gibt es, wenn beim Rückweg kein auf dem Hinweg bereits gegangener Teilweg nochmals gegangen werden darf?

(Klaus Ronellenfitsch)

8«TX9@0 o¨U£I K«}H\ 33 §0_e@9}

Die sechsstellige Zahl 132312 enthält je zweimal die Ziffern 1, 2 und 3.

a) Wie viele solcher Zahlen gibt es?

b) Wie viele davon sind durch 33 teilbar?

(Klaus Ronellenfitsch)

8«TX9@0 o¨U¢I ~H\«@e9L0j]?0°0_

Unter sechs verschiedenen positiven ganzen Zahlen größer gleich Null gibt es ein Zahlenpaar, dessen Summe oder Differenz durch 9 teilbar ist. Zeige dies. (H.F.)

WOeǸ §0 8«TX9@0j 9« gm i m^K oUP

be9 0j kŚo¨

8«TX9@0 o¨VUI N_j 9e§0 p}n@e0h

Gegeben ist eine Strecke r.

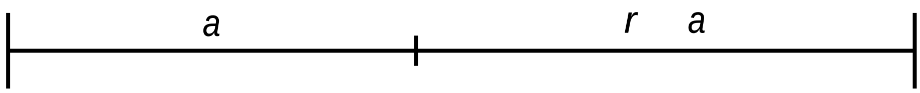
a) Teile diese Strecke in zwei Teile, so dass das Produkt der Teilstücke maximal wird.

b) Teile diese Strecke in drei Teile, so dass das Produkt der Teilstücke maximal wird.

(Christoph Sievert, Bornheim)

dǸ «jXI

a) Betrachten wir zunächst den Fall, dass r in zwei Teile geteilt wird.
Behauptung: Das Produkt der Teilstücke wird dann maximal, wenn die Strecke halbiert wird.



Zu zeigen:

$$\frac{r}{2}^{2} > a(r \quad a) \qquad \text{mit } a < r \text{ und } a \neq \frac{r}{2}$$

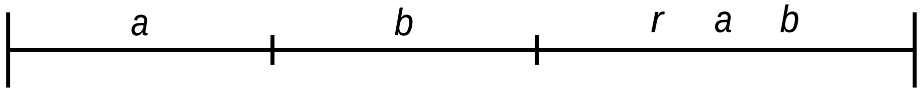
$$\frac{r^2}{4} > ar \quad a^2$$

$$r^2 \quad 4ar + 4a^2 > 0$$

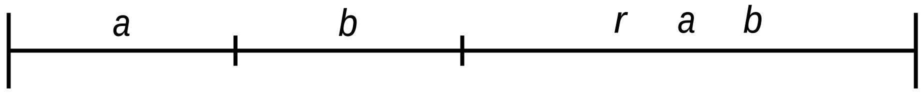
$$(r \quad 2a)^2 > 0$$

stets wahr, außer für $a = \frac{r}{2}$ (siehe oben).

b) Betrachten wir nun den Fall, dass eine Strecke in drei Teile geteilt wird.



Wie im ersten Fall zu sehen wird das Produkt aus a und b maximal, wenn a gleich b ist:



Zu zeigen:

$$\frac{r}{3}^{\;3} > a^2(r \quad 2a) \qquad \text{mit } a < r \text{ und } a \neq \frac{r}{3}$$

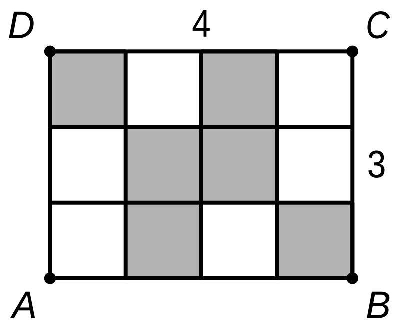
$$\frac{r^3}{27} > a^2 r \quad 2a^3$$

$$r^3 \quad 27a^2 r + 54a^3 > 0$$

$$(r \quad 3a)^2 (r + 6a) > 0$$

stets wahr, außer für $a = \frac{r}{3}$ (siehe oben).

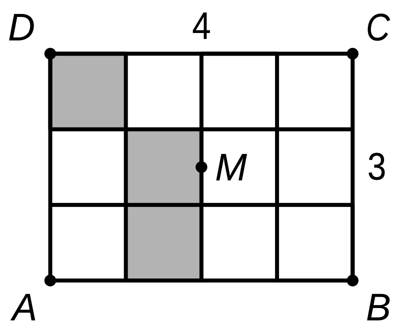
8«TX9@0 o¨V£I SÞ}@«jX 0_j0 |0H\§0Hc



Ein Rechteck R mit den Seitenlängen 4 und 3 ist in Einheitsquadrate unterteilt. Diese sollen rot oder blau gefärbt werden, wobei jede Farbe mindestens einmal vorkommen soll.
Wie viele punktsymmetrische verschiedene Färbungsmuster sind möglich?

(Klaus Ronellenfitsch)

dÑ «jXI

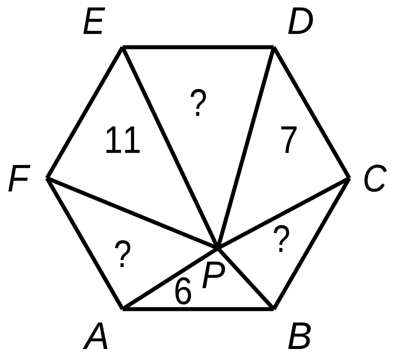


Betrachte das halbe Rechteck R mit den Seitenlängen 2 und 3. Jede Färbung von R ergibt durch Punktspiegelung am Mittelpunkt M von R eine Färbung des ganzen Rechtecks R. R hat $k = 6$ Felder. Wir betrachten alle möglichen Blaufärbungen von R (dann sind die restlichen Felder rot gefärbt). Dafür gibt es (da blau mindestens einmal und höchstens $k \quad 1$ mal vorkommt)

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{k}{1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{2} + \ldots + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{k \;\, 1} \text{ Möglichkeiten.}$$

Da $\genfrac{}{}{0pt}{}{k}{0} + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{2} + \ldots + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{k \;\, 1} + \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{k} = 2^k$ ist (siehe eine Formelsammlung), ist die gesuchte Anzahl $2^k \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{0} \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{k} = 2^k \quad 1 \quad 1 = 2^k \quad 2$.
Das Rechteck besitzt also $2^6 \quad 2 = 62$ punktsymmetrische Färbungsmuster.

8«TX9@0 o¨V¢I SeÞH\0j_j\9e§0 _h K}0_0Hc



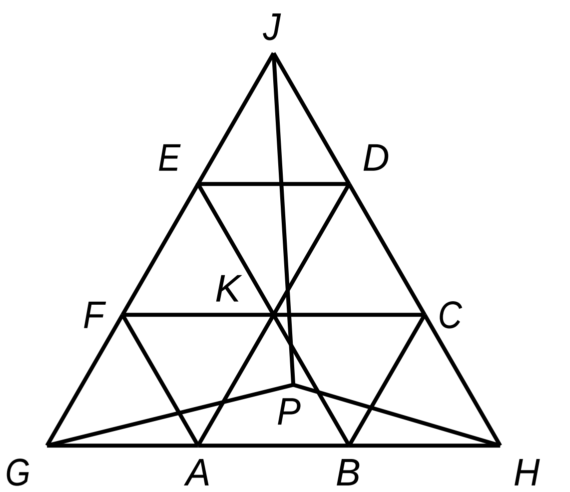
In einem regelmäßigen Sechseck *ABCDEF* ist *P* ein innerer Punkt des Sechsecks. Verbindet man *P* mit den Ecken, so entstehen sechs Dreiecke, von denen drei Flächeninhalte angegeben sind.

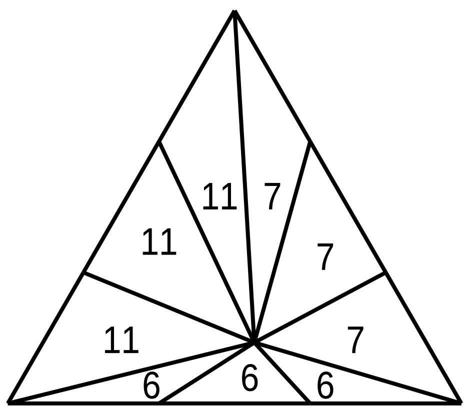
Wie groß sind die anderen drei Flächeninhalte?

[_j °0_ I N_j0 ~§}9§0X_0 °Þ}0 L9 ~0H\ 0Hc _j 0_j Xe0_H\]
0_§_X0 K}0_0Hc 0_j¶«@0§§0ju

(Klaus Ronellenfitsch)

dǸ «jXI





Bettet man das Sechseck in ein gleichseitiges Dreieck *GHJ* ein, so enthält dieses neun gleichseitige und kongruente Dreiecke *GAF*, *AKF*, *ABK* usw.

Zieht man nun die Verbindungsstrecken von *P* zu den Eckpunten des Sechsecks und den Eckpunkten des großen Dreiecks, so entstehen neun Dreiecke, von denen je drei den gleichen Flächeninhalt haben (gleiche Grundseite und Höhe). Also hat das große Dreieck den Flächeninhalt (6 + 7 + 11)   3 = 72 und jedes der neun kongruenten Teildreiecke den Flächeninhalt $\frac{72}{9}$ = 8. Daher hat Dreieck *BCP* den Flächeninhalt 6 + 7   8 = 5, das Dreieck *DEP* hat den Flächeninhalt 11 + 7   8 = 10 und das Dreieck *FAP* hat den Flächeninhalt 11 + 6   8 = 9.

8«TX9@0 o¨VPI g9§\0h9§_ H\0} 8« ¼«X _j L_0 ª~8

Auf wie viele Arten kann man unter Verwendung aller Buchstaben von

a) FLORIDA ...

b) TENNESSEE ...

... „Wörter“ (auch unsinnige wie EEEENNSST) bilden? (Klaus Ronellenfitsch) *dǸ «jXI*

a) Besteht ein Wort aus n verschiedenen Buchstaben, so kann der erste Buchstabe an n verschiedenen Plätzen im Wort stehen, der zweite nur noch an $n \quad 1$ Plätzen, der dritte nur noch an $n \quad 2$ Plätzen usw. Insgesamt gibt es hierfür $n \quad (n \quad 1) \quad (n \quad 2) \quad \ldots \quad 1 = n!$ („n Fakultät“) Möglichkeiten. Dies ist bei dem Wort FLORIDA mit 7 verschiedenen Buchstaben der Fall. Also kann man mit den Buchstaben von FLORIDA 7! = 5.040 „Wörter“ bilden.

b) Kommt in einem Wort mit n Buchstaben der gleiche Buchstabe k-mal vor, so gibt es für diese k Plätze im Wort $k!$ Vertauschungsmöglichkeiten. Also ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch $k!$ zu teilen. Bei dem Wort TENNESSEE mit 9 Buchstaben kommt E viermal vor, N zweimal, S zweimal und T einmal. Also kann man mit den Buchstaben von TENNESSEE $\frac{9!}{4!\,2!\,2!} = 3.780$ „Wörter“ bilden.

8«TX9@0 o¨VkI 8«X0j «h h0 ¶°0_0} ~q_0e° ʙ}T0e

Zwei Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Beide Spielwürfel besitzen sechs Seiten mit den natürlichen Zahlen eins bis sechs aufgedruckt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme der beiden geworfenen Würfel größer als sieben ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man mindestens, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens drei Würfe der beiden Würfel, bis die geworfene Augensumme erstmals größer als sieben zeigt.

(Klaus Ronellenfitsch)

dǸ «jXI

a) Augensumme acht bedeutet $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$ (fünf Ergebnisse); Augensumme neun bedeutet $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$ (vier Ergebnisse), Augensumme zehn bedeutet $(4,6)$, $(5,5)$, $(6,4)$ (drei Ergebnisse), Augensumme elf bedeutet $(5,6)$, $(6,5)$ (zwei Ergebnisse) und Augensumme zwölf bedeutet $(6,6)$ (ein Ergebnis). Da es insgesamt $6 \quad 6 = 36$ Ergebnisse gibt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \quad 0{,}42$.

b) Man braucht mindestens drei Würfe, wenn bei den ersten beiden Würfen die Augensumme nicht größer als sieben ist. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1 \quad \frac{7}{12}\ ^2 = \frac{95}{144} \quad 0{,}66$.
Man braucht höchstens drei Würfe, wenn die Augensumme schon beim ersten oder beim zweiten oder beim dritten Wurf größer als sieben ist. Dafür ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{12} + \frac{7}{12} \quad \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \quad \frac{7}{12}\frac{5}{12} = \frac{5}{12} \quad 1 + \frac{7}{12} + \frac{49}{144} \quad = \frac{1385}{1728} \quad 0{,}80$.

8«TX9@0 o¨U·I w«9L}9§¶9\e

Zeige: Für jede positive ganze Zahl n ist

$$n \ (n+2) \ (n+4) \ (n+6)+16$$

eine Quadratzahl. (Klaus Ronellenfitsch)

dǸ «jXI

ou g ǸXe_H\c0_§

Löst man bei $f(n) = n \ (n+2) \ (n+4) \ (n+6)+16$ alle Klammern auf, so erhält man: $f(n) = n^4 + 12n^3 + 44n^2 + 48n + 16$. Der Anfang und das Ende dieses Terms legen es nahe, $f(n)$ mit $g(n) = (n^2 + an + 4)^2$ gleichzusetzen. Berechnet man $g(n)$, so erhält man: $g(n) = n^4 + 2an^3 + (8 + a^2)n^2 + 8an + 16$. Ein Koeffizientenvergleich mit $f(n)$ ergibt: $2a = 12$, $8 + a^2 = 44$ und $8a = 48$. Alle drei Gleichungen ergeben $a = 6$, also ist $f(n) = (n^2 + 6n + 4)^2$.

©u g ǸXe_H\c0_§

$$\begin{aligned} f(n) &= n \ (n+2) \ (n+4) \ (n+6)+16 \\ &= (n \ (n+6)) \ ((n+2) \ (n+4))+16 \\ &= (n^2+6n) \ (n^2+6n+8)+16 \end{aligned}$$

Für $x = n^2 + 6n$ ist

$$\begin{aligned} f(n) &= x \ (x+8)+16 \\ &= x^2+8x+16 \\ &= (x+4)^2 \\ &= (n^2+6n+4)^2 \end{aligned}$$

8«TX9@0 o¨UoI ¦0_e@9}c0_§ L«}H\ 7

Man schreibe unter die Ziffern einer Zahl von rechts her, das heißt beginnend mit der Einerziffer,
$1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, \ldots$, multipliziere dann übereinanderstehende Ziffern und addiere die Reste bei Division durch sieben. Zeige

a) Ist das Ergebnis durch sieben teilbar, so auch die ursprüngliche Zahl.
b) Es gilt sogar: Der Rest bei Division durch sieben ist der gleiche bei diesem Ergebnis und bei der ursprünglichen Zahl. (Wolfgang J. Bühler)

dǸ «jXI

a) Die Lösung von Aufgabenteil a) folgt aus der Lösung von Aufgabenteil b), deshalb wird hier nur ein Beispiel betrachtet.

$$\begin{array}{r} 6835764203 \\ 6231546231 \\ \hline 1225033403 \end{array}$$

Hier haben wir in der dritten Zeile gleich die Siebener-Reste der Produkte notiert, Es ist dann
$1 + 2 + 2 + 5 + 0 + 3 + 3 + 4 + 0 + 3 = 23 = 3 \quad 7$ Rest 2 und
$6835764203 : 7 = 976537743$ Rest 2.

8j h0}c«jX

K0} |0 § _ § L_0 N_j0} §0ee0 _j L0} K9} §0ee«jX L0} µ9\e _h ~´ §0h h_§ L0} ?9 _ _0@0ju

b) Die Reste bei Division durch sieben von $1, 10, 100, \ldots$ sind $1, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 3, \ldots$ Deshalb hat
$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + \ldots$ (im Dezimalsystem geschrieben als $\ldots a_3\, a_2\, a_1\, a_0$) den gleichen Siebenerrest wie $1 \quad a_0 + 3 \quad a_1 + 5 \quad a_2 + 4 \quad a_3 + \ldots.$

dǸ «jX L0} 8«TX9@0 9« 8}§_c0e [0}nj]K}0_0Hc0 r~u ¢s

Es sei n ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von u und v. Man erhält dann die gesuchte Regel, wenn man in den Gleichungen (2) $k = n$ setzt.

?0_ q_0e

Das kleinste gemeinsame Vielfache von $u = 5$ und $v = 2$ ist 10. Setzt man daher in (2) $k = 10$, so erhält man das Heron-Dreieck mit $a = 52$, $b = 25$, $c = 63$, $s = 140$ und $f = 630$.

?«jL0 °0§§@0°0}@ g9§\0h9§_c

µ°0_§0 |«jL0 ©·©V

®nj ~§0T9j b0}h0}J -nec0} p}_0@0 «jL ?9 §_9j ~H\j0_L0}

8«TX9@0 o

Bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, die die Gleichung $(x + 2)^4 \quad x^4 = y^3$ erfüllen.

?0\9«q§«jX

Die einzige Lösung ist $(x, y) = (\quad 1, 0)$.

?0°0_

Die linke Seite der Gleichung in der Aufgabenstellung lässt sich umformen zu

$$(x+2)^4 \quad x^4 = 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = (2x+2)^3 + 4 \quad (2x+2),$$

das heißt, für ein Paar (x, y) ganzer Zahlen, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen, ist das Paar (y, z) mit $z := 2x + 2$ eine Lösung der Gleichung

$$y^3 = z^3 + 4z \quad \text{für Paare } (y, z) \text{ ganzer Zahlen.} \tag{1.1}$$

Wir bestimmen zunächst alle Paare (y, z) ganzer Zahlen, die (1.1) erfüllen, und überprüfen anschließend, welche davon Paaren (x, y) ganzer Zahlen entsprechen, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen.

Es gibt keine Paare (y, z) ganzer Zahlen mit $z \neq 0$, die Lösungen von (1.1) sind; wir unterscheiden zum Nachweis zwei Fälle: Für $z \quad 1$ folgt aus (1.1), dass $y^3 \quad z^3 + 4 > z^3$, damit muss für eine Lösung (y, z) ganzer Zahlen von (1.1) aus Monotoniegründen $y > z$ gelten, also $y \quad z + 1$, und

$$y^3 \quad z^3 \quad (z+1)^3 \quad z^3 = 3z^2 + 3z + 1 > 6z > 4z.$$

Analog folgt für $z \qquad 1$ aus (1.1), dass $y^3 \quad z^3 \quad 4 < z^3$, damit muss für eine Lösung (y, z) ganzer Zahlen von (1.1) aus Monotoniegründen gelten, dass $y < z$, also $y \quad z \quad 1$, und

$$y^3 \quad z^3 \quad (z \quad 1)^3 \quad z^3 = \quad 3z^2 + 3z \quad 1 \quad 6z \quad 1 < 4z.$$

Ist $z = 0$, so muss in (1.1) auch $y = 0$ gelten. Das heißt, das Paar $(0, 0)$ ist die einzige Lösung von (1.1). Es kann damit auch höchstens eine Lösung (x, y) der Gleichung der Aufgabenstellung geben.

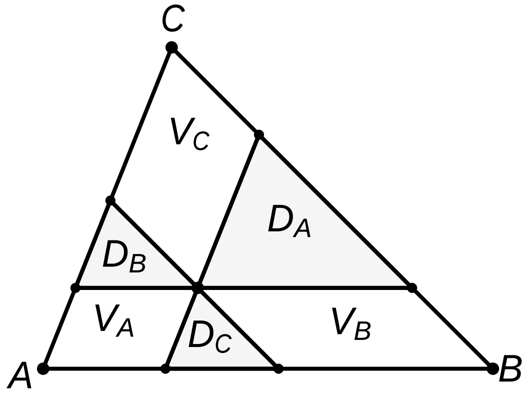
Das Tupel $(y, z) = (0, 0)$ entspricht dem Tupel $(x, y) = (\quad 1, 0)$, und man rechnet schnell nach, dass $(x, y) = (\quad 1, 0)$ die Gleichung der Aufgabenstellung tatsächlich erfüllt.

8«TX9@0 ¨

Gegeben ist ein Dreieck $4ABC$. Durch jeden Punkt P im Inneren des Dreiecks können die Parallelen zu den drei Seiten des Dreiecks gezeichnet werden. Diese zerlegen das Dreieck $4ABC$ in drei Dreiecke und drei Vierecke.

Dasjenige Viereck, das A als Eckpunkt besitzt, habe den Flächeninhalt V_A und dasjenige Dreieck, bei dem eine Seite auf der Strecke BC liegt, habe den Flächeninhalt D_A. Analog sind V_B und D_B bzw. sind V_C und D_C definiert.

Bestimme die Menge aller Werte, die der Term $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ annehmen kann, wenn P im Inneren von Dreieck $4ABC$ variiert.

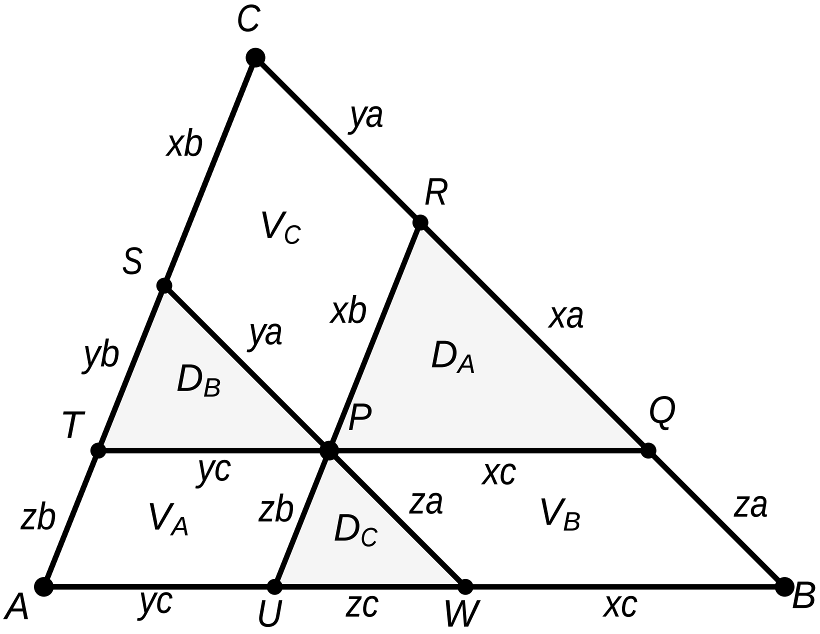


?0\9«q§«jX

Wenn der Punkt P im Inneren von Dreieck $\triangle ABC$ variiert, kann der Term $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ als Wert alle reelle Zahlen annehmen, die größer oder gleich $\frac{3}{2}$ sind.

?0°0_ rÞ\je_H\0 K}0_0Hc0s

Über die Bezeichnungen in der Aufgabenstellung hinaus seien die Punkte, in denen die Parallele zu einer Seite des Dreiecks die beiden anderen Dreiecksseiten schneidet, wie in Skizze 3.1 mit Q, R, S, T, U, W bezeichnet; außerdem seien im Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenlängen mit $\overline{BC} =: a, \overline{CA} =: b$ und $\overline{AB} =: c$ abgekürzt.



Skizze 3.1: Folgerungen aus den Ähnlichkeitsbeziehungen

Auf Grund der Parallelitätsbeziehungen $(WS) \parallel (BC)$, $(RU) \parallel (CA)$, $(QT) \parallel (AB)$ sind die Dreiecke $\triangle PQR$, $\triangle TPS$ bzw. $\triangle UWP$ jeweils ähnlich zum Dreieck $\triangle ABC$ (Ähnlichkeitssatz $W : W : W$). Aus der Ähnlichkeit von $\triangle PQR$ und $\triangle ABC$ folgern wir, dass

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} =: x \quad , \quad \overline{QR} = xa, \overline{RP} = xb, \overline{PQ} = xc \quad \text{mit } 0 < x < 1, \tag{3.1}$$

und weil die Vierecke $PRCS$ bzw. $WBQP$ auf Grund der Parallelitätsbeziehungen Parallelogramme sind, folgt aus (3.1), dass ebenfalls

$$\overline{CS} = xb \quad \text{bzw.} \quad \overline{WB} = xc. \tag{3.2}$$

Analog schließen wir aus der Betrachtung der Ähnlichkeit von $\triangle TPS$ und $\triangle ABC$ mit $y := \overline{ST} : \overline{CA}$ bzw. $\triangle UWP$ und $\triangle ABC$ mit $z := \overline{UW} : \overline{AB}$, dass

$$\overline{PS} = \overline{RC} = ya, \overline{ST} = yb, \overline{TP} = \overline{AU} = yc \quad \text{mit } 0 < y < 1 \text{ bzw.}$$

$$\overline{WP} = \overline{BQ} = za, \overline{PU} = \overline{TA} = zb, \overline{UW} = zc \quad \text{mit } 0 < z < 1; \tag{3.3}$$

siehe Skizze 3.1. Wir folgern aus (3.1) und (3.3), dass für die Summe von x, y, z notwendig

$$x + y + z = \frac{xa + ya + za}{a} = \frac{\overline{QR} + \overline{RC} + \overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = 1 \tag{3.4}$$

gilt. Und umgekehrt: Zu jedem Tripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ existiert ein Punkt P im Inneren des Dreiecks $4ABC$, so dass (3.1), (3.2) und (3.3) erfüllt sind. Denn es lassen sich nach Voraussetzung Punkte Q, R auf BC wählen, so dass $\overline{BQ} = za$, $\overline{QR} = xa$, $\overline{RC} = ya$. Die Parallele zu AB durch Q möge CA im Punkt T schneiden, die Parallele zu CA durch R möge AB im Punkt U schneiden und P sei der Schnittpunkt von QT und RU, der im Inneren von $4ABC$ liegen muss. Definieren wir zudem die Punkte S bzw. W als Schnittpunkt der Parallele zu BC durch P mit CA bzw. AB, so folgt aus dem Ähnlichkeitssatz $W : W : W$, dass (3.1), (3.2) und (3.3) erfüllt sind.

Wir betrachten nun den Term $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ der Aufgabenstellung. Mit (3.1), (3.2) und (3.3) können wir schließen, dass wegen $\wedge QPR = \wedge TPU$ (Gegenwinkel)

$$\frac{D_A}{V_A} = \frac{1}{2} \; \frac{\overline{RP} \quad \overline{PQ} \quad \sin(\wedge QPR)}{\overline{TP} \quad \overline{PU} \quad \sin(\wedge TPU)} = \frac{x^2bc}{2yzbc} = \frac{x^2}{2yz},$$

und durch analoge Schlüsse folgt

$$\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} = \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2zx} + \frac{z^2}{2xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz}. \tag{3.5}$$

Für den Term in (3.5) stellen wir fest: Auf Grund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der positiven reellen Zahlen x^3, y^3, z^3 ist

$$\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz} \quad \frac{3 \sqrt[3]{x^3y^3z^3}}{2xyz} = \frac{3}{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = z = \frac{1}{3}$ (der Punkt P ist dann der Schwerpunkt des Dreiecks $4ABC$). Der Term in (3.5) kann beliebig groß werden. Für eine positive reelle Zahl N sei $\quad := \frac{N}{1+2N} = \frac{1}{2+N \;\; 1}$; es ist dann eine positive reelle Zahl mit $0 < 2 \quad < 1$. Mit P_ν bezeichnen wir den Punkt im Inneren des Dreiecks $4ABC$, der zu den positiven reellen Zahlen $x = y =$ und $z = 1 \quad 2$ mit $x + y + z = 1$ gehört. Für P_ν ist

$$\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C} = \frac{\;^3 + \;^3 + (1 \quad 2 \;)^3}{2 \;^2(1 \quad 2 \;)} = \frac{}{1 \quad 2} + \frac{1}{2} \quad \frac{1 \quad 2}{}^{\;2} = N + \frac{1}{2N^2}. \tag{3.6}$$

Der Term rechts in (3.6) ist für positive reelle Zahlen N als Summe zweier wohldefinierter stetiger Funktionen in N selbst eine stetige Funktion in N, die

für $N = 1$ den Wert $\frac{3}{2}$ annimmt und in $N \quad 1$ stets einen Wert größer als N annimmt, die Werte also beliebig groß werden können. Nach dem Zwischenwertsatz und (3.6) nimmt $\frac{D_A}{V_A} + \frac{D_B}{V_B} + \frac{D_C}{V_C}$ als Wert alle reellen Zahlen an, die größer oder gleich $\frac{3}{2}$ sind.
Das beweist die Behauptung.

?0h0}c«jX

Die Parametrisierung aus Skizze 3.1 erlaubt weitere interessante Aussagen für die Konstruktion der Aufgabenstellung. Für einen beliebigen Punkt P im Inneren des Dreiecks $4ABC$ ist wegen (3.4) stets

$$\frac{\overline{WS}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{RU}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{TQ}}{\overline{AB}} = \frac{(y+z)a}{a} + \frac{(z+x)b}{b} + \frac{(x+y)c}{c} = 2(x+y+z) = 2.$$

8«TX9@0 V

Im Land Sikinien gibt es 2024 Städte. Zwischen manchen von ihnen gibt es direkte, in beiden Richtungen nutzbare Flugverbindungen. Dabei hat keine Stadt mit allen 2023 anderen Städten eine direkte Flugverbindung. Es ist aber bekannt, dass für eine bestimmte positive ganze Zahl n gilt: Zu beliebigen n Städten in Sikinien gibt es stets eine andere Stadt, die mit jeder dieser n Städte eine direkte Flugverbindung hat.
Bestimme den größten Wert, den n unter dieser Bedingung annehmen kann.

?0\9«q§«jX

Der größte Wert, den n unter diesen Bedingungen annehmen kann, ist $n = 1011$.

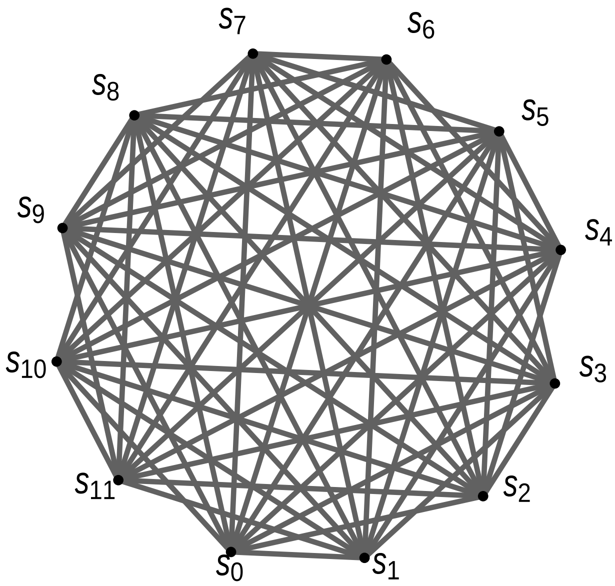
?0°0_

Wir betrachten allgemeiner die Situationen, dass es für eine positive ganze Zahl m im Land Sikinien $2m$ Städte gibt und zwischen manchen von ihnen direkte, in beide Richtungen nutzbare Flugverbindungen. Dabei hat keine Stadt mit allen $2m \quad 1$ anderen Städten eine direkte Flugverbindung. Aber für eine bestimmte positive ganze Zahl n gilt, dass es zu beliebigen n Städten in Sikinien stets eine andere Stadt gibt, die mit jeder dieser n Städte eine direkte Flugverbindung hat. Wir werden zeigen, dass n unter diesen Bedingungen höchstens den Wert $m \quad 1$ annehmen kann.
Wir zeigen zunächst durch Widerspruch, dass unter der Bedingung der (verallgemeinerten) Aufgabenstellung $n \quad m \quad 1$ gelten muss. Wir nehmen an, dass n unter der Bedingung der (verallgemeinerten) Aufgabenstellung einen Wert annehmen kann, der größer oder gleich m ist. Dann gilt auch, dass es zu beliebigen m Städten in Sikinien stets eine andere Stadt gibt, die mit jeder dieser m Städte eine direkte Flugverbindung hat.
Sei s_0 eine beliebige, aber fest gewählte Stadt in Sikinien. Wir wählen $m \quad 1$ weitere beliebige Städte aus. Zu diesen insgesamt m Städten existiert nach Voraussetzung eine andere Stadt s_1, die mit jeder dieser m Städte eine direkte

Flugverbindung hat, also auch zu s_0. Auch die Stadt s_1 sei von nun an fest gewählt. Im nächsten Schritt ergänzen wir s_0, s_1 um $m-2$ weitere beliebige Städte. Zu diesen insgesamt m Städten existiert nach Voraussetzung einer andere Stadt s_2 (ungleich s_0, s_1), die mit jeder dieser m Städte eine direkte Flugverbindung hat; auch s_2 sei von nun an fest gewählt. Indem man diese Schritte entsprechend wiederholt, gelangt man zu einer Menge von m Städten s_i, $0 \le i \le m-1$, die paarweise verschieden sind. Die Konstruktion stellt sicher, dass je zwei von ihnen eine direkte Flugverbindung haben: Denn für zwei Indizes i, j mit $0 \le i < j \le m-1$ wurde s_j so gewählt, dass es eine direkte Flugverbindung mit jeder Stadt in einer Menge von m Städten hat, die s_i enthält, und Flugverbindungen sind in beide Richtungen nutzbar.

Wir betrachten nun die Menge T all der Städte in Sikinien, die nicht in $\{s_0, s_1, \ldots, s_{m-2}, s_{m-1}\}$ enthalten sind; dies sind $2m - m = m$ Städte. Für diese m Städte in T existiert eine andere Stadt t, die mit allen Städten in T eine direkte Flugverbindung hat. Nach Konstruktion ist t eine der Städte s_i, $0 \le i \le m-1$, und gemäß der Beobachtung aus dem vorigen Absatz hat t auch mit allen Städten s_i, $0 \le i \le m-1$, $s_i \neq t$, eine direkte Flugverbindung. Die Stadt t hat also mit allen anderen Städten eine direkte Flugverbindung – ein Widerspruch zur Bedingung der (verallgemeinerten) Aufgabenstellung. Das beweist, dass $n \le m-1$ gelten muss.

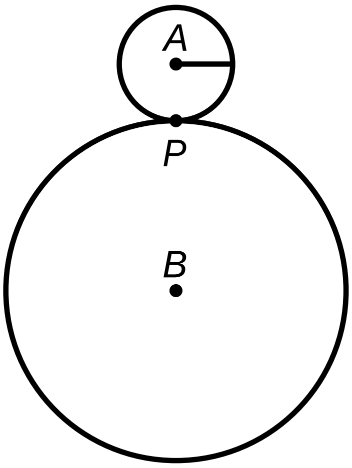
Wir geben abschließend ein Beispiel für Flugverbindungen zwischen den $2m$ Städten in Sikinien, bei denen keine Stadt direkte Flugverbindungen zu allen anderen Städten hat und die Bedingung der Aufgabenstellung für $n = m-1$ erfüllt ist. Wir bezeichnen die Städte in Sikinien als s_i mit Indizes i, $0 \le i \le 2m-1$. Genau m Städte in Sikinien haben also einen ungeraden bzw. geraden Index; es seien zudem $s_{2m} := s_0$ und $s_{-1} := s_{2m-1}$.



Eine beliebige Stadt s_i in Sikinien mit ungeradem Index i möge eine direkte Flugverbindung zur Stadt s_j genau dann haben, wenn j ein ungerader Index, $j \neq i$, oder ein gerader Index, $j \neq i+1$, ist; eine direkte Flugverbindung existiert also zu $2(m-1) < 2m-1$ Städten.
Da Flugverbindungen in beide Richtungen nutzbar sind, hat eine Stadt s_i mit geradem Index i nach der vorigen Definition zu den $m-1$ Städten s_j mit ungeradem Index j, $j \neq i-1$, eine direkte Flugverbindung; sie möge zusätzlich eine direkte Flugverbindung zu allen $m-1$ anderen Städten s_j mit

geradem Index j, $j \neq i$, haben. Eine beliebige Stadt s_i mit geradem Index i hat also direkte Flugverbindungen zu $2(m-1) < 2m-1$ anderen Städten. Die Skizze zeigt die Flugverbindungen für den Fall $m = 6$.
Wir betrachten die m Teilmengen $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, ..., $\{2m-3, 2m-2\}$, $\{2m-1, 0\}$ der Indizes aller Städte in Sikinien. Für eine beliebige Menge S, die $n = m-1$ Städte in Sikinien umfasst, gibt es mindestens eine dieser 2-elementigen Teilmengen $\{2k-1, 2k\}$, $1 \leq k \leq m$, die keinen Index der Städte in S enthält. Die Städte s_{2k-1} und s_{2k} sind also nicht in S enthalten, und die Stadt s_{2k-1} hat nach Konstruktion zu allen $2m-2$ Städten s_j, $j \notin \{2k-1, 2k\}$, eine direkte Flugverbindung. Insbesondere hat s_{2k-1} zu allen $m-1$ Städten in S eine direkte Flugverbindung.
Das beweist für $m = 1012$ die Behauptung.
¯_} L9jc0j [0}}j ~§K 9uKu b9}e S0X0}§J [0}}j S}_0L0h9jj ~H\ °9}¶ «jL [0}}j m~§| K}u |n@0}§ ~§}_H\ Tв} _\}0 8jh0}c«jX0j ¶«h 8}§_c0eu

g 9§\0h9§_ H\0 Nj§L0Hc«jX0j



Ein kleiner Kreis mit Radius $\frac{1}{3}$ rollt um einen Kreis mit Radius 1 bis an seinen Ausgangspunkt P.

a) Wie oft dreht sich der Kreis um den großen insgesamt und warum?

b) Wenn der kleine Kreis Radius $\frac{1}{n}$ mit n einer ganzen Zahl besitzt, wie oft dreht er sich dann um den großen Kreis und warum?

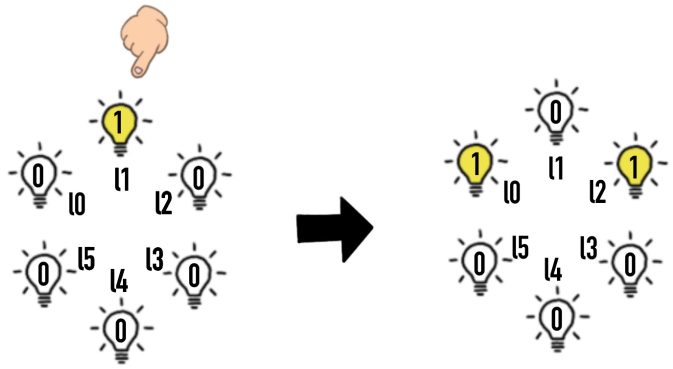
Wiederentdeckt von Benjamin Landgraf

[_j °0_ I Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2024 an die Mmim^K-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

µ«} 8«TX9@0 9« [0T§ oU¢

In Heft 157 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Bezeichne $(l_0, l_1 ... l_{n-1})$ n Lampen, die im Kreis aufgebaut sind.
$(m_0, m_1 ... m_{n-1})$ beschreiben die Schalter der Lampen. m_i steht dabei für den Schalter der Lampe l_i.
$l_i = 1 \Leftrightarrow$ Die Lampe i ist eingeschaltet.
$l_i = 0 \Leftrightarrow$ Die Lampe i ist ausgeschaltet.
Durch Drücken des Schalters m_i ändert sich der Zustand der Lampen l_{i-1}, l_i, l_{i+1}.

Dabei bezeichne $l(n) = l(0)$ und $l(n+1) = l(1)$. Eine zuvor eingeschaltete Lampe geht aus, eine ausgeschaltete Lampe geht an. Im folgenden Beispiel für n=6 ändern sich durch Drücken des Schalters m_1 die Zustände der Lampen l_0, l_1 und l_2.



Ziel des Spiels ist es, von einer gegebenen Grundstellung alle Lampen auszuschalten, also $l_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0; i \; n$

1. Finde ein Vorgehen, mit dem du bei $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ das Spiel immer gewinnst, wenn 2 Lampen eingeschaltet sind.

2. Wende dieses Verfahren auf die Lampenanzahl n mit $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ an. Bei welchen Ausgangssituationen mit 2 angeschalteten Lampen funktioniert das Schema?

3. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade ist, so ist die Stellung lösbar.

   Die Lampen l_{3i} sind hier grün dargestellt, l_{3i+1} blau und l_{3i+2} rot.

4. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils ungerade ist, so ist die Stellung lösbar.

5. Zeige, dass für $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn die Stellung lösbar ist, so ist die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade oder jeweils ungerade. (Marco Riehle)

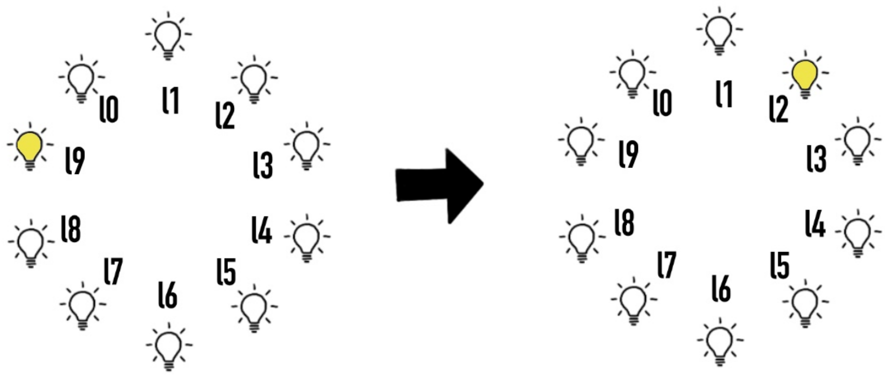
dÑ «jX

1. Ist eine beliebige Lampe l_i eingeschaltet, so kann man die eingeschaltete Lampe durch Drücken der Schalter m_{i+1} und m_{i+2} um drei Lampen wandern lassen. Dieses Vorgehen wendet man so lange an, bis die erste Lampe auf die zweite gewandert ist und diese ausschaltet.

   Für $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ funktioniert das immer.

   Mögliche Erklärung: Wir lassen eine Lampe im Uhrzeigersinn wandern, im Allgemeinen erhöht sich die Nummer der eingeschalteten Lampe also bei jedem Schritt um 3. Gelangen wir mit diesem Verfahren zur Lampe l_{n-1}, l_{n-2} oder l_{n-3}, so verringert sich die Nummer der eingeschalteten Lampe um n-3.

   Beispiel für n=10. Wir lassen die eingeschaltete Lampe l_9 um 3 Lampen im Uhrzeigersinn wandern.



   Für $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ führt der letzte Schritt dazu, dass die eingeschaltete Lampe nun "beim nächsten Umlauf" nicht mehr die gleichen Lampen passiert. (Es ändert sich im zuletzt beschriebenen Schritt bei der Nummer der eingeschalteten Lampen der Rest bei der Teilbarkeit durch 3 um 1.) Dadurch kann im Fall $n \neq 3k; k \in \mathbb{N}$ eine eingeschaltete Lampe auf alle möglichen Lampen wandern. Wir können also eine der eingeschalteten Lampen auf jede weitere angeschaltete Lampe wandern lassen und diese so ausschalten. Für $n = 3k$ gilt dies nicht, da sich für die Nummer der eingeschalteten Lampe, welche gleich dem Rest bei der Teilbarkeit durch drei ist, nicht ändert.

2. Haben die eingeschalteten Lampen bei $n = 3k; k \in \mathbb{N}$ einen Abstand von Vielfachen der Drei, so funktioniert das Verfahren. Ist dies nicht der Fall, ist es mit diesem Verfahren nicht möglich, beide Lampen auszuschalten.

Eine eingeschaltete Lampe kann immer um 3 Stellen wandern, sie kann also schrittweise auf eine Lampe im Abstand von 3 Lampen wandern. Wiederholen wir diesen Schritt also auf jede Lampe, die einen Abstand von Vielfachen der 3 besitzt. Sind also exakt 2 Lampen eingeschaltet, die den Abstand von Vielfachen von 3 haben, so können wir diese ausschalten, indem wir eine Lampe wandern lassen, bis sie auf die bereits eingeschaltete Lampe trifft.

Ist der Abstand kein Vielfaches von 3, so funktioniert dieses Verfahren nicht.

(In Aufgabe 5 zeigen wir, dass es auch kein anderes Verfahren gibt, sondern diese Lampenstellung nicht lösbar wäre.)

3. Wir markieren die Lampen in drei Farben, die wie im Bild eingefärbt werden.

   Mithilfe des Vorgehens aus Aufgabe 1 können wir 2 Lampen einer Farbe ausschalten (indem wir beispielsweise eine eingeschaltete grüne Lampe 3 Lampen wandern lassen, bis sie auf eine weitere eingeschaltete grüne Lampe trifft). Da die Anzahl grüner angeschalteter Lampen nach Voraussetzung gerade ist, können wir so alle grünen Lampen ausschalten (und es bleibt keine angeschaltete Lampe übrig). Dies machen wir für alle Farben.

   Durch das Ausschalten der grünen Lampen werden die blauen und roten Lampen nicht verändert, sodass man nacheinander die Lampe jeder Farbe ausschalten kann, ohne die anderen Farben zu beeinflussen.

4. Lösungsmöglichkeit 1:
   Wir wiederholen das Vorgehen aus Aufgabe 3. Da die Anzahl angeschalteter Lampen ungerade war, bleibt in jeder Farbe eine Lampe eingeschaltet übrig. Diese drei Lampen lassen wir wandern, bis sich die 3 eingeschalteten Lampen nebeneinander befinden. Diese können wir dann ausschalten, indem wir auf die mittlere Lampe drücken.

Lösungsmöglichkeit 2:
Durch das Drücken einer beliebigen Lampe wird eine grüne, eine blaue und eine rote Lampe umgeschaltet. Es ändert sich also die Anzahl eingeschalteter Lampen jeder Farbe, entweder erhöht sie sich um 1 (wenn eine ausgeschaltete Lampe eingeschaltet wird) oder verringert sich um 1 (wenn eine eingeschaltete Lampe ausgeschaltet wird). Wenn die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils ungerade ist, wird sie durch das Drücken jeweils gerade.

Wenn eine Lampenstellung S lösbar ist, muss sie durch eine Kombination von Drücken der Lampen in die "Aus-Stellung" überführt werden können. Die Lampenstellung S muss aber demnach auch durch eine Kombination von Drücken der Lampen aus der "Aus-Stellung" entstanden sein. In der Aus-Stellung ist die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade (nämlich 0). Durch das einmalige Drücken einer Lampe wird die Anzahl angeschalteter Lampen für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ ungerade (Siehe Aufgabe 4 Lösungsmöglichkeit 2). Durch den nächsten Drücker wird sie wieder gerade, durch den darauffolgenden Drücker wieder ungerade und so weiter. Für jede lösbare Stellung gilt also: die Anzahl angeschalteter Lampen ist für l_{3i}, l_{3i+1} und $l_{3i+2}; i \in \mathbb{N}_0$ jeweils gerade oder jeweils ungerade.

|«@}_c L0} dǸ 0}_jj0j «jL dǸ 0}

~§9jL j9H\ [0T§ oU¢

8e¶0´J Ne_ 9@0§\]d9jXXÞ 0}]W´hj9 _«h (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**I**
beu £I Levi Brunn 4, Noah Fitting 10, Quirin Fritsch 12, Christina Karst 50, Felix Pick 4, Sina Marie Uherek Reyes 23;
beu ¢I Robert Schmitt 20;
beu PI Nikolas Kaminski 21, Peter Knobloch 41, Lisa Schäfer 34,5;
beu kI Rachel Tao 21,5, Mai Chi Tran 22

?_jX0jJ ~§0T9j]W0n}X W´hj9 _«h
beu £I Tim Jockers 25;
beu ¢I Clemens Pie 4, Lena Rohr 4;
beu kI Smilla Kleffman 6, Semen Ludlik 2

N q0ec9hqJ ~ǸL0}@enh]W´hj9 _«hI
beu £I Cornelia Meyer 6, Silas Salloch 10, Joana Schwettlick 6;
beu kI Aleksandr Silantev 19

S}9jc0j§\9eJ b9}ne_j0j]W´hj9 _«h (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**I**
beu ¢I Nico Mathy 27, Philip Mühlbeyer 8;
beu PI Wibke Goez 8

S}0_ _jXJ `n 0T][nTh_ee0} W´hj9 _«hI
beu o·I Malcom Carandany 20, Philippos Dimitriou 68

^L9}]m@0} §0_jJ WǸ§§0j@9H\]W´hj9 _«h
beu o·I Joschua Jung 22

^jX0e\0_hJ ~0@9 §_9j]gʁj §0} W´hj9 _«hI
beu ooI Elanor Kondla 36

^jXne §9L§J G\}_ §nq\]~H\0_j0}]W´hj9 _«hI
beu £I Imran Aouzi 10;
beu o·I Jabir Aouzi 27

d«L°_X \9T0jJ G9}e]?n H\]W´hj9 _«hI
beu ¢I Maria Kröner 9;
beu PI Nikita Mallasch 5
beu ooI Kadir Kocyiğit 24, Boris Petkot 22

g9_j¶J W´hj9 _«h m@0} §9L§I
beu £I Jonas Dürkes 39;
beu PI Philippa Lamke 41

g9_j¶J m§§n]~H\n§§]W´hj9 _«hI
beu kI Victor Mayer 23,5; Lea Amend 62,5

g9_j¶J ¯_ee_X_]W´hj9 _«hI
beu ¢I Ioan Salaru 60

i9Hc0j\0_hJ W´hj9 _«h (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**I**
beu £I Philipp Mühl 6, Martin Schroff 15;
beu PI Jona Gooldmann 3, Daniel Laibach Muñiz 77;
beu kI Johannes Kiehn 52;
beu o·I Georgi Koynov 61,5;
beu o©I Sascha Sprengler 20

?9L ~H\°9e@9H\J i_cne9«]8«X« §]m§§n]~H\«e0
beu £I Eric Reichardt 6;

m@0}«} 0eJ W´hj9 _«hI
beu £I Jasmin Borrmann 19;
beu o·I Dóra Emilia Mézáros 35, Emilie Borrmann 11

~99}@«}XJ W´hj9 _«hI
beu ooI Nils Angel 34;

¦9jX0}hʁjL0J K_0 §0}°0X]W´h9j_ «hI

beu kI Mai Linh Dang 72; **beu o©I** Tu Sam Dang 65

¦}_0}J 8jX0e9] g 0}_H_]W´hj9 _«hI
beu ooI Felicitas Bauer 28

¦}n §@0}XJ [0}§¶\9_h0}]W´hj9 _«hI
beu c0_j0 8jX9@0I Marie Baumgartner 12

¯n}h J W9«Ż]W´hj9 _«hI
beu £I Sultan Amer 6, Helena Röhrenbeck 1, Jana Röhrenbeck 1

~H\ʙe0}_jj0j «jL ~H\ʙe0}J @0_ L0j0j c0_j0 ~H\«e0 9jX0X0@0j °«}L0I
beu c0_j0 8jX9@0I Manuel Heuss 6, Melina Rumpf 11

g _§§0_e«jX0j

8@n]?0_§}9XI Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 N für das Schuljahr 2024/25 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *K9«0}9«T§}9X*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

K_0 |0L9c§_nj

d0_§«jXI Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
g _§Xe_0L0}I Laura Biroth, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Vera Hofmann, Claudia Jockers, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Sarah Ranocha, Frank Rehm, Silke Schneider
¯0_§0}0 g _§9}@0_§0}I Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
µ« 9hh0j §0ee«jX «jL ~9§¶I Benjamin Landgraf
^j§0}j0§ «jL bn}}0c§«} L0} 0_jX0 9jL§0j dǸ «jX0jI Judith Straub
K}«Hc «jL -0}§}_0@ L0} [0T§0I Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
?0§}0««jX L0} 8@njj0h0j§ «jL -0} 9jLI Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
[0}9« X0@0}I Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.