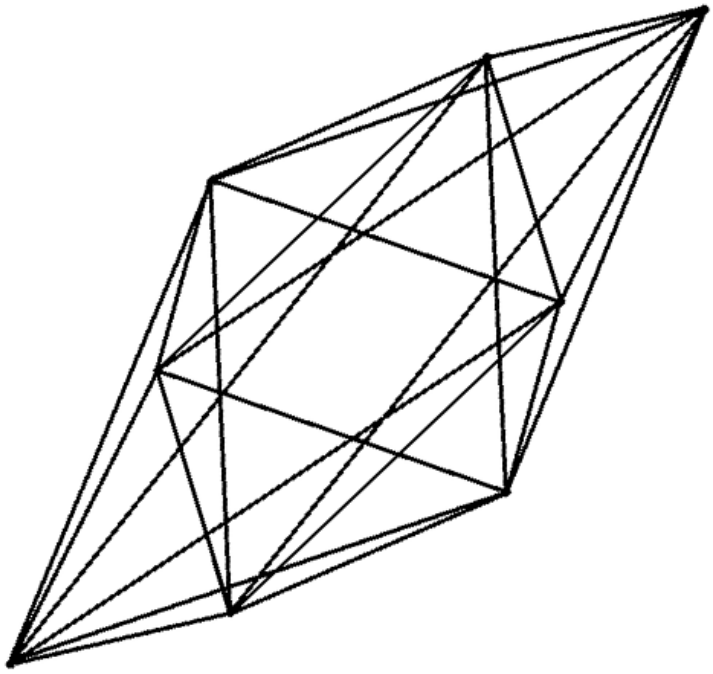
Jahrgang 30 Heft 102 Juni 2010

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JG|U
JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.
Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)
Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **31.08.2010.**
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

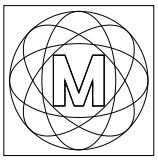
Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Herrn Kraft, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Marienberg Neuss** bei Frau Langkamp, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Meixner.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Linienland, Flächenland und der Hyperraum

von Stephan Rosebrock

Linienland und Flächenland

Versuchen wir uns doch einmal vorzustellen, unser ganzes Leben würde in einer Geraden, in Linienland, stattfinden. Die ganze Welt würde nur aus einer einzigen Geraden bestehen. Jeder von uns wäre dann einfach eine Strecke; unendlich dünn. Wir könnten nichts wahrnehmen, was außerhalb dieser Geraden liegt. Wir könnten nicht nach oben oder unten, rechts oder links gucken. Es gäbe nur „vorne“ und „hinten“. In Abbildung 1 sehen wir drei Wesen in Linienland. Die

Abbildung 1: Linienland mit Wesen darin

dunklen, schwarzen Strecken sind ein Teil von Linienland ohne Wesen darin. Die helleren Strecken sind die Bewohner Linienlands. Die beiden Wesen weiter rechts stoßen aneinander. Unsere Nachbarn sehen wir nur als einzelne Punkte und zwar nur den vor und hinter uns. Das Leben muss dort sehr langweilig sein.

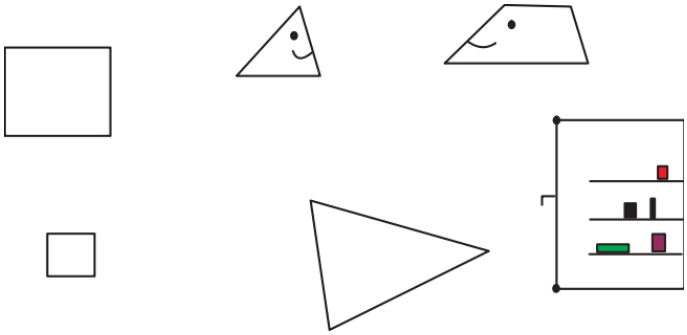


Abbildung 2: Flächenland mit Wesen darin

Etwas interessanter ist es vielleicht in Flächenland. Dort leben alle Wesen in einer Fläche. Sie können nicht hoch oder runter gucken, sondern nur nach rechts oder links und vorne oder hinten. In Abbildung 2 sehen wir ein paar Bewohner Flächenlands und einen Kühlschrank. Alle Bewohner Flächenlands sind naturgemäß flache Wesen. Wir, als „Raumländer“ können in einen Kühlschrank von

Flächenland greifen, ohne ihn zu öffnen. Wir sehen seinen Inhalt, obwohl er geschlossen ist.
Flächenländer haben übrigens keinen Darm und Speiseröhre wie wir, sonst wären sie zweigeteilt wie in Abbildung 3. Über die Wesen in Flächenland gäbe es viel

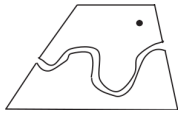


Abbildung 3: Kein Bewohner Flächenlands

zu sagen. Es gibt einen interessanten Roman aus dem Jahr 1884 von Edwin Abbott. Er heißt „Flächenland“ und dort kann man viel über die Flächenländer und die Linienländer nachlesen.
Uns interessiert hier, wie die Flächenländer den Linienländern Flächenland und ihre Wesen dort erklären können. Wir dürfen nicht vergessen, dass die Linienländer sich Flächenland überhaupt nicht vorstellen können, haben sie doch niemals „rechts“ und „links“ erfahren, sondern nur „vorne“ und „hinten“. Es hat also nicht so viel Sinn, zu sagen: „gucke mal nach rechts“. Das können die Linienländer nicht und können sich auch gar nicht vorstellen, wie das gehen soll. Es gibt aber schon eine Möglichkeit, den Linienländern wenigstens so ein bisschen deutlich zu machen, wie die Flächenländer aussehen. Man kann die Flächenländer durch Linienland durchtauchen lassen so wie in Abbildung 4. Was sehen die Linienlän-

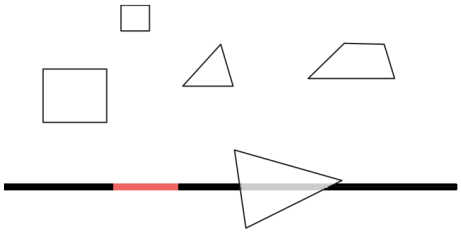


Abbildung 4: Ein Dreieck taucht durch Linienland

der, wenn das Dreieck von oben durch Linienland taucht? Genauer: Es geht um die beiden Linienländer, die überhaupt etwas von dem Dreieck sehen können. Was sehen die? Zuerst sehen sie einen Punkt, wenn das Dreieck eintaucht. Der Punkt erweitert sich zu einer immer längeren Strecke, von der die Linienländer aber auch nur den jeweiligen Endpunkt sehen, wie er auf sie zukommt. Danach wird die Strecke wieder kürzer, bis sie wieder zu einem Punkt wird.

Man kann sich auch überlegen, was man sieht, wenn andere Flächenländer durch Linienland tauchen. Kommt ein Rechteck mit einer Kante zuerst, dann sieht man immer nur eine gleich lange Strecke. Kommt ein Rechteck hingegen mit einer Ecke zuerst in Linienland an, dann sieht man eine Strecke in Linienland wandern. Zeichne dir eine Skizze, damit du dir das besser vorstellen kannst.

Raumland

Wir leben in Raumland. Es heißt Raumland, weil wir drei Richtungen zur Verfügung haben: vorne/hinten, rechts/links und oben/unten, eben räumlich. Wie die Flächenländern den Linienländern müssen wir den Flächenländern unseren Raum erklären. Die Flächenländer können sich „oben“ und „unten“ nicht vorstellen. Liegt Flächenland in unserem Raumland, dann können auch wir Gegenstände durch Flächenland durchtauchen lassen.
Am leichtesten lässt sich vielleicht eine Kugel erklären. In Abbildung 5 taucht

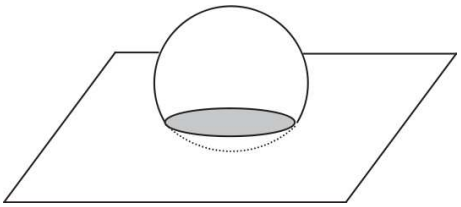


Abbildung 5: Eine Kugel taucht durch Flächenland

eine Kugel durch Flächenland. Der Schnitt ist ganz am Anfang ein Punkt. Der wird schnell zu einem Kreis, wie in Abbildung 5. Der Kreis wird immer größer und danach immer kleiner, bis der Schnitt wieder nur noch ein Punkt ist.
Wie erklären wir einen Würfel? Ein Würfel könnte zuerst mit einer Seitenfläche, mit einer Kante oder mit einer Ecke in Flächenland eintauchen. In Abbildung 6 taucht ein Würfel mit einer Seitenfläche zuerst und ein anderer mit einer Kante

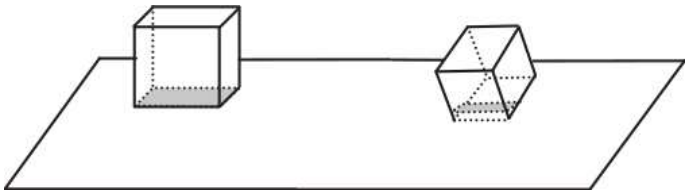


Abbildung 6: Würfel tauchen durch Flächenland

zuerst durch Flächenland. Was kann man dabei sehen?

Spannender wird es, wenn ein Würfel zuerst mit einer Ecke eintaucht wie in Abbildung 7. Zuerst sieht man ein immer größer werdendes Dreieck. Ein bisschen

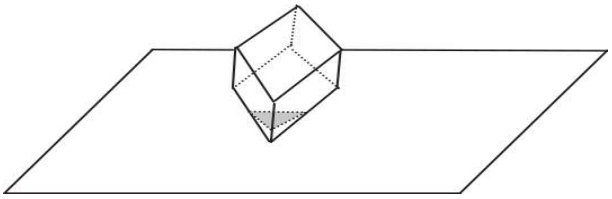


Abbildung 7: Würfel taucht mit Ecke zuerst durch Flächenland

später wird es sogar ein Sechseck, wie man in Abbildung 8 erkennt.

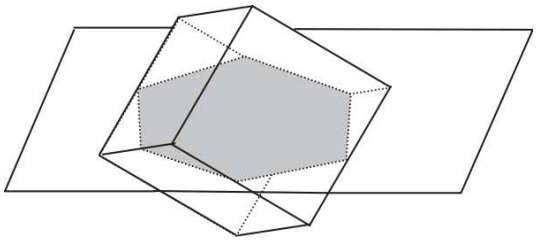


Abbildung 8: Würfel taucht mit Ecke zuerst durch Flächenland

Wir könnten noch viele Gegenstände durch Raumland tauchen lassen. Es ist eine gute Übung, sich vorzustellen, was man von dir sieht, wenn du durch Flächenland tauchst. Wenn du mit den Füßen zuerst eintauchst, sieht man anfangs zwei Flächenstücke, das eine ist Spiegelbild des anderen.

Wir fassen zwischendurch unsere verschiedenen Länder zusammen:

- Linienland ist 1-dimensional, weil es nur eine Richtung gibt (vorne – hinten).
- Flächenland ist 2-dimensional, weil es zwei Richtungen gibt (vorne – hinten, rechts – links).
- Raumland ist 3-dimensional, weil es drei Richtungen gibt (vorne – hinten, rechts – links, oben – unten).

Und dann? Ist das alles?

Der Hyperraum

Der Hyperraum ist 4-dimensional. Es gibt vier zueinander senkrechte Richtungen: vorne – hinten, rechts – links, oben – unten und die letzte Richtung wollen wir ana – kata nennen. Die letzte Richtung können wir uns nicht vorstellen, genauso wenig wie die Flächenländer oben – unten. Jetzt sind wir in derselben Situation in der am Anfang des Artikels die Linienländer oder etwas später die Flächenländer waren: Die Bewohner des Hyperraums müssen uns ihren Hyperraum erklären. Weil an *jeder* Stelle von Raumland eine ana – kata Richtung ausgeht, sieht Raumland, aus Sicht der Bewohner von Hyperraum, flach aus. Die Hyperraumbewohner können in unsere Kühlschränke greifen, ohne sie zu öffnen. Noch besser: Sie können uns operieren, ohne unseren Körper aufzuschneiden.

Wir möchten einen 4-dimensionalen Würfel verstehen. Dazu müssen wir aber sagen, was wir unter einem Würfel überhaupt verstehen wollen. Ein 1-dimensionaler Würfel W^1 ist einfach eine Strecke und ein 2-dimensionaler Würfel W^2 ein gewöhnliches Quadrat. Der 3-dimensionale Würfel W^3 soll der gewohnte Würfel sein, wie wir ihn kennen. Was ist dann der 4-dimensionale Würfel W^4? Zum Verständnis hilft folgendes: Beim W^1, einer Strecke, geht von jeder Ecke nur eine Kante aus, beim W^2 von jeder Ecke zwei Kanten und beim W^3 gehen von jeder Ecke drei jeweils zueinander senkrechte Kanten aus. Beim W^4 gehen also von jeder Ecke vier jeweils zueinander senkrechte Kanten aus. In Abbildung 9 sehen wir die Kanten eines 4-dimensionalen Würfels. Von jeder Ecke gehen

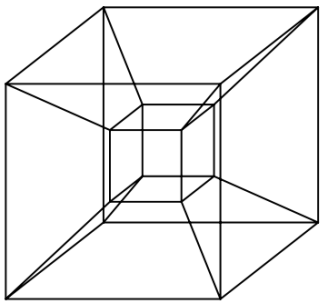


Abbildung 9: 4-dimensionaler Würfel

vier Kanten aus, die alle zueinander senkrecht stehen sollen. Da das nur ein Bild eines 4-dimensionalen Würfels ist, sehen die Kanten nicht senkrecht zueinander aus. Das ist ganz ähnlich wie im Bild des 3-dimensionalen Würfels aus Abbildung 10. In dieser Abbildung gucken wir von oben auf einen durchsichti-

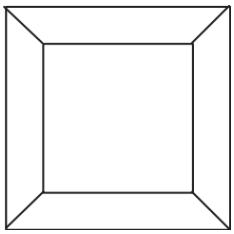


Abbildung 10: 3-dimensionaler Würfel

gen 3-dimensionalen Würfel und sehen seine Kanten. Die werden an jeder Ecke nur senkrecht zueinander, wenn wir uns den Würfel perspektivisch vorstellen. Es gibt noch eine Analogie zwischen dem 3- und dem 4-dimensionalen Würfel: In Abbildung 9 ist ein kleiner 3-dimensionaler Würfel in der Mitte von einem großen. In Abbildung 10 ist ein kleiner 2-dimensionaler Würfel, ein Quadrat, in der Mitte von einem großen. Wir erhalten nämlich die Kanten von einem Würfel der Dimension 4, indem wir zwei Würfel der Dimension 3 nehmen, die in ana-kata Richtung übereinander legen und die entsprechenden Ecken verbinden. Leichter sieht man das ein oder zwei Dimensionen tiefer: Man erhält ein Quadrat W^2, indem man zwei Strecken W^1 übereinander legt und die Ecken entsprechend verbindet. In Abbildung 11 ist der Übergang vom W^1 zum W^2

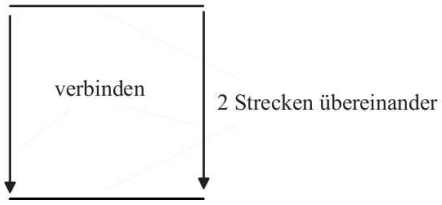


Abbildung 11: Übergang vom 1-dimensionalen zum 2-dimensionalen Würfel

dargestellt. Auch der Übergang vom Quadrat zum Würfel lässt sich so erklären: Zwei Exemplare eines W^2 werden mit Abstand übereinandergelegt und dann entsprechende Ecken verbunden. Das ergibt ein Kantenmodell eines W^3.

Damit verdoppelt sich also die Anzahl der Ecken beim Übergang von einem Würfel zu dem der nächst höheren Dimension. Eine Strecke hat zwei Ecken, ein Quadrat vier, ein 3-dimensionaler Würfel acht und der W^4 hat 16 Ecken. Also hat der n-dimensionale Würfel 2^n Ecken.

Wir zählen die Kanten eines 4-dimensionalen Würfels: An jeder Ecke gehen vier

Kanten aus und es gibt 16 Ecken. Weil jede Kante aber 2 Ecken hat, gibt es

$$\frac{16 \cdot 4}{2} = 32 \text{ Kanten.}$$

Wie viele Quadrate, also 2-dimensionale Würfel, gibt es im Rand des W^4? Zwischen je zwei Kanten an einer Ecke ist ein Quadrat. Das heißt sechs Quadrate gibt es an jeder Ecke. Jedes Quadrat ist aber in vier Ecken. Also gibt es

$$\frac{16 \cdot 6}{4} = 24 \text{ Quadrate.}$$

Genauso kann man sich überlegen, dass es

$$\frac{16 \cdot 4}{8} = 8 \text{ Randwürfel,}$$

die alle 3-dimensionale Würfel sind, im Rand vom W^4 gibt. Auch die sieht man in Abbildung 9. Der mittlere kleine Würfel und die sechs Würfel die an ihn grenzen (die sehen verzerrt aus) und der ganz große Würfel außen als letzter Würfel. In Wirklichkeit sind diese Würfel alle gleich groß, genauso wie die sechs Randquadrate des 3-dimensionalen Würfels in Abbildung 10.

Um den 4-dimensionalen Würfel noch besser zu verstehen, möchten wir ihn durch unser Raumland tauchen lassen. In Abbildung 6 links haben wir einen W^3 mit einer Seitenfläche zuerst durch Flächenland tauchen lassen. Dabei sah man von einer Richtung (oben–unten) von jeder der vier Kanten nur eine Ecke und von den anderen beiden Richtungen sieht man die Kanten. Ganz analog versteht man das Durchtauchen von einem 4-dimensionalen Würfel durch Raumland: Wenn wir mit einem Seitenwürfel zuerst eintauchen, sehen wir die gesamten Kanten von drei Richtungen (vorne–hinten, rechts–links, oben–unten) und von der ana–kata Richtung sehen wir nur eine Ecke. Wir sehen also einen normalen 3-dimensionalen Würfel. Beim weiter durchschieben sehen wir immer nur einen 3-dimensionalen Würfel. Die acht ana-kata Kanten werden zu jedem Zeitpunkt von unserem Raumland in einem Punkt geschnitten.
In Abbildung 7 haben wir einen W^3 mit einer Ecke zuerst durch Flächenland tauchen lassen. Dabei sah man von jeder Kante, die von der speziellen Ecke ausging, immer nur einen Punkt und deshalb ein Dreieck. Lassen wir einen W^4 mit einer Ecke zuerst durch Raumland tauchen, dann schneidet unser Raumland immer vier Kanten in einem Punkt. Wir sehen einen Tetraeder der langsam größer wird.

Sollten also irgendwelche seltsamen Gebilde plötzlich neben euch in der Luft auftauchen, dann: Kein Panik! Es sind bestimmt nur Hyperländer, die irgendwelche Körper durch unser Raumland tauchen.

Anmerkung:
Das aktuelle Titelbild zeigt ein Kantenmodell eines 4-dimensionalen Oktaeders,

genauer gesagt, dessen Projektion auf die Umschlagsseite des MONOID -Hefts. Das Modell hat acht Ecken, genauer vier Eckenpaare, die alle denselben Abstand zum Ursprung im $\mathbb{R}^4$ haben und auf den vier Koordinatenachsen liegen. Je zwei Ecken sind mit einer Kante verbunden, außer die beiden Ecken aus dem selben Eckenpaar. Alle Kanten sind gleichlang. Man erkennt darin vier 3-dimensionale Oktaeder, indem man jeweils ein Eckenpaar und alle davon ausgehenden Kanten (gedanklich) löscht.

Die Ecke für den Computer-Fan

Die Vermutung von D. A. Grave*

Bekanntlich ist die Zahl $2^{p-1}-1$ durch p teilbar, wenn p eine ungerade Primzahl ist (Folgerung aus dem „kleinen" Satz von Fermat). Grave vermutete, dass $2^{p-1}-1$ jedoch nie durch p^2 teilbar ist. Überprüfe die Vermutung von Grave für alle Primzahlen unterhalb von 10 000. (nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 31. August 2010 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Ergebnisse zur Computer-Aufgabe aus MONOID 100

Aufsummieren der Quadratzahlen

Aus den Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ bilden wir die Folge der Summen $S_1 = 1^2$, $S_2 = 1^2 + 2^2$, $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$, ...
Dabei ist S_1 offensichtlich wieder eine Quadratzahl. Untersuche, ob es in der Folge dieser Quadratsummen S_1, S_2, S_3, ... weitere Quadratzahlen gibt. (H.F.)

Ergebnisse:

Mit dieser Aufgabe beschäftigt haben sich Philipp Delhougne (Otto-Hahn-Schule Hanau), Alia'a und Shaima'a Ahmed Doma (beide Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo), Janosch Gräf (GFG Wörrstadt) sowie Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf). Alle stellen fest, dass es nur die Lösungen

* Dmitrij Aleksandrowitsch Grave (1863 – 1939), zuletzt Professor an der Universität Kiew; Arbeitsgebiete: Algebra und Zahlentheorie, angewandte Mathematik (theoretische Mechanik, Hydraulik, Erdmagnetismus).

$S_1 = 1^2$ und $S_{24} = 4900 = 70^2$ gibt, allerdings bei Untersuchung unterschiedlich langer Laufbereiche: Alia'a Ahmed Doma ist mit ihrem Taschenrechner bis $n = 200$ gegangen, Philipp Delhougne mit OpenOffice Calc 3.0 bis $n = 1000$, Florian Schweiger mit einem Visual Basic-Programm bis $n = 1\,500\,000$ und Janosch Gräf mit einem Programm in C unter Linux bis $n = 300\,008\,473\,490$, wofür S_n dann 34 Stellen hat.

Man kann dabei iterativ vorgehen und gemäß der Rekursionsformel $S_n = S_{n-1} + n^2$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ nach jedem Schritt prüfen, ob $\sqrt{S_n}$ eine ganze Zahl ist; man kann aber auch die Formel $S_n = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ benutzen, die leicht durch Induktion bewiesen werden kann, und damit die Überprüfung von $\sqrt{S_n}$ auf Ganzzahligkeit vornehmen.

Anregung:

Wie wäre es mit einer entsprechenden Untersuchung für das Aufsummieren der Kubikzahlen $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ oder auch vierter, fünfter, ... Potenzen?

Wer war's?

von Hartwig Fuchs

Als Dozent der Mathematik führte der gescheiterte Geistliche ein unauffälliges und ereignisloses Leben in einem provinziellen Universitätsstädtchen, wo er als ein kontaktarmer, stotternder und unverheirateter Sonderling mit nur recht bescheidenem beruflichem Erfolg galt:

Weder war er ein Mathematiker mit eigenständigen Leistungen noch war er ein guter Lehrer.

Dieses für ihn gewiss frustrierende Dasein ließ ihn in die Welt der Phantasie, der Träume und der Märchen flüchten. Als er dann seine Weltflucht in phantasievollen Geschichten niederschrieb und sie unter einem Künstlernamen veröffentlichte, fanden seine Schriften schnell einen so großen Anklang, dass er bald weit über die Grenzen Englands berühmt wurde.

Wer war es?

Des Rätsels Lösung findet Ihr auf Seite 35.

Magische Quadrate

Fabian Bildhauer und Ivan Freidenberg

Was sind magische Quadrate?

Ein magisches Quadrat ist ein quadratisches Zahlenschema mit Grundseitenlänge n ($n \in \mathbb{N}$), das die Zahlen von 1 bis n^2 enthält. Diese Zahlen sind hier allerdings nicht beliebig angeordnet, sondern nach einem bestimmten Muster: Die Summe der Zahlen in einer Zeile, Spalte und Diagonalen ist immer gleich. Hier sehen wir jeweils ein Beispiel für ein magisches Quadrat der Ordnung 3 beziehungswweise 4:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Zwei magische Quadrate heißen äquivalent, wenn das eine aus Drehung bzw. Spiegelung des anderen entsteht. Wenn wir also ein magisches Quadrat gefunden haben, können wir daraus mit Drehungen und Spiegelungen sieben weitere äquivalente magische Quadrate erzeugen. Beispielsweise sind die folgenden beiden magischen Quadrate äquivalent, da das zweite aus einer Drehung (nach links) und einer Spiegelung (an der horizontalen Achse) des ersten entsteht.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Die Summe der Zahlen in einer Zeile, Spalte oder Diagonalen, die bei einem magischen Quadrat ja alle gleich sind, kann man folgendermaßen berechnen: Die einzelnen Einträge eines magischen Quadrats der Ordnung n ergeben addiert $1 + 2 + \ldots n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ (Gaußsche Summenformel).
Diese Summe müssen wir nun noch durch n teilen (da wir ja nicht die Summe aller Zahlen, sondern nur die Summe der Zahlen in einer der n Zeilen suchen), und erhalten für die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen:

$$S_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Wie viele magische Quadrate der Ordnung 1, 2, 3 gibt es?

$n = 1$: Es gibt natürlich ein magisches Quadrat der Ordnung 1, nämlich 1.

$n = 2$: Es gibt kein magisches Quadrat der Ordnung 2.

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe eines mit

a	b
c	d

wobei $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann wäre die Summe der ersten Zeile gleich der Summe der ersten Spalte, also $a + b = a + c \Longrightarrow b = c$. Dies ist ein Widerspruch, da b und c verschieden sein müssen.

$n = 3$: Es gibt nur ein magisches Quadrat der Ordnung 3 (bis auf Äquivalenzen), nämlich:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Beweis: Betrachten wir folgendes magisches Quadrat der Ordnung 3:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Mit der Summenformel erhalten wir:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (3^2 + 1)}{2} = 15.$$

Es gilt also: $d + e + f = b + e + h = a + e + i = c + e + g = 15$. Außerdem kennen wir die Summe aller Einträge: $a + b + c + ... + i = 45$. Ziehen wir nun die oberen Gleichungen nacheinander von der unteren, langen Gleichung ab, erhalten wir $-3e = -15$, also $e = 5$. Bis auf Äquivalenzen ist nun $a = 1$ oder $b = 1$ (wäre zum Beispiel $i = 1$, müssten wir das Quadrat einfach zweimal drehen und hätten $a = 1$). Der Fall $a = 1$ kann aber nicht eintreten, denn die Summen der Zahlen in der ersten Zeile, ersten Spalte und ersten Diagonalen müssen alle 15 ergeben, es gibt aber nur zwei Summen, die 15 ergeben und die 1 enthalten, nämlich $1 + 5 + 9$ und $1 + 6 + 8$, also ist $b = 1$ und damit $h = 9$. Da die 8 nicht in derselben Zeile bzw. Spalte wie die 9 stehen kann (sonst wäre die Summe dort größer als 15), gilt bis auf Äquivalenzen $a = 8$ oder $d = 8$. Da die 8 auf jeden Fall in einer Zeile oder Spalte mit der 1 stehen muss (denn $1 + 6 + 8 = 15$), gilt $a = 8$. Jetzt kann man leicht die übrigen Einträge nacheinander folgern: $i = 2$, $g = 4$, $d = 3$, $f = 7$ und $c = 6$. Bis auf Äquivalenzen gibt es also nur ein magisches Quadrat der Ordnung 3.

Wie kann man magische Quadrate konstruieren?

Wir schauen uns nun ein Verfahren an, mit dem man zunächst *pseudomagische Quadrate* konstruieren kann (das heißt die Zeilen- und Spaltensummen stimmen

überein, die Diagonalsummen aber nicht unbedingt). Dieses Verfahren wurde von Simon de la Loubère im Jahr 1693 angegeben und liefert pseudomagische Quadrate ungerader Ordnung n. Das Verfahren beinhaltet folgende Regeln:

- Wir wählen in einem $n \times n$-Quadrat (n ungerade) eine beliebige Position für die 1 aus. Die Position der 2 befindet sich dann in der Zeile über und in der Spalte rechts von der 1. So fährt man dann auch fort mit der 3, 4, und so weiter.
- Immer wenn man dabei eine Zahl erreicht, die von n geteilt wird, wird die nachfolgende Zahl in die gleiche Spalte eine Zeile tiefer geschrieben (erreicht man also zum Beispiel die 10 bei der Konstruktion eines 5×5-Quadrates, so wird die 11 in das Feld unter der 10 geschrieben). Danach geht es wie oben beschrieben weiter, bis die nächste Zahl auftritt, die von n geteilt wird.
- Wenn man irgendwann an einer Stelle außerhalb des Quadrats landet, wird wieder an der gegenüberliegenden Seite angefangen. Müsste eine Zahl also eigentlich zum Beispiel in die $(n+1)$-te Zeile geschrieben werden, so schreiben wir sie stattdessen wieder in die erste Zeile. Die Zeilennummer wird also durch ihren Rest bei Teilung durch n ersetzt, man sagt auch „$n+1$ ist kongruent zu 1 modulo n“, Schreibweise: $n+1 \equiv 1 \mod n$.

Man kann die Positionen der einzelnen Zahlen auch explizit mit einer Formel bestimmen. Dazu nummeriere man die Zeilen des Quadrates aufsteigend von unten mit der 1 beginnend und die Spalten aufsteigend von links mit der 1 beginnend (wichtig ist hier eigentlich nur, dass man aufsteigend nummeriert, aber wir beginnen der Einfachheit halber unten bzw. links mit der 1).
Beispiel:

3			
2			
1			
	1	2	3

Hat man nun für 1 den Platz (a, b) gewählt (a bezeichnet die Zeilen, b die Spaltennummer), dann gilt für den Platz (x_i, y_i) der Zahl i:

$$x_i \equiv a - 1 + i - 2 \cdot \left\lfloor \frac{i-1}{n} \right\rfloor \mod n$$

$$y_i \equiv b - 1 + i - \left\lfloor \frac{i-1}{n} \right\rfloor \mod n$$

Erklärung der Formel:

x_i ist die Zeilenkoordinate der Zahl i, y_i ist ihre Spaltenkoordinate. Wir nehmen an, wir kennen die Koordinaten von i und wollen jetzt die Koordinaten von $i+1$ herausfinden. Wir müssen nun twei Fälle unterscheiden.

Im ersten Fall wird i von n nicht geteilt, also vergrößern sich x_i und y_i um 1, wenn man von i nach $i+1$ geht, denn $\left\lfloor \frac{i-1}{n} \right\rfloor$ * ist für i genau so groß wie für $i+1$.
Im zweiten Fall wird i von n geteilt. Das heißt $\lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$ vergrößert sich um 1, wenn man von i nach $i+1$ geht und das heißt wiederum, dass die Zeilenkoordinate für $i+1$ um 1 kleiner sein muss als für i (deshalb muss bei der Zeilenkoordinate in der Formel das zweifache der Gaußklammer abgezogen werden) und dass die Spaltenkoordinate unverändert bleibt.

Um nun keine pseudo-, sondern richtige magische Quadrate zu erzeugen, verallgemeinert man die obigen Formeln zunächst mit beliebigen natürlichen Zahlen c, d, e, f. Zur Vereinfachung, wollen wir nun nicht mehr die Zahlen von 1 bis n^2, sondern von 0 bis n^2-1 im Quadrat anordnen, das heißt i wird in der obigen Formel durch $i-1$ ersetzt. Außerdem wollen wir auch die Platzkoordinaten statt von 1 bis n von 0 bis $n-1$ laufen lassen (hier spielt es nun keine Rolle mehr, ob von oben oder unten beziehungsweise rechts oder links aus nummeriert wird). Insgesamt lautet die Verallgemeinerung man:

$$x_i \equiv a + c \cdot i + e \cdot \left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor \mod n$$

$$y_1 \equiv b + d \cdot i + f \cdot \left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor \mod n$$

Diese Methode liefert nun ein magisches Quadrat (sogar ein diabolisches**), wenn die Parameter c, d, e und f gewissen Teilerbedingungen genügen:

1. $\mathrm{ggT}(cf - de, n) = 1$
2. $\mathrm{ggT}(c, n) = \mathrm{ggT}(e, n) = 1$
3. $\mathrm{ggT}(d, n) = \mathrm{ggT}(f, n) = 1$
4. $\mathrm{ggT}(c + d, n) = \mathrm{ggT}(e + f, n) = 1$
5. $\mathrm{ggT}(c - d, n) = \mathrm{ggT}(e - f, n) = 1$

Dieses Verfahren geht auf Derrick Norman Lehmer (1929) zurück. Das Verfahren von Simon de la Loubère ist ein Spezialfall des Lehmer-Verfahrens mit $c = d = 1$, $e = -2$, $f = -1$. Der Beweis, dass das Verfahren von Lehmer unter den genannten Bedingungen ein magisches Quadtrat liefert kann in Scheid, H./Frommer, A. (2006): Zahlentheorie. Spektrum Akademischer Verlag, nachgelesen werden.

---

* Die Gaußklammer „$\lfloor \ldots \rfloor$“ bedeutet, dass das Ergebnis des Ausdrucks innerhalb der Klammer auf die nächste kleinere ganze Zahl abgerundet wird.

** Diabolische Quadrate sind magische Quadrate, bei denen auch die Haupt- und Nebendiagonalen die gleiche Summe ergeben.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum

Mit seinem neuesten Buch „Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum“ hat der Leiter des Gießener Mathematikums wieder mal den Nagel auf den Kopf getroffen. Wie es bereits der Untertitel „Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik“ präzisiert, geht es um alltäglich auftauchende, aber darum nicht weniger spannende Fragen rund um die Mathematik. Wer hat sich nicht schon Fragen gestellt, wie „Seit wann gibt es Mathematik?“, „Ist Mathematik eine Natur- oder eine Geisteswissenschaft?“, „Warum darf man nicht durch null teilen?“, „Warum gibt es nur fünf platonische Körper?“, „Was bedeutet Wurzel?“, „Wie groß ist die Chance, einen Sechser im Lotto zu tippen?“, „Wozu sind Logarithmen gut?“, „Kann man alles beweisen?“, „Warum gibt es keinen Nobelpreis für Mathematik?“ oder „Können Außerirdische unsere Mathematik verstehen?“ Auf alle diese Fragen gibt Beutelspacher eine kurze und auch für mathematische Laien leicht verständliche Antwort. Schön wäre gewesen, wenn er diese kurzen Antworten um Literaturtipps ergänzt hätte, so dass jemand, bei dem die gegebene Antwort weiteres Interesse geweckt hat, einen Anhaltspunkt dafür erhalten hätte, wo er diese weiter vertiefen könnte. Aber auch ohne diese Ergänzungen ist dem Autor ein schönes Buch gelungen, das man immer wieder gerne zur Hand nimmt und das vor allem in keiner Schulbibliothek fehlen sollte. Die Erklärungen sind bereits für Fünftklässler sehr gut verständlich, werden aber auch ältere Schüler – und auch Lehrkräfte, die auf der Suche nach einfachen und verständlichen Antworten für häufige Schülerfragen sind – begeistern.

Fazit:
Es handelt sich wieder einmal um kein Buch, das man komplett von vorne bis hinten durchlesen wird, aber um eines, das man gerne immer wieder einmal aufschlagen wird, um sich in der einen oder anderen Antwort festzulesen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Beutelspacher, Albrecht: Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum;
Beck 2010, ISBN 3-406-60202-3, geb. 189 Seiten, 14,95 €.

Art des Buches:	Sammlung kurzer Antworten auf die meistgestellten Fragen zur Mathematik
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 11 Jahren

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 101

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Wahr oder falsch?
Es sei Z das Produkt der ersten fünf Primzahlen. Dann ist $\frac{1}{5}Z$ die Anzahl der natürlichen Zahlen, die ≤ 2010 sind und die mindestens eine Ziffer 0 in ihrer Dezimaldarstellung haben. Trifft das zu? (H.F.)

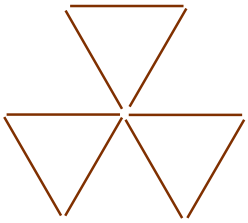
Lösung:
Folgende Zahlen enthalten die Ziffer 0:

$10,\ldots,\ 90$	$\Rightarrow$9 Zahlen
$a00,\ a01,\ldots,\ a09,\ a10,\ldots,\ a90$ mit $a = 1, 2, \ldots, 9$	$\Rightarrow 9 \cdot 19$ Zahlen
$1000,1001,\ldots,1099$	$\Rightarrow$100 Zahlen
$1a00,1a01,\ldots,1a09,1a10,\ldots,1a90$ mit $a = 1, 2, \ldots, 9$	$\Rightarrow 9 \cdot 19$ Zahlen
$2000,2001,\ldots,2010$	$\Rightarrow$11 Zahlen

Insgesamt hat man $462 = \frac{1}{5}Z$ Zahlen.

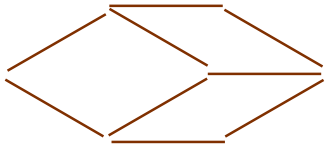
Ein Streichholz-Problem

Kannst Du die neun Streichhölzer der Figur so anordnen, dass Du drei Vierecke erhältst?



(gefunden H.F.)

Lösung:



Eine vollbefriedigende Erklärung?
Erich Bischoff, der Erforscher der Kabbalah*, hat im Vorwort seines Buches *Mystik und Magie der Zahlen* geschrieben: „Ich wenigstens kenne keine vollbe-

* Die Kabbalah (auch Kabbala) ist die mystische Tradition des Judentums, begründet ca. im 1. Jahrhundert n. Chr.

friedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 ab), mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt."
Stimmt dieser Sachverhalt überhaupt? Dann liefere bitte eine „vollbefriedigende Erklärung" in Form eines Beweises dafür, sonst gib ein Gegenbeispiel an. (MG)

Lösung:
Wir schreiben für die ungerade Zahl $2n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1.$$

Da nun entweder n oder $n+1$ gerade ist, und somit auch das Produkt $n \cdot (n+1)$, ist $4n(n+1)$ durch 8 teilbar.
Damit ist „jede ungerade Zahl [...] mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest".

(MG und Sebastian T. Henn, Magdeburg)

Dieters Digitaluhr

Dieters Uhr hat eine Digitalanzeige (24 Stunden). Sie geht $2\frac{1}{2}$-mal so schnell wie sie sollte. Wann zeigt sie zum ersten Mal wieder die korrekte Uhrzeit, wenn sie jetzt um 0.00 Uhr exakt gestellt wird?

(WJB)

Lösung:
In x Stunden geht Dieters Uhr $2{,}5 \cdot x$ Stunden weiter. Da $x = 2{,}5 \cdot x$ für $x > 0$ nicht möglich ist, muss $2{,}5 \cdot x > 24$ gelten. Die Gleichung $2{,}5 \cdot x = x + 24$ hat die Lösung $x = 16$.
Um 16 Uhr auf Dieters Uhr ist es $2{,}5 \cdot 16 = 40$ Stunden, das heißt einen ganzen Tag und 16 Stunden, später.

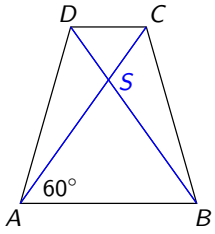
Bennies Bücher
Bennie steht vor dem Schaufenster einer Buchhandlung. Er überlegt: „Wenn ich dieses Buch zweimal kaufe, brauche ich genau so viele Euro dafür wie Cent für ein Buch und doppelt so viele Cent wie Euro für ein Buch."
Wieviel kostet das Buch?

(WJB)

Lösung:
Braucht man für ein Buch a Euro und b Cent, also $100a + b$ Cent und für zwei Exemplare b Euro und $2a$ Cent, das heißt $100b + 2a$ Cent, so gilt: $2 \cdot (100a + b) = 100b + 2a$, beziehungsweise $198a = 98b$, also $99a = 49b$. Die einzige positive

Lösung mit ganzzahligen a und b ($b < 100$) ist $a = 49$, $b = 99$. Das Buch kostet also 49,99 Euro.

Gleichseitige Dreiecke im Trapez



Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ sei S der Diagonalenschnittpunkt; ferner sei $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Dann sind die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ beide gleichseitig. Du siehst es – kannst Du es auch begründen? (H.F.) Hinweis: $|\sphericalangle BAC|$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Lösung:
Das Trapez $ABCD$ ist achsensymmetrisch: Die Symmetrieachse ist orthogonal zu den Seiten AB und DC und geht durch den Mittelpunkt von AB und den Mittelpunkt von DC. Aus Symmetriegründen liegt dann der Punkt S auf der Symmetrieachse. Daraus folgt: Die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ sind achsensymmetrisch. Also gilt auch $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAC| = 60°$ und wegen der Winkelsumme im Dreieck ist $|\sphericalangle ASB| = 60°$. Somit ist das Dreieck $\triangle ABS$ gleichseitig. Weil nun $\sphericalangle CSD$ und $\sphericalangle ASB$ Scheitelwinkel sind, sind sie gleich groß und mit der Achsenparallelität des Dreiecks $\triangle DSC$ folgt die Behauptung wie im Dreieck $\triangle ASB$.

Wiederherstellung einer Division

Rekonstruiere die Division, indem Du in der Figur jeden Stern $*$ durch eine Ziffer so ersetzt, dass eine richtige Division entsteht, bei der keine führende Ziffer eine Null ist. (H.F.)

$$\begin{array}{rrrrrcrrcrr}
 & * & * & * & * & : & * & * & = & * & * \\
- & & * & * & & & & & & & \\
\hline
 & & & 2 & * & & & & & & \\
 & & - & * & * & & & & & & \\
\hline
 & & & & 2 & & & & & &
\end{array}$$

Lösung:
Mit Buchstaben anstelle von $*$:

$$\begin{array}{rrrrrcrrcrr}
 & A & B & C & D & : & E & F & = & G & H \\
- & & J & K & & & & & & & \\
\hline
 & & & 2 & D & & & & & & \\
 & & - & L & M & & & & & & \\
\hline
 & & & & 2 & & & & & &
\end{array}$$

Aus $ABC - JK = 2$ folgt $A = 1$ und $ABC = 100$, $JK = 98$ oder $ABC = 101$, $JK = 99$.

Fall 1: Es seien $ABC = 100$ und $JK = 98$. Aus $JK = 98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$ folgt $EF \cdot G = 2 \cdot 7 \cdot 7$. Die zweiziffrigen Teiler EF von 98 sind 14, 49 und 98. Wegen $EF \cdot H < 2D < 29$ ist $EF = 14$ und wegen $EF \cdot G = 98$ ist $G = 7$. Aus $2D - LM = 2D - H \cdot EF = 2D - H \cdot 14 = 2$ folgt $H = 1$ oder $H = 2$. Wäre

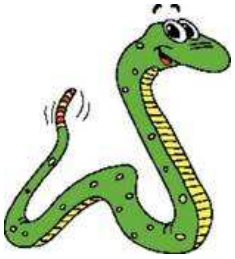
$H = 1$, so folgte aus $2D - 14 = 2$, dass $2D = 16$ wäre; wäre $H = 2$, so folgte aus $2D - 28 = 2$, dass $2D = 30$ wäre. Also ist der Fall $ABC = 100$ nicht möglich.

Fall 2: Es seien $ABC = 101$ und $JK = 99$. Aus $JK = 99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$ folgt $EF \cdot G = 3 \cdot 3 \cdot 11$. Die zweiziffrigen Teiler EF von 99 sind 11, 33 und 99. Wegen $EF \cdot H < 2D < 29$ ist $EF = 11$ und $H = 1$ oder $H = 2$. Wäre $H = 1$, so folgte aus $2D - H \cdot EF = 2D - 11 = 2$, dass $2D = 13$ wäre. Also ist $H = 2$, $LM = 22$ und $D = 4$ wegen $2D - 2 \cdot 11 = 2$. Damit lautet die Division: $1014 : 11 = 92$ Rest 2.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Warteschlange



Stell Dir vor, Du stehst in Deinem Lieblingsfreizeitpark seit 10 Minuten an Deiner Lieblingsachterbahn an, als Du die Noch-20-Minuten-Warten-Marke erreichst. In dem circa 1m breiten Gang herrscht ein reges Gedränge, als Du den bereits vierten und letzten Achterbahnzug für diese Minute an Dir vorbei rauschen siehst. Du registrierst die fünf Wagons mit jeweils vier Personen, wie sie direkt auf den doppelten Looping zurasen und fragst Dich:

a) Wieviele Menschen stehen noch maximal vor Dir?

b) Wie weit ist es noch, wenn sich die Breite des Gangs nicht ändert und sich durchschnittlich vier Personen auf einen Quadratmeter zusammendrängen?

(B.B.)

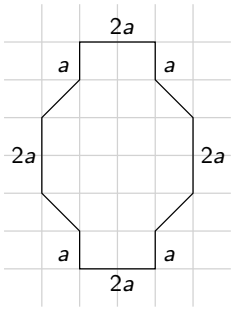
Zerlegung einer Menge

Eine Menge M enthalte lauter verschiedene natürliche Zahlen, darunter auch die Zahlen 1, 2, 3, 4.
Kannst du nun M so in zwei Teilmengen A und B zerlegen, dass gilt:
Weder in A noch in B kann man zwei Zahlen finden, deren Summe eine Primzahl ist? (H.F)

Quadratzahlen mit den Endziffern 44

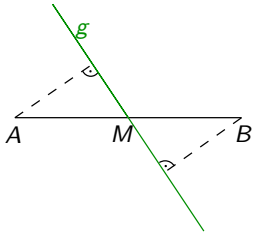
Es gibt unendlich viele Quadratzahlen mit den Endziffern 44. Stimmt das? (H.F.)

Flächenumwandlung in ein Quadrat



Wandle die nebenstehende Figur in ein flächengleiches Quadrat um. (A.K.)

Gleiche Abstände



Wenn man durch den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ eine beliebige Gerade $g \neq \overline{AB}$ legt, dann haben A und B den gleichen Abstand von g. Du siehst es – kannst du es auch begründen? (H.F.)

Der Bücherwurm

Mathis hat auf dem Speicher seines Großvaters eine sehr alte vierbändige Ausgabe von „Gullivers Reisen“ entdeckt. Er stellt sie in seinem Zimmer nach Bandnummern geordnet auf ein Regal und zeigt sie seinem Freund Matheo. Dieser bemerkt, dass sich ein Bücherwurm von der ersten Seite von Band 1 bis zur letzten Seite von Band 4 geradlinig, horizontal durch die Bücher gefressen hat.
Einige Tage später überrascht Matheo seinen Freund mit der Frage: „Wie lang ist wohl das Wurmloch?“ Mathis antwortet: „Selbst, wenn du weißt, dass jedes Buch samt seinen Deckeln 4 cm und ein Buchdeckel 0,5 cm dick ist, kannst du seine Länge vermutlich nicht berechnen. – Ich aber kann es!“ Warum ist das so? (H.F.)

Ursulas Uhren

Ursula hat zwei Uhren. Eine davon geht genau, die andere pro Stunde fünf Minuten zu schnell. Um 6 Uhr stellt Ursula beide Uhren gleich ein.
Wann ist der Minutenzeiger der schnellen Uhr zum zweiten Mal an der gleichen Stelle wie der Stundenzeiger der genauen Uhr?

(WJB)

Mainzer Mathematik-Akademie
26. August – 29. August 2010

Alle Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 10–13 sind herzlich eingeladen, sich zur MMA anzumelden, die vom 26.08–29.08 an der Universität Mainz stattfindet.

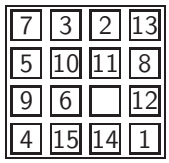
Ablauf der Akademie

Do., 26.08.	Anreise (bis 18 Uhr) und Kennenlernabend
Fr./Sa., 27/28.08.	Kurse in Arbeitsgruppen; Rahmenprogramm, betreut von Studierenden (zum Beispiel: Stadtführung)
So., 29.08.	Präsentation und Abreise (ab 14 Uhr)

Ein genauerer Terminplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben.

Kurse

- Knoten: Lässt sich in verformen? Kann man Knoten miteinander multiplizieren? Sogar „prime“ Knoten finden und eine Primfaktorzerlegung eines jeden Knotens durchführen?
- Platonische Körper im n-dimensionalen Raum: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder – gibt es so etwas auch in höheren Dimensionen?
- Invarianten: Beim „Boss-Puzzle“ sind 15 Steine in einem quadratischen Rahmen verschiebbar angeordnet, ein Feld ist frei. Ist es bei jeder Ausgangslage möglich, die Steine in die richtige Reihenfolge zu bringen? Kann man mit ähnlichen Techniken verwandte Fragestellungen behandeln?



Unterbringung

Jugendtagungsstätte Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 40€. Die übrigen Kosten übernehmen der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz sowie die Telekom-Stiftung.

Anmeldung

Bitte sende eine E-Mail an `freunde@mathematik.uni-mainz.de`, in der Du Namen, Anschrift, E-Mail-Adresse, Schule und Klassenstufe angibst und kurz schilderst, was Dich an Mathematik fesselt.

Die MMA wird gefördert von

Deutsche Telekom Stiftung

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 994: Wo steckt der Fehler?

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+1}-x&=5\\ \sqrt{(x+1)^2}-x&=5\\ x+1-x&=5\\ 1&=5\end{aligned}$$

Also $\mathbb{L}=\emptyset$.
Aber: $x=-3$ ist eine Lösung der Gleichung, wie man durch Einsetzen feststellen kann.
Wo steckt der Fehler? (Helmut Ramser)

Aufgabe 995: $2010<1$?
Es sei $N=1+2+3+4+....$ Wenn Du auf der rechten Seite dieser Gleichung alle Summanden wegstreichst, die keine Vielfachen von 2010 sind, erhältst Du: $N'=2010+2\cdot 2010+3\cdot 2010+4\cdot 2010+....$ Hieraus sieht man zweierlei:

1. $N'<N$ und
2. $N'=2010(1+2+3+...)=2010N$.

Was zu folgendem Schluss führt: $2010N<N$, was nach Division durch N schließlich $2010<1$ ergibt! Wo liegt der Fehler? (H.F.)

Aufgabe 996: Wahr oder falsch?
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen mit genau 2010 Teilern. Stimmt das? (nach H.F.)

Aufgabe 997: Keplersches Gesetz ohne Gravitation
Diana hat den Artikel über die Keplerschen Gesetze in Monoid-Heft 100 gelesen. Sie behauptet nun: „Wenn plötzlich die Gravitation zwischen der Sonne und den Planeten wie mit einem Schalter ausgeschaltet würde und die Planeten sich nicht länger auf Bahnen bewegen würden, dann würde das zweite Keplersche Gesetz trotzdem noch gelten.“ – Peter entgegnet: „Das kann doch gar nicht sein!“
Wer von beiden hat recht?
Bemerkung: Nach dem Abschalten der Gravitation fliegt der Planet mit der Geschwindigkeit in der aktuellen Richtung, die er im Moment des Abschaltens hat, weiter. (MG)

Aufgabe 998: Fibonacci in Echternach

Den Hintergrund zu dieser Aufgabe findet Ihr im Artikel Fibonacci in Echternach dargestellt auf Seite 31.

a) Zeige, dass die Rekursion $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ Lösungen der Form $x_n = Ar^n$ besitzt und bestimme die möglichen Werte r_1, r_2 (dabei sei r_1 der größere Wert).

b) Bestimme A und B so, dass $Ar_1^n + Br_2^n = F_n$ mit $n = 0, 1, 2, ...$, wobei F_n, $n \geq 0$, die Fibonacci-Folge ist.

⋆) Sei $a_n = F_0 + F_1 + ... + F_{n-1}$ und $b_n = a_0 + a_1 + ... a_{n-1}$. Zeige, dass $\frac{a_n}{F_n}$ und $\frac{b_n}{a_n}$ konvergieren und bestimme die Grenzwerte.*

(WJB)

Aufgabe 999: Große Tiere

Heute war Kim mit ihrer Klasse im Naturhysterischen Museum und hat dort eine Führung über Tiere der Urzeit gehört. Der Führer hat unter anderem erzählt, dass Tiere, die in der Kälte leben, beispielsweise während der Eiszeit, im Vergleich zu Verwandten, die in der Wärme leben, beispielsweise während der Warmzeiten, größer seien: „Auch die große Körpergröße ist ein guter Schutz vor der Kälte. Denn große Tiere haben im Verhältnis zur Körpergröße relativ wenig Oberfläche, also Haut, an der sie Wärme abgeben. Bei kleineren Tieren ist dieses Verhältnis schlechter." So wurde ihnen erklärt. Diese Erklärung des Führers klang plausibel, doch Kim möchte es ganz genau wissen – und rechnet es selbst nach.

Führe auch eine entsprechende Rechnung aus. Die Tiere darfst Du dabei als geometrische Körper (Würfel, Kugel, ...) annehmen. Berechne das Volumen und Oberfläche in Abhängigkeit der Körpergröße und vergleiche die Quotienten!

(MG)

Aufgabe 1000: Zum Jubiläum

Zu unserem Jubiläum, der 1000. Aufgabe, die wir Euch bei den „Neuen Aufgaben" stellen, gibt es folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 998x + \ 999y &= 1000 \\ 999x + 1000y &= 1001 \end{aligned}$$

a) Bestimme die Lösung dieses Gleichungssystems.

b) Addiere nun zum ersten Koeffizienten der ersten Gleichung $\frac{1}{1000}$. Dadurch ändert sich die Lösungsmenge schlagartig – das Gleichungssystem hat nämlich plötzlich keine Lösung mehr. Rechne dies nach und gib eine geometrische Erklärung! (MG)

---

* Dieser Aufgabenteil fließt nicht in die reguläre Punktwertung mit ein. Siehe hierzu auch die Mitteilungen.

Gelöste Aufgaben aus Monoid 101

Klassen 8–13

Aufgabe 987

Löse die Gleichung

$$\sqrt{(x+2009)+(x-2009)+x\cdot 2009+x:2009}=2010$$

(H.F.)

Lösung:

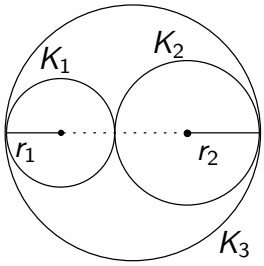
$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2009)+(x-2009)+x\cdot 2009+x:2009}&=2010\\ \sqrt{2011x+\tfrac{x}{2009}}&=2010 && \mid \text{quadr.}\\ 2011x+\tfrac{x}{2009}&=2010^2 && \mid \cdot 2009\\ 4040099x+x&=2010^2\cdot 2009\\ 4040100x&=2010^2\cdot 2009 \mid : 4040100\\ x&=\tfrac{2010^2\cdot 2009}{4040100}\end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung ist also $x=2009$.

(Kim Vetter, Klasse 10, Alfred-Delp-Schule, Hargesheim)

Aufgabe 988: Umfänge

Ein Kreis K_1 mit dem Radius r_1 berührt einen zweiten Kreis K_2 mit dem Radius r_2 von außen. Die Vereinigungsfigur $K_1\cup K_2$ berühre den Kreis K_3 von innen. Es hat den Anschein, als sei der Umfang der Figur $K_1\cup K_2$ kleiner als der Umfang des Kreises K_3.
Stimmt das? (H.F.)



Lösung:

Der Radius des Kreises K_3 ist $r=\frac{1}{2}(2r_1+2r_2)=r_1+r_2$. Daher ist der Umfang des Kreises K_3 $2\pi(r_1+r_2)$; der Umfang der Figur $K_1\cup K_2$ ist $2\pi r_1+2\pi r_2$. Deshalb sind die Umfänge von K_3 und von $K_1\cup K_2$ gleich groß.

Aufgabe 989: Fundsache

Folgender Dialog stammt aus einem Internetchat:*

> (15:12:00) Flo: „Auf einer Wanderkarte im Maßstab 1:25000 haben zwei benachbarte 20-m-Höhenlinien einen Abstand von 6 mm.“ Wenn ich ein rechtwinkliges Dreieck zeichne, um den Anstiegswinkel zu berechnen, welche Seite ist dann die mit den 6 mm Abstand?

* Es ist traurig aber wahr! Solche Mathematiklehrer sind allerdings sicher die Ausnahme.

(15:12:16) Frankie: ?
(15:12:57) Flo: War heute in Mathematik zur Diskussion und unser Lehrer wusste es nicht, also dachte ich, du wüsstest es vielleicht.
(15:13:16) Frankie: Der Mathematiklehrer wusste es nicht?! OMG!
(15:14:45) Frankie: Wie kann man so was nicht wissen? Als Mathematiklehrer?
(15:15:20) Flo: Der weiß auch die Formel für das Volumen einer Pyramide nicht aus dem Kopf, sondern guckt ins Tafelwerk.
(15:15:41) Frankie: OMG!

Traurige Zustände – aber für MONOID-Löser sicher kein Problem. Deshalb die folgenden Aufgaben, um Flo und seinem Lehrer zu helfen:

a) Berechne den Steigungswinkel sowie die Steigung in Prozent.
b) Welche Strecke legt ein Wanderer auf dem Weg tatsächlich zurück?(MG)

Lösung:

a) Sei y die tatsächliche horizontal gemessene Entfernung. Dann ist

$$\frac{1\,\text{mm}}{25000\,\text{mm}} = \frac{6\,\text{mm}}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{6\,\text{mm}\cdot 25000\,\text{mm}}{1\,\text{mm}} = 150000\,\text{mm} = 150\,\text{m}.$$

Damit entspricht der Steigungswinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{20\,\text{m}}{150\,\text{m}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{15}\right) \approx 7{,}6°$.
$\tan(\varphi) = \frac{20\,\text{m}}{150\,\text{m}} = \frac{2}{15}$, wodurch sich φ zu etwa 7,6° ergibt.
Für die Steigung gilt $m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Horizontalentfernung}} = \frac{20\,m}{150\,m} \approx 0,13$. Pro 100 m ist dies ein Höhenunterschied von etwa 13 m, die Steigung beträgt also etwa 13%.

b) Aus dem Satz des Pythagoras lässt sich der tatsächliche Wanderweg s berechnen (sofern er wirklich gerade verläuft):

$$s = \sqrt{20^2 + 150^2} = \sqrt{22900} \approx 151{,}3.$$

Ein Wanderer muss also 151,3 m laufen.

Aufgabe 990: Wahr oder falsch?
Drei 1-€-Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Wurf drei gleiche Bilder – also dreimal „Adler" oder dreimal „Zahl" oben liegen?
Da nach dem Wurf stets zwei oder drei Münzen das gleiche Bild zeigen, entscheidet die dritte Münze, ob drei gleiche Bilder zu sehen sind oder nicht. Da es für das oben liegende Bild der dritten Münze nur zwei Möglichkeiten gibt, ist also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dafür, dass bei der dritten Münze das gleiche Bild oben liegt wie bei den beiden anderen. Also: Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zeigen alle drei Münzen das gleiche Bild.
Stimmt das? (H.F.)

Lösung:
M_1, M_2, M_3 seien die drei Münzen und A (Adler) und Z (Zahl) seien die nach dem Wurf oben liegenden Bilder. Dann sind folgende acht Wurfergebnisse möglich und gleichwahrscheinlich:

M_1	A	A	A	Z	A	Z	Z	Z
M_2	A	A	Z	A	Z	A	Z	Z
M_3	A	Z	A	A	Z	Z	A	Z

Bei zwei von diesen acht Möglichkeiten liegt dreimal das gleiche Bild oben, nämlich AAA sowie ZZZ. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{8}$ und dies ist $\neq \frac{1}{2}$. Die Behauptung ist also falsch. Die Argumentation berücksichtigt die Wahrscheinlichkeiten der vorherigen Münzwürfe nicht und kommt daher zu einem falschen Ergebnis.

Aufgabe 991: Ein symmetrisches Gleichungssystem
Bestimme alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems:

$$x + y + \tfrac{1}{z} = 3$$
$$y + z + \tfrac{1}{x} = 3$$
$$z + x + \tfrac{1}{y} = 3$$

(M. Mettler)

Lösung:
Man multipliziert jede der gegebenen Gleichungen mit dem jeweils in ihr vorkommenden Nenner. Man erhält so:

(1) $xz + yz + 1 = 3z$;

(2) $yx + zx + 1 = 3x$;

(3) $zy + xy + 1 = 3y$.

Subtrahiert man (2) von (1), so folgt $y(z - x) = 3(z - x)$ also $z = x$ oder $y = 3$. Analog folgt aus (3) − (2), dass $x = y$ oder $z = 3$; sowie aus (1) − (3), dass $y = z$ oder $x = 3$.
Wären x, y und z paarweise verschieden, dann folgte aus $x \neq y$ und $y \neq z$, dass $x = 3$ und $z = 3$ im Widerspruch zur Annahme $x \neq z$.

Es bleiben also zwei Fälle:

1. Fall: Genau zwei der Zahlen x, y und z sind gleich.
Wegen der Symmetrie des Gleichungssystems in x, y und z darf man zum Beispiel $x = y$ und $y \neq z$ annehmen. Aus $y = z$ oder $x = 3$ folgt dann wegen $y \neq z$, dass $x = 3$ und daher auch $y = 3$ ist.

Dann aber ergibt sich aus (3), dass $z = -\frac{1}{3}$ ist. Mit dem möglichen Lösungstripel $\left(3, 3, -\frac{1}{3}\right)$ folgt aus der Symmetrie des Gleichungssystems, dass dann auch $\left(3, -\frac{1}{3}, 3\right)$ und $\left(-\frac{1}{3}, 3, 3\right)$ Lösungskandidaten sind.

2. Fall: $x = y = z$. Setzt man in Gleichung (1) $x = y = z$ ein, so erhält man zum Beispiel die quadratische Gleichung $2x^2 - 3x + 1 = 0$ mit den Lösungen $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$. Folglich sind $(1, 1, 1)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ zwei weitere Lösungskandidaten.

Die Probe bestätigt, dass alle fünf gefundenen Lösungskandidaten wirklich Lösungen des Gleichungssystems sind. Es sind sogar die einzigen Lösungen!

Aufgabe 992: Schranken für Zahlenfolge

Es sei (S_n) eine Folge, mit $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
Zeige, dass (S_n) eine monoton steigende Zahlenfolge ist (das heißt, es gilt $S_n > S_{n-1}$ für alle n), für die $1 < S_n < 2$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. (H.F.)

Lösung:

1. Wegen $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ ist $S_1 > 1$.
2. Wir zeigen, dass (S_n) eine monoton wachsende Folge ist, also $S_n > S_{n-1}$ gilt für jedes $n \geq 1$.

   $$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{3n-2}$$
   $$= \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} > 0,$$

   weil $\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} = \frac{27n^2-1}{3n(3n-1)(3n+1)} > \frac{27n^2-3}{3n(9n^2-1)} = \frac{1}{n} > 0$.
3. Da alle Summanden in S_n kleiner oder gleich $\frac{1}{n+1}$ sind und ihre Anzahl $2n + 1$ beträgt, gilt: $S_n < (2n + 1) \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$. Interessanterweise werden also immer mehr Zahlen addiert, aber trotzdem bleibt die Summe immer kleiner als 2.

Aufgabe 993: Tagungslogo

Im März 2010 fand in München die gemeinsame Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik statt. Das Logo dieser Tagung kannst Du auf dem Bild sehen. In diesem Logo kannst Du eine Gerade und eine Parabel erkennen, deren Symmetrieachse in guter Näherung senkrecht steht.

a) Stelle die Funktionsgleichungen $f(x)$ der Parabel und $g(x)$ der Geraden auf und bestimme daraus den Schnittpunkt beider Graphen. Wähle hierzu auf den Achsen den Maßstab 1 LE = 1 cm.

b) Bei dem Gebäude, welches im Logo angedeutet ist, beträgt der Höhenunterschied zwischen Dach und Turmspitze etwa 41 m. Die Türme sind jeweils etwa 98,5 m hoch. Wie hoch wäre die Parabel, wenn sie wirklich so über das Gebäude gebaut würde?

c) *Zusatzfrage:* Kennst Du auch das Gebäude, welches im Logo angedeutet ist?

(MG)

Lösung:

a) Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(2{,}5/3{,}0)$. Damit ergibt sich der Ansatz $y = a(x-2{,}5)^2+3$. Da die Parabel durch den Ursprung geht, berechnet sich der Streckungsfaktor wegen $0 = a(0-2{,}5)^2+3 = 6{,}25a+3$ zu $a = -0{,}48 \approx -0{,}5$. Die Parabelgleichung ist also $f(x) = -0{,}5(x-2{,}5)^2+3$. Die Geradengleichung lässt sich ablesen als $g(x) = \frac{1}{6}x+1{,}9$.
Für die Schnittpunkte gilt $-0{,}5(x-2{,}5)^2+3 = f(x) = g(x) = \frac{1}{6}x+1{,}9$, also $-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3{,}125 = \frac{1}{6}x+1{,}9$.
Quadratische Ergänzung liefert die Schnittstellen $x_1 \approx 1{,}2$ und $x_2 \approx 3{,}5$. Einsetzen in die Geradengleichung liefert die Schnittpunkte $S_1(1{,}2/2{,}1)$ und $S_2(3{,}5/2{,}5)$.
Bemerkung: Je nach Ablesegenauigkeit zur Bestimmung der Funktionsgleichungen, können die Zahlenwerte minimal abweichen.

b) Der Höhenunterschied von 41 m entspricht in der Abbildung einem Unterschied von 1,5 cm. Der Scheitelpunkt wiederum ist 1,0 cm oberhalb der Turmspitzen. Der Parabelbogen würde also $1{,}0\,\text{cm} \cdot \frac{41\,\text{m}}{1{,}5\,\text{cm}} \approx 27{,}3\text{m}$ über die Turmspitzen hinausragen und hätte somit eine Gesamthöhe von $98{,}5\,\text{m} + 27{,}3\text{m} = 125{,}8\text{m}$.

c) Das angedeutete Gebäude ist der Dom zu Unserer Lieben Frau, umgangssprachlich meistens Frauenkiche genannt, in München. – Übrigens dürfte der Parabelbogen so gar nicht gebaut werden, da die Stadtverwaltung im Stadtzentrum innerhalb des Mittleren Rings keine Gebäude mit einer Höhe von über 100 Metern erlaubt, und auch außerhalb dieses Rings seit November 2004 vorläufig keine höheren Gebäude im Stadtgebiet mehr gebaut werden dürfen.

Errata zu Heft 101

- **Aufgabe 982d**
  Wenn drei Ziffern gleich sind, gibt es $10 \cdot 9$ Möglichkeiten, die beiden in der PIN vorkommenden auszuwählen und *vier* Möglichkeiten, diese anzuordnen (die eine könnte an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen, macht vier Stücke). Insofern ergibt sich als Nenner $10 \cdot 9 \cdot 4$, also 360.

- **Aufgabe 984: Spareinlage**
  Die im Heft 101 abgedruckte Lösung, die nicht vom Aufgabensteller stammt, ist falsch. Die korrekte Lösung lautet:

  a) Nach der Verzinsung für 2009 beträgt das Guthaben

  $$0{,}01\,€ \cdot 1{,}03^{2009+81} = 0{,}01\,€ \cdot 1{,}03^{2090} \approx 6{,}758 \cdot 10^{24}\,€.$$

  Das sind fast 6,8 Quadrillion Euro (oder 6,8 Yotta-Euro).

  b) Zum Zeitpunkt, da Caesar Millionär wird, gilt $0{,}01\,€ \cdot 1{,}03^{n+81} = 10^6\,€$, resp. $10^8 = \frac{10^6\,€}{0{,}01\,€} = 1{,}03^{n+81}$.
  Nach dem Übergang zum Logarithmus folgt $\lg\left(10^8\right) = \lg\left(1{,}03^{n+81}\right) = (n+81) \cdot \lg(1{,}03)$.
  Damit ist $n = \frac{\lg\left(10^8\right)}{\lg(1{,}03)} - 81 \approx 623{,}2 - 81 = 542{,}2$ und nach der Verzinsung am 31. Dezember 543 wäre Caesar Millionär. (MG)

- **Aufgabe 986: Wanderer**
  Hier fehlte die Lösung zu Aufgabenteil b, der hier nachgereicht wird:

  b) Für die Gesamtstrecke $s = \overline{AC}$ benötigt der Fußgänger die Zeit $t = \frac{s}{v}$, der Radfahrer ohne Ruhepause $T = \frac{s}{V} = \frac{s}{a \cot v}$, mit Berücksichtigung der Ruhepause $R = 20\,\text{Min.}$, also $t = T + R$. Es ist also $\frac{s}{v} = \frac{s}{V} + R$ und somit $s = \frac{Rva}{a-1}$ für die Gesamtstrecke und $t = \frac{s}{v} = \frac{Ra}{a-1}$ für die benötigte Zeit.

In eigener Sache

Nach einem langen Zeitraum der Preisstabilität – zuletzt wurde der Preis für ein Jahresabo im Zuge der Währungsumstellung auf den nächst größeren glatten Euro-Betrag aufgerundet – sind wir gezwungen, den Preis für ein Jahresabo auf 10€ anzuheben. Die bislang erhobenen Beiträge decken gerade die Kosten für Druck und Versand. Die inhaltliche Arbeit erfolgt ehrenamtlich, Personalkosten fallen aber für die Erstellung der Hefte, Korrekturen der eingesandten Lösungen und Pflege des Internetauftrittes an. Diese hat bisher das Institut für Mathematik der Universität Mainz als Herausgeber allein getragen; aufgrund von Mittelknappheit müssen wir die Leser hier zukünftig mitbeteiligen.
Darüber hinaus bitten wir um Spenden für den Fortbestand von Monoid. Diese können erfolgen auf das Konto der Freunde der Mathematik. Bitte senden Sie hierzu eine kurze E-Mail an `freunde@mathematik.uni-mainz.de` – wegen Missbrauchsgefahr können wir die Kontoverbindung hier leider nicht abdrucken. Selbstverständlich erhalten Sie eine Spendenquittung und können den Betrag steuerlich absetzen.

Wir bitten unsere Leser um ihr Verständnis.

Fibonacci in Echternach

von Wolfgang J. Bühler

Fibonacci* hat um 1200 ein Modell für das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieben. Dies führte zur Folge (von Populationsgrößen) F_0, F_1, F_2, ... mit $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Diese Folge heißt Fibonacci-Folge und beginnt mit $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Inzwischen kennt man viele Beispiele, in denen diese Folge auftritt. Ich möchte hier ein weiteres dieser Beispiele vorstellen.

Politiker und Journalisten beziehen sich gelegentlich auf die Echternacher Springprozession**, um darauf hinzuweisen, dass eine Sache zu zögerlich angegangen wird. Sie beschreiben diese Prozession dann oft mit „zwei Schritte vor, einer zurück".

Wir nehmen also an, ein Teilnehmer an der Prozession mache abwechselnd einen Sprung um zwei Schritte nach vorn und einen Sprung um einen Schritt zurück. Dann sei P_n seine Position nach n Sprüngen (ausgehend von $P_0 = 0$) und T_n die Anzahl der Sprünge, die er braucht, um zum ersten Mal die Position n zu erreichen (oder zu überspringen). Beide Folgen können wir leicht angeben:

Positionen P_n:	0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, ...
Sprungzahlen T_n:	0, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Man kann sich überlegen, dass $\frac{P_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$ und $\frac{T_n}{n} \longrightarrow 2$.
Nach einem (von mir erfundenen) Gerücht sollte Fibonacci auf Geheiß des Kaisers an der Springprozession teilnehmen. Er hat aber wegen seiner fehlenden Kenntnis der luxemburgischen Sprache die Anweisungen nicht richtig verstanden und meinte, er müsse vor jedem Sprung mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{2}$ entscheiden, für je zwei Schritte vorwärts oder einen Schritt zurück. Damit wird $P_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$, wobei die X_j, $j = 1, 2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen sind, mit $P(X_j = 2) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}$, also mit Erwartungswert $EX_j = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$, $EP_n = \frac{n}{2}$ und somit $\frac{EP_n}{n} = \frac{1}{2}$. Das starke Gesetz der großen Zahlen bedeutet, dass sogar $\frac{P_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt.
Das Studium von T_n ist nicht ganz so einfach. Fibonacci wandte sich deshalb zunächst dem Erwartungswert $E_n = ET_n$ zu.
Der erste Sprung führt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zur Position $+2$, wenn $n > 2$ ist, also um 2 näher an n. Danach benötigt man also im Mittel noch E_{n-2}

* Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, ca. 1180 bis 1250, war Mathematiker am Hofe Kaiser Friedrichs II.

** Eine religiöse Prozession, die jedes Jahr am Dienstag nach Pfingsten in Echternach in Luxemburg stattfindet. Die Teilnehmer „springen" in Reihen durch die Straßen der Stadt Echternach, bis zum Grab des Heiligen Willibrord in der Echternacher Basilika.

Sprünge. Mit der verbleibenden Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ braucht man (von -1 aus) im Mittel noch E_{n+1} Sprünge. Insgesamt gilt also:

$$E_n = \frac{1}{2}(1 + E_{n-2}) + \frac{1}{2}(1 + E_{n+1}),$$

für $n \geq 3$. Für $n = 1$ und $n = 2$ finden wir mit der entsprechenden Argumentation:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E_2) \text{ und } E_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E_3)$$

Das so gefundene System von Gleichungen schreiben wir um zu:

$$\begin{aligned} E_2 &= 2E_1 - 2 \\ E_3 &= 2E_2 - 2 \\ E_{n+1} &= 2E_n - E_{n-2} - 2 \quad \text{für } n \geq 3 \end{aligned}$$

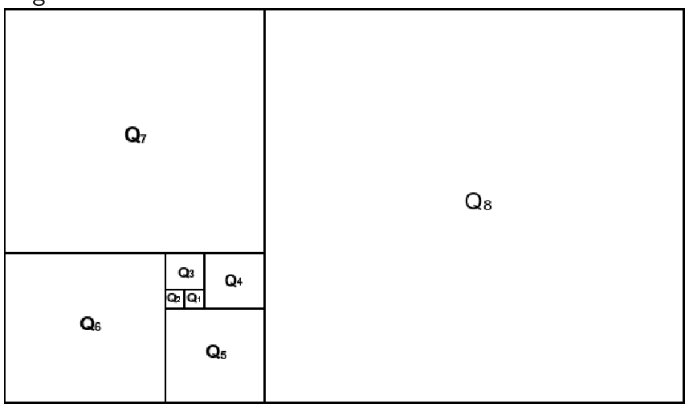
Hieraus lässt sich jedes E_n als Funktion von E_1 darstellen. Schreibt man $E_1 = x$, so erhält man sukzessive: $E_1 = x$, $E_2 = 2x - 2$, $E_3 = 2(2x - 2) - 2 = 4x - 6$, $E_4 = 2(4x - 6) - x - 2 = 7x - 14$, und so weiter, allgemein $E_n = a_n x - b_n$, wobei für $n \geq 3$ gilt $a_{n+1}x - b_{n+1} = 2(a_n x - b_n) - (a_{n-2}x - b_{n-2}) - 2$, das heißt $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}$ und $b_{n+1} = 2b_n - b_{n-2} + 2$. Mit den Anfangswerten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ können wir die Folgen also rekursiv berechnen. Zunächst zur Folge a_n, $n \geq 0$: $0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, \ldots$. Da Fibonacci dieser Folge zunächst nichts ansehen konnte, bildete er die Folge der Differenzen $c_n = a_{n+1} - a_n$ und fand: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ also gerade „seine“ Folge. Sein Ergebnis war somit $a_n = F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}$.
Nun schaute er sich die Folge b_n an. Diese beginnt so: $0, 0, 2, 6, 14, 28, 52, 92, \ldots$. Wieder erkennt man zunächst nichts, aber wie sehen die Differenze $d_n = b_{n+1} - b_n$ aus? $0, 2, 4, 8, 14, 24, 40, \ldots$
Es ist also $d_n = 2a_n$ und somit: $b_n = 2 \cdot (F_0 + (F_0 + F_1) + (F_0 + F_1 + F_2) + \ldots + (F_0 + \ldots + F_{n-2})) = 2((n-1)F_0 + (n-2)F_1 + \ldots + F_{n-2})$. Die Gestalt der beiden Folgen a_n, b_n, $n \geq 0$ hat Fibonacci natürlich begeistert. Aber was ist der Wert von x?
Dazu sah er sich die Werte der ersten E_n an: $x = E_1 > 0$; $2x - 2 = E_2 > 0$, das heißt $x > 1$; $4x - 6 = E_3 > 0$, das heißt $x > \frac{3}{2}$; $7x - 14 = E_4 > 0$, das heißt $x > 2$; $12x - 28 = E_5 > 0$, das heißt $x > \frac{7}{3}$.
Fibonacci schaute sich die Darstellung der Folgen a_n und b_n noch einmal an und kam dabei zu der Überzeugung, dass b_n (als Summe von n Termen a_j) schneller wächst, als a_j. Diese Tatsache wäre dann nur mir $x = \infty$ vereinbar. Man müsste demnach damit rechnen, dass es in der Regel sehr lange dauern würde, bis die Prozession am Ziel ankommt.
Nach seiner Rückkehr an den kaiserlichen Hof in Sizilien berechnete Fibonacci weitere Werte von $\frac{b_n}{a_n}$: $\frac{14}{7} = 2$, $\frac{28}{12} = \frac{7}{3}$ kennen wir schon; danach $\frac{52}{24} = \frac{13}{6}$, $\frac{92}{40} = \frac{23}{10}$,.... Diese Folge scheint einem endlichen Grenzwert z zuzustreben, der

irgendwo in der Nähe von $3,2$ liegt. Dann wäre durchaus möglich, dass x endlich wäre; es müsste natürlich $x \geq z$ gelten.
Nach Konsultation mit dem an der Università di Magonza lehrenden Mathematiker Giovanni-Giorgio Scarpa und mit anderen bedeutenden Gelehrten der damaligen Zeit*** erließ Fiedrich ein kaiserliches Edikt, nach dem x und damit alle E_n endlich seien und führte die Springprozession auf Sizilien ein, wo sie heute noch begangen wird.

Wer forscht mit?

Eine Folge von Quadraten

Untersuche die aus beliebig vielen Quadraten $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_8, \ldots$ gemäß dem in folgendem Bild erkennbaren Muster aufgebaute geometrische Figur. In ihr seien die Seitenlängen von Q_1 und Q_2 jeweils 1, die von Q_3 sei 2 und so weiter. Ferner sei $R_1 = Q_1, R_2 = Q_1 \cup Q_2, R_3 = R_2 \cup Q_3, \ldots$ die Folge der Rechtecke in dieser Figur.



Interessant könnten sein:

- Das Bildungsgesetz der Seitenlängen der Quadrate $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, sowie der Seitenlängen und der Flächeninhalte der Rechtecke $R_1, R_2, R_3, \ldots$;
- die Folge der Vergrößerungsfaktoren $q_1, q_2, q_3, \ldots$ der Seitenlängen von $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ sowie die Eigenschaften dieser Folge;
- Abänderungsmöglichkeiten beim Bildungsgesetz der Quadratfolge;
- Verallgemeinerungsmöglichkeiten (auch räumlicher Art).

(H. F.)

*** Man verzeihe den Anachronismus: Der erwähnte Mathematiker ist ein Kollege aus heutiger Zeit, Hans-Jürgen Schuh, Professor an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz und Mitglied der MONOID-Redaktion. Er hat einen Beweis gefunden, dass x tatsächlich endlich ist. Der genaue Wert ist uns allerdings nicht bekannt.

Hinweis: Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 31. August 2010 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils zwei Hefte später veröffentlicht.

In Heft 100 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Potenz-Quersummen

Bei der gewöhnlichen Quersumme $Q(n)$ einer natürlichen Zahl n werden ihre Ziffern addiert; das Verfahren der fortgesetzten Wiederholung $Q(Q(n))$, $Q(Q(Q(n)))$, ... endet schließlich mit einer einziffrigen Zahl.

Wir laden nun dazu ein, einmal das abgeänderte Verfahren zu untersuchen, wenn die Quadrate, Kuben oder höhere Potenzen der Ziffern einer natürlichen Zahl n addiert werden. Ist $n = z_1 z_2 \ldots z_t$ mit den Ziffern z_i, $0 \leq z_i \leq 9$ für $1 \leq i \leq t$, so sei $Q_2(n) := z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_t^2$, allgemein $Q_m(n) := z_1^m + z_2^m + \ldots + z_t^m$ für $m = 2, 3, 4, \ldots$. Untersuche nun das Verhalten von $Q_m(\ldots(Q_m(Q_m(Q_m(n))))\ldots)$ für $m = 2, 3, 4, \ldots$. (E.K.)

Ergebnisse

Ihre Untersuchungsergebnisse haben uns zugeschickt:
Marcella Beck (Maria-von-Linden-Gymnasium, Calw-Stammheim), Philipp Delhougne (Otto-Hahn-Schule Hanau), Alia'a Ahmed Doma und Shaima'a Ahmed Doma (beide Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo) sowie Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf).

Marcella Beck ermittelte für $1 \leq n \leq 50$ und $m = 2, 3, 4, 5$ die Anzahl der Schritte, bis die Iteration $Q_m(\ldots(Q_m(Q_m(n)))\ldots)$ erstmals eine einstellige Zahl erreicht. Aber im Unterschied zum Fall $m = 1$, in dem der Prozess mit dem Erreichen einer einstelligen Zahl abbricht, ist dies für $m \geq 2$ nur beim Erreichen der 1 der Fall wie bei der Startzahl 7 im Fall Q_2 in fünf Schritten: $7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$

Shaima'a Ahmed Doma untersuchte Q_m für $m = 2, 3$ und 4 am Beispiel der Zahl 3 257, während ihre Schwester Alia'a Beispiele für Zyklen aufzeigte, in welche die iterierten Zahlenfolgen bei Anwendung von Q_m laufen können.

Systematischer ging Philipp Delhougne an die Untersuchung von Q_2 und Q_3 heran: Neben Zahlenfolgen, die im Einerzyklus 1 enden, enthalten die anderen Q_2-Zahlenreihen eine der Zahlen aus dem Achterzyklus $4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$, was Philipp für alle $n \leq 243$ überprüft hat. Wegen $Q_2(999) = 3 \cdot 81 = 243$ als maximalem Wert, den Q_2 für dreistellige Zahlen n überhaupt erreichen kann, schließt er auf die Gültigkeit dieses Verhaltens für alle dreistelligen Zahlen, also auch für $324 = 4 \cdot 81 = Q_2(9999)$ und somit für alle vierstelligen Zahlen.

Entsprechend argumentierte Florian Schweiger gleich allgemein: „Wenn man die Berechnung der Potenzquersumme nur oft genug iteriert, so muss die Folge periodisch werden. Die Potenzquersumme (Potenz m) einer k-ziffrigen Zahl kann nämlich höchstens $k \cdot 9^m$ sein. Dieser Term wächst nur linear mit k, während

10^k exponentiell wächst, daher muss es ein k geben, so dass die Potenzquersumme einer Zahl mit mindestens k Ziffern weniger Ziffern hat als die Zahl selbst. Irgendwann wird also die iterierte Potenzquersumme kleiner als 10^k, und diese Schranke kann sie dann nie mehr überschreiten. Deshalb muss sich irgendwann ein Wert wiederholen, und ab dann ist die Folge periodisch, es gibt also Attraktoren."

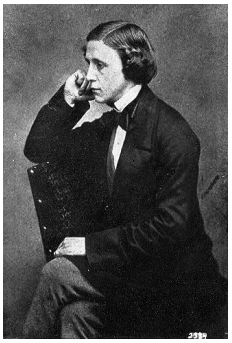
Von diesen Überlegungen ausgehend, hat Florian mit einem Visual-Basic-Programm für m zwischen 1 und 5 alle Attraktoren bzw. Zyklen ermittelt. „Dazu bestimmt es zunächst das k und berechnet dann für alle Startwerte kleiner 10^k alle Folgenglieder bei wiederholter Potenzquersummenberechnung, bis eine Wiederholung auftritt. Der Wert, bei dem dies geschieht, ist Startwert eines Attraktorzykluses, er wird gespeichert. Danach listet das Programm für jeden so gespeicherten Wert noch den Attraktor auf." Für $m = 2$ und $m = 3$ bestätigt das Programm die Resultate von Philipp Delhougne, die dieser zusätzlich in zwei beeindruckenden Grafiken für $n \leq 100$ präsentiert. Hier nur noch die Resultate von Florian Schweiger für

	Attraktoren	Zyklen
$m = 3$	1; 153; 370; 371; 407	136, 244; 919, 1459; 55, 250, 133; 160, 217, 352
$m = 4$	1; 1634; 8208; 9474	2178, 6514; 1138, 4179, 9219, 13139, 6725, 4338, 4514.

Wer war's?

Des Rätsels Lösung von Seite 11

von Hartwig Fuchs



Der Mann, der ein Doppelleben führte als ein unbedeutender Mathematiker und zugleich als Verfasser damals weltberühmter Bücher – von denen sein Erstlingswerk auch heute noch viel gelesen wird –, war *Charles Lutwidge Dodgson* (27.01.1832–14.01.1898), der seine literarischen Werke unter dem Pseudonym *Lewis Carroll* veröffentlichte.

Sein erstes Buch „Alice's Adventures in Wonderland" (Alice im Wunderland) erschien 1865 und war von Anfang an höchst erfolgreich – sogar Queen Victoria, die doch ein Imperium zu regieren hatte, gehörte zu seinen begeisterten Leserinnen (es gab auch Leser!) – Kinder waren allerdings die größten Fans der Alice und der späteren Bücher.

Die Anziehungskraft der Carroll'schen Werke gründet sich nicht nur auf die phantastischen und märchenhaften Inhalte ihrer Geschichten sondern auch auf die ungewöhnliche Art und Weise, wie sie erzählt sind – nicht „geradeaus“, wie es damals die Tradition war:
Carrolls Texte wimmeln von Abschweifungen und Einschüben – Gedichte, Rätsel, Logeleien und manchmal sogar mathematische Aufgaben.
Oft auch verwirrte er seine Leser, führte sie in die Irre, indem er sie mit „dunklen“ Textpassagen konfrontierte, die kaum zu durchschauen sind oder überhaupt keinen Sinn ergeben – der pure Nonsens dann.

Wenn bei solchen schwierigen Stellen Mathematik im Spiel ist, sind Kinder und auch mathematisch Ungeübte schnell fertig mit ihrem Urteil: Wohl wieder ein Carrollscher Nonsens!
Aber das kann leicht ein Fehlurteil sein – Carroll war ja immerhin Mathematiker und er hat seinen Lesern vielleicht zeigen wollen: Ich kann Mathematik!

Ein solcher Fall könnten die auf den ersten Blick unsinnig scheinenden Rechnereien aus dem 2. Kapitel von „Alice im Wunderland“ sein, die wir uns näher anschauen wollen.
Alice rechnet dort:*

> ...four times five is twelve,
> four times six is thirteen,
> four times seven is...
> – Oh dear! I shall never get to twenty at that rate!

Ist das nun Nonsens oder steckt Mathematik dahinter?

Beginnen wir mit der ersten Zeile von Alices Rechnerei.
Man kann den Wert eines Produkts „four times five“ – also „twenty“ auf vielerlei Arten darstellen – in einigen alten Kulturen machte man es so:

$\cap\cap$	$<<$	κ	XX
ägyptisch	babylonisch	griechisch	römisch

Warum sollte man den Wert von $4 \cdot 5$ nicht auch als 12 angeben dürfen? Dann wäre 12 die „Verschlüsselung“ des Wertes von $4 \cdot 5$, bei der die Ziffer 1 nun aber nicht mehr wie im Dezimalsystem, also dem Zahlensystem mit Basis 10, die Bedeutung $1 \cdot 10$ hätte.
Zifferndarstellungen von Zahlen, bei denen die Ziffern eine andere Bedeutung als im 10-System besitzen, lernen wir aber alle in der Schule kennen.

Beispiel: Wenn die Zahl n im 10er-System die Zifferndarstellung 42 hat, dann bedeutet das: $n = 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$**. Im 2er-System hat die gleiche Zahl n die Zifferndarstellung 101010 wegen $n = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ und im 13er-System hat sie die Zifferndarstellung 33 wegen $n = 3 \cdot 13^1 + 3 \cdot 13^0$.

---

* „...vier mal fünf ist zwölf, ... – oh weh! Auf die Art komme ich nie zur Zwanzig!“
** Man definiert $b^0 = 1$ für jedes $b \neq 0$.

Lässt sich daher eine Basis b finden, so dass $4 \cdot 5 = 12$ in diesem $b$er-System gilt?
In einem $b$er-System bedeutet $4 \cdot 5 = 12$, dass $4 \cdot 5 = 1 \cdot b^1 + 2 \cdot b^0$ ist. Da wir wissen, dass $4 \cdot 5$ den Wert zwanzig hat, muss also $b = 18$ sein: $4 \cdot 5 = 12$ ist nur im 18er-System eine richtige Gleichung!

Überprüfen wir diese Überlegung an Alices zweiter Rechnung:
In einem $b$er-System bedeutet $4 \cdot 6 = 13$, dass $4 \cdot 6 = 1 \cdot b^1 + 3 \cdot b^0$ ist. Weil das Produkt $4 \cdot 6$ den Wert vierundzwanzig hat, ist $b = 21$ und damit gilt die Gleichung $4 \cdot 6 = 13$ im 21er-System!

Nun stellt Alice die Behauptung auf: Wenn Du nach dem aus den $2\frac{1}{2}$ ersten Zeilen erkennbaren Muster weiterrechnest, wirst du niemals zur 20 gelangen!
Probieren wir es mal.

Basis b	Produkt $4n$	$4n$ als Summe $c \cdot b^1 + d \cdot b^0$	Alices Berechnungen von $4n$ in Zifferndarstellung im b-System
18	$4 \cdot 5$	$4 \cdot 5 = 1 \cdot 18 + 2$	$4 \cdot 5 = 12$ im 18er-System
21	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 6 = 1 \cdot 21 + 3$	$4 \cdot 6 = 13$ im 21er-System
24	$4 \cdot 7$	$4 \cdot 7 = 1 \cdot 24 + 4$	$4 \cdot 7 = 14$ im 24er-System
27	$4 \cdot 8$	$4 \cdot 8 = 1 \cdot 27 + 5$	$4 \cdot 8 = 15$ im 27er-System
30	$4 \cdot 9$	$4 \cdot 9 = 1 \cdot 30 + 6$	$4 \cdot 9 = 16$ im 30er-System
33	$4 \cdot 10$	$4 \cdot 10 = 1 \cdot 33 + 7$	$4 \cdot 10 = 17$ im 33er-System
36	$4 \cdot 11$	$4 \cdot 11 = 1 \cdot 36 + 8$	$4 \cdot 11 = 18$ im 36er-System
39	$4 \cdot 12$	$4 \cdot 12 = 1 \cdot 39 + 9$	$4 \cdot 12 = 19$ im 39er-System
42	$4 \cdot 13$	$4 \cdot 13 = 1 \cdot 42 + 10$	$4 \cdot 13 = 20$ im 42er-System

Tatsächlich endet Alices Rechenmuster mit dem Produkt $4 \cdot 13$, denn im zugehörigen 42er-System bedeutet die in Ziffern geschriebene Zahl 20, dass $20 = 2 \cdot 42^1 + 0 \cdot 42^0$, also vierundachtzig, während aber $4 \cdot 13$ den Wert zweiundfünfzig hat.

Es ist also durchaus denkbar, dass Alices scheinbar unsinnige Rechnereien tatsächlich no nonsense sind – weil Lewis Carroll in ihnen die oben beschriebenen Überlegungen als mathematische Herausforderung seiner Leser im Text versteckt hat: Der Leser soll herausfinden, dass die Produkte $4 \cdot 5$, $4 \cdot 6$, ..., $4 \cdot 12$ bei richtiger Interpretation von „twelve, thirteen, ..., nineteen“ richtig berechnet sind.

Und so hätte Lewis Carroll eine sehr schöne Aufgabe augenzwinkernd in sein Buch eingeschmuggelt.

Noch eine Carroll'sche Aufgabe

Die folgende Mathespielerei hat Carroll wohl gebastelt, als er gerade an einer Arbeit über die Mengen-Diagramme seines Kollegen J. Venn (1834–1923) aus Cambridge schrieb.
Dabei machte er zehn Voraussetzungen:

1. In meinem Haus gibt es keine Tiere außer Katzen.
2. Nur Tiere, die gerne den Mond anschauen, können meine Lieblingstiere sein.
3. Wenn ich einem Tier nicht aus dem Wege gehe, dann mag ich es.
4. Es gibt kein fleischfressendes Tier, das nachts nicht jagt.
5. Jede Katze fängt Mäuse.
6. Kein Tier, außer denen in meinem Haus schließt Freundschaft mit mir.
7. Känguruhs können nicht meine Lieblingstiere sein.
8. Nur fleischfressende Tiere fangen Mäuse.
9. Ich mag die Tiere, die mit mir Freundschaft schließen.
10. Tiere, die nachts jagen, schauen gerne den Mond an.

Wie verhält sich nun Lewis Carroll gegenüber Känguruhs?

Die Lösung der Aufgabe

Die Voraussetzungen 1.–10. handeln offensichtlich von Mengen von Tieren und davon, welche Beziehungen des Enthaltenseins zwischen diesen Mengen bestehen.
Wir stellen daher zunächst eine Liste aller in 1.–10. genannten Mengen, geordnet nach ihrem Vorkommen in 1.–10., zusammen.

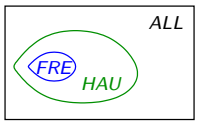
Bezeichnung	Beschreibung der Menge	Vor.
ALL	alle Tiere	
KAT	alle Katzen	1. und 5.
HAU	alle Tiere in meinem Haus	1. und 6.
LIE	alle meine Lieblingstiere	2. und 7.
MON	alle Tiere, die den Mond anschauen	2. und 10.
MAG	alle Tiere, die ich mag	3. & 9.
WEG	alle Tiere, denen ich nicht aus dem Weg gehe	3.
FLE	alle Tiere, die Fleisch fressen	4. und 8.
JAG	alle Tiere, die nachts jagen	4. und 10.
MAU	alle Tiere, die Mäuse fangen	5. und 8.
FRE	alle Tiere, die mit mir Freundschaft schließen	6. und 9.
KAN	alle Känguruhs	7.

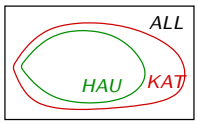
Wir veranschaulichen die Mengen der Liste durch Venn-Diagramme mit dem Ziel, ihre $\subset$-Beziehung** transparent zu machen. Nach einigem Probieren stellt sich heraus, dass es möglicherweise günstig ist, mit der „Übersetzung“ von 6. und danach mit 1. zu beginnen.

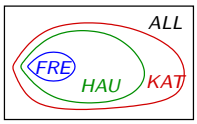
6. besagt, dass alle Tiere, die mit mir Freundschaft schließen (*FRE*), in meinem Haus sind. Da es aber durchaus auch Tiere gibt, die keine Freundschaft mit mir

** $A \subset B$ bedeutet: A ist Teilmenge von B, also jedes Element von A ist auch Element von B.

schließen, folgt: $FRE \subset HAU$ für die Mengen FRE und HAU.
Aus 1. ergibt sich für die Mengen HAU und KAT, dass $HAU \subset KAT$.
Also gilt auch: $FRE \subset HAU \subset KAT$ oder anschaulich:

Aus 6. 

und 1. 

folgt 6. & 1. 

.

Wenn man nun die übrigen Voraussetzungen nach $\subset$-Beziehungen durchforstet, gelangt man zu der Kette:

$$MAG \overset{9.}{\subset} FRE \overset{6.}{\subset} HAU \overset{1.}{\subset} KAT \overset{5.}{\subset} MAU \overset{8.}{\subset} FLE \overset{4.}{\subset} JAG \overset{10.}{\subset} MON \overset{2.}{\subset} LIE$$

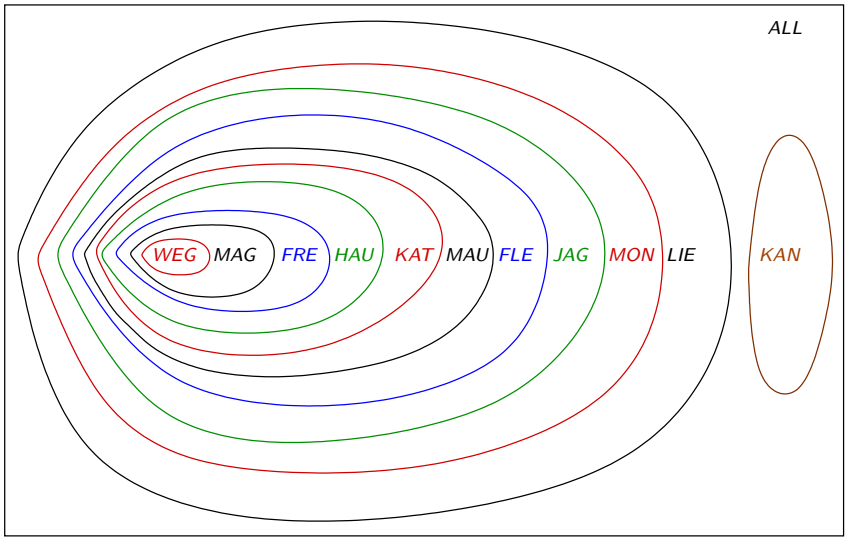
und aus 7. ergibt sich noch, dass die Mengen LIE und KAN keine gemeinsamen Elemente haben.

In der $\subset$-Kette kommt 3. nicht vor. Machen wir uns die „Wenn-dann"-Aussage an einem Beispiel klar. Es gelte:
Wenn eine Rose rot ist, dann duftet sie. Weil es aber auch duftende Blumen gibt, die keine roten Rosen sind, haben wir {rote Rosen} $\subset$ {duftende Blumen}.
Entsprechend lautet die „Übersetzung" von 3. für die Mengen WEG und MAG:

$$WEG \overset{3.}{\subset} MAG.$$

Damit lässt sich die $\subset$-Kette nach links verlängern.

Eine „Übersetzung" der gefundenen Beziehungen in einem Venn-Diagramm ist die nachfolgende Figur. Mit ihr lässt sich nun die Frage beantworten, wie sich Lewis Carroll gegenüber Känguruhs verhält.



Kein Känguruh gehört zu Carrolls Lieblingstieren, weil $KAN \cap LIE = \{\}$ ist. Aus $WEG \subset MAG \subset LIE$ folgt daher: Carroll mag keine Känguruhs und er geht auch keinem Känguruh nicht aus dem Weg – das heißt er geht Känguruhs aus dem Weg.

Mitteilungen

- Das Titelbild wurde freundlicherweise von Tina Kaplan für uns erstellt, die an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe Mathematik für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen studiert hat und jetzt in der Nähe von Karlsruhe als Lehrerin tätig ist.
- In unregelmäßigen Abständen werden Aufgabenteile oder ganze Aufgaben erscheinen, die mit einem $\star$ gekennzeichnet sind. Diese sind besonders knifflig und deshalb als eine Bonusaufgabe gestellt, mit der es ausschließlich Bonuspunkte zu erreichen gibt, siehe Seite 2.
- Beim Aufräumen am Karolinen-Gymnasium Frankenthal sind viele (ganz) alte Hefte aufgetaucht, sogar noch Hefte von 1990! Diese möchten wir Euch natürlich nicht vorenthalten. Daher könnt Ihr diese zum Preis von 1 € für zwei Heft (inklusive Porto und Verpackung) über unsere Internetseite `www.mathematik.uni-mainz.de/monoid` bestellen.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag, in Höhe von 10 €, für das Schuljahr 2010/11 rechtzeitig auf das MONOID-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen!

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 100

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag)**:**
Kl. 7: Mariam Ahmed 3, Marianne Michel 19, Chantal Ragy 20;
Kl. 8: Farieda Gaber 15,
Kl. 11: Nada Mohamed ElAttar 21.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kraft)**:**
Kl. 6: Katja Goldschmidt 6, Amany Ramadan 6, Laura Christin Schmidt 6;
Kl. 7: Arne Broszukat 24,
Kl. 8: Marc de Zoeten 20, Lena Ehrenhard-Dickeschied, 9, Laura Tabea Galkowski 33, Lara Geldsetzer 8, Sebastian Ludwig 47, Alexander Rupertus 26, Julia Scherner 39;

Kl. 9: Eike Broszukat 12, Andreas Pitsch 45;
Kl. 10: Kevin Schmitt 28.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Anna Katharina Lange 16.

Aschaffenburg, Friedrich-Dessauer-Gymnasium:
Kl. 8: Hauke Mewes 13.

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum:
Kl. 10: Katharina Albert 6, Belinda Müller 6.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 9: Frank Schindler 56.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 7: Christopher Patzanovsky 31.

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:
Kl. 9: Marcella Beck 22.

Coburg, Gymnasium Casimirianum:Kl. 9: Markus Voelckel 10.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Lukas Vogel 11.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:Kl. 9: Wanda Witte 11.

Erlangen, Gymnasium Fridericianum: Kl. 7: Nadja Motova 20.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Christoph Hemmer 11;
Kl. 6: Larissa Kießling 7, Marcel Wittmann 11;
Kl. 7: Arthur Schalk 15;
Kl. 8: Jana Ballweber 19;
Kl. 9: Henning Ballweber 52.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (betr. Lehrerin: Frau Elze)**:**
Kl. 6: Antonia Binnewies 2, Julia Häger 11, Niklas Heß 10, Jelaletdin Japarov 1, Julius Panreck 10, Anastasia Reiß 12, Yasmin Sode 3;
Kl. 7: Luca Gladiator 14.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik (betr. Lehrer: Herr Nüchter)**:**
Kl. 6: Sabrina Hucke 20;
Kl. 7: Sophie Eckerscham 6, Magdalena Kött 4.

Grünheide, Gerhard-Hauptmann-GrundschuleKl. 6: Sonja Witte 20.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin: Frau Niederle)**:**
Kl. 4: (Oranienschule Elz) Nils Prepens 12;
Kl. 5: Daniel Albers 6, Kim Cimander 15, Lea Stiehl 11, Emily Zollmann 9;

Kl. 7: Mara Koch 11, Lars Prepens 40.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:
Kl. 9: Michael Delhougne 19; **Kl. 11:** Philipp Delhougne 28.

Hargesheim, Alfred-Delp-Schule (betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 10: Kim Vetter 10.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Herr Straub)**:**
Kl. 6: Mariam Ayman 9, Mariam Baher 16, Mariam El-Shiaty 7, Jennifer Radi 4;
Kl. 9: Shaima'a Ahmed Doma 24;
Kl. 12: Alia'a Ahmed Doma 41.

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 5: Leonard Röhl 2;
Kl. 6: Robert Holla 8, Nathalie Neubert 31; Björn Stanischewski 41;
Kl. 7: Florian Papadopulos 13, Maike Stanischewski 40.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 9: Robin Fritsch 30.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Sophia Keller 3, Enrico Heppler 8, Annika Kunz 7, Laura Nikolay 6, Alina Peters 6, Celine Raddatz 2, Melanie Weibrich 4;
Kl. 7: Patrick Bierle 3, Fabian Bommer 9, Tobias Glaszner 3, Marcel Ghazi 5, Lea Happ 4, Alina Heihoff 7, Victor Jans 25, Gesa Jonat 6, Daniel Koziolek 2, Philipp Krimmel 5, Clara Licht 4, Marius Martinez 3, Suna Mazlaim 6, Lara Mrse 4, Tamara Schmoll 4, Luca Seibert 2, Max Thomann 3;
Kl. 8: Niklas Braun 7, Julia Braunschädel 14, Lucas Feringa 4;
Kl. 9: Niklas Schliesmeier 3;
Kl. 10: Kira Bittner 2, Felix Braun 7, Nabil Hagag 3, Jannik Lang 2, Marco Rudolf 10, Malik Wagner 2, Ines Zatonski 4.

Mainz, Theresianum: Kl. 7: Inga Valentiner-Branth 11.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt)**:**
Kl. 6: Leo Lutz 26;
Kl. 7: Ruben Hamann 15, Betül Kurtaran 21, Benedikt Przybilla 14, Leonhard Wagner 32;
Kl. 10: Tim Lutz 17.

München, Max-Planck-Gymnasium: Kl. 7: Greta Sandor 14.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin: Frau Langkamp)**:**
Kl. 7: Sophie Hagedorn 9, Ira Löffler 7, Olivia Malik 2, Prisca Napp-Saarbourg 5, Naira von Stosch 7 ;
Kl. 11: Vivien Kohlhaas 13.

Nürnberg, Willstätter Gymnasium:Kl. 9: Stella Brytanchuk 22.

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Simon Elborg 5, Katharina Kiefer 19, Jakob Kuhn 34;
Kl. 7: Andrea Behrent 18, Lutz Bischoff 39, Heiko Kötzsche 54;
Kl. 9: Yun Yeong-Chul 21.

Oppenheim, St. Katharinen-Gymnasium :Kl. 7: Daniel Blankenburg 16.

Pfaffenhofen a. d. Ilm, Schyren-Gymnasium:
Kl. 6: Johannes Kowalewicz 29.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
Kl. 6: Malte Bayer 3, Juliane Brenner 2, Lucas Diegmann 4, Yannick Dillmann 2, Christina Durwen 2, Anna Lia Eichen 2, Catherina Falkenstein 3, Chiara Fanslau 3, Isabelle Geis 3, Leon Häring 3, Lisa Heiden 3, Marvin Höhner 2, Sina Job 3, Rebecca Kantorek 4, Cornelia Kirch 2, Karola Manns 2, Laura Mauel 3, Leonard Ohnesorge 4, Christian Reinprecht 3, Lena Schäfer 2, Jasmin Schmitz 3, Julius Schwering 4, Philipp Sperker 2, Maximilian von Münster 4, Edna Weiß 2, Christine Wolscht 2.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 8: Luis Ressel 22.

Speyer, Speyer-Kolleg: Kl. 12: Christoph Stiefel 3.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 11: Alexander Rettkowski 14.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kuntz)**:**
Kl. 5: Denise Lembrich 9, Pascal Grabowsky 15, Lena Broichhausen 5.
Kl. 7: Anna Lena Meier 8 .

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber, Dr. Susanne Weißmann
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf, Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr
Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Jahrgang 30 Heft 102 Juni 2010

Inhalt

S. Rosebrock: Linienland, Flächenland und der Hyperraum 3
Die Ecke für den Computer-Fan 10
H. Fuchs: Wer war's? 11
F. Bildhauer und I. Freidenberg: Magische Quadrate 12
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik . . 16
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 101 17
Neue Mathespielereien 20
Einladung zur Mainzer Mathematik-Akademie 22
Neue Aufgaben 23
Gelöste Aufgaben aus MONOID 101 25
Errata zu Heft 101 29
In eigener Sache 30
W. J. Bühler: Fibonacci in Echternach 31
Wer forscht mit? 33
H. Fuchs: Wer war's – Lösung 35
Mitteilungen 40
Rubrik der Löser und Löserinnen 41
Impressum 44

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax**: 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid