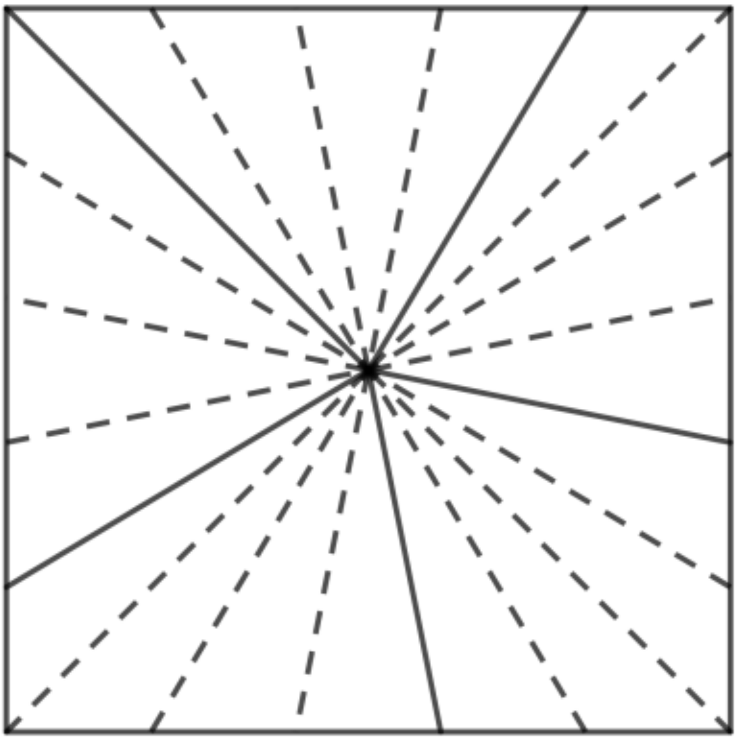
Jahrgang 39 Heft 137 März 2019

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.05.2019.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, am **Johanna-Geissmar-Gymnasium in Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner. Noch vor jedem Abgabetermin legt die Redaktion für jede Aufgabe die erreichbare Punktzahl fest. Die Namen aller Schülerinnen und Schüler, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

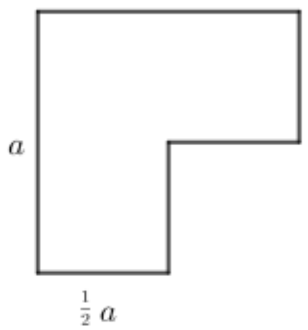
Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Lösung ohne Worte

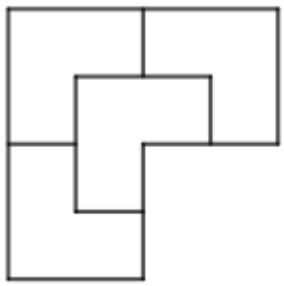
von Hartwig Fuchs

Daniel Schwenter (1585 – 1636), Mathematiker und Professor für altorientalische Sprachen an der Universität Altdorf veröffentlichte 1616 – 1618 ein dreibändiges Werk „Geometriae practicae novae tractatus ...“ auf deutsch, trotz seines lateinischen Titels, das als die wohl beste Darstellung der Geometrie in seiner Zeit galt – was man daran sieht, dass es mehrere Auflagen im 17. Jahrhundert erlebte. In diesem Buch findet sich die schöne Aufgabe:



Ein Bauer will seinen großen Acker – der eine quadratische Form der Seitenlänge a mit einem quadratischen Ausschnit der Seitenlänge $\frac{1}{2}a$ hat – an seine vier Söhne so vererben: Jeder Sohn soll ein gleich großes Stück von der gleichen Form wie das unterteilte Feld erhalten.

Nach einiger Zeit des Überlegens haben die Söhne herausgefunden, wie man den Wunsch des Vaters erfüllen kann.
Ihre Lösung haben sie ohne Worte mit einer Figur beschrieben!



Die besondere Aufgabe
Fünf bemerkenswerte Dreiecke

von Hartwig Fuchs

Die Aufgabe

Man bestimme alle Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und ganzzahligem Flächeninhalt, für die gilt: Umfang und Flächeninhalt stimmen (numerisch) überein.

Lösung

Die Seitenlängen eines Dreiecks, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, seien die ganzen Zahlen a, b und c; die ganze Zahl F sei der Flächeninhalt des Dreiecks und $2s$ sei sein Umfang.

Für *jedes* Dreieck gilt die nach Heron aus Alexandria (ca 10 -70 n. Chr.) benannte, vermutlich aber auf Archimedes (um 287 – 212 vor Christus) zurückgehende *Dreiecksformel*:

(1) $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Weil für unsere gesuchten Dreiecke $F = 2s$ gelten soll, folgt aus (1), dass $F^2 = 4s^2$ ist und mithin gilt:

(2) $(s-a)(s-b)(s-c) = 4s$.

Wir zeigen zunächst: Der halbe Dreiecksumfang $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist eine ganze Zahl.

Wenn nämlich s nicht ganzzahlig wäre, dann sind auch $(s-a) = \frac{1}{2}(b+c-a)$, $(s-b) = \frac{1}{2}(a+c-b)$ und $(s-c) = \frac{1}{2}(a+b-c)$ nicht ganzzahlig. Somit sind die ganzen Zahlen $u_1 = b+c-a$, $u_2 = a+c-b$ und $u_3 = a+b-c$ ungerade. Dann aber ist das Produkt $(s-a)(s-b)(s-c)$ in Gleichung (2) einerseits die nicht ganze Zahl $\frac{1}{8}u_1u_2u_3$, andererseits ist es die ganze Zahl $4s$ – ein Widerspruch.

Wir formen die Gleichung (2) um, indem wir $(s-a) = x, (s-b) = y$ und $(s-c) = z$ setzen und beachten, dass $x+y+z = 3s-(a+b+c) = s$ ist:

(3) $xyz = 4(x+y+z)$, wobei x, y und z positive ganze Zahlen sind.

Aus Symmetrie-Gründen dürfen wir in Gleichung (3) voraussetzen, dass $x \geq y \geq z$ ist. Wir lösen nun Gleichung (3) nach x auf (Polynomdivision):

(4) $x = \frac{4y+4z}{yz-4} = \frac{4}{z} + \frac{4(z^2+4)}{z(yz-4)}$.

Fallunterscheidung für z:

Für $z = 1$ folgt aus Gleichung (4): $x = 4 + \frac{20}{y-4}$.

Dann ist x positiv ganzzahlig, wenn $\frac{20}{y-4}$ ganzzahlig und $5 \leq y \leq 24$ ist. Das ist der Fall für $y = 5, 6, 8, 9, 14, 24$.

Für $y \geq 9$ ist jedoch $x \leq 4 + \frac{20}{5} = 8 < y$, was der Voraussetzung $x \geq y$ widerspricht. Also ist $y = 5, 6, 8$ und daher $x = 24, 14, 9$.

Für $z = 2$ lautet (4): $x = 2 + \frac{8}{y-2}$

x ist positiv ganzzahlig, wenn $\frac{8}{y-2}$ ganzzahlig und $3 \leq y \leq 10$, also $y = 3, 4, 6, 10$ ist.

Für $y \geq 6$ ist jedoch $x \leq 2 + \frac{8}{4} < y$. Somit ist $y = 3, 4$ und $x = 10, 6$.

Für $z = 3$ folgt aus (4): $x = \frac{4}{3} + \frac{52}{3(3y-4)}$

Nach Voraussetzung ist $y \geq z$.

Für $y = 3$ ist x nicht ganzzahlig; für $y \geq 4$ ist $x < y$.

Somit tritt der Fall $z = 3$ nicht ein.

Für $z \geq 4$ erhält man mit $y \geq 4$ aus (4):

$$x \leq \frac{4}{4} + \frac{4(z^2+4)}{4(z^2-4)} = 1 + (1 + \frac{8}{z^2-4}) < 2 + \frac{8}{12} < y,$$

also $x < y$, was der Voraussetzung $x \geq y$ widerspricht.

Es gibt daher genau fünf Dreiecke, die die eingangs genannten Bedingungen erfüllen – ihre Daten sind in der folgenden Tabelle gelistet (mit $F = \sqrt{(x+y+z)xyz}$):

z	y	x	$s = x+y+z$	$a = s-x$	$b = s-y$	$c = s-z$	F
1	5	24	30	6	25	29	60
1	6	14	21	7	15	20	42
1	8	9	18	9	10	17	36
2	3	10	15	5	12	13	30
2	4	6	12	6	8	10	24

Was uns über den Weg gelaufen ist...

Unerwartete Ziffern

von Hartwig Fuchs

Mathematik gilt weithin als eine trockene und emotionslose Angelegenheit. Und doch kann man in ihr manchmal seltsame Überraschungen erleben. Betrachten wir etwa die für alle natürlichen Zahlen n definierten Terme

$$T_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}.$$

Sie scheinen wenig bemerkenswert und schon gar nicht interessant zu sein.
Aber der Schein trügt. Wenn wir nämlich für einige Zahlen n die Werte von T_n als Dezimalzahlen bis zur ersten Ziffer nach dem Komma auflisten, dann zeigt sich dabei eine verblüffende Regelmäßigkeit

$n = 2$: $T_2 = \sqrt[3]{2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2} = 2{,}6...$
$n = 3$: $T_3 = \sqrt[3]{3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3} = 3{,}6...$
$n = 4$: $T_4 = \sqrt[3]{4^3 + 2 \cdot 4^2 + 4} = 4{,}6...$
$n = 5$: $T_5 = \sqrt[3]{5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5} = 5{,}6...$

Zufall? Nein – tatsächlich gilt für jedes n,mit $n = 2, 3, 4, ...$:

(1) $T_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n} = n{,}6...$

Das soll nun bewiesen werden.

Für jedes $n \geq 1$ gilt $n^3 < n^3 + 2n^2 + n = n(n+1)^2 < (n+1)^3$, woraus folgt $n < T_n < n + 1$ – und das bedeutet:

(2) Für jedes $n \geq 2$ steht in der Dezimaldarstellung von T_n links vor dem Komma stets die Zahl n. – vgl. (1) und auch die Liste der vier Beispiele.

Die Behauptung (1) schreiben wir nun so: $n + \frac{6}{10} < T_n < n + \frac{7}{10}$ und danach so

(3) $5n + 3 < 5T_n$ und (4) $10T_n < 10n + 7$.

Nun gilt

(3') $(5n+3)^3 < 125T_n^3$

also auch $125n^3 + 225n^2 + 135n + 27 < 125n^3 + 250n^2 + 125n$ und daher $27 < 25n^2 - 10n$, weil $27 < 5n(5n-2)$ zutrifft, für jedes $n \geq 2$. Daraus folgt (3') und damit (3). Ferner gilt

(4') $1000T_n^3 < (10n+7)^3$

für $n \geq 2$, denn es ist tatsächlich $1000T_n^3 = 1000n^3 + 2000n^2 + 1000n < 1000n^3 + 2100n^2 + 1470n + 343$, was aus $0 < 100n^2 + 470n + 343$ folgt.
Aus (4') ergibt sich (4).
Die Gültigkeit von (3) und (4) beweist, dass (1) zutrifft.
Die Aussage (1) bestätigt nun die unerwartete Ziffernregelmäßigkeit der Terme T_n:

(5) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ steht in der Dezimaldarstellung von $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$ links vor dem Komma stets die Zahl n und auf der ersten Stelle rechts nach dem Komma stets die Ziffer 6.

Trugschluss: Alle natürlichen Zahlen sind gleich

von Hartwig Fuchs

Für die letzte Gleichung der Umformungskette

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{4x-10}{1-x} &= \frac{3x-9}{2-x} \text{ mit } x \neq 1, x \neq 2\\
\Rightarrow \quad \frac{(1-x)+(4x-10)}{1-x} &= \frac{3x-9}{2-x}\\
\Rightarrow \quad \frac{3x-9}{1-x} &= \frac{3x-9}{2-x}
\end{aligned}
$$

gilt:
Da die Zähler übereinstimmen, sind auch die Nenner gleich.
Also ist $1 - x = 2 - x$ und daher ist $1 = 2$.
Wegen $1 + 1 = 2 + 1$ ist dann auch $2 = 3$ usw.
Fazit: Alle positiven ganzen Zahlen sind gleich.

Natürlich ist das falsch!
Der hier vorliegende Trugschluss entsteht so: Aus $\frac{k}{m} = \frac{k}{n}$ mit ganzen Zahlen k, m, n folgt nur dann $m = n$, wenn $k \neq 0$ ist. Aber genau die Bedingung $k \neq 0$ wurde oben nicht beachtet oder auch: Sie wurde fälschlich als erfüllt vorausgesetzt.
Denn tatsächlich ist $x = 3$ eine Lösung der Ausgangsgleichung, sodass in der letzten Gleichung oben beide Zähler 0 sind.

Daher: Bei Nichtbeachtung von direkt oder indirekt gegebenen Voraussetzungen, stellt eine so konstruierte Herleitung einen Trugschluss dar.

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

In dem Ausdruck $\sqrt{(MON)^2 + (OID)^2}$ ersetzte man die Buchstaben M, O, N, I, D durch jeweils verschiedene Ziffern, sodass man zwei dreiziffrige ganze Zahlen erhält, deren Quadrate eine maximale Summe haben.
Bestimme diesen maximalen Wert.
Ist dann $\sqrt{(MON)^2 + (OID)^2} > 2019$ oder < 2019?

Lösung
Damit $(MON)^2 + (OID)^2$ maximal ist, kommen als geeignete, den Buchstaben zuzuordnende Ziffern nur 9, 8, 7, 6 und 5 in Frage.
Nun gilt: Entweder ist $M = 9$ und dann $O = 8$, oder $M = 8$ und $O = 9$.
In beiden Fällen gibt es die jeweils folgenden Möglichkeiten für MON, OID und die jeweils zugehörige Summe $(MON)^2 + (OID)^2$:

Erster Fall: Es sei $M = 9$, $O = 8$

MON	OID	$(MON)^2 + (OID)^2$
987	865	1.722.394
986	875	1.737.821
985	876	1.737.601

2. Fall: Es sei $M = 8$, $O = 9$

MON	OID	$(MON)^2 + (OID)^2$
897	965	1.735.834
896	975	1.753.441
895	976	1.753.601

Man erhält also die gesuchte maximale Summe, falls $MON = 895$ und $OID = 976$ ist, sie beträgt 1753601 und $\sqrt{1753601} \approx 1324{,}24 < 2019$.

Ein Warte-Problem

von Hartwig Fuchs

Verabredung zu einem Treffen

Die beiden Mathematiker Prof. Qoaoar und Prof. Pnin verabreden sich zu einem gemeinsamen Abendessen im China-Restaurant Shuxue zu treffen. Weil sie jedoch noch keine bestimmte Zeit festlegen können, wann sie dort sein werden, vereinbaren sie:

> Keiner von Ihnen kommt früher als 19 Uhr und später als 20 Uhr; und jeder wartet nicht länger als $\frac{1}{2}$ Stunde – aber längstens bis 20 Uhr – auf den anderen.

Einen Augenblick bitte – verlangte Prof. Pnin.
Danach versinkt er für eine kurze Weile ins Nachdenken, wobei er einige Zahlen und eine geometrische Figur auf seinen Notizblock kritzelt. Dann stellt Pnin, dessen Fachgebiet die Wahrscheinlichkeitstheorie ist, fest:

> „Die Wahrscheinlichkeit, dass wir uns in Shuxue treffen werden, beträgt $\frac{3}{4}$."

Quaoar, erstaunt über Pnins Schnelligkeit, scherzhaft:

> „Erkläret mir, Freund Örindur, dieses Rätsel der Natur!"

Pnins Überlegungen

Quoaoars Ankunftszeit im Lokal sei x und die von Pnin sei y. Dann gilt:

(1) $19 \leq x \leq 20$ und $19 \leq y \leq 20$.

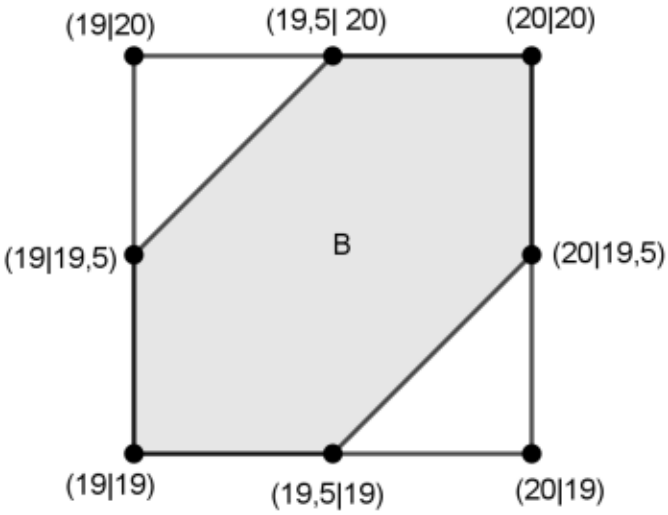
Ein Treffen von Quoaoar und Pnin findet statt, wenn Pnin höchstens $\frac{1}{2}$ Stunde vor bzw. nach Quoaoar im Shuxue ankommt, wenn also gilt:

(2) $x - \frac{1}{2} \leq y$ und $y \leq x + \frac{1}{2}$.

Pnin interpretiert nun die Paare (x, y) als Punkte in einem x−y-Koordinatensystem. Dann liegen alle Punkte (x, y), die die Ungleichung (1) erfüllen, in einem Quadrat der Seitenlänge 1 oder auf seinem Rand und die Punkte (x, y), für die (2) gilt, liegen in der von den schrägen Strecken mit den Gleichungen

(3) $x - \frac{1}{2} = y$ und $y = x + \frac{1}{2}$

sowie von Teilen der Quadratseiten begrenzten Fläche B oder auf ihrem Rand (vgl. die Figur).



Es sei nun der Flächeninhalt $|A|$ des Quadrats das Maß der Menge aller Zeitpunkte (x, y), die (1) erfüllen und die Fläche $|B|$ des Sechsecks B sei das Maß der Menge aller für ein Treffen günstigen Zeitpunkte, für die also (1) und (2) gelten. Damit definiert Pnin die Wahrscheinlichkeit p für ein gemeinsames Abendessen im Shuxue so:

(4) $p := P($„Quaoar und Pnin treffen sich im Shuxue“$) = \frac{|B|}{|A|}$.

Die Fläche der beiden Dreiecke (vgl. Figur) ist zusammen $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Daher folgt mit $|A| = 1$ und $|B| = |A| - \frac{1}{4}$ aus (4), dass $p = \frac{3}{4}$ ist.

Die fehlgeschlagene Verabredung

Als nun Prof. Quoaoar um 19:40 Uhr am Shuxue eintraf, sah er noch, wie Prof. Pnin in seinen Bus einstieg und davonfuhr. Ein zufällig vorbeikommendes Paar begegnete dem vor dem Eingang des Restaurants stehenden etwas nachlässig gekleideten Mann, der dort leise murmelnd eine deftige, abfällige Bemerkung über die Wahrscheinlichkeitsrechung machte.

Ein Nachwort von Pnin

Am nächsten Tag, als Quoaoar und Pnin einander begegnen und sich kurz über das nicht stattgefundene Treffen unterhalten, bemerkt Pnin:
Hätten wir in unserer Vereinbarung eine maximale Wartezeit von $\frac{W}{60}$ Stunden, mit $W \leq 60$ festgelegt, dann hätte gegolten:

$$p := P(\text{„Quoaoar und Pnin treffen sich im Shuxue“}) = \frac{W}{60}\left(2 - \frac{W}{60}\right),$$

denn in (4) ist $|A| = 1$ und

$$\begin{aligned}|B| &= 1 - 2 \cdot (\text{Flächeninhalt eines Dreiecks})\\ &= 1 - 2 \cdot (\frac{1}{2}(1 - \frac{W}{60})(1 - \frac{W}{60}))\\ &= 1 - (1 - \frac{W}{60})^2\\ &= \frac{W}{60}(2 - \frac{W}{60})\end{aligned}$$

(vgl. Figur)

Mathematische Entdeckungen

Wir nennen eine Zahl n *segmentteilbar*, wenn jede der Zahlen n_i aus den ersten i Ziffern für alle $i = 1, \dots, 9$ durch i teilbar ist und dabei jede der Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8 und 9 genau einmal vorkommt. Insbesondere sind segmentteilbare Zahlen 9-stellig.

Als Beispiel untersuchen wir die Zahl 123456789. Diese ist *keine* solche Zahl, denn drei der Teilbarkeits-Bedingungen sind nicht erfüllt:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	12	123	1234	12345	123456	1234567	12345678	123456789
teilt	ja	ja	ja	nein	ja	ja	nein	nein	ja

Natürlich gibt es nur endlich viele 9-stellige Zahlen, daher ist es möglich, mit Hilfe eines Computers alle zu finden.

1. Ist es auch möglich, durch Vorüberlegungen die Anzahl der zu prüfenden 9-stelligen Zahlen so weit zu reduzieren, dass die Anzahl der segmentteilbaren Zahlen in wenigen Minuten im Kopf berechenbar wird?
2. Wenn man die Anzahl segmentteilbarer Zahlen im Dezimalsystem bestimmt hat, kann man das Problem auch in anderen Zahlensystemen betrachten. Die Frage lautet dann: Wie viele $(m-1)$-stellige Zahlen n (im Zahlensystem zur Basis m) gibt es, in denen jede Ziffer genau einmal vorkommt und die Zahl n_i aus den ersten i Ziffern für alle $i = 1, \dots, m-1$ durch i teilbar ist?

Als Beispiel betrachten wir $m = 2$. Es gibt nur eine 1-stellige Zahl 1 und die erste Ziffer von dieser ist durch 1 teilbar. Also gibt es für $m = 2$ genau eine solche Zahl. Für $m = 3$ gibt es zwei 2-stellige Zahlen, in denen jede Ziffer genau einmal vorkommt. Diese sind $(12)_3 = 5$ und $(21)_3 = 7$, beide sind nicht durch 2 teilbar, also gibt es für $m = 3$ keine solche Zahlen. Für $m = 4$ stellt man fest: Es gibt zwei solche Zahlen, nämlich $(123)_4$ und $(321)_4$.

Wie sieht das mit größeren Zahlensystemen aus? Kannst du diese Frage lösen, etwa für alle Zahlensysteme bis zur Basis 20 oder sogar noch größer?

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2019 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 135

In Heft 135 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Spitze Innenwinkel eines konvexen m-Ecks

Ein m-Eck, $m \geq 3$, heißt konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt und keine drei benachbarten Ecken in einer Seite des m-Ecks liegen. Dann gilt für jeden Innenwinkel α_i, $i = 1, 2, .., m$, dass $\alpha_i < 180^\circ$ ist und umgekehrt.
Einen Winkel, der $< 90^\circ$ ist, nennt man spitz.
Es gibt Dreiecke mit lauter spitzen Winkeln. Dagegen kann ein konvexes Viereck keine vier spitzen Innenwinkel α_i haben: Wären alle α_i spitz, so wäre $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 < 4 \cdot 90^\circ$; tatsächlich aber gilt im konvexen Viereck: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 360^\circ$.

Untersuche daher die Fragen:

a) Wie viele spitze Winkel kann ein beliebiges konvexes m-Eck, $m \geq 3$ höchstens haben?

b) Gibt es zu jedem m, $m = 3, 4, 5, ...$ ein konvexes m-Eck an, das die höchst mögliche Anzahl spitzer Winkel besitzt? (H.F)

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Maximilian Göbel, Hannah Schmitt und Fiete Schopp.

Maximilian hat die folgende Lösung gefunden:
Ein konvexes m-Eck hat die Innenwinkelsumme $180^\circ \cdot (m-2)$. Gäbe es dort vier oder mehr spitze Innenwinkel, so wäre die Innenwinkelsumme dort kleiner als $4 \cdot 90^\circ + (m-4) \cdot 180^\circ = (m-2) \cdot 180^\circ$. Also kann ein konvexes m-Eck höchstens drei spitze Winkel haben. Für $m > 2$ ist es auch immer möglich ein solches m-Eck zu konstruieren. Man wählt einen Punkt A und einen Kreis mit Mittelpunkt A auf dem zwei Punkte B und C liegen, sodass der Winkel $\angle BAC$ ein spitzer Winkel ist.

Auf dem Kreisbogen BC wählt man nun die restlichen $m-3$ Punkte. Das entstehende m-Eck ist konvex und die Winkel bei B und C sind spitz, da B und C jeweils mit dem benachbarten Punkt auf dem Kreisbogen und A ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Mona ärgert sich maßlos: „Hätte ich bei der letzten Mathearbeit nicht statt eines Pluszeichens eine 4 abgeschrieben, dann hätte ich eine 1 gehabt!“ Ihre ältere Schwester Sandra entgegnet: „Ich habe einmal ein Pluszeichen mit einer 7 verwechselt und deshalb einen Fehler gemacht. Aber ich schlage Dir eine Radikalkur für unsere Schwäche vor. Wir schreiben zuerst sieben Pluszeichen nebeneinander.“
„Gut“, sagt Mona, „und jetzt?“ „Jetzt darfst Du einige, aber nicht alle der Pluszeichen zu einer 4 machen. Aber es muss ein gültiger Term entstehen und die übrig bleibenden Pluszeichen müssen Rechenzeichen sein, nicht aber Vorzeichen.“
„Da gibt es aber einige Möglichkeiten“, entgegnet Mona nach kurzer Zeit. „Ja“, erwidert Sandra, „und Du sollst mir sagen, wie viele verschiedene Werte all die erlaubten Terme haben können, die so entstehen.“ „Das kriege ich heraus“, antwortet Mona, „aber Du musst mir dafür sagen, wie viele Werte die Terme haben können, wenn Du einige, aber nicht alle der Pluszeichen durch eine 4 oder eine 7 ersetzen kannst.“ Sandra schluckt, weil sie ahnt, dass diese Anzahl größer ist als die erste. Aber sie will sich vor ihrer Schwester keine Blöße geben.
Wie groß sind die beiden zu bestimmenden Anzahlen? (Die Antwort ist zu begründen.)

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2019 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 135

In Heft 135 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Dies ist das erste Denkerchen in diesem Schuljahr. Also träumen wir doch einmal davon, wie der Schulleiter einer großen Schule am ersten Schultag alle 1600 Schülerinnen und Schüler auf dem Pausenhof versammelt und in einer Reihe Aufstellung nehmen lässt. Die Schüler zählen einmal durch, so dass jeder seine Platznummer kennt. Stellen wir uns weiter vor, wie anschließend die Hausmeister mit Körben voller Mohrenköpfe kommen und jedem der Schüler einen Mohrenkopf austeilen. Aber halt – anschließend wird allen Schülern mit einer durch 2 teilbaren Platznummer ihr Mohrenkopf wieder abgenommen! In einem dritten Durchgang verändern die Hausmeister bei allen Schüler mit einer durch 3 teilbaren Platznummer den „Mohrenkopf-Zustand“. Wer von diesen also vorher einen hatte, muss ihn abgeben; wer gerade keinen hatte, erhält einen. So geht es mit den durch 4, 5, ... teilbaren Platznummern weiter: Jedes Mal wird für die betroffenen Schüler der „Mohrenkopf-Zustand“ geändert.
Nachdem die Hausmeister leicht erschöpft schließlich bei dem einzigen Schüler, dessen Platznummer durch 1600 teilbar ist, den „Mohrenkopf-Zustand“ gewechselt haben, gibt der Schulleiter das Kommando, und alle Besitzer eines Mohrenkopfs dürfen endlich hineinbeißen.
Welche Platznummern haben diese glücklichen Schüler? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

Für jeden Teiler der Platznummer ändert sich der „Mohrenkopf-Zustand“. Bei einer geraden Anzahl von Teilern erhalten die jeweiligen Schülerinnen und Schüler genauso oft einen Mohrenkopf, wie er ihnen wieder weggenommen wird; sie gehen also am Ende leer aus. Bei einer ungeraden Anzahl von Teilern erhalten die jeweiligen Schülerinnen und Schüler einmal mehr einen Mohrenkopf als er ihnen abgenommen wird; sie gehören am Ende zu den Glücklichen.
Bei der Division einer positiven ganzen Zahl durch einen ihrer Teiler ist das Ergebnis wieder ein Teiler dieser Zahl. So lassen sich die Teiler in Paaren zusammenfassen, deren Produkt jeweils die Zahl ergibt. Die einzige Möglichkeit dafür, dass ein Paar aus gleichen Teilern besteht, bieten die Quadratzahlen bei Division durch ihre Wurzel. Also ist für alle Quadratzahlen und nur für diese die Anzahl der Teiler ungerade.
Somit haben alle Schülerinnen und Schüler, deren Platzziffer eine Quadratzahl ist, am Ende einen Mohrenkopf zum Hineinbeißen. (Leider sind dies nur 40 der 1600 Schülerinnen und Schüler.)

Vollständig richtige Lösungen haben Luis Brinkmann, Maximilian Göbel, Josefine Kaßner, Sönke Schneider und Kristin Teichert eingereicht; fast vollständig war die Lösung von Oskar Su.

Natürlich gab es an der Schule Proteste, weil die meisten Mohrenköpfe nicht verschenkt wurden. Daher bat der Schulleiter die Mathe-AG um Vorschläge für originelle, mathematisch nicht primitive Verfahren mit besseren Quoten. Kennst Du eines? Aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Faszinierende Fakten
Größenvergleich
von Hartwig Fuchs

Welche Zahl ist größer:

$$\sqrt[2]{1^3 + 2^3 + 3^3} \text{ oder } \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} \text{ ?}$$

Keine ist größer.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

Merkwürdige Darstellung natürlicher Zahlen

Wir nennen eine Zahl n segmentteilbar, wenn jede der Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8 und 9 genau einmal in ihr vorkommt (n ist also neunstellig) und wenn die Zahlen n_i gebildet aus den ersten i Ziffern von n für alle $i = 1, \ldots, 9$ durch i teilbar sind. (Vergleiche die Aufgabenstellung für die Mathematischen Entdeckungen). Finde alle segmentteilbaren Zahlen.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2019 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt" als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.
Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 135

Auf dem Bild oben ist die Reihenfolge der Buchstaben durcheinander geraten. Ähnlich wie im Geheimtext rechts. Zum Glück sind aber im Geheimtext rechts alle Kehr- und Interpunktions-Zeichen erhalten geblieben, was wichtig für Frage c) ist. Außerdem entspricht jedem Klartextbuchstaben eineindeutig ein Geheimtextbuchstabe (damit die Umkehrung möglich wird). Beim Geheimtext handelt es sich um ein mathematisches Gedicht, das entschlüsselt werden soll.

Als Alphabete werden jeweils die 26 Buchstaben des deutschen Alphabetes verwendet: A, B,.., Z oder a, b,.., z

jmf arslxkmhxvzwtlvd cvlhwxse.
uzv gxlhlvzs, wzv nvwsvls zd vgzkbvzs,
gvdd vhws uzv ncmvuv gvcs zlh cztls
vhbxdds;
uvh cvlhwxse, dxtl arslxkmhxw nvdxdds,
kzcs lvisv, gzv vh kxcs ei wvzdvh evzs.
vzd mapvh lxs arslxkmhxw kvgvzls
uvd kmvssvhd, uzv uvd cztlswshxlc zlf
kvwxdus;
vw slxsvd bidu, kvwtlcxtlsvs idu
jvhnhxdds,
vzdliduvhs mtlwvd wvzdv uxdbnxhbvzs.
uzv mtlwvd wvzs uvf sxkv, gvdd wzv
gzssvhd,
uxww vzdv dviv gxlhlvzs wztl vdslivccv,
vhlvnvd vzd idvducztlvw kvnhivccv;
arslxkmhxw vhpivccs wzv fzs vdswvsevd;
idu fxtlscmw, wztl uvf cztls ei
gzuvhwvsevd,
jvhwtlczvwwvd wzv uzv xikvd idu
vhezssvhd.

Aufgaben

a) Schreibe ein Programm, welches die Häufigkeiten der Buchstaben des Geheimtextes ermittelt und daraus dann die häufigsten zehn Geheimtext-Buchstaben bestimmt.

b) In einem sogenannten deutschen Standardtext sind E, T, N, I, H, S, R, A, L, D die häufigsten Buchstaben in der aufgelisteten Reihenfolge. Benutze dies, um mit dem Ergebnis aus (a) eine Teilentschlüsselung zu erhalten. Ersetze im Geheimtext die in (a) bestimmten zehn kleinen Buchstaben durch die ihnen entsprechenden großen Buchstaben des Klartextes.

c) Ermittle die nicht entschlüsselten Stellen von Hand. Ergebnis soll das ganze Gedicht im Klartext sein. (W.G.)

Ergebnisse

a) Ein Computer-Programm liefert die 10 häufigsten Buchstaben (in %) im Geheimtext:

v	s	d	z	l	w	h	x	c	u
18,24	10,06	9,43	8,39	7,34	6,71	6,08	5,87	4,19	3,35
E	T	N	I	H	S	R	A	L	D

b)

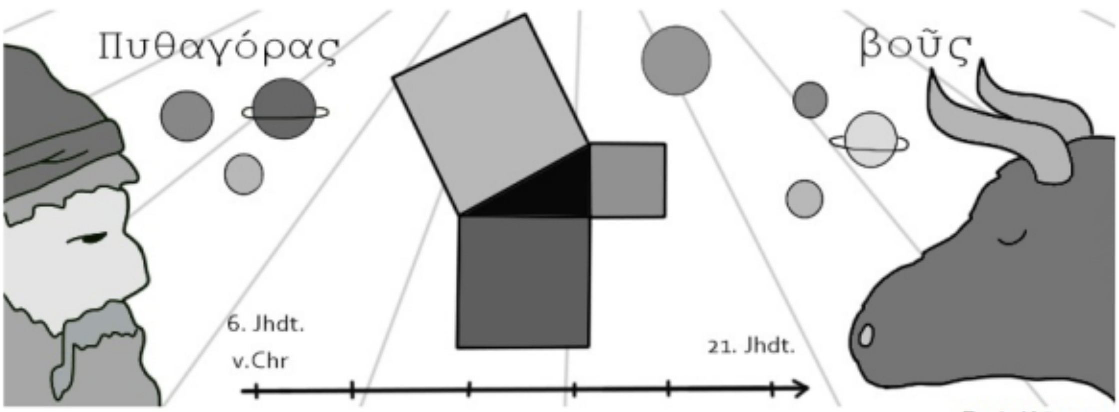
jmf arTHAkmRAEIStHEN LEHRSATe.

DIE gAHRHEIT, SIE nESTEHT IN EgIkbEIT,
gENN ERST DIE nLmEDE gELT IHR LItHT ERbANNT;
DER LEHRSATe, NAtH arTHAkmRAS nENANNT,
kILT HEiTE, gIE ER kALT ei SEINER eEIT.

EIN mapER HAT arTHAkmRAS kEgEIHT
DEN kmETTERN, DIE DEN LItHTSTRAHL IHf kESANDT;
ES THATEN biND, kEStHLAtHTET iND jERnRANNT,
EINHiNDERT mtHSEN SEINE DANbnARbEIT.

DIE mtHSEN SEIT DEf TAkE, gENN SIE gITTERN,
DASS EINE NEiE gAHRHEIT SItH ENTHiELLE,
ERHEnEN EIN iNENDLItHES kEnRiELLE;

arTHAkmRAS ERpiELLT SIE fIT ENTSETeEN;
iND fAtHTLmS, SItH DEf LItHT ei gIDERSETeEN,
jERStHLIESSEN SIE DIE AikEN iND EReITTERN



Ronja Krüsemer

c) VOM PYTHAGORAEISCHEN LEHRSATZ.

DIE WAHRHEIT, SIE BESTEHT IN EWIGKEIT,
WENN ERST DIE BLOEDE WELT IHR LICHT ERKANNT;
DER LEHRSATZ, NACH PYTHAGORAS BENANNT,
GILT HEUTE, WIE ER GALT ZU SEINER ZEIT.

EIN OPFER HAT PYTHAGORAS GEWEIHT DEN GOETTERN, DIE DEN LICHTSTRAHL IHM GESANDT;
ES THATEN KUND, GESCHLACHTET UND VERBRANNT,
EINHUNDERT OCHSEN SEINE DANKBARKEIT.

DIE OCHSEN SEIT DEM TAGE, WENN SIE WITTERN,
DASS EINE NEUE WAHRHEIT SICH ENTHUELLE,
ERHEBEN EIN UNENDLICHES GEBRUELLE;

PYTHAGORAS ERFUELLT SIE MIT ENTSETZEN;
UND MACHTLOS, SICH DEM LICHT ZU WIDERSETZEN,
VERSCHLIESSEN SIE DIE AUGEN UND ERZITTERN

Adelbert von Chamisso: „Das unleserliche Gedicht“

Der Schüler Ivan Khomutovskiy vom Frauenlob-Gymnasium, Mainz (12. Klasse) hat in einem anspruchsvollen Lösungsweg das richtige Ergebnis für den Klartext ermittelt. (W.G.)

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 136

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Lösung gesucht

Bestimme – falls das möglich ist – die Ziffer y der 7-ziffrigen Zahl $242424y$ so, dass x eine positive ganzzahlige Lösung der Gleichung

$(*)$ $(1926 - 3 \cdot x)^2 = 242424y$ ist.

(H.F.)

Lösung:

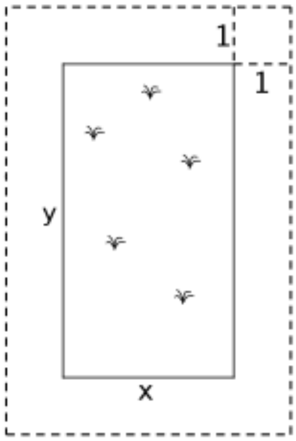
Es ist

$(**)$ $(1926 - 3x)^2 = 9 \cdot (642 - x)^2$.

Wegen $(*)$ ist dann $242424y$ ein Vielfaches von 9 und die Quersumme $18 + y$ von

$242424y$ ist ebenfalls ein Vielfaches von 9.
Also gilt: $y = 0$ oder $y = 9$.
Für $y = 0$ ist $242424y$ keine Quadratzahl und daher folgt aus $(*)$, dass dann x nicht ganzzahlig sein kann.
Sei $y = 9$. Dann ist $2424249 = 9 \cdot 519^2$.
Damit erhält man aus $(*)$ und $(**)$: $9 \cdot (642 - x)^2 = 9 \cdot 519^2$,
woraus folgt: $x = 123$ ist die positive ganzzahlige Lösung von $(*)$.

II. Problem eines Gärtners



Ein rechteckiger Rasen soll so angelegt werden, dass er von einem Pfad der Breite 1m vollständig umgeben ist, und dass gilt:
Die Seiten des Rasens haben ganzzahlige Längen x, y und die Flächen des Rasens und des Pfades sind gleich groß.
Wie sind die Abmessungen x und y des Rasens zu wählen?
Hinweis: Zeige zunächst, dass die kürzere Seite des Rasens kürzer als 5m ist. (H.F.)

Lösung:
Es sei zunächst $x \leq y$ und es sei $x \geq 5$. Für die Flächen des Rasens und des Pfades gilt: $xy = 2x + 2y + 4, x \leq y$. Dann folgt aus $y = \frac{2x+4}{x-2} \geq x$, dass $2x + 4 \geq x^2 - 2x$ und daher $0 \geq x^2 - 4x - 4$.
Andererseits gilt für $x \geq 5$:

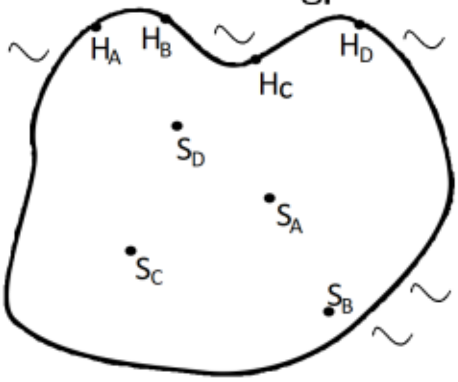
$$x^2 - 4x - 4 \geq 5^2 - 4 \cdot 5 - 4 = 25 - 20 - 4 = 1$$

Zusammen folgt also

$$0 \geq x^2 - 4x - 4 \geq 1$$

Wegen dieses Widerspruchs gilt $x < 5$.
Da $y = \frac{2x+4}{x-2} \geq 0$ ist und $2x + 4 > 0$ (wegen $x > 0$), muss auch $x - 2 > 0$ sein (sonst wäre der Bruch, also auch y, negativ). Daher gilt $3 \leq x < 5$.
Für $x = 3$ ist $y = \frac{2 \cdot 3+4}{3-2} = 10$ und für $x = 4$ ist $y = \frac{2 \cdot 4+4}{4-2} = 6$.
Es gibt also zwei Lösungen: $x = 3$m und $y = 10$m sowie $x = 4$m und $y = 6$m.

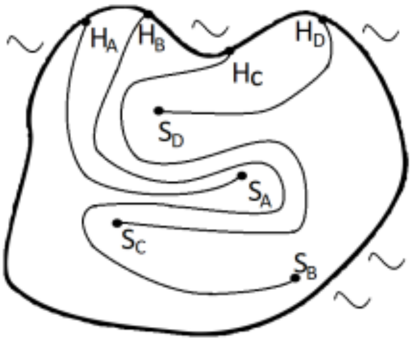
III. Ein Schulwegproblem



Vier Kinder Anna, Bernd, Cynthia und Dennis – die jeweils in einem der Häuser H_A, H_B, H_C, H_D wohnen – besuchen die Schulen S_A, S_B, S_C, S_D auf derselben Insel. Kann jedes der Kinder zu seiner Schule gelangen, ohne dass sich sein Schulweg mit dem eines anderen Kindes kreuzt? Wenn ja, zeichne eine mögliche Lösung ein.

(H.F.)

Lösung:



Eine mögliche Lösung.

IV. Selbstgemachte Kürzungsregel

Hans hat im Unterricht mal wieder geträumt, während der Lehrer das Kürzen erklärt hat. Da er aber ein pfiffiger Schüler ist, hat er kurzerhand eine eigene Regel aufgestellt:

$$\text{z.B.: } \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5} \text{ oder } \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

„Nicht schlecht", meint sein Lehrer, „funktioniert aber leider nicht immer. Bis zur nächsten Stunde suchst du noch zwei weitere Brüche, die man auf diese Weise „kürzen" kann."

(Christoph Sievert)

Lösung:

$$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{10ab}{9a+b}$$

Der Zähler ist ein Vielfaches von 10, da c aber eine einstellige Zahl ist, muss der Nenner muss durch 5 oder 10 teilbar sein.

Man findet $\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$ und $\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8}$.
Alle Ziffern können auch gleich sein: z.B. $\frac{7\cancel{7}}{\cancel{7}7} = \frac{7}{7}$.
Weitere zweistellige Lösungen gibt es nicht.

V. Buchstabenrätsel

$$\begin{array}{l} \text{ABCDE} \quad \cdot\, 4 \\ \hline \text{EDCBA} \end{array}$$

Ersetze jeden Buchstaben durch eine Ziffer, so dass eine korrekte Multiplikation entsteht (jedoch sei $A \neq 0$). Gleichen (verschiedenen) Buchstaben sind dabei gleiche (verschiedene) Ziffern zuzuordnen. (H.F.)

Lösung:
Aus $A \cdot 4 \leq E < 10$ folgt $A = 1$ oder $A = 2$. Aus $E \cdot 4 = A + n \cdot 10$ ergibt sich, dass die Einerziffer A von $E \cdot 4$ gerade ist. Mithin gilt: $A = 2$.
Nun hat $E \cdot 4$ nur dann die Einerziffer 2, wenn $E = 3$ oder $E = 8$ ist. Wegen $A \cdot 4 > 3$ ist $E = 8$.
Aus $A \cdot 4 = 8$ folgt $B \cdot 4 < 10$ (d.h. es findet kein Übertrag von $B \cdot 4$ nach $A \cdot 4$ statt). Also ist $B = 1$, weil $B = 2$ nicht möglich ist.
Wegen $E \cdot 4 = 32$ ist $D \cdot 4 + 3 = 1 + n \cdot 10$, so dass $D \cdot 4 + 3$ die Einerziffer 1 hat. Somit ist $D = 2$ oder $D = 7$. Weil $A = 2$ ist, muss $D \neq 2$ sein. Daher ist $D = 7$.
Aus $D \cdot 4 + 3 = 1 + 30$ ergibt sich $C \cdot 4 + 3 = C + n \cdot 10$ und diese Gleichung hat nur eine ganzzahlige Lösung für $C < 10$, nämlich $C = 9$.
Die Lösung lautet: $21978 \cdot 4 = 87912$.

Bemerkung Man kann die Aufgabe verallgemeinern auf n-ziffrige Zahlen, $n \geq 4$. Es zeigt sich, dass dann 2178, 21978, 219978, 2199978,... zu eindeutigen Lösungen führen.

VI. Weiß liegt oben

Ein großer Holzwürfel wird von außen weiß angemalt und dann in 64 gleich große Würfel zerlegt. Man wählt – ohne hinzusehen – einen der kleinen Würfel und würfelt einmal damit.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine oben liegende Fläche weiß ist?
Bemerkung: Die innenliegenden Schnittflächen sind holzfarben, also nicht weiß. (H.F.)

Lösung:
64 Würfel haben $6 \cdot 64 = 384$ Seiten. Davon bilden $6 \cdot 16 = 96$ Seiten kleiner Würfel die weiße Oberfläche des großen Würfels. Daher ist $\frac{96}{384} = \frac{1}{4}$ die Wahrscheinlichkeit, dass man mit dem kleinen Würfel eine weiße Oberfläche wirft.

VII. Eine Frage der Teilbarkeit

Keine Zahl $n^2 + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist durch 3 oder durch 4 teilbar. Trifft das zu? (H.F.)

Lösung:

a) Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat bei Division durch 3 entweder den Rest 0 oder 1 oder 2. Somit ist $n = 3 \cdot m$ oder $n = 3 \cdot m + 1$ oder $n = 3 \cdot m + 2$ und daraus folgt:

$$n^2 + 1 = 9m^2 + 1 \quad \text{oder}$$
$$n^2 + 1 = 9m^2 + 6m + 2 = 3(3m^2 + 2m + 1) + 2 \quad \text{oder}$$
$$n^2 + 1 = 9m^2 + 12m + 5 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 2.$$

In keinem der drei Fälle ist daher $n^2 + 1$ ein Vielfaches von 3.

b) Ist n eine gerade Zahl, dann ist $n^2 + 1$ ungerade; ist n ungerade, also etwa $n = 2m + 1$, dann ist $n^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 2 = 4(m^2 + m) + 2$. In keinem der beiden Fälle ist $n^2 + 1$ ein Vielfaches von 4.

Aus a) und b) folgt die Behauptung.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ein pfiffiger Verkäufer?

Der Inhaber eines Musikladens will einen Stapel von 600 nicht mehr sehr gefragten CDs billig verkaufen. Er beschließt: 300 sollen in Dreierpacken zu je 4 Euro und die restlichen in Fünferpacken zu je 6 Euro verkauft werden. Der Verkäufer jedoch versucht ihn zu überzeugen, dass es vorteilhafter sei, die CDs in Viererpacken zu je 5 Euro zu verkaufen.
Hat der Verkäufer recht? (H.F.)

II. Spielerei

Anjas Mathematiklehrerin sagt: „Die Quersumme meines Alters ist ein Drittel meines Alters.“ Wie alt ist die Lehrerin? (WJB)

III. Zerlegung eines Winkels

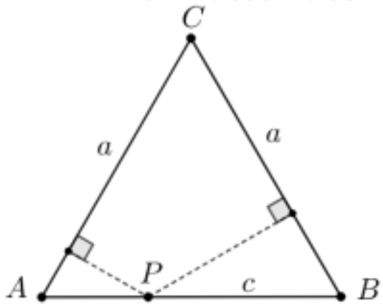
In der Ebene seien zwei Halbgeraden (Strahlen) S_1 und S_2 gegeben, die sich in einem Punkt S schneiden und so einen Winkel von 29° bilden.

a) Konstruier mit Hilfe des 29°-Winkels einen 16°-Winkel.

b) Zerlege nun den 29°-Winkel in drei Winkel von 3°, 7° und 19°.

(H.F.)

IV. Eine Abstandsumme im Dreieck



Figur 1

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit den Seitenlängen a und c hat jeder Punkt P der Basis AB die gleiche Summe der Abstände des Punktes P von den Seiten CA und CB. Begründe dies. (H.F.)

V. Kleinstes Vielfaches

Welches ist das kleinste positive Vielfache von 49, dessen Ziffern alle gleich sind? (H.F.)

VI. Verbindung farbiger Punkte

In der Ebene seien geradzahlig viele Punkte markiert, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen und von denen ungeradzahlig viele blau sowie ungeradzahlig viele rot gefärbt seien.

Man verbinde jeden dieser $2n$ Punkte mit genau einem anderen Punkt durch eine Strecke.

Zeige: Egal wie man jeden dieser Punkte verbindet, es gibt eine Strecke, die einen blauen mit einem roten Punkt verbindet. (H.F.)

VII. Nüsse im Korb

Leon hat Nüsse gesammelt. Er schätzt, dass sich ungefähr 137 Nüsse in seinem Korb befinden. Beim genauen Zählen merkt er, dass er seine Nüsse ohne Rest auf 2 oder 3 oder 5 Kinder verteilen könnte, nicht aber auf 4 Kinder. Wie viele Nüsse hat er tatsächlich gesammelt?

Hinweis: Gehe davon aus, dass die Schätzung wirklich in der Nähe der tatsächlichen Anzahl liegt. (H.F.)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Mathematik ist wie ein Schweizer Taschenmesser:
Immer und überall fü alles Mögliche zu gebrauchen. “

Manfred Spitzer

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

Aufgabe 1232: Eine besondere Gleichung

Zeige, dass die Gleichung

(1) $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-11x+30} = 1$

nur die ganzzahligen Lösungen $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ hat.

Hinweis: Es muss aus deiner Lösung erkennbar sein, dass es keine anderen Lösungen gibt.

Aufgabe 1233: Sieben Punkte im Rechteck

Im Innengebiet eines Rechtecks R mit Seitenlängen 9 und 8 sind sieben Punkte beliebig verteilt. Dann gilt: Mindestens zwei dieser Punkte haben einen Abstand, der geringer als 5 ist. (H.F.)

Hinweis: Zerlege das Rechteck in sechs kongruente Rechtecke

Aufgabe 1234: Quader mit ungewöhnlichen Raumdiagonalen

a) Gib die Kantenlänge dreier verschiedener Quader mit ganzzahligen Kantenlängen, $1 < a < b < c$ an, deren Raumdiagonale jeweils 1 länger als die längste Kante des Quaders ist.

b) Unter welcher Bedingung für a, b und c gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (c + 1)^2$$

(AK)

Aufgabe 1235: Bunte Punkte

Alle Punkte einer Geraden seien blau oder rot gefärbt. Dann gibt es stets 3 Punkte P, Q, R gleicher Farbe, für die gilt: $|PQ| = |QR|$. Man zeige dies. (H.F.)

Aufgabe 1236: Zweistellige Zahlen

Zwei Ziffern seien wie folgt gewählt: die erste Ziffer a zufällig aus den Ziffern 1, 2, ..., 9; die zweite Ziffer b zufällig aus den Ziffern $a, a + 1, ..., 9$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 1?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht die Zahl 11?

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 99?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht eine Quadratzahl? (WJB)

Aufgabe 1237: Letzte Ziffern

Wie heißen die letzten 400 Ziffern von
$2019! = 2019 \cdot 2018 \cdot 2017 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$? (H.F.)

Aufgabe 1238: Geschwindigkeitsbeschränkung

Ein Autofahrer fährt von *A*stadt nach *B*dorf. Auf der Landstraße fährt er $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In Ortsdurchfahrten hält er sich an die Geschwindigkeitsbeschränkung von $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Diese Geschwindigkeitsbeschränkung gilt auch auf einer weiteren Teilstrecke mit enger Straße. Er braucht für die Fahrt zwei Stunden. Würde er die gesamte Strecke mit $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren, so käme er ebenfalls nach zwei Stunden an. Wie lang sind die Abschnitte mit Geschwindigkeitsbeschränkung insgesamt?
Hinweis: Verwende die Formel $s = v \cdot t$ aus der Physik. (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 136

Klassen 9–13

Aufgabe 1225: Eine Ungleichung mit dem Logarithmus

Finde die kleinste Zahl c derart, dass $\log(1+10^x) \leq x + c$ für alle $x \geq 0$. (WJB)

Lösung:

Erste Lösung: Die Ungleichung ist gleichwertig mit $1 + 10^x \leq 10^{x+c} = D \cdot 10^x$ mit $D = 10^c$, also mit $(D-1)10^x \geq 1$ bzw. $10^x \geq \frac{1}{D-1} =: E$. Der größte Wert E, für den dies für alle $x \geq 0$ richtig ist, ist $E = 1$. Daraus ergibt sich $D = 2$ und $c = \log(D) = \log(2)$.

Zweite Lösung: Die Funktion $f(x) = \log(1 + 10^x) - x$ ist für $x \geq 0$ monoton wachsend und hat ihr Minimum für $x = 0$, d.h. $c = f(0) = \log(2)$.

Aufgabe 1226: Pizza gerecht teilen

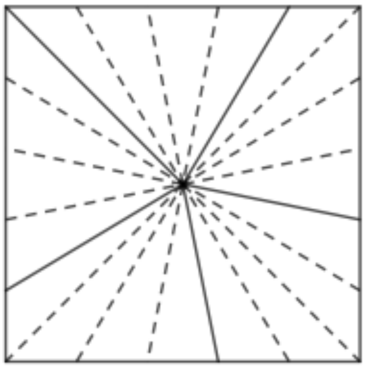
a) Anton hat einen Austauschschüler, Enrico aus Neapel, zu Gast. Am letzten Tag seines Aufenthaltes backt dieser eine Pizza auf einem quadratischen Blech. Dazu erwartet Anton 10 weitere Gäste.
Wie kann Enrico die Pizza so teilen, dass jeder Anwesende nicht nur ein gleich großes Stück bekommt, sondern auch gleich viel vom Rand?

b) Zeige: Für jedes $n = 3, 4, \ldots$ lässt sich ein Quadrat mit Hilfe gerader Linien in n Teile so zerlegen, dass jedes Teil die gleiche Fläche besitzt und den gleichen Anteil des Randes des Quadrats. (WJB)

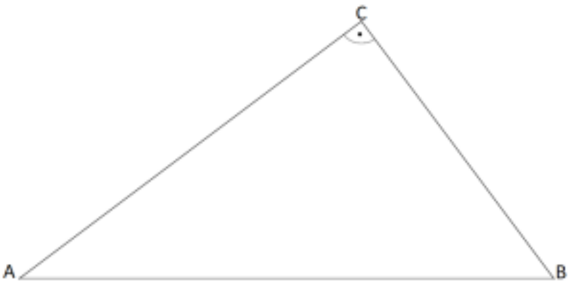
Lösung:

In einem ersten Schritt teilen wir die Seiten des Quadrats jeweils in n gleich lange Teile und verbinden die Endpunkte dieser Teile mit dem Mittelpunkt des Quadrats.

So entstehen $4n$ Dreiecke mit jeweils gleicher Grundseite $\frac{1}{n}$ und Höhe $\frac{1}{2}$. $n = 3$ liefert die Lösung für Aufgabenteil a).
Im zweiten Schritt fassen wir je vier benachbarte Dreiecke zusammen.
Die Lösung für $n = 5$ siehst durechts.



Aufgabe 1227: Pythagoras denkt auch noch nach...



In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete $77cm$ lang.
Wie lang sind die beiden anderen Seiten, wenn alle Seitenlängen natürliche Maßzahlen haben?
Hinweis: Es gibt vier Lösungen.

(Christoph Sievert)

Lösung:

$$\begin{aligned} 77^2 + b^2 &= c^2 \\ 77^2 &= c^2 - b^2 \\ 77^2 &= (c-b)(c+b) \end{aligned}$$

Zwei *ungleiche* Zahlen $(c-b)$ und $(c+b)$ müssen multipliziert $77^2 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11$ ergeben.
Es gilt:

$$\begin{array}{rccc|l} & (c-b) & & (c+b) & \text{LGS} \\ 77^2 = & 1 & \cdot & 7\cdot 7\cdot 11\cdot 11 & c-b=1 \\ & & & & c+b = 7\cdot 7\cdot 11\cdot 11 \\ 77^2 = & 7 & \cdot & 7\cdot 11\cdot 11 & c-b=7 \\ & & & & c+b = 7\cdot 11\cdot 11 \\ 77^2 = & 7\cdot 7 & \cdot & 11\cdot 11 & c-b=7\cdot 7 \\ & & & & c+b = 11\cdot 11 \\ 77^2 = & 11 & \cdot & 7\cdot 7\cdot 11 & c-b=11 \\ & & & & c+b = 7\cdot 7\cdot 11 \end{array}$$

Nach Lösung der vier LGS ergibt sich für das Lösungstripel (a, b, c):
$(a, b, c) = (77, 36, 85)$ oder $(a, b, c) = (77, 264, 275)$
oder $(a, b, c) = (77, 420, 427)$ oder $(a, b, c) = (77, 2964, 2965)$.

Aufgabe 1228: Kantenzahlen eines Polyeders

Ein durch ebene Vielecke begrenzter Körper heißt ein Polyeder. Begründe: Unter den Seitenflächen jedes Polyeders sind zwei mit der gleichen Kantenzahl. (H.F.)

Lösung:

Bei einem beliebigen Polyeder sei m das Maximum der Kantenzahlen der Seitenflächen.

Dann hat die zu m gehörige Seitenfläche m benachbarte (angrenzende) Seitenflächen $F_1, F_2, \dots, F_m$ mit den Kantenzahlen $k_1, k_2, \dots, k_m$, wobei $3 \le k_i \le m$ gilt. Wenn aber m Zahlen $k_1, k_2, \dots, k_m$ sich im Intervall von 3 bis m (die Grenzen 3 und m mitgerechnet) befinden, dann sind nach dem Schubfachprinzip wenigstens zwei dieser Kantenzahlen gleich.

Aufgabe 1229: Wo liegt der Fehler?

Wie heißt die größte der natürlichen Zahlen $n \ge 1$?

Da im Allgemeinen für jede natürliche Zahl n das Quadrat n^2 größer als n ist, muss die größte Zahl N unter den Zahlen n aus logischen Gründen die Eigenschaft haben, dass ihr Quadrat N^2 nicht größer als N sein kann, dass also $N^2 \le N$ gilt.

Diese Ungleichung trifft nur für $N = 1$ zu.

Mithin ist 1 die größte natürliche Zahl!

Wo liegt der Fehler? (H.F.)

Lösung:

Bei der Herleitung der Aussage

(*) $N = 1$ ist die größte natürliche Zahl

wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass gilt: Es gibt eine größte natürliche Zahl N.

Diese Aussage ist falsch! – das ergibt sich aus den Axiomen der Arithmetik. Aus einer falschen Voraussetzung kann man nun nach Belieben falsche und richtige Aussagen herleiten.

Beispiel: $1 = 2$ – was ja sicherlich falsch ist.

Nach den Regeln der Arithmetik darf man auf beiden Seiten der Gleichung jeweils Gleiches addieren und die Gleichung bleibt erhalten.

a) Aus $1 = 2$ folgt $1 + 1 = 2 + 1$, also $2 = 3$ – eine falsche Aussage
b) Addiere in der Gleichung $1 = 2$ links 2 und rechts 1, so erhält man wegen $2 = 1$ die Gleichung $1 + 2 = 2 + 1$ – eine wahre Aussage.

In der Herleitung von (*) wird – von uns unregistriert – eine falsche Aussage verwendet und schon „beweisen“ wir eine Falschaussage.

Aufgabe 1230: Einige Eigenschaften von Primzahl-Zwillingen

Es seien p und q Primzahl-Zwillinge mit $3 < p < q$. Dann gilt: 6 ist Teiler von $q + p$, 12 ist Teiler von $q^2 - p^2$, 18 ist Teiler von $q^3 + p^3$. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Zunächst ist $q = p + 2$. Ferner ist $p = 3v + 2$, $v \ge 1$ ganzzahlig; denn aus $p = 3v + 1$ folgt: $q = 3v + 3$ ist keine Primzahl.

Wegen $q = (3v + 2) + 2 = 3v + 4$ ist $q + p = (3v + 4) + (3v + 2) = 6(v + 1)$. Also: 6 ist Teiler von $q+p$. Weiter ist $q^2 - p^2 = (3v+4)^2 - (3v+2)^2 = 12v+12$; daher ist 12 Teiler von $q^2 - p^2$.
Schließlich gilt: $q^3 + p^3 = (3v + 4)^3 + (3v + 2)^3 = 54v^3 + 162v^2 + 180v + 72 = 18(3v^3 + 9v^2 + 10v + 4)$, so dass 18 ein Teiler von $q^3 + p^3$ ist.

Aufgabe 1231: Teilbarkeitsproblem

a) Die Zahl $n = 131313...131$ mit 2018^{10} Zifferpaaren 13 gefolgt von der Ziffer 1 ist nicht durch 31 teilbar. – Zeige dies.
Hinweis: Die Zahl ist $2 \cdot 2018^{10} + 1$-ziffrig gewählt, damit es kaum möglich ist, die Lösung durch numerische Division $n : 31$ zu suchen.

b) Könnte man die Aufgabe auch statt mit einem konkreten n auch mit einem $2k$-ziffrigem n, k beliebig, stellen? (H.F.)

Lösung:

a) Die Zahl n ist $2 \cdot 2018^{10} + 1$-ziffrig. Dann kann man n so schreiben:

$n = 100...0$ (mit $2 \cdot 2018^{10}$ Nullen) $+3131...31$ (mit 2018^{10} Zifferpaaren 31).

Nun ist 313131...31 durch 31 teilbar. Dagegen ist 100...0 nur durch Zahlen, die ausschließlich die Primfaktoren 2 und 5haben, teilbar. Weil für Zahlen a und b mit $c|b$, jedoch $c \nmid a$ gilt: $c \nmid (a + b)$, ist die Summe und somit n nicht durch 31 teilbar. (H.F.)

b) Bei einer Zahl n mit einer geraden Anzahl Ziffern entfällt die letzte Ziffer 1, die Zahl hat also die Gestalt $n = 131313...13$.
Überprüfen wir nacheinander die Zahlen 13, 1313, 131313, ... auf ihre Teilbarkeit durch 31, so stellen wir fest, dass 131313131313131313131313131313 durch 31 teilbar ist. Somit gibt es (anders als unter den Zahlen aus dem vorherigen Aufgabenteil) eine Zahl $n = 131313...13$ mit einer geraden Anzahl Ziffern, die ein Vielfaches von 31 ist. (MG)

Konsistenz und Inkonsistenz eines Axiomensystems

von Hartwig Fuchs und Hans-Jürgen Schuh

Axiomensysteme

In seiner Vorlesung „Einführung in die Mathematik“ sprach Professor Quoaoar auch über die Grundlagen einer jeden mathematischen Theorie, also über *Axiomensysteme*.
Ein solches System ist ein Komplex aus undefinierten *elementaren Begriffen* (= Termen) und einer Liste von offensichtlich gültigen und daher keine weitere Be-

gründung fordernden *Aussagen* (= Axiomen) über die elementaren Terme. Aus diesen Axiomen werden mit Hilfe der Logik Theoreme hergeleitet, die dann in ihrer Gesamtheit eine Theorie bilden. Der clevere Student Talentino wünschte und erhielt dazu ein Beispiel von Prof. Quoaoar

Beispiel: Prof. Quaoars *Axiomensystem* Q_n
Es seien E und K zwei nichtleere Mengen. Ein Element k aus K kann eine Beziehung $R \overset{k}{\leftrightarrow} S$ zwischen zwei Elementen R und S aus E vermitteln, welche dann von Prof. Quoaoar durch die Tripelbildung $k(R,S)$ und $k(S,R)$ beschrieben wird – wobei er $k(R,S)$ und $k(S,R)$ als *verschieden betrachtet*, (je nachdem, ob er sein Augenmerk auf R oder auf S richtet).
Prof. Quoaoar fordert von der Menge E und von der Tripelbildung:

A_1: Die Menge E besteht aus n *Elementen*, wobei n eine ganze Zahl > 0 ist.

A_2: Für je zwei *verschiedene* Elemente $R, S \in E$ gibt es *höchstens* ein $k \in K$, das mit R und S ein Tripel $k(R,S)$ bildet.

A_3: Für *jedes* $k \in K$ gibt es *genau zwei verschiedene* Elemente R und S in E, mit denen k ein Tripel $k(R,S)$ bildet.

A_4: Für *jedes* $R \in E$ gibt es *genau drei Elemente* k_i, $i = 1, 2, 3$ in K, von denen jedes k_i mit R und genau einem Element $S_i \in E$ ein Tripel $k_i(R, S_i)$ bildet.

Die *Elemente* von E und von K sowie *die Tripelbildung* sind die *elementaren Terme* und $A_1 - A_4$ die *Axiome* des von Prof. Quoaoar als Q_n bezeichneten Axiomensystems.
Prof. Quoaoar wies dann auf ein grundlegendes Problem hin, das bei Q_n - und überhaupt bei jedem Axiomensystem - auftritt , nämlich:

(1) Ist das Axiomensystem Q_n *konsistent* (=widerspruchsfrei)?

Das heißt: Ist es ausgeschlossen, dass in einer auf Q_n basierenden Theorie ein Widerspruch herleitbar ist (also dass eine in Q_n formulierbare Aussage B und ebenso ihr logisches Gegenteil $\neg B$ („nicht B“) aus den Axiomen A_1 bis A_4 folgen)?
Diese Frage muss unbedingt geklärt werden, denn eine Theorie bricht zusammen, wenn sich in ihr ein Widerspruch finden lässt. Man kann nämlich zeigen, dass ein Widerspruch jede beliebige Aussage impliziert.
Diese Behauptung möchte Talentino von Prof. Quoaoar anhand eines Beispiels illustriert haben.

Beispiel: Folgen eines Widerspruchs
Wenn man das von Guiseppe Peano (1858 – 1932) aufgestellte Axiomensystem P, das die Arithmetik der natürlichen Zahlen regelt, um das Axiom A:$1+1=1$ zu einem System P^* erweitert, dann gilt:

Nach P ist $1 + 1 = 2$ mit $2 \neq 1$; mit P^* folgt jedoch aus A, dass $2 = 1 + 1 = 1$, was ein offensichtlicher Widerspruch ist.
Das System P^* ist daher *inkonsistent* (= nicht widerspruchsfrei) mit verheerenden Folgen für eine auf P^* basierende Theorie.
Aus A folgt mit $2 = 1$, dass $3 = 2 + 1 = 1 + 1 = 1, 4 = 3 + 1 = 1 + 1 = 1$ u.s.w., so dass alle natürlichen Zahlen zugleich verschieden sind, aber auch alle mit 1 übereinstimmen, und das wäre das Ende der Zahlentheorie.

Talentino meldet sich erneut zu Wort: Ich sehe bei der Frage (1) nach der Konsistenz/Inkonsistenz von Q_n zwei große Probleme, die wohl bei allen Axiomensystemen ebenfalls auftreten.
Sind für einen Nachweis der Konsistenz von Q_n nicht *alle* aus Q_n herleitbaren Aussagen zu berücksichtigen?
Auch der Nachweis der Inkonsistenz von Q_n scheint nicht viel einfacher zu sein. Zwar würde es genügen, einen einzigen Widerspruch in der aus Q_n entwickelten Theorie zu entdecken – aber muss man dazu eventuell nicht immer größere Aussagemengen der Theorie durchforsten, bis man endlich auf den gesuchten Widerspruch stößt?
Prof. Quoaoar: Ich habe mit Absicht Q_n als Beispiel eines Axiomensystems gewählt, weil sich daran zeigen lässt, dass entgegen Talentinos Vermutungen zumindest die Frage nach der *Konsistenz* eines Axiomensystems mit Hilfe eines *Modells* manchmal recht einfach entschieden werden kann.

Modell eines Axiomensystems:
Ein *Modell* für Q_n ist eine widerspruchsfreie Struktur G_n , die jede der Aussagen $A_1 - A_4$ erfüllt. In der *Modelltheorie* wird bewiesen, dass ein *Axiomensystem* genau dann *konsistent* ist, wenn es *(mindestens) ein Modell* besitzt.
Solch ein Modell G_n erhält man, indem man die elementaren Terme von Q_n in geeigneter Weise interpretiert und damit die Axiome $A_1 - A_4$ als Vorschriften zur Konstruktion von G_n verwendet. So erreicht man – vereinfacht gesagt – dass Q_n und G_n die gleiche logische Struktur haben.
Wenn man nun G_n als widerspruchsfrei nachweisen kann, genau dann ist Q_n konsistent – denn ein Widerspruch in Q_n würde der Konstruktion von G_n entsprechend aus Q_n in G_n übertragen.

Interpretation eines Axiomensystems:
Zur Bildung eines Modells G_n für ein Axiomensystem Q_n sind vorweg die elementaren Terme von Q_n geeignet zu interpretieren. Prof. Quoaoar macht das so, dass sich die Konstruktion von G_n geometrisch - anschaulich nachvollziehen lässt.
Die Elemente der Mengen E und K von Q_n seien die *Ecken* und *Kanten* eines

*Graphen**; die Bildung der Tripel $k(R, S)$ und $k(S, R)$ bedeutet dann:
Die Ecken R und S sind durch die Kante k verbunden und umgekehrt.
Mit dieser Interpretation lauten dann die Axiome $A_1 - A_4$:

B_1: Die Menge E besteht aus n *Ecken*, wobei n eine ganze Zahl > 0 ist.

B_2: Zwei *verschiedene* Ecken sind durch *höchstens* eine Kante verbunden.

B_3: *Jede Kante* verbindet *genau zwei verschiedene Ecken*.

B_4: *Jede Ecke* ist mit *genau drei Ecken* durch *Kanten* verbunden.

Prof. Quoaoar bezeichnet die aus den Punkt- und Kantenmengen E und K mit den Axiomen $B_1 - B_4$: konstruierbare Struktur mit G_n.

Konsistenz oder Inkonsistenz eines Axiomensystems Q_n
Da die Menge E von Q_n nicht leer ist, gibt es (mindestens) eine Ecke $R \in E$. Nach Axiom B_4 ist R mit 3 Ecken verbunden. Da Mehrfachverbindungen von R mit einer Ecke $S, S \neq R$ wie in Figur 1 nach Axiom B_2 und eine Verbindung von R mit sich selbst wie in Figur 2 nach Axiom B_3 ausgeschlossen sind, ist R mit drei paarweise verschiedenen Ecken S, T und U verbunden (Figur 3) - was auch bedeutet, dass in G_n *stets* $n \geq 4$ gilt.

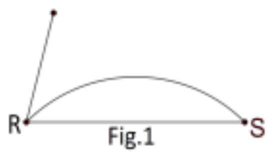


Fig.1

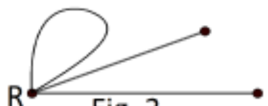


Fig. 2

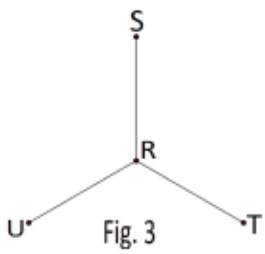


Fig. 3

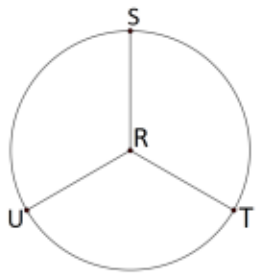


Fig. 4

Ein erster Erfolg für Prof. Q.: Da sich obige Überlegung sofort auf die Axiomensysteme Q_n übertragen lässt, folgt für Q_1, Q_2 und Q_3, dass sich aus den Axiomen A_1 und A_4 der *Widerspruch* $n < 4$ *und* $n \geq 4$ herleiten lässt. Also gilt:

(2) Die Axiomensysteme Q_1, Q_2 *und* Q_3 sind *inkonsistent*.

Wenn man nun in Figur 3 die Ecken S und T, T und U sowie U und S durch jeweils eine Kante verbindet, dann stellt die resultierende Struktur einen sogenannten *Radgraphen* G_4 mit 4 Ecken und 6 Kanten dar (Figur 4), für den die Axiome $B_1 - B_4$ wahre Aussagen sind – wie man selbst leicht nachprüfen kann. Damit gilt:

(3) Der *Radgraph* G_4 ist ein *Modell* für das Axiomensystem Q_4,

und deshalb ist Q_4 *konsistent*.

* Ein Graph ist eine geometrische Struktur aus Ecken (=Punkten) und Kanten (=Linien), für die gilt: Jede Kante verbindet zwei Ecken (die im allgemeinen auch übereinstimmen dürfen).

Aufgabe
Überzeuge dich selbst davon, dass für den in Figur 5 dargestellten Radgraphen G_6 mit 6 Ecken und 9 Kanten gilt:

(4) Der *Radgraph*G_6 ist ein *Modell* für das Axiomensystem Q_6,

und deshalb ist Q_6 *konsistent*.
Ausgehend von (3) und (4) zeigt dann Prof. Quoaoar mit vollständiger Induktion:

(5) Der *Radgraph* G_n mit n Ecken und $n + \frac{1}{2}n$ Kanten ist für *alle geraden Zahlen* $n \geq 4$ ein *Modell* für das Axiomensystem Q_n, welches deshalb *konsistent* ist (vgl. Figur 6 mit 20 Ecken und 30 Kanten).

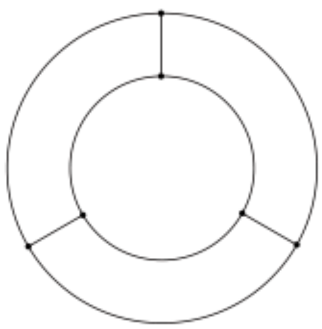


Fig. 5

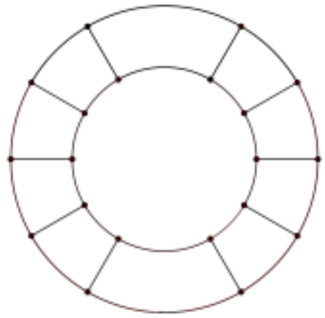


Fig. 6

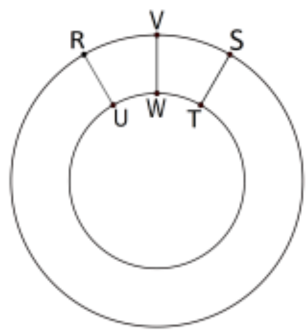


Fig. 7

Beweis von (5) :
(5) gilt wegen (3) und (4) für $n = 4$ und $n = 6$.
Annahme: (5) gelte für ein gerades $n \geq 6$. Dann gilt (5) auch für $n + 2$, denn wenn man aus G_n den Radgraphen G_{n+2} konstruiert, indem man wie in Figur 7 in die Kante zwischen zwei Ecken R und S eine Ecke V und zwischen die Ecken U und T eine Ecke W einfügt und dann V mit W verbindet, dann genügt es zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit von G_{n+2} zu zeigen: Die Axiome $B_1 - B_4$ sind für das „Sechseck" *RVSTWU* wahre Aussagen – was offensichtlich der Fall ist. Also gilt (5) für G_{n+2}.

Konsistenz der Axiomensysteme $\mathbf{Q_n}$ für gerade $\mathbf{n \geq 4}$
Aus (2) und (5) ergibt sich unmittelbar die „halbe Antwort" auf die Frage (1). Da die Radgraphen G_n für gerade $n \geq 4$ Modelle für die zugehörigen Axiomensysteme sind, gilt:

(6) Die *Axiomensysteme* Q_n, $n = 4, 6, 8, \dots$ sind *konsistent*.

Inkonsistenz der Axiomensysteme $\mathbf{Q_n}$ für ungeraden $\mathbf{\geq 1}$ und für $\mathbf{n = 2}$
Annahme: Q_n sei widerspruchsfrei.
Es seien die Elemente aus E und K sowie die Tripel $k(R, S)$ die elementaren Terme in der Definition von Q_n;n und m seien die Anzahlen der Elemente von E und K, C_n sei die Anzahl der in Q_n vorkommenden Tripel. Dann gilt:
Einerseits ist $C_n = 2m$, da $k \in K$ sowohl das Tripel$k(R, S)$ als auch das Tripel

$k(S, R)$ erzeugt, je nach dem auf welches Element aus E man sein Augenmerk richtet.
Andererseits ergibt es sich aus den Axiomen $A_2 - A_4$, insbesondere aus A_4, dass $C_n = 3n$. Da aber n ungerade ist, stellt die Gleichung $2m = 3n$ einen Widerspruch dar.
Die Annahme ist also falsch, woraus die „zweite Hälfte der Antwort“ auf die Frage (1) folgt:

(7) Die *Axiomensysteme* Q_n für *ungerade* $n \geq 1$ und für $n = 2$ sind *inkonsistent*.

Damit beendete Prof. Quaoar seine Vorlesung, raffte seine Notizen zusammen und verließ – dem Studenten Talentino freundlich zunickend – den Hörsaal.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
Martin Mattheis

Launay, Mickaël: Der große Roman der Mathematik
Mickaël Launay wundert sich im Prolog seines Buches „Der große Roman der Mathematik“ über die bei manchen seiner Mitmenschen vorhandene Diskrepanz, sich einerseits begeistert über mathematische Phänomene zu unterhalten, sich aber andererseits, sobald sie hören, dass es sich bei den diskutierten Phänomenen um Mathematik handelt, negativ über die Mathematik an sich sprechen. „Ja, aber das ist keine richtige Mathematik ... Das kann man noch verstehen.“ Auch wenn eine solche Haltung bei MONOID-Löserinnen und Lösern sicher nicht vorkommen wird, habe ich die Motivation des Autors, Menschen für die Freude an der Mathematik zu vermitteln, an den Anfang der Rezension gestellt, weil sie für das Entstehen des Buches wichtig war.
Der Mathematiker Mickaël Launay hat es sich insgesamt zur Aufgabe gemacht, vor allem junge Menschen für die Mathematik zu begeistern. Dazu stellt er sich unter anderem in der Ferienzeit in einem Urlaubsort mitten in einen Sommermarkt zwischen Stände von Handyzubehör, Henna-Tattoos und Modeschmuck, um dort an einem eigenen Mathestand mit Origami, Zaubertricks, Spielen, Rätseln u. a. Mathematik zu betreiben. Ein weiteres von ihm dafür initiiertes Projekt ist ein eigener Youtube-Kanal: Micmaths.
Das hier zu besprechende Buch „Der große Roman der Mathematik“ trägt den Untertitel „Von den Anfängen bis heute“. Genau darum geht es dem Autor: Einen lesbaren, spannenden und interessanten Überblick über die Entwicklung der Mathematik von der Steinzeit bis heute vorzulegen. Auf 247 Seiten kann dies natürlich in jedem Kapitel nur ein kurzer Einstieg sein, der aber im vorliegenden Buch Lust auf mehr macht. Ausgehend von der Sammlung des Louvre bezieht der Autor

auch andere Sehenswürdigkeiten von Paris mit ein, in oder an denen Mathematik beobachtet werden kann.
Wer sich jetzt fragt, wieso Launay den Anfang der Mathematik bereits in die Steinzeit legt, der sollte einfach einmal einen Faustkeil der Altsteinzeit auf Symmetrie untersuchen. Für diejenigen, denen eine Symmetrieachse noch nicht mathematisch genug ist, geht es im ersten Kapitel weiter mit der mesopotamischen Kultur, in der bei der Verzierung von Tongefäßen nicht nur Symmetrien sondern mit Verschiebungen und Drehungen auch mathematische Abbildungen erkennbar sind. In einem mathematischen Einschub erläutert der Autor die sieben verschiedenen Kategorien, in die man die Friese kategorisieren kann.
Weitere Kapitel beschäftigen sich mit der Entstehung von Zahlen und deren Fixierung auf Knochen oder Tontafeln, Polyeder, die Entwicklung der Geometrie bei den Griechen und deren Idee von Beweisführungen, der Kreiszahl π, negativen Zahlen und die Null, Trigonometrie, die Entstehung der Algebra, Fibonacci, die Lösung von Gleichungen dritten Grades, die Entstehung unserer heutigen Notationen, Kartesische Koordinaten, unendlich Kleines, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Rechenmaschinen und – ausgehend von den Hilbertschen Problemen – einen Ausblick auf die Mathematik der Zukunft.
Die meisten Kapitel haben mathematische Einschübe, die durch breite Linien an den Rändern zu erkennen sind. Dort werden historische Aufgaben oder tiefgründige Probleme beleuchtet. Mathematische Laien könnten diese beim Lesen zwar getrost überspringen, würden sich dadurch aber um den Genuss bringen, sich selbst mit mathematischen Fragestellungen zu beschäftigen.
Im Anhang des Buches befinden sich – außer einem ausführlichen Literaturverzeichnis – auch Tipps für Ausflüge in Museen oder Science Center mit mathematischer Thematik. Genannt werden explizit der Palais de la Découverte und die Stadt der Wissenschaften und der Industrie in Paris, sowie das Mathematikum in Gießen.

Fazit:
Es handelt sich bei Launays „Der große Roman der Mathematik“ nicht um ein Fachbuch zur Mathematikgeschichte, allerdings nutzt der Autor den Gang durch die Geschichte, um seinen Leserinnen und Lesern in Kürze viele mathematische Ideen nahe zu bringen. Die einzelnen Kapitel müssen deshalb auch nicht unbedingt chronologisch der Reihe nach gelesen werden. Auch wenn viele Themen nur kurz angerissen werden können, handelt es sich insgesamt um ein kurzweilig zu lesendes, populärwissenschaftliches Buch über Mathematik, das neugierig macht, sich mit Themen, die man als Leserin oder Leser spannend findet, näher zu befassen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Launay, Mickaël: Der große Roman der Mathematik. Von den Anfängen bis heute, C.H. Beck 2018, ISBN 978-3-406-72151-9, gebunden 256 Seiten

Art des Buches:	Populärwissenschaftliches mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Bundeswettbewerb Mathematik 2019

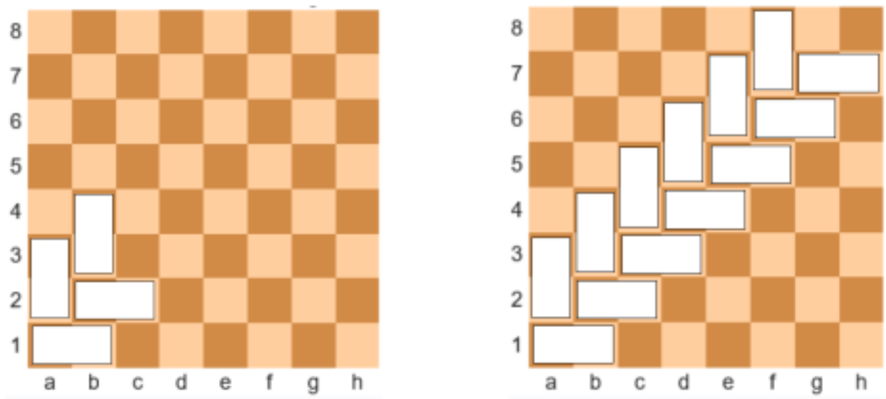
Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Ein 8×8 Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1×2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt.
Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2×2-Quadrat bilden.

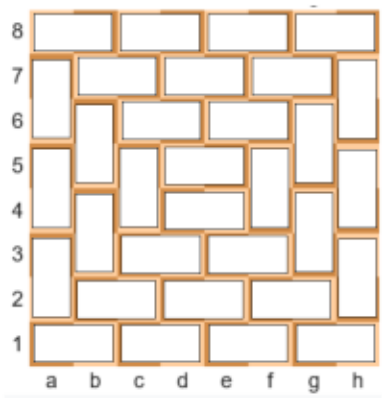
Beweis: Wir versuchen, bei der Bedeckung des Schachbretts mit den Dominosteinen so lange es geht zu vermeiden, dass ein 2×2 -Quadrat der Dominosteine entsteht. Jede vollständige Bedeckung muss einen Dominostein enthalten, der das Feld $a1$ des Schachbretts bedeckt; aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass dieser erste Dominostein waagrecht liegt, also auch das Feld $b1$ bedeckt; siehe hierzu Skizze 1.1 links. Der zweite Dominostein bedecke das Feld $a2$: Soll er mit dem ersten Dominostein kein 2×2-Quadrat bilden, so muss er senkrecht liegen, also auch das Feld $a3$ bedecken. (Andere Lagen als waagrecht oder senkrecht kommen nicht in Frage, wenn die Dominosteine das Schachbrett vollständig und überschneidungsfrei bedecken sollen.) Wir fahren nun mit entsprechenden Überlegungen fort: Der dritte Dominostein, der das Feld $b2$ bedecke, muss waagrecht liegen, wenn er nicht mit dem zweiten Dominostein ein 2×2-Quadrat bilden soll; der vierte Dominostein, der das Feld $b3$ bedecke, muss senkrecht liegen.



Skizze 1.1: Bedeckung des Schachbretts mit Dominosteinen, die Quadrate vermeiden soll

Setzen wir diese Überlegungen für die Felder $c3$, $c4$, $d4$, $d5$, $e5$, $e6$, $f6$, $f7$, $g7$ fort, so führt dies zur teilweisen Bedeckung mit Dominosteinen, wie sie in Skizze 1.1 rechts dargestellt ist: Die Felder $g7$, $g8$, $h7$, $h8$ können dann vollständig und überschneidungsfrei nur mit einem 2×2-Quadrat von Dominosteinen bedeckt werden. Jede vollständige und überschneidungsfreie Bedeckung des Schachbretts muss auch die Diagonalfelder $a1$, $a2$, $b2$, $b3$, $c3$, $c4$, $d4$, $d5$, $e5$, $e6$, $f6$, $f7$, $g7$ bedecken. Wir haben damit bewiesen, dass jede Bedeckung des Schachbretts zwei Dominosteine enthalten muss, die ein 2×2-Quadrat bilden. $\square$

Bemerkung: Tatsächlich existiert eine Bedeckung des 8×8-Schachbretts mit 32 Dominosteinen der Größe 1×2, in der genau zwei Dominosteine ein 2×2-Quadrat bilden; siehe nebenstehende Skizze.



Aufgabe 2

Die Buchstaben A, C, F, H, L und S stehen für sechs nicht notwendigerweise verschiedene Ziffern im Dezimalsystem, wobei $S \neq 0$ und $F \neq 0$ ist. Aus ihnen werden die sechsstelligen Dezimaldarstellungen *SCHLAF* und *FLACHS* zweier Zahlen gebildet.
Beweise: Die Differenz dieser beiden Zahlen ist genau dann durch 271 teilbar, wenn $C = L$ und $H = A$ gilt.

Beweis: Wie bilden die Differenz der beiden Zahlen mit den Dezimaldarstellungen *SCHLAF* und *FLACHS* und erhalten

$$
\begin{aligned}
&S\cdot 10^5+C\cdot 10^4+H\cdot 10^3+L\cdot 10^2+A\cdot 10+F\\
&-F\cdot 10^5-L\cdot 10^4-A\cdot 10^3-C\cdot 10^2-H\cdot 10-S\\
&=(S-F)\cdot(10^5-1)+(C-L)\cdot(10^4-10^2)+(H-A)\cdot(10^3-10)\\
&=(S-F)\cdot 99999+(C-L)\cdot 9900+(H-A)\cdot 990\\
&=271\cdot(S-F)\cdot 369+990\cdot\Big((C-L)\cdot 10+(H-A)\Big).
\end{aligned}
$$

Weil 271 eine Primzahl ist, wie man leicht nachweist, sind 271 und $990=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$ teilerfremd. Damit erkennen wir aus der letzten Zeile der obigen Gleichungskette: Die Differenz der beiden Zahlen der Aufgabenstellung ist genau dann durch 271 teilbar, wenn $(C-L)\cdot 10+(H-A)$ durch 271 teilbar ist. Für die Ziffern C, L, H, A gilt $|C-L|\leq 9$ und $|H-A|\leq 9$ und damit die Abschätzung

$$-99\leq(C-L)\cdot 10+(H-A)\leq 99.$$

Der Term $(C-L)\cdot 10+(H-A)$ ist also genau dann eine durch 271 teilbare ganze Zahl, wenn $(C-L)\cdot 10+(H-A)=0$ ist, also

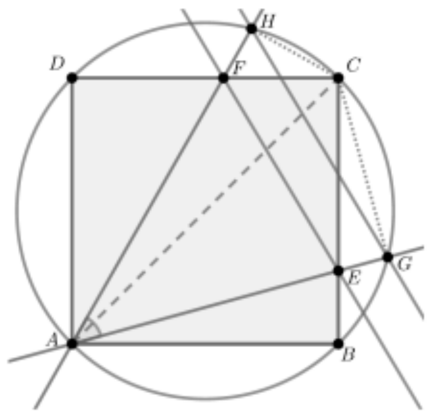
$$(C-L)\cdot 10=(A-H) \tag{2.1}$$

Wegen $|A-H|\leq 9$ ist (2.1) genau dann erfüllt, wenn $C=L$ und $H=A$ gilt. □

Aufgabe 3

Im Quadrat $\square ABCD$ werden auf der Seite BC der Punkt E und auf der Seite CD der Punkt F so gewählt, dass $\angle EAF=45^\circ$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrats sind. Die Geraden (AE) und (AF) schneiden den Umkreis des Quadrats außer im Punkt A noch in den Punkten G bzw. H.
Beweise, dass die Geraden (EF) und (GH) parallel sind.

Erster Beweis: Die Konstruktion der Aufgabenstellung ist nebenstehend skizziert. Wir wenden die Umkehrung eines Strahlensatzes an und schließen auf die Parallelität von (EF) und (GH), indem wir $\overline{AE}:\overline{AG}=\overline{AF}:\overline{AH}$ zeigen.



Weil die Diagonale AC der Durchmesser des Umkreises von $\square ABCD$ ist und die beiden Punkte G, H auf dem Umkreis liegen, folgt aus dem Satz von Thales, dass die beiden Dreiecke $\triangle CAG$ und $\triangle ACH$ rechtwinklig sind, das heißt $\angle CGA=90^\circ=\angle AHC$.

Wir zeigen nun, dass die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle CAG$ und $\triangle AFD$ ähnlich sind, weil mit $\angle GAC=\angle FAD$ auch ein zweiter Winkel übereinstimmt: Denn nach Voraussetzung gilt $\angle GAH = 45^\circ = \angle CAD$ und damit

$$\angle GAC = \angle GAH - \angle CAH = 45^\circ - \angle CAF = \angle CAD - \angle CAF = \angle FAD.$$

Die Ähnlichkeit von $\triangle CAG$ und $\triangle AFD$ bedeutet

$$\overline{AG} : \overline{DA} = \overline{CA} : \overline{AF} \iff \overline{AG} \cdot \overline{AF} = \overline{CA} \cdot \overline{DA}. \tag{3.1}$$

Analog schließen wir, dass die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle EAB$ und $\triangle ACH$ ähnlich sind mit

$$\overline{EA} : \overline{AC} = \overline{AB} : \overline{HA} \iff \overline{EA} \cdot \overline{HA} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}. \tag{3.2}$$

Im Quadrat $\square ABCD$ ist $\overline{AB} = \overline{DA}$, also folgt aus den rechten Gleichungen in (3.1) und (3.2), dass

$$\overline{AG} \cdot \overline{AF} = \overline{EA} \cdot \overline{HA} \iff \overline{AE} : \overline{AG} = \overline{AF} : \overline{AH},$$

und das war zu zeigen. $\square$

Zweiter Beweis: Die Konstruktion der Aufgabenstellung ist in Skizze 3.1 unten links skizziert. Wir werden beweisen, dass $\angle AFE = \angle AHG$, das heißt, dass die Geraden (EF) und (GH) die Gerade (AF) im selben Winkel schneiden. Dies ist äquivalent zur behaupteten Parallelität der Geraden (EF) und (GH).

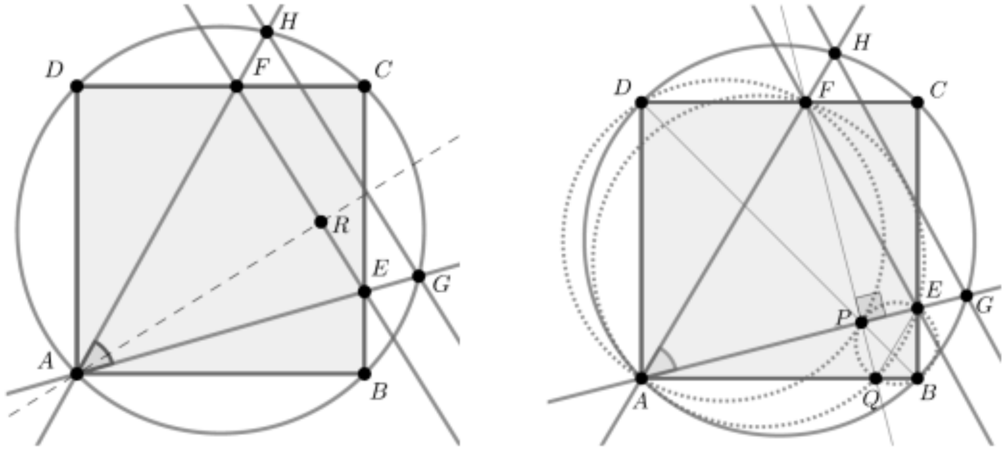
Wir arbeiten hierzu mit Winkelvergleichen in vier Sehnenvierecken, die wir nachfolgend identifizieren. Hierzu seien P der Fußpunkt des Lots von F auf AE und Q der Schnittpunkt von (FP) mit AB; siehe die Skizze 3.1 rechts. Wieso gilt immer, dass P im Inneren von AE und Q im Inneren von AB liegen? Die erste Aussage folgt, weil das Dreieck $\triangle AEF$ spitzwinklig ist: Denn wegen $\angle BAE + \angle FAD = 90^\circ - \angle EAF = 45^\circ$ und $\overline{AB} = \overline{AD}$ fallen das Bild von B unter der Spiegelung an (AE) und das Bild von D unter der Spiegelung an (AF) in einem Punkt R zusammen. Für den Punkt R gilt dann

$$\angle FRE = \angle FRA + \angle ARE = \angle ADF + \angle EBA = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

also liegt R auf FE . Damit ergeben sich

$$\angle FEA = \angle AEB = 90^\circ - \angle BAE \text{ und } \angle AFE = \angle DFA = 90^\circ - \angle FAD; \tag{3.3}$$

die beiden Winkel $\angle FEA$ und $\angle AFE$ sind also kleiner als 90° (und beide größer als 45°).



Skizze 3.1: Vier Sehnenvierecke (rechts) in der Konstruktion der Aufgabenstellung (links)

Nach Konstruktion gilt $\angle FPA = \angle ADF = 90^\circ$, also ergänzen sich im Viereck $\square APFD$ gegenüberliegende Winkel zu 180°, es ist also ein Sehnenviereck. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle FAP$ folgt zudem

$$\angle AFP = 180^\circ - \angle FPA - \angle PAF = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \tag{3.4}$$

In $\square APFD$ schließen wir mit dem Satz vom Umfangswinkel und (3.4)

$$\angle ADP = \angle AFP = 45^\circ = \angle ADB, \tag{3.5}$$

das bedeutet insbesondere, dass der Punkt P auf der Diagonalen BD und Q im Inneren von AB liegen.
Dies verwenden wir, um auch das Viereck $\square QBEP$ als Sehnenviereck zu identifizieren, denn $\angle QPE = \angle EBQ = 90^\circ$, und wir folgern mit dem Satz von Umfangswinkel, dass auch

$$\angle PEQ = \angle PBQ = \angle DBA = 45^\circ. \tag{3.6}$$

Mit (3.5) und (3.6) folgt $\angle AFQ = \angle AEQ$, weil

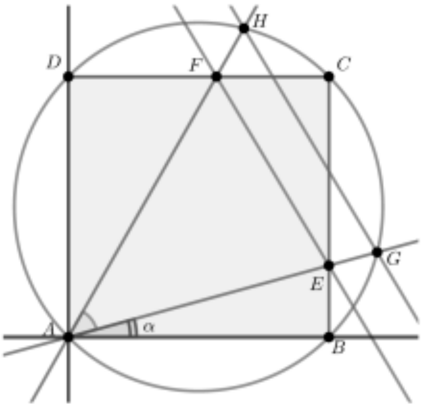
$$\angle AFQ = \angle AFP = 45^\circ = \angle PEQ = \angle AEQ,$$

und damit ist nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangswinkel auch $\square AQEF$ ein Sehnenviereck. Ebenso ist nach Konstruktion $\square ABGH$ ein Sehnenviereck, auf dessen Umkreis auch der Punkt D liegt. Wegen (3.5) und durch mehrfache Anwendung des Satzes vom Umfangswinkel in den Sehnenvierecken $\square AQEF$ bzw. $\square ABGH$ schließen wir nun, dass

$$\begin{aligned}\angle AFE = \angle AFP + \angle PFE &= 45^\circ + \angle QFE = 45^\circ + \angle QAE \\ &= 45^\circ + \angle BAG = \angle ADB + \angle BAG \\ &= \angle AHB + \angle BHG = \angle AHG,\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. $\square$

Dritter Beweis: Die Konstruktion der Aufgabenstellung ist nachfolgend skizziert. Über die Bezeichnungen der Aufgabenstellung hinaus benennen wir mit α den Winkel $\angle BAE$; nach Konstruktion gilt $0 < \alpha < 45°$. Außerdem kürzen wir mit α' den Winkel $\angle BAF = 45° + \alpha$ ab.



Wir zeigen, dass die zentrische Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor $k(\alpha) = \big(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\big) \cdot \cos(\alpha)$ den Punkt E in den Punkt G überführt, ebenso den Punkt F in den Punkt H. Weil also die Gerade (EF) unter der zentrischen Streckung in die Gerade (GH) überführt wird, sind (EF) und (GH) parallel.

Hierfür legen wir ein Koordinatensystem so auf die Figur, dass (AB) die x-Achse und (AD) die y-Achse ist; dabei mögen ohne Einschränkung der Punkt B die Koordinaten $(1|0)$ und der Punkt D die Koordinaten $(0|1)$ haben. Nach Voraussetzung ist

$$0 < \sin(\alpha) < \cos(\alpha) < 1 \text{ und } 0 < 45° + \alpha = \alpha' < 90°; \tag{3.7}$$

aus (3.7) lässt sich schließen, dass alle Terme im Folgenden wohldefiniert sind.
Die Punkte E und G liegen auf der Geraden mit der Funktionsgleichung $y = \tan(\alpha) \cdot x$, die Punkte F und H liegen auf der Geraden mit der Funktionsgleichung $y = \tan(\alpha') \cdot x$. Damit hat der Punkt E die Koordinaten

$$(x_E|y_E) = (1|\tan(\alpha)) = \left(1\middle|\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right), \tag{3.8}$$

und der Punkt F hat die Koordinaten $(x_F|y_F) = (\frac{\cos(\alpha')}{\sin(\alpha')}|1)$. Die Koordinaten der Punkte G und H erfüllen die Gleichung $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ des Umkreises von $\square ABCD$. Für den Punkt G mit seinen Koordinaten $(x_G|\tan(\alpha) \cdot x_G) = (x_G|x_G \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)})$bedeutet dies

$$\begin{aligned} x_G^2 - x_G + x_G^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} - x_G \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 0 \\ \iff x_G^2 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) = x_G \cdot \left(1 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right), \end{aligned}$$

also wegen $x_G \neq 0$

$$x_G = \cos^2(\alpha) \cdot \frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \big(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\big) \cdot \cos(\alpha),$$

und wegen (3.8)

$$\begin{aligned}(x_G|y_G) &= \big((\sin(\alpha)+\cos(\alpha))\cdot\cos(\alpha)|(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))\cdot\sin(\alpha)\big)\\ &= \big(x_E\cdot k(\alpha)|y_E\cdot k(\alpha)\big).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Für den Punkt H schließen wir analog

$$(x_H|y_H) = \big((\sin(\alpha')+\cos(\alpha'))\cdot\cos(\alpha')|(\sin(\alpha')+\cos(\alpha'))\cdot\sin(\alpha')\big).$$

Aus den Additionstheoremen folgen $\sin(\alpha') = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))$ und $\cos(\alpha') = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos(\alpha)-\sin(\alpha))$, damit berechnen wir

$$(x_F|y_F) = \Big(\frac{\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}\Big|1\Big) \tag{3.10}$$

sowie

$$\begin{aligned}(x_H|y_H) &= \big((\cos(\alpha)-\sin(\alpha))\cdot\cos(\alpha)|(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))\cdot\cos(\alpha)\big)\\ &= (x_F\cdot k(\alpha)|y_F\cdot k(\alpha));\end{aligned} \tag{3.11}$$

damit beweisen die Relationen in (3.9) und (3.11) die behauptete zentrische Streckung. □

Aufgabe 4

In der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1,4142...$ findet Isabelle eine Folge von k aufeinander folgenden Nullen, dabei ist k eine positive ganze Zahl.
Beweise: Die erste Null dieser Folge steht frühestens an der k-ten Stelle nach dem Komma.

Beweis (durch Widerspruch): Die Aussage der Aufgabenstellung ist richtig für $1 \le k \le 5$, denn für die angegebene Dezimaldarstellung gilt

$$1,4142^2 = 1,99996164 < 2 < 2,00024449 = 1,4143^2. \tag{4.1}$$

Für eine beliebig lange Folge von $k \ge 6$ aufeinander folgenden Nullen präziseren wir die Aufgabenstellung: Die Dezimaldarstellung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ hat unendlich viele Nachkommastellen: sie bestehe zunächst aus m Nachkommastellen a_i mit $0 \le a_i \le 9$ für alle $1 \le i \le m$, genauer: $a_1 = 4, a_2 = 1$, ...; es gelte $a_m \neq 0$. Anschließend folgen k Nullen aufeinander, schließlich unendlich viele weitere Nachkommastellen. Wir definieren die Größen A und r über

$$\sqrt{2}\cdot 10^m = 1,a_1...a_m\cdot 10^m + r =: A + r; \tag{4.2}$$

das heißt, A ist eine $m+1$-stellige positive ganze Zahl mit $A < 1,5\cdot 10^m$, und r ist eine reelle Zahl mit $0 < r \le 10^{-k}$, weil in $\sqrt{2}\cdot 10^m$ die Folge der k Nullen direkt nach dem Komma beginnt.
Die Aufgabenstellung behauptet, dass stets $m \ge k-1$ gelten muss. Wir führen die Annahme $m \le k-2$ zum Widerspruch. Wir quadrieren hierfür die Gleichung

in (4.2), subtrahieren A^2 auf beiden Seiten und erhalten

$$2 \cdot 10^{2m} - A^2 = 2Ar + r^2. \tag{4.3}$$

Für die rechte Seite von (4.3) schätzen wir ab

$$0 < 2Ar + r^2 < 3 \cdot 10^{m-k} + 10^{-2k} \leq 3 \cdot 10^{-2} + 10^{-2k} < 1;$$

das ist ein Widerspruch zur Ganzzahligkeit der linken Seite von (4.3). Damit haben wir gezeigt, dass die erste Null einer Folge von k aufeinander folgenden Nullen in der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ frühestens an der k-ten Stelle nach dem Komma stehen kann. □

Wir danken Herrn StD a.D. Fegert und OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 135

Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg:
Kl. 11: Hannah Schmitt 7, Fiete Schopp 7.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Finn Baumann 8, Sarah Braunecker 6, Leon Conrad 9, Mya Fuchs 7, Johannes Greis 12, Pauline Groschke 4, Luca Guth 5, Chiara Kreis 8, Roberta Tintea 5;
Kl. 6: Oscar Su 34, Kevin Tran 9, Jan Christian Weber 3;
Kl. 7: Lars Schall 8;
Kl. 8: Linus Kemmeter 8, Nils Koch 6;
Kl. 9: Lukas Born 16,5;
Kl. 11: Torben Bürger 15.

Bad Schwalbach, Nikolaus-August-Schule:
Kl. 5: Leyla 2, Liam Genscher 2;
Kl. 6: Carina 2, Kiara Dallmeier 2, Hannah Neele Frank 2, Coleen Genscher 2, Karl Hoffmann 16, Sarah Hoffmann 16.

Bielefeld, Gymnasium am Waldhof: Kl. 9: Roxana Mittelberg 7.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 10: Tim Kruse 9.

Friedberg, Augustinerschule: Kl. 9: Aleksandra Herbst 16.

Geisenheim, Internatsschule Schloss Hansenberg:
Kl. 12: Maximilian Göbel 18.

Gilching, Christoph-Probst-Gymnasium:
Kl. 8: Raphael Schmittner 4;
Kl. 9: Jakob Zimmermann 13.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule
Kl. 12: Dominik Horstkötter 13;
Kl. 13: Melanie Schuy 10.

Kelkheim, Privatgymnasium Dr. Richter: Kl. 11: Dennis Mayle 14.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium: Kl. 10: Cedric Friedrich 19.

Linz, Martinus Gymnasium:
Kl. 5: Daniel Waldek 5;
Kl. 8: Simon Waldek 12.

Mainz-Gonsenheim, Martinus Schule: Kl. 2: Johannes Wünstel 5
Mainz-Gonsenheim, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 7: Gregor Salaru 38;
Kl. 9: Raphael Mayer 8.
Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**

Kl. 11: Max Herwig 22;
Kl. 12: Ivan Khomutovskiy 22, Florian Weinzinger 21,5.

Mainz, Theresianum: Kl. 10: Clemens Zabel 19.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Luis Brinkmann 19, Frederick Fink 10, Sophie Kunz 11, Dora Meszaros 12;
Kl. 6: Emilie Borrmann 8;
Kl. 8: Elisabeth Budimann 17, Annika Etz 10, Henriette Heibock 6, Natalia Kobeszko 6, Emilia Korfmacher 10, Rebecca Pergament 18;
Kl. 9: Kathrin Borrmann 6, Paulina Herber 18, Josefine Kaßner 21;
Kl. 10: Annika Borrmann 4, Sönke Schneider 20;
Kl. 11: Oliver Storck 21;
Kl. 12: Jonas Blumenroth 21, Lennard Freud 13, Jonas Glückmann 21, Friedrich Kievernagel 11, Jannik Matthiesen 14, Fabian Rasch 14;
Kl. 13: Kristin Teichert 15.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 7: Tu Sam Dang 21;
Kl. 9: Miriam Büttner 20.

Wittlich, Cusanus-Gymnasium:
Kl. 8: Mareike Bühler 19.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 8: Fatima Hemood 12.

Mitteilungen

- **Datenschutz:** Wir möchten unsere Abonnenten anlässlich der in Kraft getretenen DSGVO informieren, welche Daten wir von ihnen gespeichert haben:
  1. Für den Versand führen wir eine Abonnentenliste mit Namen, Adresse, wenn bekannt E-Mail-Adresse, Zahlungseingang, bestellte Heftnummern. Bei Abbestellung werden diese Daten von uns gelöscht.
  2. Auf der Homepage `http://monoid.mathematik.uni-mainz.de/` und in den gedruckten Heften kann jeder L(o)eser seinen aktuellen Punktestand einsehen. In den Listen werden jeweils Name, Schule, Klassenstufe und Punktzahl des jeweils in der Wertung laufenden Schuljahres genannt.

  Wer einverstanden ist, braucht nichts weiter zu veranlassen.
  Sonst kontaktieren Sie uns bitte unter monoid@mathematik.uni-mainz.de
- **Mainzer Mathematik-Akademie:** Die nächste Mainzer Mathematik- Akademie (MMA) findet vom 28. August bis Sonntag, den 1. September 2019 statt. Nähere Informationen zur Akademie und Anmeldemodalitäten erhaltet Ihr rechtzeitig in Monoid oder im Internet unter:
  `www.mathematik.uni-mainz.de/mainzer-mathe-akademie`.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Jasmin Haag, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Vera Ruß
Illustration: Ronja Krüsemer
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Michelle Porth
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 39 | Heft 137 | März 2019

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid