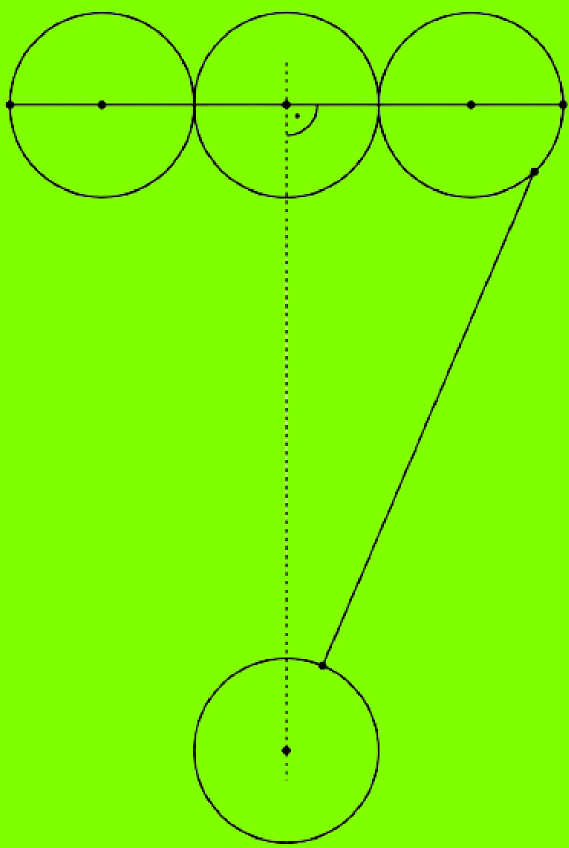
Jahrgang 43 Heft 156 Dezember 2023

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe Lo(e)serin, lieber Lo(e)ser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Februar 2024.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

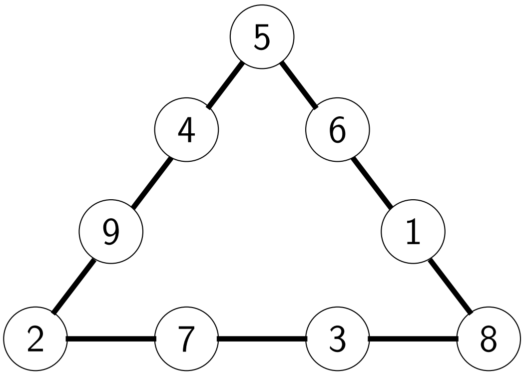
Die Redaktion

Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs

Kann man neun Ziffern so in einem Dreieck anordnen, dass auf jeder Dreiecksseite 4 Ziffern sind und sowohl die Summe der 4 Ziffern als auch die Summe der Quadrate der 4 Ziffern auf allen drei Seiten jeweils untereinander gleich sind?

Lösung ohne Worte

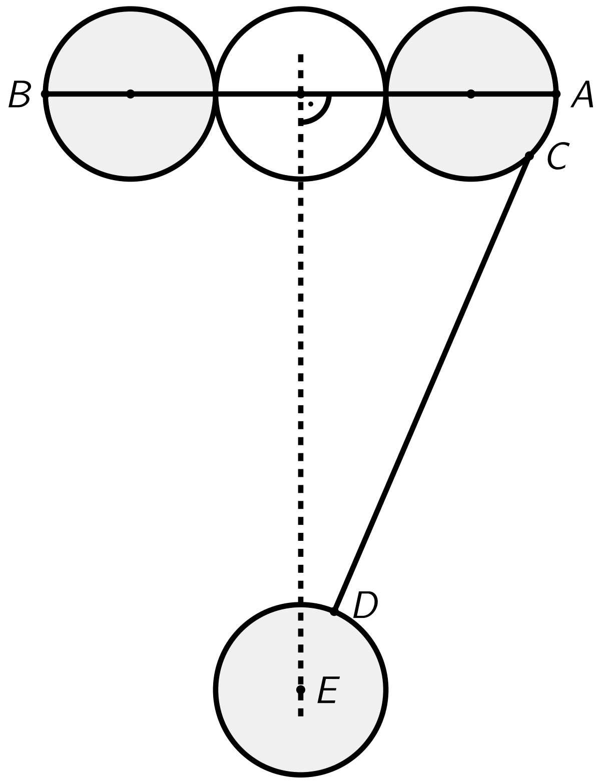


Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

Vergleich der Längen zweier Strecken

Welche der beiden Strecken AB und CD in dieser Figur erscheint Dir länger?



Tatsächlich sind beide Strecken gleich lang.
Sie wurden wie folgt konstruiert:
Gegeben seien drei sich von außen berührende Kreise mit gleich großen Radien r und die Mittelsenkrechte der Strecke AB mit $|AB| = 6r$. C wurde auf einem der äußeren Kreise so wie in der Figur beliebig gewählt.
Der Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $7r$ schneidet die Mittelsenkrechte in einem Punkt E. Dann schneidet die Strecke CE den Kreis mit Mittelpunkt E und Radius r in einem Punkt D.
Für die Strecke CD gilt:

$$|CD| = |CE| - r = 7r - r = 6r = |AB|.$$

Mit anderen Worten, per Konstruktion sind $|CD|$ und $|AB|$ gleich lang - wer es anders sieht, ist Opfer einer optischen Täuschung.

Frobenius im Schnellrestaurant

von Georg Sahliger

Paul und sein Freund sind große Fans von frittierten Hähnchenteilen, am liebsten von einem bestimmten Schnellrestaurant. Am Freitagabend beschließen die beiden, sich mal wieder welche zu gönnen und beschließen weiter, dass 22 Stück, für jeden 11, eine angemessene Menge wäre.

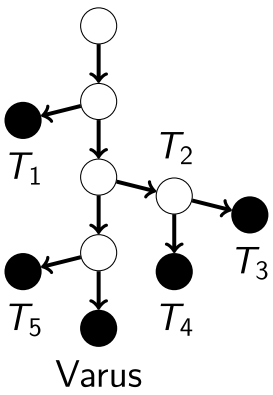
Bei der Bestellung schaut der Verkäufer etwas verzweifelt und meint: „22 Stück gehen nicht, da wir nur 6er, 9er und 20er Packungen anbieten. Da müsst ihr euch schon eine andere Anzahl aussuchen. Aber ich kann euch verraten, dass wir ab einer bestimmten Anzahl jede Bestellung möglich machen können.“ Dies bringt die beiden zum Nachdenken und sie stellen fest, dass die gemeinte Zahl 43 ist.

Das Problem ist in der Mathematik schon älter und als „Münzproblem“ bekannt. Hat man zum Beispiel nur 2− und 5−Cent Münzen, dann ist 3 der größte Betrag, den man nicht bezahlen kann. Diese größte Zahl nennt man auch Frobenius-Zahl, sie ist nach dem deutschen Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) benannt. Auf jeden Fall gibt es bei teilerfremden Beträgen immer eine Frobenius-Zahl. Anders als bei 2 und 6 Cent Münzen, da sich hier natürlich keine ungeraden Zahlen darstellen lassen.

Die sogenannten Frobenius-Nugget-Zahlen $(6, 9, 20)$ stellen einen Sonderfall des Frobenius-Problems (bzw. Münzproblems) dar und bestimmt kannst du (auch ohne zu googeln) beweisen, dass 43 die Frobenius-Zahl sein muss. (Lösung auf Seite 39)

Teile und herrsche!
Auch eine mathematische Beweismethode
von Hartwig Fuchs

Im Jahr 9 n. Chr. befand sich Varus, Oberbefehlshaber des Militärs in den römischen Provinzen in Germanien, auf dem Rückweg von einer Strafexpedition gegen aufständische Germanenstämme im Gebiet zwischen Rhein und Elbe. Im Teutoburger Wald zwang ihn das Gelände, seine Armee aus drei Legionen, zusammen mit Hilfstruppen etwa 20 000 Mann, in einer kilometerlangen Kolonne marschieren zu lassen. Das gab dem Cherusker Arminius, dem Gegner des Varus, die Möglichkeit, immer wieder kleinere Truppenteile T_1, T_2, ... aus der Kolonne abzudrängen und dann zu überwinden. Mit dieser Taktik dezimierte und schwächte er die Varus-Legionen derart, dass er sie schließlich in der berühmten Schlacht endgültig besiegen konnte.



Arminus Strategie beruhte auf einem Handlungsprinzip der Römer, das diesen als eine Erfolg versprechende Methode zur Lösung militärischer und machtpolitischer Situationen galt und die sie das Prinzip „Divide et impera“, also „Teile und herrsche“ nannten:

(D) Löse das Problem, indem du es in Teilprobleme zerlegst, die du dann nacheinander löst.

In der Mathematik hat man erkannt, dass das römische Rezept (D) bei bestimmten Problemen eine geeignete Möglichkeit zu ihrer Bearbeitung sein kann. Denn beim Versuch der Lösung eines Problems steht der Mathematiker anfangs oft vor einer komplexen Situation:

Er hat es zu tun mit einer großen, manchmal unendlichen Anzahl von Objekten samt dem Konglomerat aus deren Eigenschaften und dem dichten Geflecht ihrer Beziehungen.

Da kann es für sein Vorhaben von Vorteil sein, wenn er das gegebene Problem in lösbare Teilprobleme aufspalten kann: Denn damit wird es zumindest vereinfacht, wenn es dadurch nicht sogar lösbar wird.

Die logische Struktur eines Beweises mit Strategie (D) lässt sich graphisch gut veranschaulichen als „Baum mit Ästen“, wobei die aus dem Problem herausgelösten Teilprobleme als „Äste“ und das durch die Abspaltung immer mehr vereinfachte Problem als „Baum“ dargestellt werden.

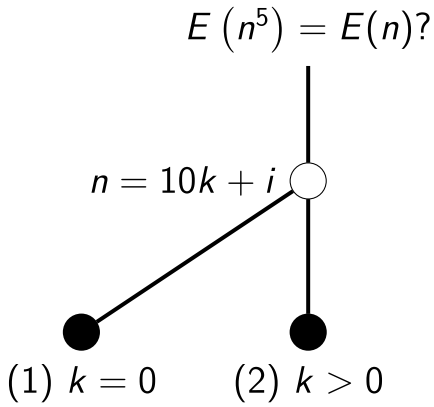
Für mathematische Einsteiger soll nun das Arbeiten mit der Strategie „Teile und herrsche“ an einigen elementaren Beispielen demonstriert werden.

Ein arithmetisches Problem - mit einer Teillösung gelangt man zur Lösung.

Für jede ganze Zahl n gilt: Die Einerziffer von n und n^5 sind gleich.

Nachweis

Zunächst: Die Einerziffer einer ganzen Zahl n sei $E(n)$. Da jede ganze Zahl n die Darstellung $n = 10k + i$ mit einer ganzen Zahl k und $i = 0$, 1, 2, ..., 9 besitzt, können wir die Fallunterscheidung treffen:



(1) $k = 0$.

Dann ist $n = i$ und $E(n) = i$ sowie $E\left(n^5\right) = E\left(i^5\right)$. Mit einem Taschenrechner prüft man schnell nach, dass dann $E\left(i^5\right) = i$ ist. Daher gilt: $E\left(n^5\right) = E(n)$.

(2) $k > 0$.

Dann ist $E(n) = E(10k + i) = E(10k) + E(i) = i$ wegen $E(10k) = 0$. Aus

$$\begin{aligned} n^5 &= (10k + 1)^5 \\ &= (10k)^5 + 5(10k)^4 i + 10(10k)^3 i^2 + 10(10k)^2 i^3 + 5(10k)^1 i^4 + i^5 \\ &= 10m + i^5 \end{aligned}$$

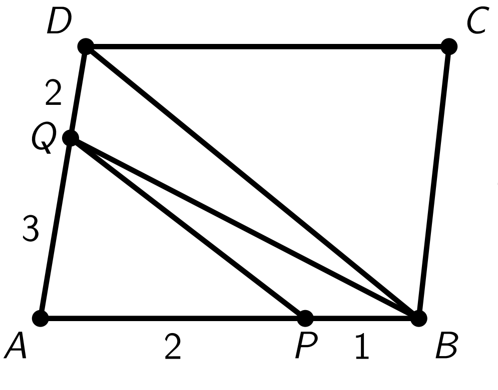
für eine ganze Zahl m folgt mit (1):

$$E\left(n^5\right) = E\left(10m + i^5\right) = E\left(i^5\right) = i = E(n).$$

Ein geometrisches Problem - mit drei Teillösungen gelangt man zur Lösung

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit der Fläche f.

Der Punkt P teile die Strecke AB im Verhältniss 2 : 1 von A aus und der Punkt Q teile die Strecke AD im Verhältnis 3 : 2 von A aus.

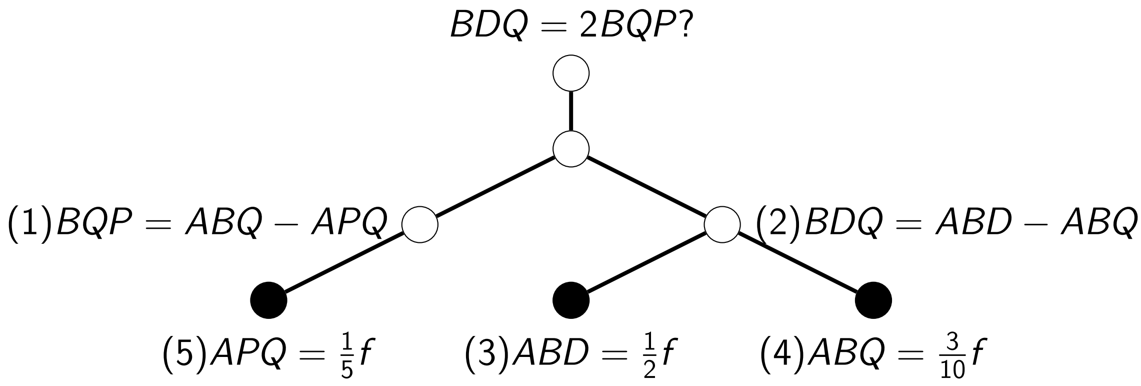


Dann gilt: Die Fläche des Dreiecks $\triangle BDQ$ ist doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks $\triangle BQP$.

Nachweis

Mit XYZ sei sowohl das Dreieck mit dem Eckpunkten X, Y und Z als auch seine Fläche und mit XY sei die Strecke mit den Endpunkten X und Y sowie

auch ihre Länge bezeichnet.
Dann wollen wir zeigen: $BDQ = 2 \cdot BQP$.
Dieser Nachweis lässt sich in zwei Teilprobleme aufspalten:



(1) $BQP =$? und (2) $BDQ =$?.
Wir betrachten zunächst (2).
Wegen $BDQ = ABD - ABQ$ lässt sich dieser Fall erneut in zwei Teilprobleme aufteilen:
(3) $ABD =$? und (4) $ABQ =$?
Im Teilproblem (3) ist $ABD = \frac{1}{2}f$, denn das Parallelogram $ABCD$ wird von der Diagonalen BD in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt.
Im Teilproblem (4) gilt: $ABQ = \frac{3}{10}f$.
Da nach Voraussetzung $AQ = \frac{3}{5}AD$ ist und weil die Dreiecke ABQ und ABD die gleiche Höhe aus B besitzen, folgt mit (3):

$$ABQ = \frac{3}{5}ABD = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}f = \frac{3}{10}f.$$

Nun zum Teilproblem (1). Man kennt BQP, wenn man APQ bestimmt hat. Nach Voraussetzung ist $AP = \frac{2}{3} \cdot AB$ und die Dreiecke APQ, ABQ haben die gleiche Höhe aus Q. Daraus folgt:

$$APQ = \frac{2}{3} \cdot ABQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}f = \frac{1}{5}f$$

Mit den Teillösungen (3),(4) und (5) ist die Behauptung $BDQ = 2BQP$ bewiesen. Denn aus (3) und (4) folgt (2): $BDQ = \frac{1}{2}f - \frac{3}{10}f = \frac{2}{10}f$,
und aus (4) und (5) folgt (1): $BQP = \frac{3}{10}f - \frac{1}{5}f = \frac{1}{10}f$.

Ein stochastisches Problem - mit fünf Teillösungen gelangt man zur Lösung

Aus einer Urne, in der zwei rote und drei schwarze Kugeln liegen, nimmt ein Spieler durch Zufallsauswahl nacheinander jeweils eine Kugel, die er nicht in die Urne zurücklegt. Er darf dieses Vorgehen jederzeit abbrechen. Bei jeder Wahl, durch die er eine rote Kugel erhält, gewinnt er 1€, bei einer schwarzen Kugel zahlt er 1€.

Da die Urne mehr schwarze als rote Kugeln enthält, könnte man meinen, dass der Spieler bei vielen Spielen insgesamt Geld verliert. Falsch! Es gibt eine für den Spieler günstige Spielstrategie.

Lösung

Behauptung:

(1) Die Figur ist eine graphische Darstellung einer Gewinn-Strategie.

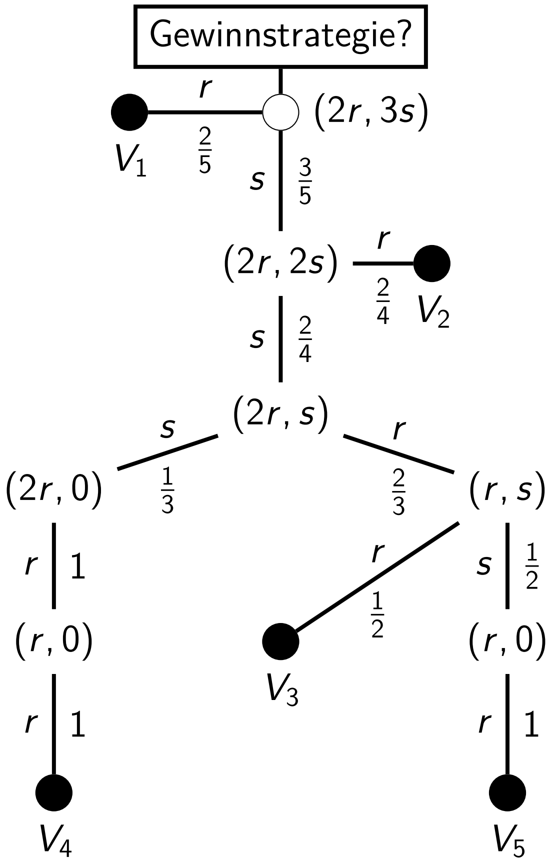
Erläuterung der Figur

Die Strategie (1) besteht aus fünf möglichen mit ○ startenden und mit ● endenden Spielverläufen

$$V_i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Die Paare (mr, ns) geben den zum jeweiligen Spielstand gehörigen Urneninhalt aus m roten und n schwarzen Kugeln an.

Die Buchstaben und Zahlen bedeuten: Die Zufallsauswahl einer roten (r) bzw. schwarzen (s) Kugel aus der Urne $(\ldots, \ldots)$ hat die jeweils angegebene Wahrscheinlichkeit.



Wieso ist die Strategie (1) günstig für den Spieler? Aus der Figur ergeben sich unmittelbar die finanzielten Ergebnisse $E(V_i)$ der Spielverläufe V_i.

V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
	r	sr	$ssrr$	$sssrr$	$ssrsr$
$E(V_i)$	$+1$	0	0	-1	-1

Die Tabelle zeigt, dass auf Dauer der Spieler öfter verliert als gewinnen wird. Aber:

(2) Die Wahrscheinlichkeit $W(V_1)$ eines Gewinnspiels V_1 ist größer als die Wahrscheinlichkeit $W(V_4)$ und $W(V_5)$ der Verlustspiele V_4 und V_5 zusammen.

Begründung von (2)

Die in der Figur angegebenen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der stochastischen Definition

$$W(r \text{ aus Urne } (mr, ns)) = \frac{m}{m+n},\ W(s \text{ aus Urne } (mr, ns)) = \frac{n}{m+n}.$$

(3) Somit gilt: $W(V_1) = W(r \text{ aus Urne } (2, 3) = \frac{2}{5}$.

Die Wahrscheinlichkeit $W(V_4)$ und $W(V_5)$ sind das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs der Spielverläufe V_4 und V_5. Also ist

$$W(V_4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{10} \text{ und } W(V_5) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10}.$$

Somit gilt:

(4) $W(V_4 \text{ oder } V_5) = W(V_4) + W(V_5) = \frac{1}{5}$.

Wegen (3) darf der Spieler erwarten: In fünf Spielen gewinnt er zwei Spiele und damit 2€ und er verliert ein Spiel und 1€. Insgesamt gewinnt er somit 1€ in fünf Spielen, was einem durchschnittlichen Gewinn von 0,20€ in einem Spiel entspricht.

Ein algebraisches Problem - eine Wolke von Teillösungen ist die Lösung

Man untersucht, ob die Gleichung

(G) $x^2 + y^3 = z^4$

Lösungen (x, y, z) mit Primzahlen x, y und z besitzt.

Lösung

Annahme: x, y und z seien Primzahlen.

Wir untersuchen nun (G) durch Zerlegung des Problems in lauter Teilprobleme. Falls eine Zahl n gerade bzw. ungerade ist, dann schreiben wir dafür kurz *ng* bzw. *nu*.

Es gelte *zg*. Dann ist $z = 2$ und somit $z^4 = 16$.

(1) Es gelte *xg* und *yg*, also ist $x = y = 2$. Folglich ist $x^2 + y^3 > 16$ - ein Widerspruch.

(2) Es gelte *xu* und *yu*. Dann ist $x \geq 3$, und $y \geq 3$, so dass $x^2 + y^3 > 16$ ist - ein Widerspruch.

(3) Aus *xg* und *yu* oder *xu* und *yg* folgt: x^2+y^2 ist ungerade - ein Widerspruch.

Es gelte nun *zu*, also $z \geq 3$.

(4) Gilt *yg*, so ist $y = 2$ und *xu*. Aus (G) folgt damit:
$z^4 - x^2 = (z^2 - x)(z^2 + x) = 8$. Wegen $z^2 - x > 1$ und $z^2 + x > 9$ ist daher $z^4 - x^2 > 9$ - ein Widerspruch.

(5) Es gelte nun *yu*. Also ist *xg* und daher $x = 2$. Wegen $x^2 = 4$ ist $z^4 - 4 = (z^2 - 2)(z^2 + 2) = y^3$. Somit ist $z^2 + 2$ ein Teiler von y^3, also $z^2 + 2$ ist $1, y, y^2$ oder y^3.

Fallunterscheidung:

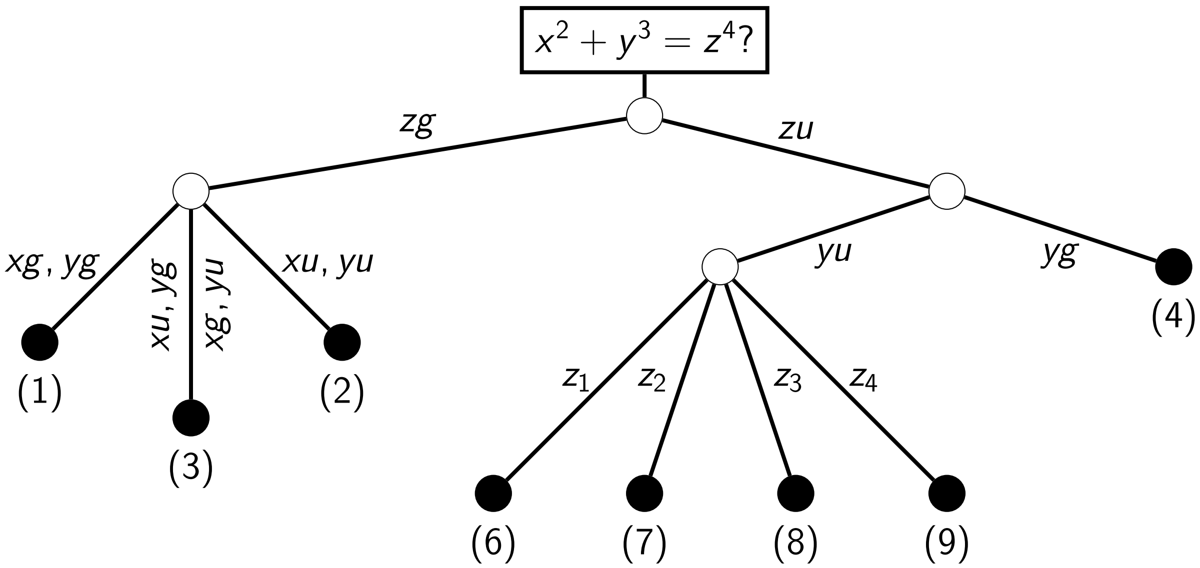
(6) Fall z_1: Es sei $z^2 + 2 = 1$ - ein Widerspruch.

(7) Fall z_2: Es sei $z^2 + 2 = y$. Dann ist $z^2 - 2 = y^2$. Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten Gleichung, so erhält man die Gleichung $y^2 - y + 4 = 0$, die keine reelle Lösung y besitzt - im Widerspruch zur Annahme.

(8) Fall z_3: Es sei $z^2 + 2 = y^2$. Dann ist $z^2 - 2 = y$ und aus der Differenz $(z^2 + 2) - (z^2 - 2) = y^2 - y$ folgt die Gleichung $y^2 - y - 4 = 0$, die keine ganzzahligen Lösungen besitzt - ein Widerspruch.

(9) Fall z_4: Es sei $z^2 + 2 = y^3$. Dann ist $z^2 - 2 = 1$. Folglich ist z nicht rational - ein Widerspruch.

Die Lösung der acht Teilprobleme bilden die Lösung des gegebenen Problems: Die Gleichung G hat keine Lösung (x, y, z) mit primen x, y, z.
Die graphische Darstellung des Lösungsweges unseres Problems, den man nach dem Prinzip „Teile und herrsche" konstruiert hat siegt wie folgt aus.



Ein zahlentheoretisches Problem - Teillösungen reduzieren ein Problem auf ein Teilproblem

Seit Euklid (um 300 v. Chr.) weiß man, dass jede natürliche Zahl eine im Wesentlichen bis auf die Reihenfolge eindeutige multiplikative Zerlegung in Primfaktoren besitzt.
Aber erst seit 1642 hat sich Christian Goldbach dem Thema der additiven Zerlegung von natürlichen Zahlen (erstmals?) zugewandt.
Heute ist bewiesen (Terence Tao): Jede natürliche Zahl $n > 5$ ist die Summe von *höchstens* 5 Primzahlen.
Goldbach glaubte jedoch, es besser zu wissen. Er vermutete, konnte es aber nicht beweisen:

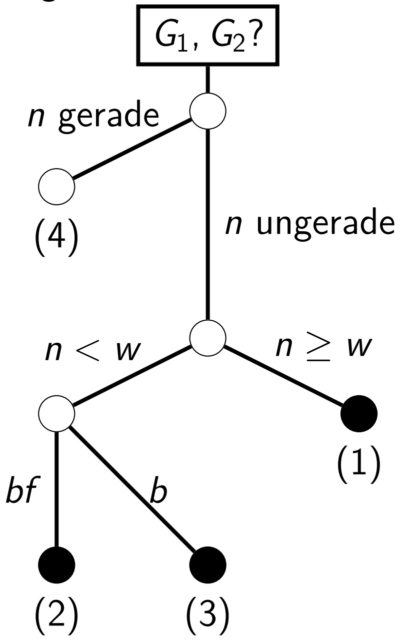
G : Jede natürliche Zahl n, $n > 5$ ist die Summe von drei Primzahlen.

Heute spaltet man Goldbachs Vermutung G auf in die zwei Teilfragen G_1 und G_2.

G_1 : Für welche ungeraden Zahlen $n \geq 7$ gilt: n ist die Summe dreier Primzahlen?

G_2 : Für welche geraden $n \geq 4$ gilt: n ist die Summe zweier Primzahlen?

Begründung für G_2.
Für jedes gerade $n \geq 6$ sei G_2 bewiesen. Dann ist $n-2$ gerade und $n-2 = p_1+p_2$ mit primen p_1, p_2. Folglich ist $n = p_1 + p_2 + 2$. Also ist jedes n auch die Summe dreier Primzahlen.
Nachdem man fast 300 Jahre lang keinen Zugang zu einem Beweis von G fand, konnte 1937 I. M. Winogradow (1891 - 1983) einen ersten wesentlichen Beitrag zum Beweis von G_1 leisten. Er zeigte:
Es gibt eine Zahl w, für die gilt: G_1 trifft zu für jedes ungerade $n \geq w$.



Welchen Wert besitzt w? Im Jahr 2002 wurde bewiesen, dass $w = 10^{1346}$ gesetzt werden darf.

(1) H. Helfgott hat dann 2014 mit einem 133-seitigen Beweis gezeigt, dass die Goldbach-Vermutung sogar für jedes ungerade n, $n \geq w = 10^{30}$ zutrifft.

Es blieb die Frage G_1 für $n < 10^{30}$.
Für deren Beantwortung hat man zwei Möglichkeiten:

(2) Man versucht zu beweisen, dass die Vermutung G für jedes ungerade n, $7 \leq n < 10^{30}$, zutrifft, aber dies wurde auf Grund von (3) überflüssig.

(3) Man überprüft der Reihe nach jedes ungerade $n \geq 7$.* Das hat man mit Computern getan - Ergebnis: Für ungerade $n < 8{,}875 \cdot 10^{30}$ trifft die Vermutung zu.

Mit (1) und (2) ist die Frage G_1 vollständig beantwortet: Die Goldbach-Vermutung G trifft zu für jedes ungerade $n \geq 7$.
Für die Frage G_2 gilt:

(4) Man hat zwar viele gerade Zahlen untersucht und dabei keine einzige gefunden, die keine Summe zweier Primzahlen ist, eine vollständige Lösung des Problems G_2 steht jedoch immer noch aus.

Mit der Lösung des Teilproblems G_1 ist der Beweis der Goldbach-Vermutung G auf das ungelöste Teilproblem G_2 zurückzuführen.

* Diese Beweis-Methode nennt man die brute force Methode. Sie ist eine extreme Form des Prinzips „teile und herrsche“, denn sie spaltet ein Problem in lauter „atomare“ Teilprobleme auf - in (3) sind das etwa $\frac{1}{2} \cdot 10^{30}$ Teilprobleme.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Peter ist verblüfft. „Der Nikolaus hat mir keine Süßigkeiten in den Sack gesteckt, sondern einen Zettel mit einer Rechenaufgabe. Auf der Rückseite steht, dass ich eine Belohnung erhalte, wenn ich die Aufgabe gelöst habe“, sagt er zu Paul. „Ich löse Deine Aufgabe und wir teilen die Belohnung“, entgegnet Paul. „Zeig mal her!“
„Ich soll in dieser Bruchgleichung in jedem Kästchen eine andere Ziffer von 1 bis 9 einsetzen. Der Nikolaus hat freundlicherweise die 1 schon vorgegeben“, berichtet Peter und zeigt Paul den Zettel:

$$\boxed{\frac{1}{\square\cdot\square}+\frac{\square}{\square\cdot\square}+\frac{\square}{\square\cdot\square}=1}$$

Gibt es eine gültige Möglichkeit, die Ziffern einzusetzen? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Februar 2024 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 154

In Heft 154 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Frau Pommer backt 15 Plunderteilchen: sieben davon mit Kirschfüllung, sieben mit Pfirsichfüllung und eines mit Apfelfüllung. Sie legt sie in genau dieser Reihenfolge im Kreis auf ein rundes Blech und schiebt sie in die Mikrowelle. Alle Teilchen sehen gleich aus und Herr Pommer kennt nur ihre relative Reihenfolge, weil das Blech sich im Ofen gedreht hat. Er möchte unbedingt das Apfelteilchen essen, aber seine Frau erlaubt ihm nur, von höchstens drei Teilchen nacheinander zu probieren, bevor er sich endgültig für ein Plunderteilchen entscheiden muss. Kann er unter dieser Bedingung sicher das Apfelteilchen identifizieren? (Die Antwort ist zu begründen!)

Lösung

Wir gehen davon aus, dass Frau Pommer die 15 Teilchen im Uhrzeigersinn auf das Blech gelegt hat, andernfalls ist bei den folgenden Überlegungen die Drehrichtung zu vertauschen. Der einfachen Beschreibung halber seien die Teilchen von Herrn Pommer im Uhrzeigersinn von 1 bis 15 nummeriert. Er probiert zuerst das Teilchen mit der Nummer 8. Fall 1: Nummer 8 ist das Apfelteilchen. Damit hat er, was er will.

Fall 2: Nummer 8 ist ein Kirschteilchen. Dann ist Nummer 15 ein Pfirsichteilchen und das Apfelteilchen befindet sich nicht zwischen diesen beiden. Nun probiert Herr Pommer die Nummer 4.
Fall 2*a*: Nummer 4 ist das Apfelteilchen. Damit hat er, was er will.
Fall 2*b*: Nummer 4 ist ein weiteres Kirschteilchen. Dann gilt dies auch für die Teilchen 5 bis 7. Nun probiert Herr Pommer die Nummer 2. Wenn es das Apfelteilchen ist, hat er, was er will. Wenn es wieder ein Kirschteilchen ist, muss Nummer 1 das Apfelteilchen sein. Wenn Nummer 2 dagegen ein Pfirsichteilchen ist, muss Nummer 3 das Apfelteilchen sein.
Fall 2*c*: Nummer 4 ist ein Pfirsichteilchen. Dann gilt dies auch für die Teilchen 1 bis 3. Nun probiert Herr Pommer die Nummer 6. Wenn es das Apfelteilchen ist, hat er, was er will. Wenn es wieder ein Pfirsichteilchen ist, muss Nummer 7 das Apfelteilchen sein. Wenn Nummer 6 dagegen ein Kirschteilchen ist, muss Nummer 5 das Apfelteilchen sein.
Fall 3: Nummer 8 ist ein Pfirsichteilchen. Dann ist Nummer 1 ein Kirschteilchen und das Apfelteilchen befindet sich nicht zwischen diesen beiden. Nun probiert Herr Pommer die Nummer 12. Analog zu Fall 2 ergeben sich die Unterfälle 3*a* bis 3*c*, die jeweils sicher zu dem Apfelteilchen führen.
Herr Pommer kann also spätestens nach drei Versuchen das Plunderteilchen mit Apfelfüllung eindeutig identifizieren.
Richtige oder fast richtige Lösungen wurden von Matej Benedikt und Jan Weber eingesandt.
Ein andermal backt Frau Pommer neben dem Apfelteilchen weniger als sieben, aber wieder gleich viele Kirsch- und Pfirsichteilchen. Bei welcher Gesamtzahl braucht Herr Pommer nur höchstens zwei Teilchen zu probieren, um sein Lieblingsstück zu finden? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Mathematische Lese-Ecke
Lesetipps zur Mathematik
von Martin Mattheis

Dangerfield, Jan, et. al.: Big Ideas: Das Mathematikbuch

Auf den ersten Blick klingt es vermessen, ein Sachbuch über Mathematik schlicht „Das Mathematikbuch" zu nennen. Man könnte darin den unerfüllbaren Anspruch sehen, die ganze Mathematik in einem einzigen Buch zusammenfassen zu können. Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher schreibt dazu in seinem Vorwort „Die Autoren … schaffen es jedoch, den Dschungel zu lichten. Dazu schlagen sie große Schneisen und ermöglichen so Blicke in die Welt der Mathematik, die Einsichten eröffnen. Was das Buch wirklich einzigartig macht, ist, dass es nicht in der Vergangenheit stehen bleibt, sondern durchgängig die Verbindung zu moderner Mathematik sucht." Da der Rezensent diese Einschätzung des Direktors des Mathematikums teilt, könnte die Rezension an dieser Stelle bereits beendet werden. Allerdings möchte ich doch inhaltlich noch ein paar Einblicke geben, was die Leser erwartet. Die Grobeinteilung folgt den historischen Epochen Antike, Mittelalter, Neuzeit, Aufklärung, das 19. Jahrhundert und moderne Mathematik von 1900 bis heute. Anhand von bedeutenden mathematischen Entdeckungen wird in kurzen und unabhängig voneinander lesbaren Kapiteln von einer bis zu vier Seiten die Entdeckung selbst und dazu noch deren Bedeutung für die Mathematik beleuchtet. Natürlich kann man auf maximal vier Seiten kaum eine der aufgeführten Ideen allumfassend ausführen, es gelingt den Autoren jedoch dem Leser einen ersten Einblick zu verschaffen, worum es bei den vorgestellten Begrifflichkeiten geht. „Das Mathematikbuch" ist dabei kein Buch, das man von Anfang bis Ende durchlesen wird, allerdings wird man es immer wieder zur Hand nehmen, darin Blättern und bei einem Kapitel hängen bleiben. Abgerundet wird das lesenswerte Sachbuch durch Aphorismen und Kurzbiographien von bekannten Mathematikerinnen und Mathematikern.

Fazit

Ein Buch, das in keiner Schulbibliothek fehlen sollte und das man guten Herzens Schülerinnen und Schülern empfehlen kann, die wissen wollen, was Mathematik ausmacht und worüber man in der Mathematik forschen kann. Je nach mathematischem Anspruch und vorhandenen Vorkenntnissen sind vielleicht nicht alle Kapitel für alle Altersgruppen geeignet, aber jeder ab Klasse 5 wird einiges spannendes und lesenswertes entdecken.
Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺ ☺ ☺

Angaben zum Buch:
Dangerfield, Jan, et. al.: Big Ideas: Das Mathematikbuch,
München (Dorling Kindersley) 2020, ISBN 978-3-8310-4016-2, geb. 352 Seiten
Art des Buches: Sachbuch
Mathematisches Niveau: verständlich
Altersempfehlung: ab 11 Jahren

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 155

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Ein vielziffriges Produkt

Es sei $n = \underbrace{333\dots33}_{\text{2023 Ziffern}}7$. Bestimme den Wert von n^2. (H.F.)

Lösung:

Erste Lösung (experimentell):

$$\begin{aligned} 37^2 &= 1369 \\ 337^2 &= 113569 \\ 3337^2 &= 11135569 \\ &\text{und so weiter} \end{aligned}$$

Im Vertrauen darauf, dass für die Quadratzahlen die aus der Zahlenpyramide erkennbare Gesetzmäßigkeit gilt, ergibt sich*

$$n^2 = \underbrace{33\ldots33}_{\text{2023 Ziffern 3}}\,7^2 = \underbrace{111\ldots11}_{\text{2023 Ziffern 1}}\,3\,\underbrace{555\ldots55}_{\text{2022 Ziffern 5}}\,69$$

Zweite Lösung (numerisch):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
3&3&3&\cdot&\cdot&\cdot&3&3&3&7&\cdot&3&3&3&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&3&3&3&7 \\
\hline
&&&&&&&&&&2&3&3&3&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&3&3&5&9 \\
&&&&&&&&&1&0&0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0&1&1& \\
&&&&&&&&1&0&0&0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0&1&1&& \\
&&&&&&&1&0&0&0&0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0&1&1&&& \\
&&&&&&&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&&& \\
&&&&&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&&&&&&&&& \\
&&&&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&1&&&&&&&&&& \\
&&&1&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&0&1&1&&&&&&&&&&& \\
\hline
&&&1&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&3&5&5&5&5&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&5&5&6&9 \\
&&&\multicolumn{7}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{2023 Ziffern 1}}}&&\multicolumn{10}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{2022 Ziffern 5}}}&&
\end{array}$$

Dritte Lösung:

$$\begin{aligned} n &= \underbrace{333\ldots33}_{\text{2023 Ziffern}}7 = \underbrace{333\ldots33}_{\text{2024 Ziffern}}+4 \\ &= \underbrace{999\ldots99}_{\text{2024 Ziffern}}\cdot\frac{1}{3}+4 \\ &= (\underbrace{1000\ldots00}_{\text{2025 Ziffern}}-1)\cdot\frac{1}{3}+4 \\ &= (10^{2024}-1)\cdot\frac{1}{3}+4 \\ &= \frac{10^{2024}}{3}+\frac{12-1}{3} \end{aligned}$$

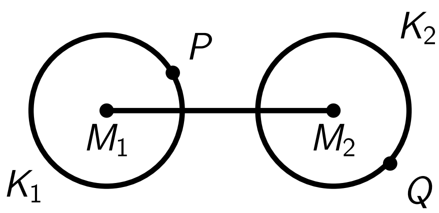
* Man kann dies auch mithilfe von sog. vollständiger Induktion beweisen.

$$\begin{aligned}
n^2 &= \left(\frac{10^{2024}}{3}+\frac{11}{3}\right)^2\\
&= \frac{10^{2\cdot 2024}}{3^2}+2\cdot\frac{10^{2024}}{3}\cdot\frac{11}{3}+\frac{11^2}{3^2}\\
&= \frac{10^{4048}}{9}+\frac{22\cdot 10^{2024}}{9}+\frac{121}{9}\\
&= \underbrace{999\ldots 99}_{\text{4048 Ziffern}}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+22\cdot\Big(\underbrace{999\ldots 99}_{\text{2024 Ziffern}}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\Big)+\frac{121}{9}\\
&= \underbrace{111\ldots 11}_{\text{4048 Ziffern}}+22\cdot\underbrace{111\ldots 11}_{\text{2024 Ziffern}}+\frac{121+1+22}{9}\\
&= \underbrace{111\ldots 11}_{\text{4048 Ziffern}}+(20+2)\cdot\underbrace{111\ldots 11}_{\text{2024 Ziffern}}+16\\
&= \underbrace{111\ldots 11}_{\text{4048 Ziffern}}+\underbrace{222\ldots 220}_{\text{2025 Ziffern}}+\underbrace{222\ldots 22}_{\text{2024 Ziffern}}+16.
\end{aligned}$$

Für die beiden letzten Ziffern der vier Summanden gilt $11+20+22+16=69$.

$$n^2=\underbrace{111\ldots 11}_{\text{2023 Ziffern}}3\underbrace{555\ldots 55}_{\text{2022 Ziffern}}69.$$

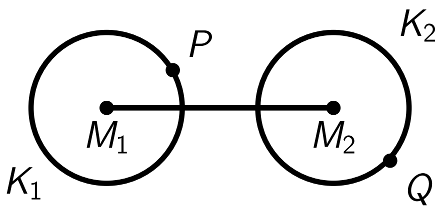
II. Kürzeste Strecke



K_1 und K_2 seien zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 4\,\text{cm}$, $r_2 = 4\,\text{cm}$ sowie den Mittelpunkten M_1 und M_2, die in einem Abstand von 10 cm voneinander entfernt liegen. P sei ein beliebiger Punkt auf K_1 und Q ein beliebiger Punkt auf K_2. Ist die Strecke PQ am kürzesten, wenn P und Q auf der Strecke M_1M_2 liegen? Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.

(H.F.)

Lösung:



Der Schnittpunkt M_1M_2 mit K_1 sei A und der mit K_2 sei B. Es sei $P \neq A$ oder $Q \neq B$ bzw. $\overline{AB} \neq \overline{PQ}$. Da eine gerade Strecke stets die kürzeste Verbindung von zwei Punkten (in einer Ebene) ist, ist $|M_1M_2|$ kürzer als eine Verbindung über Umwege, zum Beispiel über die Punkte P und Q. Also gilt, wenn man $\overline{M_1M_2}$ an A und B teilt,

$$|M_1M_2| = |M_1A| + |AB| + |BM_2| < |M_1P| + |PQ| + |QM_2| \qquad (*)$$

(sofern P oder Q nicht auf M_1M_2 liegt) Da alle Punkte auf einem Kreis denselben Abstand zum Mittelpunkt haben, ist

$$|M_1A| = |M_1P| \text{ und } |BM_2| = |QM_2|$$

Somit folgt aus der Ungleichung $(*)$

$$|M_1P| + |AB| + |QM_2| < |M_1P| + |PQ| + |QM_2|$$

Damit ist $|AB| < |PQ|$. (1)
Falls $P = A$ und $Q = B$ ist, dann ist $|AB| = |PQ|$. (2)
Mit (1) und (2) ist die Behauptung gezeigt.

III. Uhrzeiger

Um 18 Uhr (zum Beispiel) stehen die Zeiger einer Uhr einander gegenüber. Wie lange dauert es, bis der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt? Gib deine Antwort sekundengenau. (Wolfgang J. Bühler)

Lösung:
Wir rechnen sofort in Sekunden. Der Minutenzeiger ist 12-mal so schnell wie der Stundenzeiger. Sie treffen sich an der Stelle $30\,\text{min} + x = 1800\,\text{s} + x$. Der Stundenzeiger hat sich dabei nur um x bewegt, wobei x die Einheit Sekunde besitzt. Also gilt $12x = 1800\,\text{s} + x$ bzw. $x = \frac{1800}{11}\,\text{s} = 163{,}6\overline{3}\ldots\,\text{s}$. Dies entspricht also $163{,}6\overline{3}\,\text{s} = 2\,\text{min}\,43{,}6\overline{3}\,\text{s}$ nach 18:30 Uhr. Es dauert also ungefähr 32 min 44 s.
Für die jüngeren Schüler: Um die Aufgabe zu lösen, ist es zuerst notwendig, herauszufinden, wie schnell sich die verschiedenen Zeiger (relativ zueinander) bewegen. Wir messen hier die Geschwindigkeiten in Umdrehungen pro 12 Stunden. Der Minutenzeiger hat eine Geschwindigkeit von $12 = 11 + 1$ Umdrehungen pro 12 Stunden, denn in jeder Stunde schafft er eine Umdrehung, der Stundenzeiger hat eine Geschwindigkeit von 1 Umdrehung pro 12 Stunden. Der Minutenzeiger ist also deutlich schneller, aber er muss auch eine halbe Umdrehung „Vorsprung einholen“, die der Stundenzeiger hat, der ist nämlich schon an der 6, hat also bereits eine halbe Umdrehung. Zusätzlich zu der halben Stunde Vorsprung bewegt sich der Stundenzeiger auch noch selbst weiter, der Minutenzeiger ist aber $11 + 1 - 1 = 11$ Umdrehungen pro 12 Stunden schneller. Nun soll er mit dieser „zusätzlichen“ Geschwindigkeit eine halbe Umdrehung aufholen. Da eine volle Umdrehung zwei halbe Umdrehungen sind, kann man die zusätzliche Geschwindigkeit des Minutenzeigers auch als 22 halbe Umdrehungen pro 12 Stunden schreiben. Wenn man das nun in Sekunden umrechnet, so erhält man ungefähr 32 min 44 s.

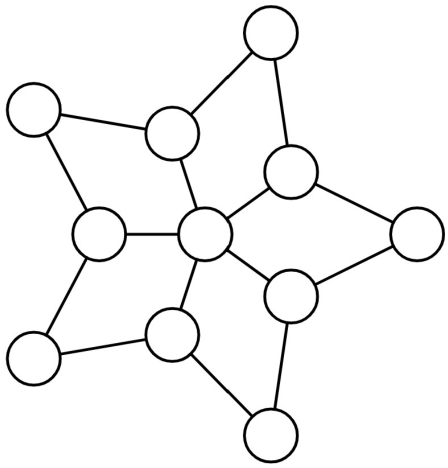
IV. Jahreszahlen-Schnipsel

Von elf Blättern Papier wird eines mit der Schere so zerschnitten, dass es in fünf Teile zerlegt wird. Danach zerteilt man ein weiteres Blatt oder eines der fünf Papierschnipsel wieder in fünf Teile. Dies wiederholt man immer wieder. Kann man nun durch wiederholte Schnitte erreichen, dass insgesamt 2023 Stücke Papier vorhanden sind und wie viele Schnitte sind dann gegebenenfalls dazu erforderlich? (H.F.)

Lösung:

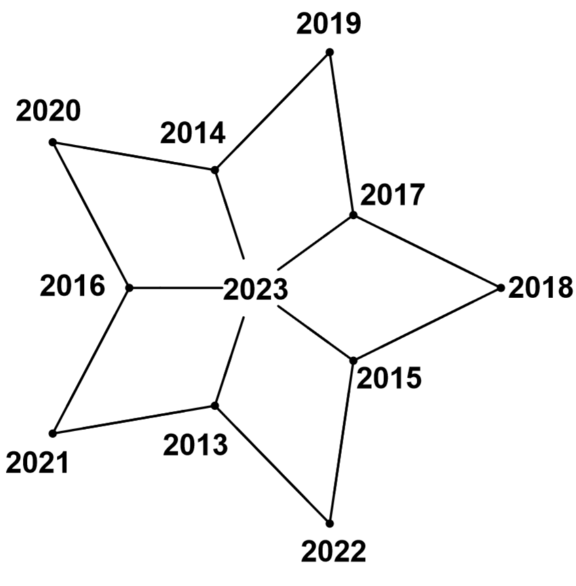
Durch jeden Schnitt wird ein Papierstück zerstört und durch $5 = 1 + 4$ neue ersetzt. Somit erhöht sich ihre Anzahl bei jedem Schnitt um 4. Nach x Schnitten hat man daher $11 + 4x$ Papierstücke. Aus $11 + 4x = 2023$ folgt daher: Nach $x = 503$ Schnitten sind genau 2023 Papierschnipsel vorhanden.

V. Zahlenstern

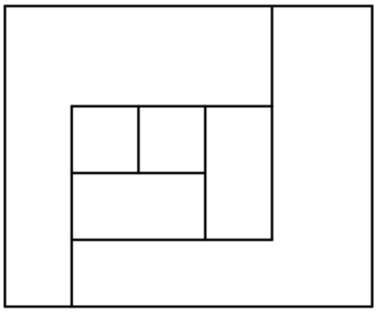


Gegeben sei ein Zahlenstern, der aus fünf Vierecken besteht. Trage die Zahlen $2013, 2014, \ldots, 2023$ so in die Kreise der Figur ein, dass die Summen in den Vierecken übereinstimmen und die Zahl 2023 in möglichst vielen Vierecken vorkommt. Dabei darf jede Zahl nur einmal verwendet werden. (H.F.)

Lösung:



VI. Färbeproblem



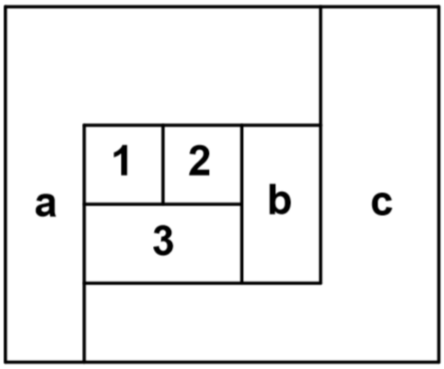
Male in der Figur die Flächen jedes Teilgebietes mit einer anderen Farbe aus und zwar so, dass keine zwei aneinander grenzende Gebiete von gleicher Farbe sind. Kann man diese Vorgabe ...

a) ... mit drei Farben

b) ... mit vier Farben

erfüllen? (H.F.)

Lösung:



a) Da sich die Gebiete, die mit 1, 2 und 3 beschriftet sind, untereinander berühren, (1 berührt 2 und 3, 2 berührt 1 und 3, 3 berührt 1 und 2), müssen sie verschieden gefärbt sein. Dann aber muss das Gebiet a mit einer anderen Farbe gefärbt werden, da es die Gebiete 1, 2 und 3 berührt, und das ist nicht erlaubt, da nur drei Farben zur Verfügung stehen.

b) Die vier Farben seien mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Für $a = 4$, $b = 1$ und $c = 2$ besitzt die Figur eine gesuchte Lösung.

VII. Was ist wahrscheinlicher?

Beim Schulfest am Martin-Mettler-Gymnasium wird auch eine Tombola angeboten. In einer Urne liegen dazu Kugeln mit Zahlen darauf: Eine Kugel mit der Nummer 1, zwei Kugeln jeweils mit der Nummer 2, drei Kugeln jeweils mit der Nummer 3, und so weiter bis zehn Kugeln jeweils mit der Nummer 10.

Karin zieht eine Kugel. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher: Sie zieht eine Kugel mit der Nummer 10 oder sie zieht eine der Kugeln mit einer Nummer 1 oder 2 oder 3 oder 4? (MG)

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, zufällig eine Kugel mit der Nummer k zu ziehen, ist

$$P(k) = \frac{\text{Anzahl der Kugeln mit der Nummer } k}{\text{Anzahl aller Kugeln}}.$$

Die Gesamtanzahl aller Kugeln ist $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit der Nummer k zu ziehen $P(k) = \frac{k}{55}$.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit der Nummer 10 zu ziehen, ist

$$P(10) = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} P(1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3 \text{ oder } 4) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} \\ &= \frac{1+2+3+4}{55} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}. \end{aligned}$$

Die beiden Ereignisse sind also gleich wahrscheinlich.

VIII. Quersumme 2023

Gib

a) die kleinste

b) die größte

natürliche Zahl an, in deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 2 und 3 vorkommen und welche die Quersumme 2023 besitzt. (MG)

Lösung:

a) Die kleinste der Zahlen hat möglichst wenig Stellen. Wegen $2023 = 673 \cdot 3 + 2 \cdot 2$ hat die Zahl 673-mal die Ziffer 3 und zweimal die Ziffer 2, wobei die Ziffern 2 die ersten Ziffern sind.
Die gesuchte Zahl ist also $22\underbrace{333\ldots3}_{\text{673-mal}}$.

b) Die gesuchte Zahl hat möglichst viele Stellen, also möglichst viele Ziffern 2. Wegen $2023 = 1010 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ hat die gesuchte Zahl 1010-mal die Ziffer 2 und einmal die Ziffer 3 haben, wobei diesmal die Ziffer 3 die erste Ziffer ist. Folglich ist $3\underbrace{222\ldots}_{\text{1010-mal}}$ die gesuchte Zahl.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Ziffernsuche

Schreibe $\frac{1}{17}$ als Dezimalzahl mit 20 Stellen nach dem Komma.
Welche Ziffer befindet sich an der 2023-ten Stelle in der Dezimalzahl?

(Daris, nach H.F.)

II. Vertauschter Uhrzeiger

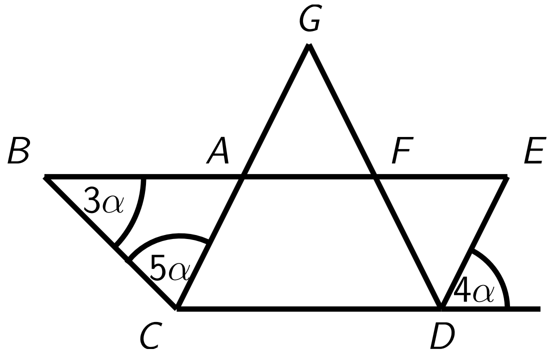
Der Uhrmacher hat versehentlich die Zeiger einer Uhr vertauscht.

a) Begründe, dass die Uhr trotzdem manchmal die gleiche Zeit anzeigt wie eine Uhr, deren Zeiger nicht vertauscht sind.

b) Überlege dir, warum die vertauschten Zeiger z. B. die Zeit 6:00 Uhr nicht anzeigen können. Welche Zeiten können angezeigt werden?

(Wolfgang J. Bühler)

III. Ein gleichseitiges Dreieck?



In der Figur sei das Dreieck $\triangle AFG$ gleichseitig und es sei $AF || CD$. Zeige mit den Informationen in der Abbildung, dass gilt: Das Dreieck $\triangle DEF$ ist gleichseitig.

(H.F.)

IV. Wahr oder falsch?

Es gibt genau eine positive ganze Zahl n, für deren Potenzen n^3 und n^4 gilt: Zur Dezimaldarstellung von n^3 und n^4 benötigt man insgesamt die zehn Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ und zwar jede davon genau einmal.

Stimmt das? (H.F.)

V. Wer hat Recht ?

Franziska behauptet, dass $n!^{*}-6$ niemals das Quadrat einer ganzen Zahl sein könne. Carlotta widerspricht ihr.

Wer hat Recht? Falls Carlotta im Recht ist, gib alle n an, für die $n! - 6$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist! (Wolfgang J. Bühler)

VI. Ganzzahlige Lösungen

Gegeben sei die Gleichung $(\star)$ $29x + 26y = 1000$, in der x und y positiv ganzzahlig sind.

a) Bestimme durch mathematische Argumentation, wie viele Lösungen (x, y) die Gleichung $(\star)$ höchstens haben kann.

b) Finde zwei mögliche Lösungen? (H.F.)

* $n!$ (gesprochen: n Fakultät) bezeichnet das Produkt der natürlichen Zahlen bis einschließlich n, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

VII. Niemals eine Quadratzahl

Zeige, dass es keine Zahl n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ gibt, für die die Summe $S(n) = n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n + 1$ eine Quadratzahl ist.

(H.F.)

Die Monoid-Redaktion wünscht allen L(o)eserinnen und L(o)esern ein frohes neues Jahr.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Februar 2024.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1331: Jahreszahl-Aufgabe

Bestimme die letzten vier Ziffern der Zahl 3^{2023}. (H.F.)

Aufgabe 1332: Jahreswurzeln

Für welche natürlichen Zahlen n gilt:

$$X = \sqrt[2023]{2024^1} \cdot \sqrt[2023]{2024^3} \cdot \sqrt[2023]{2024^5} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2023]{2024^{2n+1}} > 2023$$

Hinweis: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. (H.F.)

Aufgabe 1333: Kette von Zahlenmengen

Bilde aus der Zahlenmenge $M_4 = \{1, 3, 10, 22\}$ die Mengen M_3, M_2, M_1 nach folgender Regel:

Man erhält die Menge M_{i-1}, $i = 4, 3, 2$, wenn man der Menge M_i zwei beliebige Zahlen a und b wegnimmt und ihr dafür die Zahl $ab + a + b$ hinzufügt.

Bestimme M_1 für jede nach der gegebenen Regel bildbare Mengenkette M_4, M_3, M_2, M_1. (H.F.)

Aufgabe 1334: Darstellung der 40 als Summe

Wie viele geordnete Tripel (x, y, z) mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ gibt es, sodass $x+y+z = 40$ ergibt? (Klaus Ronellenfitsch)

Tipp: Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu lösen findet sich mit der Gauß'schen Summenformel.

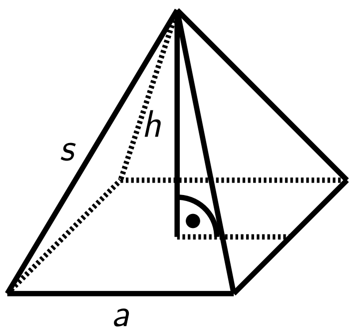
Aufgabe 1335: Neun Zahlen und ihre Mittelwerte

Die neun verschiedenen Zahlen $a_1, \ldots, a_9$ seien der Größe nach geordnet und besitzen den Mittelwert 9. Nimmt man die kleinste und die größte Zahl weg, so haben die restlichen Zahlen den Mittelwert 8, nimmt man wieder die kleinste und größte Zahl weg, so ist der Mittelwert 7, macht man das Gleiche nochmals, so haben die restlichen drei Zahlen den Mittelwert 6.

Gib alle Möglichkeiten an um welche Zahlen es sich handeln kann.

(Klaus Ronellenfitsch)

Aufgabe 1336: Eine besondere Pyramide



Finde alle quadratischen Pyramiden, deren Strecken a, h und s drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, wobei $a < h < s$ vorausgesetzt ist. (Christoph Sievert)

Aufgabe 1337: Funktionalgleichung

Für eine reelle Funktion f gelte: $f(2x+3) + f(4) = 6x + 7$.

a) Bestimme $f(8)$.

b) Zeige: $f(x+4) - f(x)$ hat für alle x den gleichen Wert.

(Klaus Ronellenfitsch)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 155

Klassen 9–13

Aufgabe 1324: Zahlenmutation

Eine n-stellige natürliche Zahl beginnt mit der Ziffer 1. Nimmt man diese vordere Ziffer weg und hängt sie hinten an, so entsteht eine Zahl, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Bestimme die kleinste Zahl, für die dies möglich ist.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Die ursprüngliche Zahl z_1 ist von der Form $1 \cdot 10^{n-1} + a$ mit einer $(n-1)$-stelligen natürlichen Zahl a. Die neue Zahl z_2 hat die Form $10a + 1$. Wegen $z_2 = 3 \cdot z_1$ gilt: $10a + 1 = 3 \cdot 10^{n-1} + 3a$, woraus $3 \cdot 10^{n-1} - 1 = 7a$ folgt.

Die Frage ist nun: Für welches kleinstmögliche n ist der Term $T(n) = 3 \cdot 10^{n-1} - 1$ durch 7 teilbar ?

Die Termwerte von $T(n)$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ sind $29, 299, 2999, \ldots$ Von diesen ist erst $T(6) = 299999$ durch 7 teilbar: $299999 = 7 \cdot 42857$.

Ergebnis:

Die ursprüngliche Zahl hieß 142857. Die neue Zahl 428571 ist dreimal so groß.

Aufgabe 1325: Quadrate der Ziffern

Eine Zahlenfolge (a_n) beginnt mit $a_0 = 12345$ und jedes weitere Folgenglied ist die Summe der Quadrate der Ziffern des vorherigen Folgeglieds.

Also $a_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$, $a_2 = 5^2 + 5^2 = 50$ und so weiter. Bestimme a_{1000}. (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Berechnet man weitere Folgeglieder, so erhält man: $a_3 = 25, a_4 = 29, a_5 = 85, a_6 = 89, a_7 = 145, a_8 = 42, a_9 = 20, a_{10} = 4, a_{11} = 16, a_{12} = 37, a_{13} = 58, a_{14} = 89, \dots$

Es fällt auf, dass $a_{14} = a_6 = 89$ ist das heißt, nun entsteht eine „Schleife" von stets gleichen acht Zahlen: $a_{15} = a_7, a_{16} = a_8$ und so weiter. Also ist $a_{1000} = a_{992} = a_{984} = \dots = a_8 = 42$.

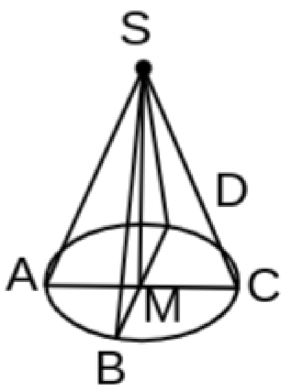
Aufgabe 1326: Mantellinien eines Kegels

Betrachte einen Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, und dessen Spitze senkrecht über dem Kreismittelpunkt ist. Jede die Mittellinie des Kegels enthaltende Ebene schneidet aus dem Kegelmantel zwei Mantellinien mit dem gleichen Winkel.*

a) Bleibt dieses Ergebnis erhalten, wenn wir den Kreis durch eine Ellipse ersetzen?

b) Ist das Ergebnis richtig, wenn die Spitze des Kegels nicht senkrecht über dem Kreismittelpunkt liegt? (Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

a) 

A, B, C, D seien die Scheitel der Ellipse. Die Dreiecke AMS und BMS haben eine gemeinsame Seitenlänge, $|MS|$, und einen gemeinsamen Winkel, $|\angle SMA| = |\angle SMB| = 90°$. Wäre $(|\frac{\angle ASC}{2}| =)|\angle ASM| = |\angle BSM|(= |\frac{|\angle BSD}{2}|)$, so wären die beiden Dreiecke nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent. Aber sie haben verschiedene Seitenlängen bei den Seiten gegenüber von S, $\overline{AC} \neq \overline{BD}$, es sei denn die Ellipse wäre ein Kreis. Solange die Seitenlängen verschieden sind (solange die Ellipse kein Kreis ist), können die zwei Dreiecke nicht kongruent sein und daher sind die Winkel $\angle ASC$ und $\angle BSD$ ggf. nicht gleich groß.

b) Schneiden wir den Kegel mit einer Ebene senkrecht zur Verbindungslinie zwischen der Spitze und dem Kreismittelpunkt, so ist der Schnitt eine Ellipse. Wegen der Lösung zu b) sind die Winkel also nicht alle geich.

Aufgabe 1327: Zahlenauswahl

Aus der Menge M der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2022 wird eine beliebige Teilmenge T mit 1012 Zahlen ausgewählt.

Zeige: In T gibt es zwei Zahlen a und b, für die $a + b = 2023$ ist. (H.F.)

---

* Die Mittellinie ist die Strecke vom Kreismittelpunkt zum Punkt der Spitze.

Lösung:
Aus den Zahlen der gegebenen Menge M bildet man die 1011 Zahlenpaare $(1, 2022)$, $(2, 2021)$, $(3, 2020)$, ..., $(1011, 1012)$.
Wenn nun aus der Menge M 1012 Zahlen ausgewählt werden, dann müssen (mindestens) zwei davon in dem gleichen Zahlenpaar vorkommen, denn es gibt nur 1011 Zahlenpaare. Die zwei Zahlen aus demselben Paar haben die Summe 2023, weil in jedem Zahlenpaar die Summe seiner zwei Komponenten 2023 ist.

Aufgabe 1328: Unordnung in der Sockenschublade
Die beiden Schwestern Carolina und Patricia haben gleich große Füße und teilen sich eine Sockenschublade mit einem gemeinsamen Vorrat an Socken, die ungeordnet und einzeln in der Schublade liegen: sechs weiße, acht rote und vier grüne.

a) Carolina nimmt so lange wahllos einzelne Socken aus der Schublade, bis unter allen genommenen Socken zwei gleichfarbige sind. Wie oft muss sie höchstens in die Schublade greifen, bis das der Fall ist?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass bereits die ersten beiden Socken von gleicher Farbe sind?
c) Nachdem Carolina ein grünes Paar gefunden hat und alle anderen Socken wieder in die Schublade gelegt hat, ist Patricia dran. Wie lauten die Antworten auf die Fragen (a) und (b) für Patricia?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

a) Nachdem Carolina vier Socken genommen hat, müssen zwei von gleicher Farbe dabei sein, da nur Socken von drei unterschiedlichen Farben in der Schublade liegen.
b) Es gibt insgesamt $6 + 8 + 4 = 18$ Socken. Daraus lassen sich $\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$ Paare bilden. Farblich passende Paare gibt es $\binom{6}{2} + \binom{8}{2} + \binom{4}{2} = 15 + 28 + 6 = 49$, die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Socken die gleiche Farbe haben ist also $\frac{49}{153} \approx \frac{1}{3}$.
Alternativ kann man die Aufgabe auch in zwei Ziehungen hintereinander teilen: Bei der ersten Ziehung gibt es die drei Ereignisse "grün", "rot" und "weiß" mit $P(\text{"grün"}) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, $P(\text{"rot"}) = \frac{6}{18} = \frac{3}{9}$ (das Kürzen auf Neuntel macht mehr Sinn) und $P(\text{"weiß"}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$. Wenn Carolina eine grüne Socke gezogen hat, dann muss sie wieder eine grüne Socke ziehen, um zwei gleichfarbige Socken zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie, wenn sie bereits eine grüne Socke gezogen hat, noch eine zieht, ist $\frac{3}{17}$, denn es gibt 17 übrige Socken und 3 davon sind grün. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwei grüne Socken zieht, genau $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{17} = \frac{6}{153}$. Analog kann man die Wahrscheinlichkeit für zwei rote Socken berechnen und kommt auf

$\frac{3}{9} \cdot \frac{5}{17} = \frac{15}{153}$. Für zwei weiße Socken ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{17} = \frac{28}{153}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Carolina zwei gleichfarbige Socken zieht, also zwei grüne oder zwei rote oder zwei weiße, ist $\frac{6}{153} + \frac{15}{153} + \frac{28}{153} = \frac{49}{153}$.

c) Es gibt insgesamt drei verschiedene Farben. Patricia ist also ebenfalls erst dann sicher, eine farblich passendes Paar zu haben, wenn sie vier Socken geholt hat.

Die Wahrscheinlichkeit ist jetzt $\frac{\binom{6}{2}+\binom{8}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{15+28+1}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx \frac{1}{3}$ aber $\frac{11}{30} > \frac{49}{153}$.

Aufgabe 1329: Zwei letzte Ziffern

Wie heißen die zwei letzten Ziffern von 2023^{2024}? (H.F.)

Lösung:

Mit $[n]$ bezeichnen wir die beiden letzten Ziffern einer natürlichen Zahl. Bildungsgesetz der Terme $[2023^m]$

m	1	2	3	4	5	$\cdots$	12	13	14	$\cdots$	19	20	21	22
$[2023^m]$	23	29	67	41	43	$\cdots$	21	83	09	$\cdots$	87	01	23	29

m	$\cdots$	41	$\cdots$	61	$\cdots$
$[2023^m]$		23		23	

Die Ziffernpaare $23, 29, \ldots, 01$ wiederholen sich mit einer Periode der Länge 20. Daher ist

$[2023^{2024}] = [2023^{2020} \cdot 2023^4] = 01 \cdot 41 = 41$.

Dies sind die beiden letzten Ziffern der 6692-stelligen Zahl 2023^{2024}.

Aufgabe 1330: Teilbarkeit durch 5

Zeige: Die Werte des Terms $2^n + 3^n$ sind für alle ungeraden positiven ganzen Zahlen n durch fünf teilbar. (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Eine ganze Zahl n ist durch fünf teilbar, wenn ihre Einerziffer null oder fünf ist. Betrachtet man die Einerziffern des Terms 2^n, so erhält man die Folge $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, \ldots$, bei der sich die Glieder alle vier Schritte wiederholen. Die Folge besitzt die Periode vier.

Bei dem Term 3^n erhält man die Folge $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, \ldots$, ebenfalls der Periode vier. Daher lautet die Folge der Einerziffern von 2^n+3^n: $5, 3, 5, 7, 5, 3, 5, 7, 5, \ldots$

Das ist ebenfalls eine Folge der Periode vier, aber das erste, dritte, fünfte, ... Folgenglied ist fünf. Daher sind die Termwerte von $2^n + 3^n$ für alle ungeraden positiven ganzen Zahlen n durch fünf teilbar.

Bemerkung: Auf die gleiche Weise lässt sich zeigen, das für alle ungeraden positiven ganzen Zahlen n die Termwerte von $7^n + 8^n$ durch fünf und die Termwerte von $2^n + 8^n$ durch zehn teilbar sind. Für Oberstufenschüler: Diese drei Aussagen lassen sich auch mit der „vollständigen Induktion“ beweisen.

Bundeswettbewerb Mathematik
Zweite Runde 2023
von Volker Priebe und Stefan Kermer

Aufgabe 1
Bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $p^6 - 7p^2 + 6$, wobei p alle Primzahlen mit $p \geq 11$ durchläuft.

Behauptung
Bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der angegebenen Form mit d, so ist $d = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

Beweis
Es lässt sich leicht überprüfen, dass

$$p^6 - 7p^2 + 6 = (p^2 - 2) \cdot (p^2 - 1) \cdot (p^2 + 3). \tag{1.1}$$

Beispielhaft zerlegen wir für $p = 11$ und $p = 13$ den Term in (1.1) in Primfaktoren, nämlich

$$11^6 - 7 \cdot 11^2 + 6 = 119 \cdot 120 \cdot 124 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 \tag{1.2}$$

und

$$13^6 - 7 \cdot 13^2 + 6 = 167 \cdot 168 \cdot 172 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 167. \tag{1.3}$$

Jede Primzahl p mit $p \geq 11$ kann nach Definition nicht durch $2, 3$ oder 7 teilbar sein.
Es ist also $p = 2k + 1$ mit $k \geq 5$, das heißt

$$\left(p^2 - 1\right) \cdot \left(p^2 + 3\right) = 4k(k+1) \cdot 4(k(k+1) + 1) \equiv 0 \pmod{\left(2^5\right)}, \tag{1.4}$$

weil auch genau einer der Faktoren k oder $k + 1$ gerade ist, also $k(k + 1)$ durch 2 teilbar.
Es ist $p = 3l + r$ mit $l \geq 3$ und $r \in \{1, 2\}$, das heißt

$$p^2 - 1 = 3\left(3l^2 + 2lr\right) + r^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}. \tag{1.5}$$

Schließlich ist $p = 7m \pm r$ mit $m \geq 2$ und $r \in \{1, 2, 3\}$, das heißt

$$\left.\begin{array}{l} p^2 - 1 = 7(7m^2 \pm 2mr) + r^2 - 1 \\ p^2 + 3 = 7(7m^2 \pm 2mr) + r^2 + 3 \\ p^2 - 2 = 7(7m^2 \pm 2mr) + r^2 - 2 \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{7}, \text{ wenn } \left\{\begin{array}{l} r = 1. \\ r = 2. \\ r = 3. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Aus (1.2) und (1.3) folgt $d \leq 2^5 \cdot 3 \cdot 7$. Weil $2, 3$ und 7 teilerfremd sind, folgt aus (1.4), (1.5), (1.6) in Verbindung mit (1.1), dass $2^5 \cdot 3 \cdot 7 \leq d$, also

$$d = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672.$$

Das beweist die Behauptung. $\square$

Vorbetrachtung: Baryzentrische Koordinaten (von Oscar Su)

Für die folgende Aufgabe möchte man eine Methode verwenden, die sich "Durchrechnen mit Baryzentrischen Koordinaten" nennt.

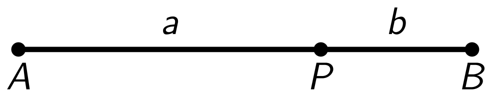
Um sich dies vorzustellen, erst mal eine vereinfachte Version: Das Hebelprinzip. Man hat ein Brett (Strecke AB), das ungleichmäßig auf einem Stein (Punkt P) liegt. Nun muss man Gewichte auf die Enden der Strecke legen, sodass die Strecke gleichmäßig balanciert ist.

Die Länge der Strecke AP nennen wir a und die Länge der Strecke PB sei b. Das Gewicht am Anfang betrage x und das Gewicht am Ende betrage y.

Die Formel für das Hebelprinzip lautet

$$a \cdot x = b \cdot y \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{y}{x}$$

Für jeden Punkt P ist das Verhältnis $\frac{a}{b}$ eindeutig, womit auch $\frac{y}{x}$ eindeutig ist. Normiert man nun die Summe auf $x + y = 1$, so sind jeweils x und y eindeutig. Dadurch kann man den Punkt P mit den Koordinaten (x, y) versehen.



Stell dir nun eine dreieckige Fläche mit den Ecken A,B und C vor, welche auf einem Punkt P balancieren soll, wobei die Gewichte x, y, z an den Ecken des Dreiecks liegen.

Das gleiche Prinzip von oben kann man auch auf das Dreieck anwenden und jeden Punkt mit Koordinaten bestücken, da auch dieses Verhältnis (x, y, z) mit $x + y + z = 1$ stets eindeutig ist.

Wir nutzen diese Koordinaten, um die folgende Aufgabe 3 aus der 2. Runde des Bundeswettbewerbs 2023 „durchzurechnen“, was zwar nicht allzu elegant, jedoch in diesem Fall einfach ist.

Versucht doch mal, die Aufgabe selbst durchzurechnen, denn das ist in dem Fall elementar und benötigt nicht viel Vorwissen.

Dabei kann man die Flächenformel und die Geradengleichung nachschlagen.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Inkreismittelpunkt I, die Seitenmitten von AC und BC seien M_b bzw. M_a. Der Schnittpunkt der Geraden (M_bI) mit der Geraden (BC) sei B', der Schnittpunkt der Geraden (M_aI) mit (AC) sei A'.

Weiter haben die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C$ den gleichen Flächeninhalt. Wie groß kann der Winkel $\sphericalangle ACB$ sein?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Behauptung

Wenn die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C$ den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist stets $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Beweis

Es seien für das Dreieck $\triangle ABC$ im Folgenden $a := \overline{BC}$, $b := \overline{CA}$ und $c := \overline{AB}$. Auf Grund der Dreiecksungleichung gelten stets

$$b + c - a > 0, a + c - b > 0 \text{ und } a + b - c > 0. \tag{3.1}$$

Wir zeigen für das Dreieck $\triangle A'B'C$ weiter unten die Längenbeziehungen

$$\begin{aligned}\overline{B'C} &= \frac{ab}{b+c-a} = \frac{b}{b+c-a} \cdot \overline{BC} \text{ und}\\ \overline{CA'} &= \frac{ab}{a+c-b} = \frac{a}{a+c-b} \cdot \overline{CA}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Sie erlauben uns, die Behauptung schnell zu beweisen: Denn mit (3.2) und der bekannten Formel für die Dreiecksfläche schließen wir, dass

$$\begin{aligned}2 \cdot |\triangle A'B'C| &= \overline{B'C} \cdot \overline{CA'} \cdot \sin(\sphericalangle ACB)\\ &= \frac{ab}{(b+c-a)\cdot(a+c-b)} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \sin(\sphericalangle ACB)\\ &= \frac{2ab}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab} \cdot |\triangle ABC|.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Der Nenner des Terms am Ende der Gleichungskette (3.3) lässt sich unter Verwendung des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\sphericalangle ACB)$ umformen. Also haben die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C$ genau dann den gleichen Flächeninhalt, wenn

$$1 = \frac{ab}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab} = \frac{ab}{2ab \cdot (1 - \cos(\sphericalangle ACB))} \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle ACB) = \frac{1}{2},$$

und dies ist für $0^\circ < \sphericalangle ACB < 180^\circ$ äquivalent zu $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Wir beweisen nun (3.2) in einem sogenannten baryzentrischen Koordinatensystem. Eine Einführung in das Rechnen mit baryzentrischen Koordinaten bieten beispielsweise auch Max Schindler und Evan Chen, Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry (July 13, 2012), `https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf`. Wir wählen das Dreieck $\triangle ABC$ als Referenzdreieck der baryzentrischen Koordinaten, wobei wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass die Ecken A, B und C gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind. In diesem Koordinatensystem ist jedem Punkt P der Ebene ein Tripel (x, y, z) mit $x+y+z=1$ (Normierungsbedingung) zugeordnet, so dass für einen Ursprung O die Darstellung $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$ gilt. Mit der Normierungsbedingung sind die (x, y, z) eindeutig bestimmt und unabhängig vom gewählten Ursprung; wir schreiben die baryzentrischen Koordinaten des Punktes P als $P(x, y, z)$. Bezeichnen wir für drei Punkte P, Q und R mit $[PQR]$ die Fläche von $\triangle PQR$ mit Vorzeichen, das heißt, $[PQR] = +|\triangle PQR|$, wenn auch P, Q und R gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind, sonst $[PQR] = -|\triangle PQR|$, so gilt für die baryzentrischen Koordinaten $P(x, y, z)$

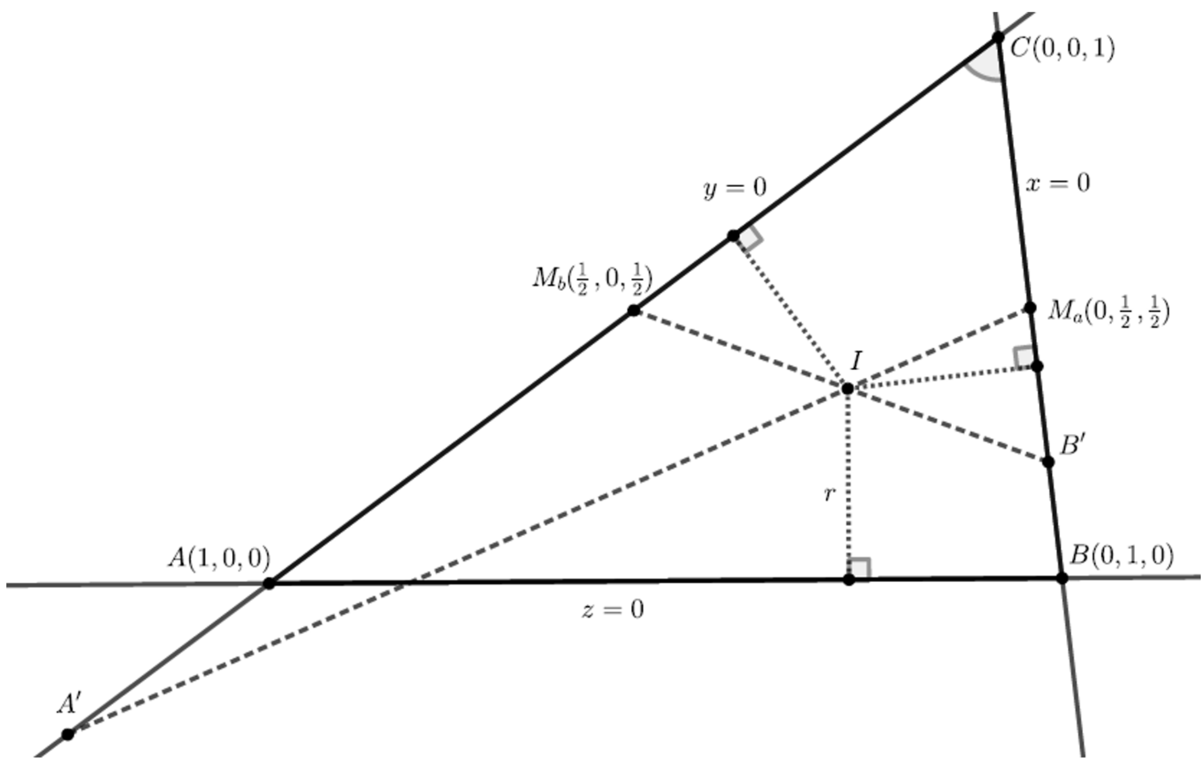
$$(x, y, z) = \frac{1}{[ABC]}([PBC], [APC], [ABP]). \tag{3.4}$$

In dem gewählten Koordinatensystem sind also $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Die Gerade (CA) ist durch $y = 0$, die Geraden (BC) durch $x = 0$ parametrisiert; siehe [Schindler, Chen; Theorem 1]. Es sind

$$[AM_aC] = [ABM_a] = \frac{1}{2} \cdot [ABC] = [M_bBC] = [ABM_b],$$

also mit (3.4)

$$M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ und } M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$



Es bezeichne r den Radius des Inkreises. Wegen $2 \cdot [IBC] = ar$, $2 \cdot [AIC] = br$ und $2 \cdot [ABI] = cr$ sind $2 \cdot [ABC] = 2 \cdot ([IBC] + [AIC] + [ABI]) = r \cdot (a + b + c)$

und somit

$$I\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right).$$

Die Geraden $(M_a I)$ bzw. $(M_b I)$ werden in diesem Koordinatensystem durch

$$(M_a I) : (c-b)x + ay - az = 0 \text{ bzw. } (M_b I) : bx + (c-a)y - bz = 0$$

beschrieben [Schindler, Chen; Corollary 12], was man auch leicht durch Einsetzen der Punkte M_a, I und M_b überprüfen kann. Die baryzentrischen Koordinaten von A' bzw. B' als Schnitt von $(M_a I)$ mit (CA) bzw. von $(M_b I)$ mit (BC) bestimmen sich zu

$$A'\left(\frac{a}{a+c-b}, 0, \frac{c-b}{a+c-b}\right) \text{ bzw. } B'\left(0, \frac{b}{b+c-a}, \frac{c-a}{b+c-a}\right).$$

Im baryzentrischen Koordinatensystem existiert eine allgemeine Abstandsformel [Schindler, Chen; Theorem 7]: Sind zwei Punkte $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ mit $x_P + y_P + z_P = 1 = x_Q + y_Q + z_Q$ gegeben, so ist

$$\overline{PQ}^2 = -a^2(y_Q - y_P)(z_Q - z_P) - b^2(z_Q - z_P)(x_Q - x_P) - c^2(x_Q - x_P)(y_Q - y_P); \quad (3.5)$$

der Ausdruck auf der rechten Seite von (3.5) ist stets nichtnegativ, unter anderem weil nach Voraussetzung $(x_Q - x_P) + (y_Q - y_P) + (z_Q - z_P) = 1 - 1 = 0$. Mit der Abstandsformel (3.5) und mit den Positivitätsaussagen in (3.1) ergeben sich

$$\overline{B'C}^2 = a^2 \cdot \frac{b}{b+c-a} \cdot \left(1 - \frac{c-a}{b+c-a}\right) = \left(\frac{ab}{b+c-a}\right)^2 \text{, also}$$

$$\overline{B'C} = \frac{ab}{b+c-a}$$

und

$$\overline{CA'}^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{c-b}{a+c-b}\right) \cdot \frac{a}{a+c-b} = \left(\frac{ba}{a+c-b}\right)^2 \text{, also}$$

$$\overline{CA'} = \frac{ab}{a+c-b};$$

das beweist (3.2).

Bemerkung

Die Längenbeziehungen in (3.2) lassen sich auf viele verschiedene Weisen herleiten! Andere Lösungsansätze nutzen den Satz von Ceva in den Dreiecken $\triangle AB'C$ bzw. $\triangle A'BC$, Ausdrücke für $\overline{CI}$ als Winkelhalbierende von $\triangle A'M_aC$ bzw. $\triangle M_bB'C$ oder den Strahlensatz mit Zentrum I und Strahlen (CI), $(M_a I)$ bzw. (CI), $(M_b I)$.

Wir danken Herrn StD a.D. Fegert und Herrn OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.

Wenn sich parallele Geraden schneiden

von Daris Mohammadzadeh

Eigentlich wünschen wir uns, dass zwei beliebige verschiedene Geraden genau einen Schnittpunkt haben, doch das gilt nicht, wenn wir in der euklidischen Ebene (einer „normalen“ Ebene) arbeiten, da parallele Geraden sich dort nicht schneiden. Um dieses Problem zu lösen und dabei aber die Eigenschaft, dass in der euklidischen Ebene eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, beizubehalten, brauchen wir eine neue Ebene: die projektive Ebene; sie soll die euklidische Ebene so vergrößern, dass parallele Geraden sich schneiden. Diese führen wir mit homogenen Koordinaten ein.

Homogene Koordinaten und die reelle projektive Ebene

Homogene Koordinaten sind eine Darstellung von Punkten, bei denen es nur auf das Verhältnis zwischen den verschiedenen Koordinaten ankommt. Das heißt, dass sich ein Punkt nicht ändert, wenn alle Koordinaten mit derselben Zahl (außer 0) (in der Formel: λ) multipliziert werden. Um zu verdeutlichen, dass wir homogene Koordinaten verwenden, nutzen wir die Schreibweise $(x : y : z)$ (nicht: (x, y, z)).

$(x : y : z) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) | \lambda \in \mathbb{R}^*$

So ist zum Beispiel $(1 : 2 : 1) = (2 : 4 : 2) = (3 : 6 : 3) = ...$

Mithilfe von homogenen Koordinaten können wir nun die projektive Ebene definieren. Die projektive Ebene über $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, enthält dann alle Punkte $(x : y : z)$, für die x, y und z reelle Zahlen und nicht gleichzeitig 0 sind.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := (x : y : z) | (0, 0, 0) \neq (x, y, z) \wedge (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$[*]

Projektive Punkte

Um eine Vorstellung für die geometrische Darstellung eines Punktes in der projektiven Ebene zu gewinnen, kann man sich in nur zwei Variablen Proportionalitäten vorstellen (das sind Funktionen der Form $y = m \cdot x$, es soll also die Proportion von x und y konstant sein), deren geometrische Darstellungen Ursprungsgeraden sind.

Da bei homogenen Koordinaten ebenfalls das Verhältnis zwischen x-, y- und z-Koordinate konstant sein soll, liegt nahe, dass man sich die geometrische Darstellung von projektiven Punkten als dreidimensionale Proportionalitäten vorstellen kann.

Ein Punkt dieser projektiven Ebene entspricht also in seiner geometrischen Darstellung einer Ursprungsgeraden durch denselben Punkt, wobei der Punkt (0:0:0) von der Geraden ausgeschlossen wird, da er als einziger keine Ursprungsgerade

[*] $\wedge$ ist das mathematische Zeichen für „und“, es sollen also beide Bedingungen, $(0, 0, 0) \neq (x, y, z)$ und $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gelten

definiert. Um mit den Begriffen nicht durcheinanderzukommen, sprechen wir von einem projektiven Punkt und einer geometrischen Gerade (oder auch einer Ursprungsgerade).

Geraden, Ebenen und Räume

Ebenso wie eine Ursprungsgerade die geometrische Darstellung eines projektiven Punktes ist, ist eine Ursprungsebene außer eine darin liegende Ursprungsgerade die geometrische Darstellung einer projektiven Gerade in dieser Ebene (also einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht).
Dieser Sachverhalt ist etwas schwerer zu verstehen. Man kann sich vorstellen, dass man eine projektive Gerade betrachtet und dann jeden Punkt ergänzt, der auf derselben Ursprungsgerade wie einer der Punkte auf der projektiven Geraden liegt. Man legt also die Ursprungsgeraden ohne $(0:0:0)$ zu allen Punkten auf der projektiven Geraden übereinander.
Analog ist die geometrische Darstellung einer projektiven Ebene ein Raum (ohne eine Ebene durch den Ursprung). Hier ist die Idee eine ähnliche wie bei der projektiven Geraden.

Parallele Geraden in der projektiven Ebene

Doch wie löst die projektive Ebene nun unser Problem mit den parallelen Geraden? Dazu müssen wir uns erstmal überlegen, wie Geraden in der projektiven Ebene dargestellt werden. Geraden in der euklidischen Ebene haben die Form $ax + by + c = 0$. Doch wenn wir dieselbe Form für die projektive Ebene beibehalten, so ergibt sich ein Problem. Gehört zum Beispiel der Punkt $(1:2:1)$ zu der Geraden $g: x + y - 3 = 0$? So scheint zum Beispiel $(1:2:1)$ zu g zu gehören $(1+2-3=0)$, $(2:4:2)$, also derselbe Punkt, scheint wiederum nicht dazuzugehören $(2+4-3=3)$.
Des Problems Lösung nennt sich Homogenisierung. Hierbei wird der y-Achsenabschnitt mit der Variablen z multipliziert. Nun ist eindeutig zu bestimmen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht. Da nun in jedem Summanden genau ein x, ein y oder ein z ist, sieht die Gleichung nun so aus: $G: ax + by + cz = 0$. Wenn man nun $\lambda \cdot x$, $\lambda \cdot y$ und $\lambda \cdot z$ statt x, y und z einsetzt, so erhält man nach Ausklammern $\lambda \cdot (ax + by + cz)$, das genau dann $= 0$ ist, wenn $ax + by + cz = 0$ ist. Es ist also wohldefiniert, ob ein projektiver Punkt zu G gehört oder nicht.[**]

Das war's?

Wenn man in der projektiven Ebene zwei parallele Geraden betrachtet, so ergibt sich tatsächlich ein projektiver Punkt, der auf beiden Geraden liegt. Wenn man beide Geradengleichungen gleichsetzt und $z = 0$ betrachtet, so wird die

** „wohldefiniert“ bedeutet, dass ein Objekt formal korrekt, also widerspruchsfrei definiert ist. Dies ist bei homogenisierten Geraden der Fall.

Gleichheit zu einer wahren Aussage. Alle Punkte mit $z = 0$, für die die Geradengleichung erfüllt ist, liegen also auf beiden Geraden.
Beispiel: $g : x + 2y - 3z = 0$; $h : x + 2y - 4z = 0$
Setzt man beide Gleichungen gleich, so ergibt sich $-3z = -4z \leftrightarrow z = 0$. Alle Punkte, für die $z = 0$ ist und für die $x + 2y = 0$ bzw. $x = -2y$, liegen also auf beiden Geraden. Und all diese projektiven Punkte sind eben genau $(-2 : 1 : 0)$.
Das stimmt auch genau mit unserer Beobachtung überein: Projektive Geraden haben Ebenen durch den Ursprung als geometrische Darstellungen und zwei Ebenen, die sich schneiden, haben stets eine Gerade gemeinsam. Diese Gerade muss durch den Ursprung gehen (da dieser ein gemeinsamer Punkt ist), also handelt es sich bei der Schnittgeraden der geometrischen Ebenen um einen projektiven Punkt.
Da alle „unendlich fernen" Schnittpunkte paralleler Geraden in der Ebene $z = 0$ liegen, spricht man bei dieser geometrischen Ebene von der unendlich fernen Geraden, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Auf ihr liegen alle unendlich fernen Punkte. Für jede Schar an parallelen Geraden gibt es genau einen projektiven Schnittpunkt (und zwar immer $(-y : x : 0)$, denn $a \cdot (-y) + b \cdot y + c \cdot 0 = 0$).
Wir haben also das Problem, dass zwei parallele Geraden sich nicht schneiden, beseitigen können, indem wir mithilfe homogener Koordinaten die projektive Ebene und zuletzt die Homogenisierung eingeführt haben. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ haben je zwei beliebige verschiedene Geraden genau einen Schnittpunkt.

Mathematische Entdeckungen

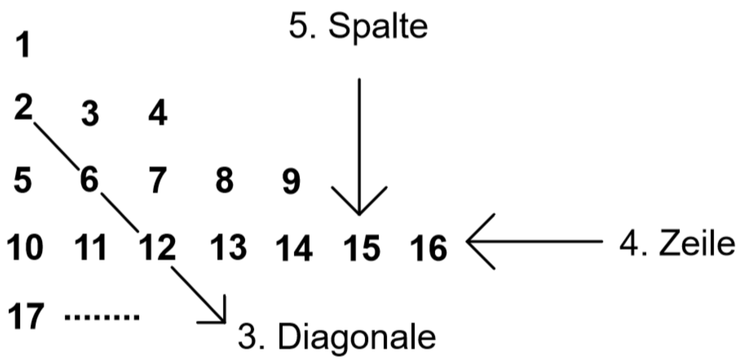
Im Monoid Heft 149 habe ich euch das Läuferecken-Problem vorgestellt. Dabei läuft ein Läufer auf einem $n \times m$ Schachbrett startend in der linken unteren Ecke, bis er wieder in einer Ecke ankommt. Dabei durchläuft er die einzelnen Felder, alles Quadrate, entlang ihren Diagonalen. Im Heft 151 haben wir die Anzahl Schritte untersucht, die der Läufer dabei läuft.
Im Monoid Heft 153 haben wir das Problem eine Dimension höher betrachtet: Wir können einen Quader mit Kantenlängen n, m, k in $n \cdot m \cdot k$ kleine Würfel mit Kantenlänge 1 unterteilen. Jeder kleine Würfel ist damit durch 3 ganzzahlige Koordinaten beschrieben. Wir starten links unten in der Ecke 0 mit den Koordinaten $(1, 1, 1)$ und lassen einen Läufer in den Würfel $(2, 2, 2)$ laufen. Dann nach $(3, 3, 3)$ usw. immer entlang der Würfeldiagonalen, bis wir an eine Wand laufen, ab da wird von einer Koordinate immer 1 subtrahiert statt addiert. Das führen wir analog zum 2-dimensionalen Fall fort, bis wir in einer Ecke landen.
Man kann aber auch in beliebige Dimensionen gehen. Wir betrachten den n-dimensionalen Quader Q mit Kantenlängen $m_1, \dots, m_n$. Er hat 2^n Ecken mit den Bezeichnungen $0, \dots, 2^n - 1$. Außerdem hat er 2^{n-1} Diagonalen in jedem seiner $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ n-dimensionalen Würfel. Startet also ein Läufer in der Ecke 0

und läuft entlang der Diagonalen der kleinen Würfel, bis er in einer Ecke landet, so kann er jeden Würfel maximal 2^{n-1} mal durchlaufen, weil jeder Würfel 2^{n-1} Diagonalen hat. Simuliert man mit einem entsprechenden Programm den Lauf des Läufers, so stellt man fest, dass ein Würfel s mal durchlaufen wird, wobei $s \in \{0, 1, 2, 4, 8, ...\}$. Niemals wird ein Würfel 3, 5, 6 oder 7 mal durchlaufen. Man beweise also:
Vermutung: Läuft ein Läufer in einem n-dimensionalen Quader von einer Ecke aus entlang den Diagonalen eines Würfels bis er wieder in einer Ecke landet, so hat er jeden Würfel entweder 0 mal oder 2^k mal durchlaufen für ein $k \in \mathbb{N}$.
(Stephan Rosebrock)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Februar 2024 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 154

Im Heft 154 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Die natürlichen Zahlen seien in folgendem Schema angeordnet:



Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst Du im Aufbau dieses Schemas? Zum Beispiel: Wie lautet das Bildungsgesetz der n-ten Zeile, n-ten Spalte, n-ten Diagonalen? Wie heißt die mittlere Zahl der n-ten Zeile? Wie groß ist die Summe der Zahlen der n-ten Zeile? Und so weiter. (H.F.)

Eine mögliche Überlegung

Offensichtlich endet jede Zeile mit einer Quadratzahl und jede Zeile enthält genau eine Quadratzahl, d.h. die $(n+1)$-te Zeile beginnt bei n^2+1 und endet bei $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. Es sind also alle ganzen Zahlen zwischen n^2+1 und n^2+2n+1 vorhanden, das sind $2n+1$ Zahlen (man beginnt bei der 1 zu zählen und hört bei $2n+1$ auf, man hat also $2n+1$ Zahlen aufgezählt) es existiert daher immer eine mittlere Zahl in einer Zeile. Diese mittlere Zahl ist die $n+1$-te

Zahl, sie ist also

$$n^2 + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2.$$

Die Summe der n-ten Zeile ist die Summe aller Zahlen von (einschließlich) n^2+1 bis (einschließlich) $(n+1)^2$, also

$$\begin{aligned}
&(n^2+1) + (n^2+2) + (n^2+3) + \ldots + (n^2+2n) + (n^2+2n+1) \\
&= (2n+1) \cdot n^2 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n + (2n+1) \\
&= 2n^3 + n^2 + \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{2} \\
&= 2n^3 + n^2 + (2n+1) \cdot (n+1) = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Spalten, hierbei erhält man für das Bildungsgesetz der ersten beiden Spalten:

1. Spalte	1		2		5		10		17		...
		+1		+3		+5		+7			...
2. Spalte	3		6		11		18		27		...
		+3		+5		+7		+9			usw.

Ausgehend von dieser Tabelle lässt sich die n-te Zahl der p-ten Spalte $z_{n,p}$ mithilfe einer Rekursion bestimmen. Die Zahlen der ersten beiden Spalten können beispielsweise durch

$$z_{n,1} = z_{n-1,1} + 2(n-2) + 1 \text{ mit } z_{1,1} = 1$$
$$z_{n,2} = z_{n-1,2} + 2(n-2) + 3 \text{ mit } z_{1,2} = 3$$

errechnet werden. Definieren wir $z_{1,p}$ als die erste Zahl der p-ten Spalte, so können wir die n-te Zahl der p-ten Spalte mit

$$z_{n,p} = z_{n-1,p} + 2(n-2) + k_p$$

bestimmten. Dabei beginnt k_p mit $k_1 = 1$ und erhöht sich jedes mal um zwei, wenn p eine gerade Zahl ist. Es gilt also $\{k_p\}_{p\in\mathbb{N}} = 1, 3, 3, 5, 5, 7, \ldots$ (Oscar Su)

Vier Tage universitäre Mathematik
Die Mainzer Mathe-Akademie 2023
von Adrian Mellinger del Campo

Auch bei der zwölften Mainzer-Mathe Akademie war ein Schüler des Frauenlob Gymnasiums dabei. Vom 27. September bis zum 1. Oktober 2023 beschäftigte ich mich, zusammen mit 28 weiteren Schülern aus ganz Deutschland in Gruppen mit den Themen „Fraktale Kurven“ (Prof. Dr. Steffen Fröhlich), „Epidemien und Mathematik“ (Prof. Dr. Lisa Hartung) und „Treffen sich zwei Parallelen im Unendlichen“ (Dr. Cynthia Hog-Angeloni).

Neben der ganzen Mathematik gab es auch ein großes Rahmenprogramm, das viele Spiele, natürlich leckeres Essen, sowohl bei der Mensa in der Universität, als auch im Don Bosco, dem Jugendhaus, in dem wir auch übernachtet haben, ein Tischtennisturnier und auch ganz viele Kaffeepausen beinhaltete.
Am letzten Tag stellten die jeweiligen Kurse dann in einer 30-minütigen Präsentation ihr Thema vor, das sie sich in den letzten drei Tagen erarbeitet hatten. Aber natürlich beschäftigte man sich nicht nur mit der Mathematik aus seinem Kurs. Es gab außerdem einen Vortrag über Zahlentheorie von Prof. Dr. Müller-Stach, der sich vor allem mit Perioden beschäftigte, und eine Führung inklusive Vortrag über die Theorie des Teilchenbeschleunigers MaMi (Mainzer Mikrotron) der Universität.
In meinem Kurs („Epidemien und Mathematik“) wurde hauptsächlich programmiert. Wir beschäftigten uns mit der Statistik, beziehungsweise der Statistik für Epidemien. Dabei nutzten wir ein Computerprogramm, das unsere Dozentin schon mit der Programmiersprache Julia geschrieben hatte, welches mit mehreren Graphen in einem Koordinatensystem die Infizierten, Gesunden, Toten und Genesenen anzeigte, und änderten entweder die Parameter (z.B. die Infektionsrate) oder änderten das Programm so um, dass wir mehr Graphen oder Diagramme sahen (z. B. konnte man dann auch die Gesamtbevölkerung oder mehrere Bevölkerungen sehen).
Weitere Informationen zum Programm oder der MMA finden sich hier:

`https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/files/2023/09/MMA-2023-Programm-2023-09-23.pdf` (Programm)
`https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/` (Startseite der MMA)

Errata

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal Fehler ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken.
So auch in Heft 155: Der dort angegebene Beweis des Satzes von Morley (Seite 7) enthält einen Fehler. Ein elementarer Beweis ist unter dem folgenden Link

`https://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=1158`

zu finden.
Wir bedanken uns ganz herzlich bei unserem aufmerksamen Leser Herrn Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe (Leipzig), der uns auf den Fehler und die Referenz hingewiesen hat.

Lösung des Frobeniusproblems

Wir nutzen Fallunterscheidungen der Zahlen modulo 6:
Man kann alle Zahlen $\equiv 0 \mod 6$ darstellen, indem man nur 6-en benutzt.
Alle Zahlen $\equiv 3 \mod 6$ ab 9 sind durch $9 + 6n$ darstellbar.
Alle Zahlen $\equiv 2 \mod 6$ ab 20 sind durch $20 + 6n$ darstellbar.
Alle Zahlen $\equiv 5 \mod 6$ ab 29 sind durch $20 + 9 + 6n$ darstellbar.
Alle Zahlen $\equiv 4 \mod 6$ ab 40 sind durch $20 + 20 + 6n$ darstellbar.
Alle Zahlen $\equiv 1 \mod 6$ ab 49 sind durch $20 + 20 + 9 + 6n$ darstellbar.
Beachte, dass n mit $43 < n < 49$ kongruent zu $0, 2, 3, 4$ oder $5 \mod 6$ ist und somit durch die bereits betrachteten Fälle abgedeckt ist. Somit lassen sich alle Zahlen ab 44 mit den Frobenius-Nugget-Zahlen $6, 9$ und 20 darstellen.

Monoid–Preisträger 2023

Das Goldene M: Philipp Lörcks (Trier, Friedrich-Willhelm-Gymnasium).
Monoid-Fuchs: Ioan Salaru (Mainz, Willigis-Gymnasium).
Forscherpreis: Oscar Su (Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium).
1. Preise: Sid Ahmed Ould Sid Ahmed, Mai Linh Dang, Tu Sam Dang, Salvatore Ippolito, Daniel Laibach Muniz, Oscar Su.
2. Preise: Nils Angel, Peter Knobloch, Sarah Markhof, Nico Mathy, Victor Mayer, Dora Emilia Mezaros, Philip Mühlbeyer, Luca Sindel, Rachel Tao, Mai Chi Tran, Jan Weber Greta Waldmüller.

3. Preise: Jasmin Borrmann, Josefine Kaßner, Johannes Kiehn, Philippa Lamke, Alexa Lehmann, Silas Salloch, Lisa Schäfer, Robert Schmitt, Emma Schubert, Amer Sultan.

4. Preise: (Monoid-Jahresabonnements 2023): Felicitas Bauer, Marie Baumgartner, Pascal Bohlinger, Emilie Borrmann, Noah Fitting, Amira Freund, Johannes Goller, Jona Gooldmann, Theresa Horstkötter, Fynn Jürgens, Levin Kaminsky, Ben Löhngen, Philipp Mühl, Helena Röhrenbeck, Jana Röhrenbeck, Mika Schäfer, Greta Schubert, Mike Wurster.

Die Monoid-Redaktion gratuliert allen hier genannten Preisträgerinnen und Preisträgern des Schuljahres 2022/2023 herzlich zu ihren Gewinnen.

Die Preise für die Träger des Goldenen M und des Monoid-Fuchses hat der Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gespendet. Der Forscherpreis wurde von Casio gesponsert. Der Sonderpreise sowie die 1. und 4. Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität e.V. gestiftet. Die 2. und 3. Preise wurden aus dem Förderprogramm „Wissen schafft Zukunft“ der Johannes Gutenberg-Universität gedeckt.
Die Monoid-Redaktion dankt den Sponsoren herzlich!

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 154

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Levi Brunn 2, Noah Fitting 7, Quirin Fritsch 4;
Kl. 6: Robert Schmitt 20,5;
Kl. 7: Lisa Schäfer 27, Peter Knobloch 34;
Kl. 8: Mai Chi Tran 30,5, Rachel Tao 33;
Kl. 10: Oscar Su 55, Jan Christian Weber 43.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Silas Salloch 26;
Kl. 8: Mika Schäfer 16.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 6: Levin Kaminsky 10, Nico Mathy 47,5, Philip Mühlbeyer 37.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 9: Philipos Dimitriou 129,5.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:
Kl. 12: Theresa Horstkötter 14.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Imran Aouzi 5, Johannes Goller 15;
Kl. 9: Sarah Markhof 35,5.

Kiel, Thor-Heyerdahl Gymnasium
Kl. 10: Matje Benedict 8.

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:
Kl. 5: Lina Jürgens 5, Mira Pohlki 6;
Kl. 6: Ben Löhngen 7, Nelson Ngatattd 5;
Kl. 7: Mircea Cimpeann 6;
Kl. 8: Viktoria Anliner 4, Asude Arikan 5,5;
Kl. 9: Fynn Jürgens 9,5.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 11: Amira Freund 9.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 7: Philippa Lamke 19;
Kl. 12: Pascal Bohlinger 12.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 8: Victor Mayer 48.

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 6: Ioan Salaru 85.

Markkleeberg, Rudolf-Hildesrandt Schule:
Kl. 9: Alexa Lehmann 25.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 5: Philipp Mühl 12,5;
Kl. 7: Jona Goldmann 11,5, Daniel Laibach Muñiz 82;
Kl. 8: Johannes Kiehn 18.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 11: Mike Wurster 12;
Kl. 13: Salvatore Ippolito 66.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 8: Jasmin Borrmann 18;
Kl. 9: Dóra Emilia Mézáros 32;
Kl. 10: Emilie Borrmann 11;
Kl. 13: Josephine Kaßner 22.

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 10: Nils Angel 38.

Schrobenhausen, Gymnasium:
Kl. 9: Luca Sindel 34,5.

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 8: Mai Linh Dang 81;
Kl. 11: Tu Sam Dang 84.

Trier, Angela-Merici-Gymnasium:
Kl. 10: Felicitas Bauer 15.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 11: Philipp Lörcks 87.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:
Kl. 9: Marie Baumgartner 14.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:
Kl. 9: Greta Waldmüller 47.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 5: Sid Ahmed Ould Sid Ahmed 56,5,Helena Röhrenbeck 10,5, Jana Röhrenbeck 11,5, Amer Saltan 23,5;
Kl. 7: Emma Schubert 19,5, Greta Schubert 13,5.

Schüler, bei denen keine Schule angegeben wurde:
Kl. 5: Anton Krumbholz 10; Jannes Hitzelberger 3, Ingmar Rubin 8.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxsis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet“

David Hilbert
*1862, †1943

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2023/24 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Zu Besuch:** In der neuen Rubrik *Zu Besuch bei...* der Monoid Website unter:
  `https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/zuBesuchbei.php`
  findest Du ab sofort ein spannendes Interview mit Emmy Noether. Erstellt wurde dies in einer Zusammenarbeit von Dr. Achim Klenke, Dr. Margarita Kraus und Martin Mattheis.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf mit freundlicher Unterstützung von:
Daris, 13 Jahre, Otto-Schott-Gymnasium (D.M.)
Kevin, 16 Jahre, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium
Oscar, 16 Jahre, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (O.Su)
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Jahrgang 43 Heft 156 Dezember 2023

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid