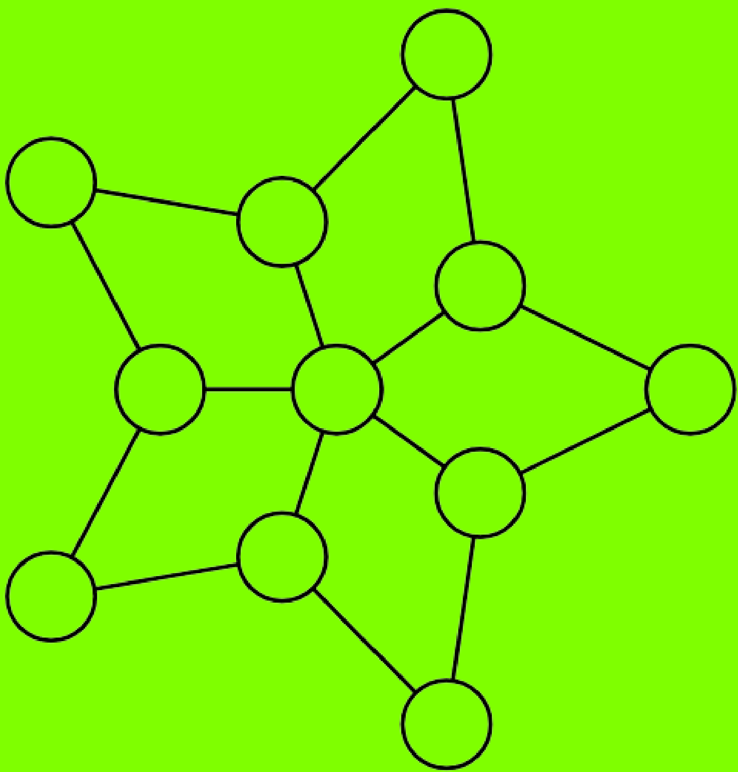
Jahrgang 43 Heft 155 September 2023

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins" hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen"* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. November 2023.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M" und seit 2015 den „Monoid-Fuchs", jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

Einladung zur Monoid-Jahresfeier

Alle Freunde und Förderer von Monoid sind herzlich eingeladen, an der Monoid-Feier 2023 teilzunehmen. Dabei werden unter anderem Preise an erfolgreiche Löserinnen und Löser des Schuljahres 2022/23 vergeben. Die Feier findet am

Samstag, den 18. November 2023,
ab 10 Uhr,
in der Alten Mensa der Universität Mainz

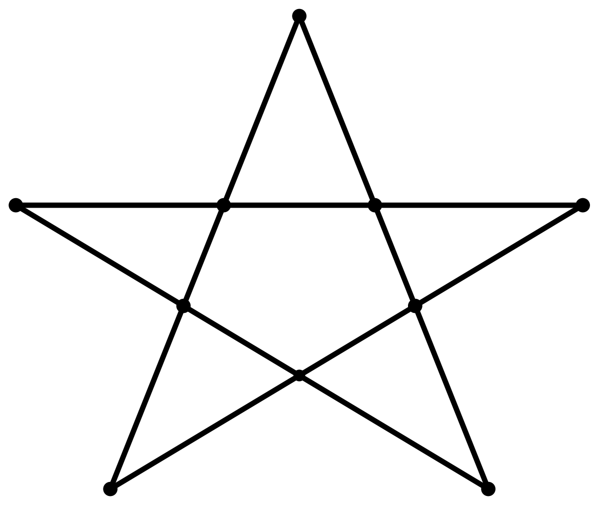
statt. Den Festvortrag „Archimedes, π und die gestörten Kreise“ wird Prof. Dr. Duco van Straten halten.
Alle Preisträgerinnen und Preisträger werden auch gesondert per Post eingeladen.
Die Veranstaltung wird musikalisch von dem Streichquartett des Frauenlob-Gymnasiums Mainz begleitet. Im Anschluss an die Feier, gegen 12:30 Uhr, sind alle Gäste zu einem kleinen Imbiss und Austausch herzlich eingeladen.

Problem eines Gärtners

von Hartwig Fuchs

Wie kann man zehn Bäumchen so pflanzen, dass sie in fünf geraden Linien mit jeweils vier Bäumchen stehen? (Eine Zeichnung genügt.)

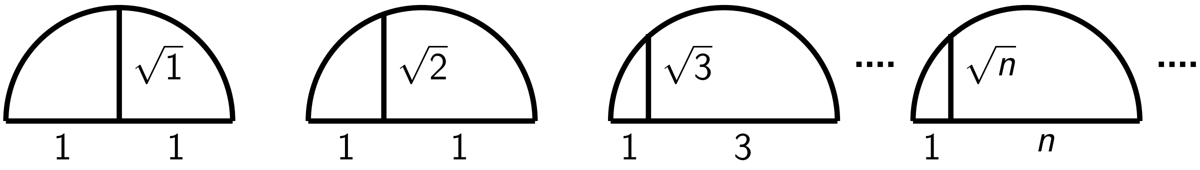
Lösung ohne Worte



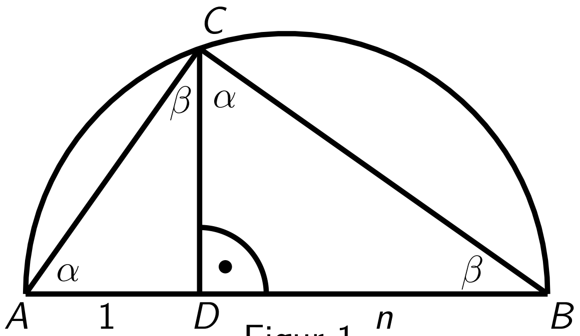
Was uns über den Weg gelaufen ist
Eine Konstruktion von $\sqrt{n}$

von Hartwig Fuchs

Kann man in Halbkreisen Strecken der Länge $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ..., $\sqrt{n}$, ..., n einer ganzen Zahl $n \geq 2$ tatsächlich nach dem Muster der Folgenden Figuren mit Zirkel und Lineal konstruieren? Man kann.



Begründung



Figur 1

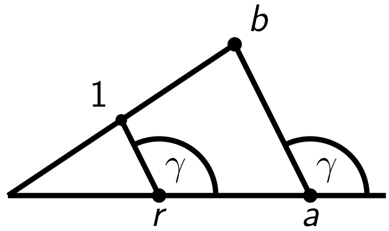
Es sei AB der Durchmesser eines Halbkreises der Länge $|AB| = 1 + n$, $n \geq 2$ beliebig. Mit den Bezeichnungen der Figur gelte:
$|AD| = 1$, $|DB| = n$, $CD \perp AB$ und damit $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ (nach dem Satz des Thales).

Die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ADC$ sind 90°, α und β mit $\alpha + \beta = 90^\circ$. Daher ist $\sphericalangle BCD = \alpha$, mithin ist $\sphericalangle DBC = \beta$. Die Dreicke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ besitzen also gleiche Innenwinkel und daher sind sie ähnlich. Für sie gilt dann nach dem Ähnlichkeitssatz:

$$\frac{|CD|}{n} = \frac{1}{|CD|} \Rightarrow |CD|^2 = n \Rightarrow |CD| = \sqrt{n}.$$

Bemerkung

Mit der gleichen Konstruktion erhält man eine Strecke der Länge $\sqrt{r}$, wobei r eine rationale Zahl größer null ist. Denn ist $r = \frac{a}{b}$, a und b ganze Zahlen größer null, so sind Strecken der Längen a und b wie in der linken Figur die Längen $r = \frac{a}{b}$ sowie $r + 1 = \frac{a}{b} + 1$, also auch Figur 1 mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Das gilt nicht für jede reelle Zahl $r > 0$, weil zum Beispiel die Strecke der Länge $r = \pi$ und damit Figur 1 nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.



Figur 2

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt $\frac{r}{a} = \frac{1}{b}$ und damit $r = \frac{a}{b}$.

Der ertappte Lügner

von Hartwig Fuchs

An einem heißen Tag badet Professor Quaoar in einem See. Als er ans Ufer zurück schwimmt, muss er feststellen: Seine Kleider und sein Rad sind verschwunden. Dafür können nur die fünf in der Nähe spielenden Kinder A, B, C, D und E verantwortlich sein. Prof. Quaoar fragt sie: „Wer von euch hat meine Sachen versteckt?“ „Das müssen Sie selbst herausfinden und zwar mit den fünf Behauptungen (A) von A, (B) von B, ..., (E) von E“, sagt eines der Kinder, nämlich mit

(A): C und D lügen.

(B): A und E lügen.

(C): B und D lügen.

(D): C und E lügen.

(E): A und B lügen.

Einer von uns wird garantiert lügen und der war's.

Nach einigem Nachdenken verkündet der in Logik sehr erfahrene Quaoar:
„A war's!“
Die Kinder: „Das haben Sie geraten!“
Prof. Quaoar: „Keineswegs, ich beweise es euch.“

Prof. Quaoars Überlegungen
Annahme: (B) ist wahr. Dann lügen A und E.
Weil B nicht lügt, ist (C) falsch, also ist C ein Lügner und daher ist (D) wahr, weil auch E lügt. Folglich ist D kein Lügner.

(1) Folgerung aus der Annahme: A, C und E sind Lügner-Kandidaten.

Annahme: (B) ist falsch. Weil B lügt, ist einer von A oder E kein Lügner. Wenn A nicht lügt, dann ist (A) wahr und C sowie D lügen beide. Für C gilt deshalb: (C) ist wahr, so dass C kein Lügner ist – ein Widerspruch.
Dieser Fall tritt also nicht ein.
Wenn A lügt, dann ist (E) wahr, denn A und B sind Lügner. Weil E nicht lügt, ist (D) falsch – D lügt. Dann aber ist (C) wahr, C lügt nicht.

(2) Folgerung aus der Annahme: A, B und D sind Lügner-Kandidaten.

Aus (1) und (2) folgt: Wie auch immer die Kinder Prof. Quaoars Fragen beantworten, die Antwort von A ist als einzige auf jeden Fall gelogen. Daher:
„A war's.“ Darauf holt A das Rad und die Kleider aus dem Versteck, Quaoar zieht sich um und radelt zufrieden mit sich selbst davon.

Beweis mit nur einem Satz

von Hartwig Fuchs

Von den drei Winkeln α, β und γ eines Dreiecks sei α der größte Winkel. Dann gilt: $\alpha \geq 60°$.

Ein Beweis mit nur einem Satz lautet:

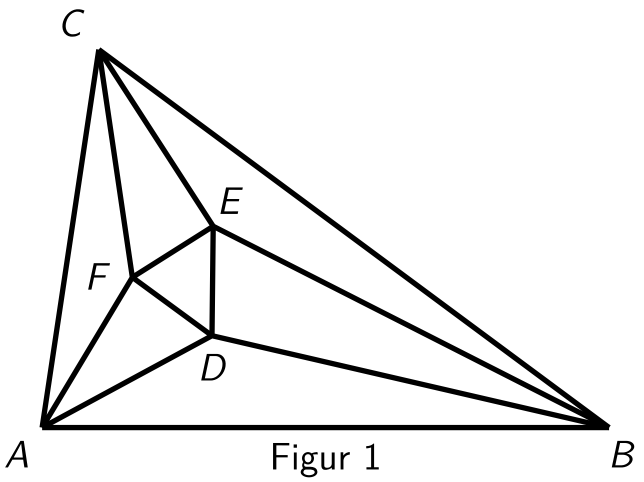
Wäre $\alpha < 60°$, so wäre $\alpha + \beta + \gamma < 180°$ für die Winkelsumme des Dreiecks.

Der Satz von Morley

von Hartwig Fuchs

Der Geometer Frank Morley (1860–1937) machte bei einer seiner Untersuchungen an Dreiecken eine Entdeckung, die er 1899 als den später nach ihm benannten Satz veröffentlichte und der seither zu den schönsten Sätzen der Geometrie zählt.

Morleys Untersuchung



Figur 1

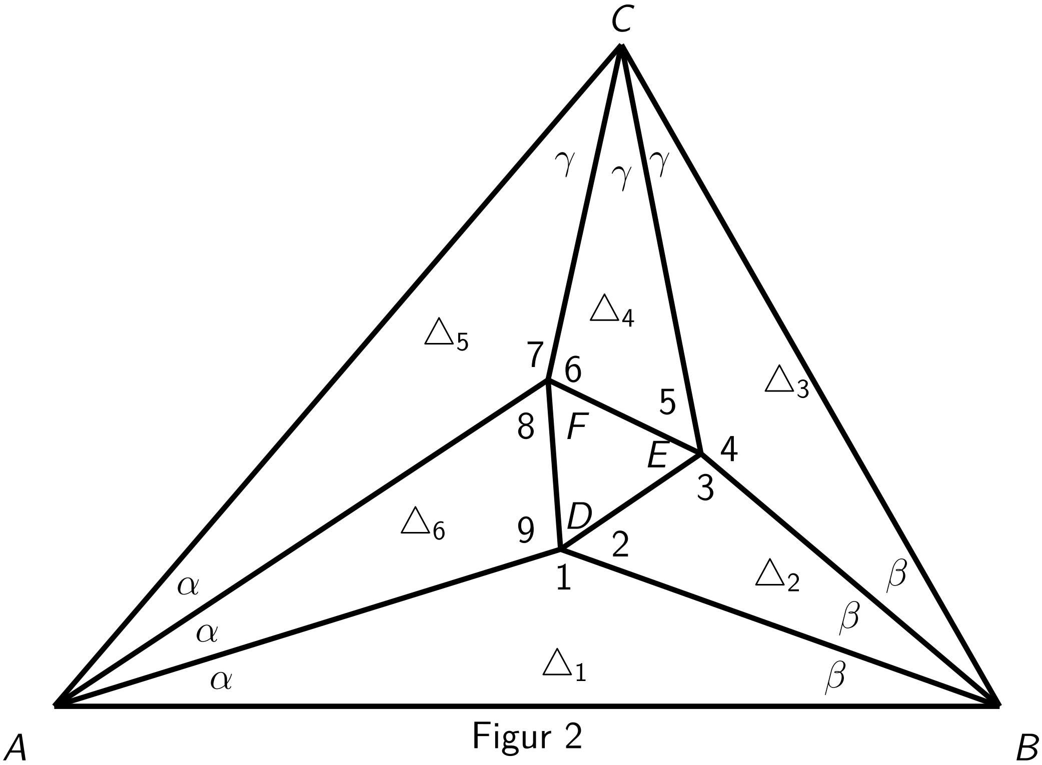
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei jeder Innenwinkel durch zwei Linien – wir nennen sie W-Teiler – in drei gleich große Teilwinkel zerlegt. Dann heißen zwei W-Teiler *benachbart*, wenn das aus ihren Endpunkten und ihren Schnittpunkten gebildete Dreieck von keinem anderen W-Teiler durchquert wird, vergleiche etwa *AD* und *AE* in Figur 1.

Es gibt also drei Paare benachbarter W-Teiler mit jeweils einem der Schnittpunkte *D*, *E* und *F*. Dann gilt – jedenfalls im Rahmen der Messgenauigkeit: Das Dreieck $\triangle DEF$ ist gleichseitig. Zufall? Morleys Antwort ist „Nein“.

Der Satz von Morley

In jedem Dreieck bilden die Schnittpunkte jeweils zweier benachbarter W-Teiler die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.

Beweis



Figur 2

Das Dreieck $\triangle DEF$ in Figur 2 sei so definiert wie in Figur 1. Daher sind die Innenwinkel 3α, 3β und 3γ des Dreiecks $\triangle ABC$ als dreigeteilt vorausgesetzt. Die in Figur 2 mit Nummern bezeichneten Winkel sollen nun bestimmt werden, denn mit ihnen lässt sich zeigen: Die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle DEF$ sind 60° groß (vgl. Morleys Behauptung).
Zunächst folgt aus $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, dass gilt:

(1) $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$

Im Dreieck $\triangle_1$ (vgl. Figur 2) ist $\sphericalangle_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ und $\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$ wegen (1). Also gilt:

(2) $\sphericalangle_1 = 120^\circ + \gamma$

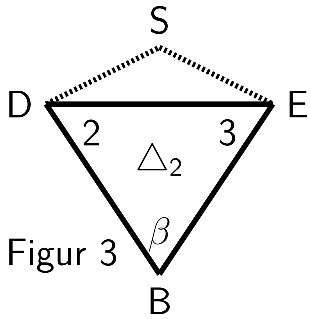
Ganz ebenso erhält man

(2') $\sphericalangle_4 = 120^\circ + \alpha$ sowie $\sphericalangle_7 = 120^\circ + \beta$.

Behauptung
Im nebenstehenden Ausschnitt aus Figur 2 gelte

(3) In $\triangle_2$ ist $\sphericalangle_2 = 60^\circ + \alpha$ sowie $\sphericalangle_3 = 60^\circ + \gamma$

Annahme: Es sei S ein Punkt der nicht in der Strecke DE liegt und für den $\sphericalangle SDB = 60^\circ + \alpha$ sowie $\sphericalangle BES = 60^\circ + \gamma$ ist. Dann ist $BESD$ ein Viereck mit der Innenwinkelsumme $360^\circ = \beta + (60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \sphericalangle ESD$, woraus mit (1) folgt: $\sphericalangle ESD = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 180^\circ$.



Figur 3

Also ist $S \in DE$ im Widerspruch zur Annahme. Es gilt daher (3). Und ganz entsprechend lässt sich zeigen:

(3') In $\triangle_4$ ist $\sphericalangle_5 = 60° + \beta$, $\sphericalangle_6 = 60° + \alpha$ und im $\triangle_6$ ist $\sphericalangle_8 = 60° + \gamma$ sowie $\sphericalangle_9 = 60° + \beta$.

Nun kann man die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle DEF$ bestimmen.

(4) $\sphericalangle FDE = 60°$.

Nachweis (siehe Figur 2)

$\sphericalangle_1 + \sphericalangle_2 + \sphericalangle FDE + \sphericalangle_9 = 360°$, woraus folgt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle FDE &= 360° - (120° + \gamma) - (60° + \alpha) - (60° + \beta)\\ &= 120° - (\alpha + \beta + \gamma)\\ &= 120° - 60° = 60°\end{aligned}$$

Ganz ebenso lässt sich herleiten

(4') $\sphericalangle DEF = \sphericalangle EFD = 60°$.

Aus (4) und (4′) folgt: Das Dreieck $\triangle DEF$ ist gleichseitig – es gilt daher der Satz von Morley.

Hinweis: Der Satz von Morley gehört nicht zu dem Teil der euklidischen Geometrie, der nur Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal erlaubt. Denn bereits 1845 hat Pierre Wantzel (1814–1848) bewiesen, dass die Dreiteilung eines Winkels nur mit Zirkel und Lineal im Allgemeinen nicht möglich ist.

Wo liegt der Fehler?

von Hartwig Fuchs

Den Mathematiker Charles Lutwidge Dodgson (1832 - 1898) kennen heute nur noch Mathematikhistoriker, aber als Kinderbuchverfasser von so wunderbaren Geschichten wie „Alice im Wunderland“ und als Erfinder schöner mathematischer Puzzles und logischer Paradoxien ist er noch heute als Lewis Carroll unvergessen.

Eines seiner mathematischen Rätsel in nicht wortgetreuer Übersetzung ist dieses. Es seien $x = 1$ und $y = 1$. Dann gelten

(1) $2(x^2 - y^2) = 0$ und $5(x - y) = 0$. Also ist

(2) $2(x^2 - y^2) = 5(x - y)$ oder

(3) $2(x + y)(x - y) = 5(x - y)$

Vergleicht man nun in (3) die Faktoren von $(x - y)$, so ergeben sich

(4) $2(x + y) = 5$ und mit $x = 1 = y$

(5) $2 \cdot 2 = 5$

Wo liegt der Fehler?

Lösung

Der Übergang von Gleichung (3) nach Gleichung (4) bedeutet algebraisch, dass beide Seiten von Gleichung (3) durch $x - y$ und damit durch Null dividiert werden. Diese nicht erlaubte Operation verursacht den Unsinn $2 \cdot 2 = 5$.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

An ihrem ersten Schultag nach den Sommerferien treffen sich die Fünftklässler in der großen Pause auf dem Schulhof der neuen Schule. Alles ist noch ungewohnt, und so setzen sich ein Junge und ein Mädchen auf die entgegengesetzten Enden einer langen Bank. Einer nach dem anderen nehmen weitere 20 Kinder auf der Bank Platz. Setzt sich ein Junge zwischen zwei Mädchen oder ein Mädchen zwischen zwei Jungen, so bezeichnen wir sie oder ihn als tapfer. Nachdem alle Kinder Platz genommen haben, sitzen Jungen und Mädchen abwechselnd. Wie viele unter ihnen waren tapfer? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2023 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 153

In Heft 153 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Zehn ganze Zahlen, die nicht unbedingt alle verschieden sein müssen, haben folgende Eigenschaft: Beim Weglassen jeweils einer der Zahlen ergeben die übrigen neun Zahlen die Summen $82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92$. (Ja, es gibt tatsächlich nur neun verschiedene Summenwerte!)
Wie lauten die zehn Zahlen? (Die Lösung ist zu begründen!)

Lösung

Weil die zehn Summen genau neun verschiedene Werte annehmen, kann nur eine der Summen zweimal vorkommen; wir bezeichnen sie mit s. Dann ist in dem Term $t = 82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 91 + 92 + s = 783 + s$ jede der zehn gegebenen Zahlen genau neunmal enthalten, denn jede wird in einer der Summen weggelassen. Daher muss t durch Neun teilbar sein. Weil 783 durch Neun teilbar ist, folgt $s = 90$, der einzige durch Neun teilbare unter den gegebenen Summenwerten. Es ist also $t = 873 = 9 \cdot 97$. Die Summe der zehn gesuchten Zahlen beträgt somit 97. Wenn wir nun die neun Summenwerte von 97 subtrahieren, erhalten wir die gesuchten Zahlen, wobei $97 - 90 = 7$ zweimal berücksichtigt werden muss. Die zehn Zahlen lauten also 5, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 14 und 15.

Richtige Lösungen wurden von Salvatore Ippolito (Albert-Schäffle-Schule, Nür-

tingen, Klasse 13) und Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Klasse 10) eingesandt.
Was wäre, wenn beim Weglassen jeweils einer der Zahlen die übrigen neun Zahlen die Summen 82, 83, 84, 85, 87, 89, 91, 92 ergäben, also nur acht verschiedene Summenwerte existierten? Kann man auch hier die zehn Zahlen eindeutig bestimmen? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 154

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. 2023 als 7er-Potenz

Es gelten zum Beispiel $7^3 = 343$ und

$$7^3+7^3+7^3+7^3+7^3+7^2+7^2+7^2+7^2+7^2+7^1+7^1+7^1 = 1981.$$

a) Wie viele der natürlichen Zahlen von 1 bis 2023 lassen sich als Potenzen von 7 mit natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... als Exponenten oder als Summen von solchen schreiben?

b) Gib – wenn möglich – auch eine entsprechende Darstellung für 2023 an oder begründe, warum dies nicht möglich ist.

(MG)

Lösung:

a) Jede durch 7 teilbare Zahl lässt sich so schreiben, also 289 der natürlichen Zahlen von 1 bis 2023.

b) Da 2023 durch 7 teilbar ist, gibt es eine Darstellung mit 7er-Potenzen. Es gibt verschiedene Darstellungen; die Darstellung mit den wenigsten Summanden ist $7^3+7^3+7^3+7^3+7^3+7^2+7^2+7^2+7^2+7^2+7^2+7^1+7^1$.

II. Größte Zahl

99 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen haben die Summe 9999. Bestimme die größte Zahl in dieser Summe. (H.F.)

Lösung:

Die 99 aufeinander folgenden Zahlen seien $n-49$, $n-48$, ... , $n-1$, n, $n+1$, ... $n+48$, $n+49$. Für die Summe dieser Zahlen gilt: $99n = 9999$. Also ist $n = 101$.
Die gesuchte Zahl ist $n+49 = 150$

III. Würfelergebnisse

Beim Wurf zweier regulärer Würfel W_1 und W_2 seien w_1 und w_2 die möglichen gewürfelten Augenzahlen; damit sind auch die zweiziffrigen Zahlen

$w_1w_2 = 10w_1 + w_2$ sowie die Augensummen $w_1 + w_2$ mögliche Ergebnisse. Ordne nun nach wachsender Größe die Wahrscheinlichkeiten P der Ereignisse E_1, E_2, E_3:

E_1: Die Zahl w_1w_2 ist gerade;
E_2: Die Zahl w_1w_2 ist prim;
E_3: Die Augensumme $w_1 + w_2$ ist nicht prim. (H.F.)

Lösung:
Es gilt: $w_1, w_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und daher $w_1 + w_2 \in \{2, 3, 4, \dots, 12\}$. Die dann möglichen Ergebnisse $w_1 + w_2$ und w_1w_2 sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

$w_1 + w_2$	2	3	4	5	6	7
w_1w_2	11	12,21	13,22	14,23	15,24	16,25
			31	32,41	33,42	34,43
					51	52,61

$w_1 + w_2$	8	9	10	11	12
w_1w_2	26,35	36,45	46,55	56,65	66
	44,53	54,65	64		
	62				

Aus der Tabelle liest man ab:

(1) Es gibt $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 = 36$ mögliche Ergebnisse w_1w_2

(2) Es gibt 18 geradzahlige mögliche Ergebnisse w_1w_2;

(3) Es gibt 8 prime mögliche Ergebnisse w_1w_2;

(4) Es gibt 21 Ergebnisse w_1w_2 derart, dass $w_1 + w_2$ prim ist.

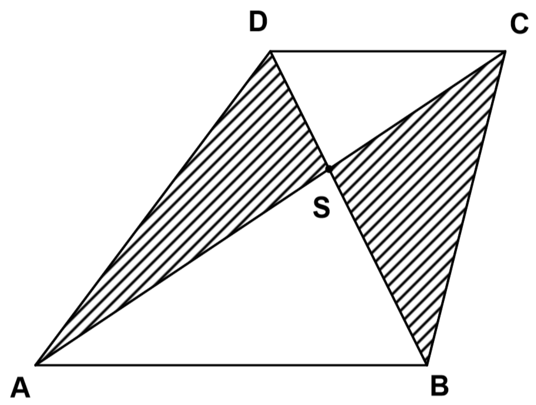
Aus (1) – (4) $\Rightarrow P(E_2) = \frac{8}{36} < P(E_1) = \frac{18}{36} < P(E_3) = \frac{21}{36}$

IV. Eine Trapezeigenschaft

Die Diagonalen eines Trapezes $ABCD$ mit $AB||CD$ schneiden sich im Punkt S.
Begründe:

a) Die Dreiecke ABC und ABD sind flächengleich.

b) Die Dreiecke ASD und CSB sind ebenfalls gleich groß.



(H.F.)

Lösung:

a) Aus $AB||CD$ folgt, dass die Dreiecke ABC und ABD die gleiche Höhe haben und daher gilt $|ABC| = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = |ABD|$.

b) Es gilt: $|ABC| = |BCS| + |ABS|$ und $|ABD| = |ASD| + |ABS|$. Wegen *a*) ist $|BCS| + |ABS| = |ASD| + |ABS|$ und deshalb $|ASD| = |BCS|$.

V. Lösung einer Gleichung

Für jede reelle Zahl z bedeutet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Für welche x gilt dann

$$\left[\frac{3x-2}{4}\right] = \frac{5x}{7}?$$

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

Gilt die Gleichung, so ist $\frac{5x}{7}$ diejenige ganzzahlige Zahl, für die

$$\frac{5x}{7} \leq \frac{3x-2}{4} < \frac{5x}{7} + 1.$$

Die erste Ungleichung $\frac{5x}{7} \leq \frac{3x-2}{4}$ führt zu $20x \leq 21x - 14$, also $x \geq 14$. Die zweite bedeutet $21x - 14 < 20x + 28$, das heißt $x < 42$.

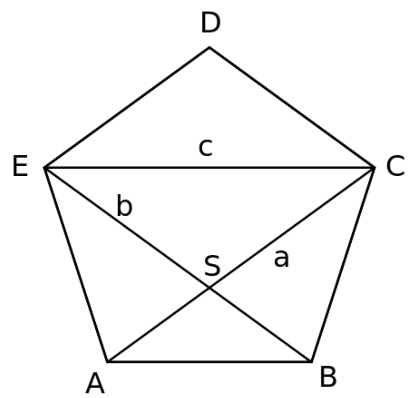
Die Werte x, für die $14 \leq x < 42$ und für die $\frac{5x}{7}$ eine ganze Zahl ist, sind 14, 21, 28, 35.

VI. Fünfeck und Dreieck

Zeige: In jedem konvexen* Fünfeck kann man stets drei Diagonalen so auswählen, dass jeweils ihre Teilstrecken zusammen die Seiten eines Dreiecks bilden.

(H.F.)

Lösung:



$ABCDE$ sei das Fünfeck und AC mit $|AC| = a$, CE mit $|CE| = c$ und BE mit $|BE| = b$ seien die ausgewählten Diagonalen.

S sei der Schnittpunkt von AC und BE.

S liegt innerhalb des Fünfecks – das folgt aus dessen Konvexität. Aus den drei Diagonalen kann man ein Dreieck bilden, wenn für ihre Längen die Dreiecksungleichungen gelten, nämlich: $c < a + b$, $b < a + c$ und $a < b + c$.

Die Diagonale CE sei mindestens so lang wie AC und BE, also $|CE| \geq |AC|$ und $|CE| \geq |BE|$.

* Ein n-Eck heißt konvex, wenn alle Innenwinkel kleiner als $180°$ sind.

Wir zeigen nun, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind: Für das Dreieck CES gilt $|CE| < |SC| + |SE|$.
Wegen $|SC| < a$ und $|SE| < b$ folgt mit $|CE| = c$, dass $c < a + b$ ist. Da $|CE| \geq |BE|$, also $c \geq b$ und $a > 0$ ist, gilt $b < a + c$.
Aus $|CE| \geq |AC|$, also $c \geq a$ und $b > 0$ folgt $a < b + c$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

VII. Ausschluss von Produkten

Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen mit n Ziffern. Diese Ziffern dürfen nur 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 sein und müssen mindestens einmal vorkommen.
Begründe: Es gibt keinen Faktor $f = 2, 3, 4, \ldots$, für den das Produkt aus f und einer der Zahlen in M immer noch in M liegt.
Tipp: Betrachte die Fälle $f \geq 3$ und $f = 2$. (H.F.)

Lösung:
Für ein beliebiges $z \in M$ sei $z = z_1 z_2 \ldots z_n$ mit Ziffern z_i, $1 \leq i \leq n$, geschrieben. Da z n-ziffrig ist, gilt $z < 10^n$.
Es sei $f \geq 3$. Für die erste Ziffer z_1 von $z \in M$ gilt dann $z_1 \geq 4$. Daher ist $f \cdot z \geq 3 \cdot z > 3 \cdot 4 \cdot 10^{n-1} = 12 \cdot 10^{n-1} > 10^n$. Weil $z < 10^n$ ist für jedes $z \in M$, folgt $f \cdot z \notin M$.
Es sei $f = 2$.
Für jede Ziffer z_i von z gilt $2z_i \leq 18$.
Nach Voraussetzung besitzt z mindestens eine Ziffer $z_j = 5$.
Wegen $8 \leq 2z_{j+1} \leq 18$ befindet sich daher auf der j-ten Ziffernposition von $2z$ entweder die Ziffer 0 oder die Ziffer 1, sodass $2z$ nach Voraussetzung nicht in M vorkommt.

Neue Mathespielereien

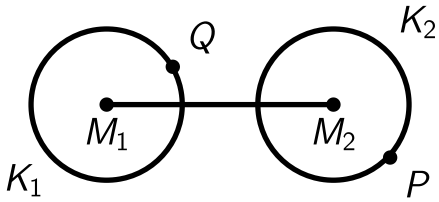
Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. November 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. Ein vielziffriges Produkt

Es sei $n = \underbrace{333\ldots33}_{\text{2023 Ziffern}}7$. Bestimme den Wert von n^2. (H.F.)

II. Kürzeste Strecke



K_1 und K_2 seien zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 4\,\text{cm}$, $r_2 = 4\,\text{cm}$ sowie den Mittelpunkten M_1 und M_2, die in einem Abstand von 10 cm voneinander entfernt liegen. P sei ein beliebiger Punkt auf K_1 und Q ein beliebiger Punkt auf K_2. Ist die Strecke PQ am kürzesten, wenn P und Q auf der Strecke M_1M_2 liegen? Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.

(H.F.)

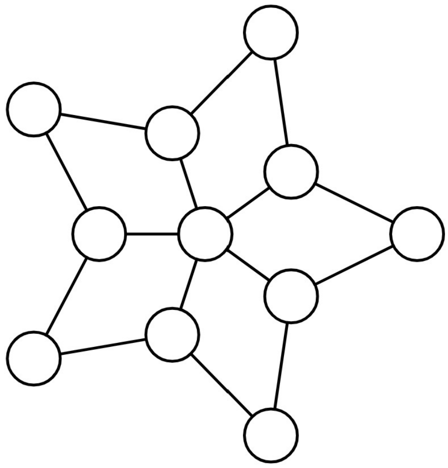
III. Uhrzeiger

Um 18 Uhr (zum Beispiel) stehen die Zeiger einer Uhr einander gegenüber. Wie lange dauert es, bis der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt? Gib deine Antwort sekundengenau. (Wolfgang J. Bühler, Diez)

IV. Jahreszahlen-Schnipsel

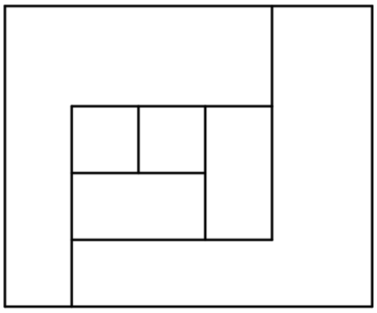
Von elf Blättern Papier wird eines mit der Schere so zerschnitten, dass es in fünf Teile zerlegt wird. Danach zerteilt man ein weiteres Blatt oder eines der fünf Papierschnipsel wieder in fünf Teile. Dies wiederholt man immer wieder. Kann man nun durch wiederholte Schnitte erreichen, dass insgesamt 2023 Stücke Papier vorhanden sind und wie viele Schnitte sind dann gegebenenfalls dazu erforderlich? (H.F.)

V. Zahlenstern



Gegeben sei ein Zahlenstern, der aus fünf Vierecken besteht. Trage die Zahlen $2013, 2014, \ldots, 2023$ so in die Kreise der Figur ein, dass die Summen in den Vierecken übereinstimmen und 2023 in möglichst vielen Vierecken vorkommt. Dabei darf jede Zahl nur einmal verwendet werden. (H.F.)

VI. Färbeproblem



Male in der Figur die Flächen jedes Teilgebietes mit einer anderen Farbe aus und zwar so, dass keine zwei aneinander grenzenden Gebiete von gleicher Farbe sind. Kann man diese Vorgabe ...

a) ... mit drei Farben

b) ... mit vier Farben

erfüllen? (H.F.)

VII. Was ist wahrscheinlicher?

Beim Schulfest am Martin-Mettler-Gymnasium wird auch eine Tombola angeboten. In einer Urne liegen dazu Kugeln mit Zahlen darauf: Eine Kugel mit der Nummer 1, zwei Kugeln jeweils mit der Nummer 2, drei Kugeln jeweils mit der Nummer 3, und so weiter bis zehn Kugeln jeweils mit der Nummer 10.
Karin zieht eine Kugel. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher: Sie zieht eine Kugel mit der Nummer 10 oder sie zieht eine der Kugeln mit einer Nummer 1 oder 2 oder 3 oder 4? (MG)

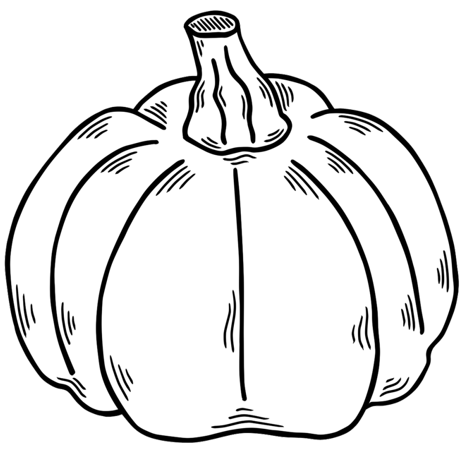
VIII. Quersumme 2023

Gib

a) die kleinste

b) die größte

natürliche Zahl an, in deren Dezimaldarstellung nur die Ziffern 2 und 3 vorkommen und welche die Quersumme 2023 besitzt. (MG)



Die MONOID-Redaktion wünscht allen L(o)eserinnen und L(o)esern einen schönen Herbst.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. November 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1331: Zahlenmutation

Eine n-stellige natürliche Zahl beginnt mit der Ziffer 1. Nimmt man diese vordere Ziffer weg und hängt sie hinten an, so entsteht eine Zahl, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Bestimme die kleinste Zahl, für die dies möglich ist.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1332: Quadrate der Ziffern

Eine Zahlenfolge (a_n) beginnt mit $a_0 = 12345$ und jedes weitere Folgenglied ist die Summe der Quadrate der Ziffern des vorherigen Folgeglieds.

Also $a_1 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$, $a_2 = 5^2+5^2 = 50$ und so weiter. Bestimme a_{1000}.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1333: Mantellinien eines Kegels

Betrachte einen Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, und dessen Spitze senkrecht über dem Kreismittelpunkt ist. Jede die Mittellinie des Kegels enthaltende Ebene schneidet aus dem Kegelmantel zwei Mantellinien mit dem gleichen Winkel.*

a) Bleibt dieses Ergebnis erhalten, wenn wir den Kreis durch eine Ellipse ersetzen?

b) Ist das Ergebnis richtig, wenn die Spitze des Kegels nicht senkrecht über dem Kreismittelpunkt liegt?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1334: Zahlenauswahl

Aus der Menge M der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2022 wird eine beliebige Teilmenge T mit 1012 Zahlen ausgewählt.

Zeige: In T gibt es zwei Zahlen a und b, für die $a + b = 2023$ ist. (H.F.)

Aufgabe 1335: Unordnung in der Sockenschublade

Die beiden Schwestern Carolina und Patricia haben gleich große Füße und teilen sich eine Sockenschublade mit einem gemeinsamen Vorrat an Socken, die ungeordnet und einzeln in der Schublade liegen: sechs weiße, acht rote und vier grüne.

* Die Mittellinie ist die Strecke vom Kreismittelpunkt zum Punkt der Spitze.

a) Carolina nimmt so lange wahllos einzelne Socken aus der Schublade, bis unter allen genommenen Socken zwei gleichfarbige sind. Wie oft muss sie höchstens in die Schublade greifen, bis das der Fall ist?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass bereits die ersten beiden Socken von gleicher Farbe sind?
c) Nachdem Carolina ein grünes Paar gefunden hat und alle anderen Socken wieder in die Schublade gelegt hat, ist Patricia dran. Wie lauten die Antworten auf die Fragen (a) und (b) für Patricia?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1336: Zwei letzte Ziffern
Wie heißen die zwei letzten Ziffern von 2023^{2024}? (H.F.)

Aufgabe 1337: Teilbarkeit durch 5
Zeige: Die Werte des Terms $2^n + 3^n$ sind für alle ungeraden positiven ganzen Zahlen n durch fünf teilbar. (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 154

Klassen 9–13

Aufgabe 1324: Finde alle Lösungen
Finde alle Lösungen der Gleichung $y = \frac{x^2}{x+6}$ mit ganzzahligen $x \geq 0$ und $y \geq 0$.
(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:
Nach Umformung zu $y(x+6) = x^2$ sieht man: $x = y = 0$ ist eine Lösung.
Falls $x > 0$, so muss $y < x$ sein, da $x + 6 > x$.
Wir setzen $y = x - z$ mit $z > 0$ (ganzzahlig) ein. Dies ergibt

$$x^2 = (x-z)(x+6) = x^2 + 6x - z(x+6),$$

also $x = \frac{6z}{(6-z)}$. Also muss $z < 6$ sein.
Wir setzen nacheinander $z = 1, 2, \ldots, 5$

$$z = 1 \quad x = \frac{6}{5} \quad \text{nicht ganzzahlig}$$

$$z = 2 \quad x = \frac{12}{4} = 3 \qquad y = x - z = 1 \frac{x^2}{(x+6)} = \frac{9}{9} = 1$$

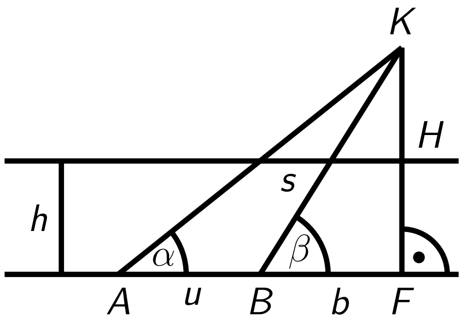
$$z = 3 \quad x = \frac{18}{3} = 6 \qquad y = x - z = 3 \frac{x^2}{(x+6)} = \frac{36}{12} = 3$$

$$z = 4 \quad x = \frac{24}{2} = 12 \qquad y = x - z = 8 \frac{x^2}{(x+6)} = \frac{144}{18} = 8$$

$$z = 5 \quad x = \frac{30}{1} = 30 \qquad\qquad y = x - z = 25\frac{x^2}{(x+6)} = \frac{900}{36} = 25$$

Die Lösungen sind also $x = 0$, $y = 0$; $x = 3$, $y = 1$; $x = 6$, $y = 3$; $x = 12$, $y = 8$ sowie $x = 30$, $y = 25$.

Aufgabe 1325: Flugzeug und Kondensstreifen



Ein Flugzeug fliegt wie in nebenstehender Skizze dargestellt in der Höhe $h = 1000\,\mathrm{m}$ mit der Geschwindigkeit $v = 540\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von West nach Ost. Am Boden direkt unter der Flugstrecke sieht ein Beobachter A das Flugzeug einen Kondensstreifen kreuzen unter dem Blickwinkel $\alpha = 45°$. Ein weiterer Beobachter B steht $u = 1000\,\mathrm{m}$ weiter östlich und sieht unter dem Blickwinkel $\beta = 49°$ die gleiche Szene etwas später.

a) In welcher Höhe H befindet sich der Kondensstreifen?

b) Um wieviel später als A macht B seine Beobachtung?

Hinweis: Beachte unbedingt die Abbildung zur Eindeutigkeit der Lösung.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

Wir skizzieren die senkrechte Ebene, in der sich A, B und das Flugzeug befinden. K ist der Punkt, in dem der Kondensstreifen diese Ebene schneidet.

a) Mit $|BF| = b$ gilt

$$H = b\tan\beta = (b+u)\tan\alpha$$

und damit $b(\tan\beta - \tan\alpha) = u\tan\alpha$, also $b = u\frac{\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$.
Daraus folgt

$$H = u\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}.$$

Dies ergibt $H \approx 7650\,\mathrm{m}$.

b) Die Flugstrecke zwischen den Beobachtungen sei s. Dann ist $\frac{s}{u} = \frac{(H-h)}{H}$, also $s = u\frac{(H-h)}{H} = 1000 \cdot \frac{6650}{7650}\,\mathrm{m} = 869\,\mathrm{m}$ und die dafür benötigte Zeit $t = \frac{s}{v} \approx \frac{869m}{540\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{869}{150}\,\mathrm{s} \approx 5{,}8\,\mathrm{s}$ (da $540\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 150\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$).

Aufgabe 1326: Unterstrichen und durchgestrichen

Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Schreibe alle natürlichen Zahlen von 1 bis $2n^2$ nacheinander auf. Nun werden die ersten n dieser Zahlen unterstrichen, die nächsten n durchgestrichen, die übernächsten n wieder unterstrichen usw.

a) Bestimme die Summe $S_1(n)$ aller unterstrichenen Zahlen.
Beispiel: $S_1(3) = 1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + 13 + 14 + 15 = 72$.

b) Es sei $S_2(n)$ die Summe der duchgestrichenen Zahlen und

$$d(n) = S_2(n) - S_1(n).$$

Bestimme $d(n)$ (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Tipp: Du darfst die Gaußsche Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ verwenden.

Lösung:

a) Da $2n^2$ gerade ist, gibt es genauso viele unterstrichene wie durchgestrichene Zahlen, nämlich n^2. Die erste unterstrichene Zahl ist 1, die letzte ist $2n^2 - n$. Nun wendet man die Gaußsche Summernformel für die Berechnung der Summe an. Addiert man die zweite und die zweitletzte, die dritte und drittletzte und so weiter und zum Schluss die letzte und die erste, so erhält man, da es n^2 unterstrichene Zahlen sind, n^2-mal die gleiche Summe $2n^2 - n + 1$. Also gilt für die doppelte gesuchte Summe: $2 \cdot S_1(n) = n^2 \cdot (2n^2 - n + 1)$. Hieraus ergibt sich die Lösungsformel: $S_1(n) = \frac{n^2 \cdot (2n^2 - n + 1)}{2}$.

b) Ist $S(n) = S_1(n) + S_2(n)$ die Summe aller Zahlen, so gilt nach der Gaußschen Summenformel $S(n) = 2n^2 \cdot \frac{(2n^2+1)}{2}$.
Also ist $S_2(n) = S(n) - S_1(n) = \frac{4n^4+2n^2}{2} - \frac{2n^4-n^3+n^2}{2} = \frac{2n^4+n^3+n^2}{2}$.
Daher ist $d(n) = S_2(n) - S_1(n) = \frac{2n^4+n^3+n^2}{2} - \frac{2n^4-n^3+n^2}{2} = \frac{2n^3}{2} = n^3$.
Beispiel: Für $n = 3$ sind $S_1(3) = 72$, $S_2(3) = 99$ und $d(3) = 27$.

Aufgabe 1327: Summen 1 und 2

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 99 werden mit je einem Vorzeichen $+$ oder $-$ versehen und aufsummiert, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt.
Kannst Du die Zahlen 1 und 2 als eine solche Summe darstellen?

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Der höchste Summenwert (wenn alle Summanden positiv sind) ist $+1 + 2 + 3 + ... + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$. Wird ein Summand $+s$ der Summe in $-s$ geändert, so wird der Summenwert um $2 \cdot s$ kleiner, das heißt, er vermindert sich immer um eine gerade Zahl. Da 4950 gerade ist, kann der ungerade Wert 1 nie erreicht werden, das heißt die Zahl 1 lässt sich nicht als Summe der Zahlen darstellen.
Anders ist es bei der Zahl 2. Ändert man bei $+1$ und $+99$ das Vorzeichen $+$ in $-$, so wird der Summenwert um 200 kleiner. Ebenso bei $+2$ und $+98$, $+3$ und $+97$ und so weiter bis $+24$ und $+76$. Jetzt ist der Summenwert $4950 - 24 \cdot 200 = 150$. Ändert man noch $+75$ zu -75, so besitzt die Summe den Wert 0. Nun muss man nur noch -1 zu $+1$ ändern, um die Summe 2 zu erhalten.
Also: $2 = +1 - 2 - 3 - ... - 24 + 25 + 26 + ... + 74 - 75 - 76 - ... - 99$.

Aufgabe 1328: Periodische Dezimalbrüche

Es sei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl. Prüfe, ob die folgenden Behauptungen richtig sind:

a) Die Dezimalentwicklung von $\frac{1}{p}$ ist periodisch. Die Länge l der Periode (das heißt die Anzahl der Ziffern in einer Periode) ist höchstens $p-1$.

b) Jede der Zahlen $\frac{j}{p}$, mit $j = 1, 2, ..., p-1$, hat eine Periode der gleichen Länge l. (Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

a) Dividieren wir 1 nach der üblichen Methode durch p, so wiederholt sich nach höchstens $p-1$ Schritten einer der „Reste".

b) Ist k der erste Rest, der sich wiederholt, so hat $\frac{k}{p}$ keine „Vorperiode", das heißt, es ist rein periodisch ohne Ziffern vor der Periode. Multiplizieren wir $\frac{k}{p}$ mit 2, 3, ..., $p-1$, so erhalten wir ebenfalls keine Perioden der gleichen Länge l. Die Zahlen $n \cdot \frac{k}{p}$ sind (da p eine Primzahl ist) von der Form $5 + \frac{j}{p}$, wobei j alle Zahlen 1, 2, ..., $p-1$ durchläuft. Also sind auch alle $\frac{j}{p}$ rein periodisch mit Periodenlänge l.

Aufgabe 1329: Teilersumme

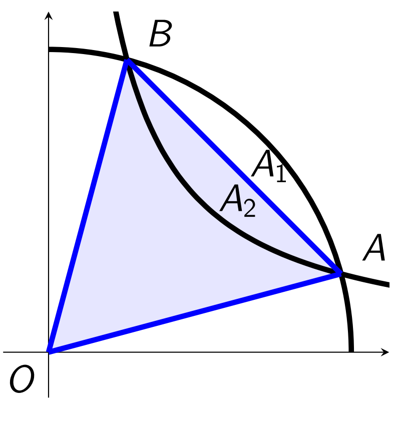
Beweise die folgende Aussage.

> Für jede Primzahl p und jede positive ganze Zahl k gilt: Die Summe der echten Teiler von p^k ist kleiner als p^k. (H.F.)

Lösung:

Die echten Teiler von p^k sind 1, p, p^2, ..., p^{k-1}; ihre Summe ist $1+p+p^2+\ldots+p^{k-1} = \frac{p^k-1}{p-1}$ – Du siehst das, wenn Du die Gleichung mit $p-1$ multiplizierst. Wegen $p \geq 2$ und daher $p-1 \geq 1$ ist nun $\frac{p^k-1}{p-1} \leq p^k - 1 < p^k$, so dass die Behauptung zutrifft.

Aufgabe 1330: Kreis und Hyperbel



Zeichnet man einen Viertelkreis mit dem Mittelpunkt $(0;0)$ und Radius r (mit $r > 1$) sowie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ in ein Koordinatensystem, so ergeben sich zwei Schnittpunkte A und B (siehe Abbildung).

a) Welchen Radius muss der Kreis haben, damit das Dreick OAB gleichseitig ist?

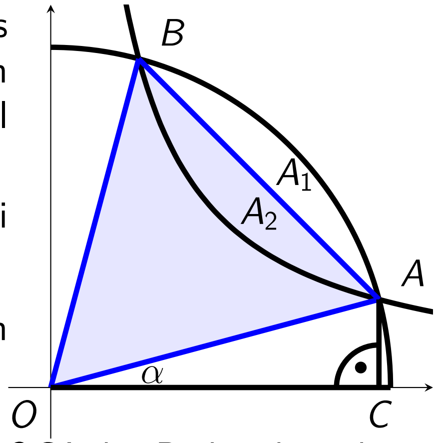
b) Sind die Flächen A_1 und A_2 der beiden „Bögen" dann gleich groß? Begründe Deine Antwort. (Christoph Sievert, Bornheim)

Zu dieser Aufgabe haben wir Euch ein Applet erstellt, welches Du unter dem folgenden Link oder mithilfe des nebenstehenden QR-Codes aufrufen kannst.

`https://www.geogebra.org/m/a4wm4a4e`

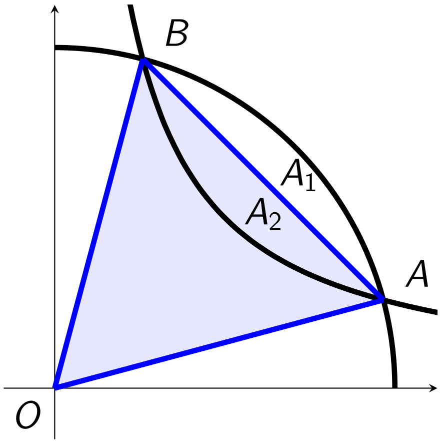
Lösung:

a) Für die Lösung von *a*) spielt der Viertelkreis keine Rolle. Der Punkt A habe die Koordinaten $\left(t; \frac{1}{t}\right)$. Aus Symmetriegründen muss der Winkel $\alpha = 15^\circ$ betragen. Dann gilt:
$\tan(15^\circ) = \frac{\frac{1}{t}}{t}$ oder $\tan(15^\circ) = \frac{1}{t^2}$ wobei $\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$. Daraus folgt $t = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.
A hat also die Koordinaten $\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}; \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$ oder $A(1{,}93; 0{,}52)$.



Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich im $\triangle OCA$ der Radius berechnen: $r = 2\,\text{cm}$

b) Die Fläche A_1 berechnet sich aus der Differenz der Fläche des Bogens $\frown OBA$ und der Fläche des $\triangle OBA$ $A_1 = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \approx 0.36$FE.
A_2 ist die Fläche, die von der Geraden durch A und B sowie der Hyperbel eingeschlossen wird. Die Gerade durch A und B ist gegeben durch die Funktionsgleichung
$f(x) = -x + t + \frac{1}{t}$ mit $t = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Damit gilt
$A_2 = \int_{\frac{1}{t}}^{t} \left(-x + t + \frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) dx$
$A_2 = \left[-\frac{1}{2}x^2 + tx + \frac{1}{t}x - \ln(x)\right]_{\frac{1}{t}}^{t} \approx 0{,}42\,$FE.



A_2 ist also etwas größer als A_1.

Lösung der Computer-Aufgabe
aus Monoid 153

In Heft 153 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Am rechten Straßenrand sind hintereinander 30 Parkplätze markiert. Da es geschneit hat, sind die Markierungen nicht mehr zu sehen und die Autos werden einfach unabhängig von den Linien an irgendeiner Position geparkt. Wie viele Autos passen jetzt noch auf die 30 Plätze?

Um die Fragestellung präziser zu fassen, nehmen wir an, dass jedes Auto die gleiche Länge hat und die Parkmarkierungen exakt auf die Autos abgestimmt sind. Mit anderen Worten, wir können annehmen, dass die Autos Intervalle der Länge 1 sind und der gesamte Parkplatz das Intervall $[0, 30]$. Ein Auto, dessen Heck an Position $x \in [0, 29]$ steht, nimmt daher das Intervall $[x, x+1)$ ein. Den rechten Punkt haben wir rausgenommen, um zu erlauben, dass 30 Autos überschneidungsfrei an den Positionen $0, 1, \dots, 29$ stehen, wie es die Parkmarkierungen eigentlich vorsehen.

Wir nehmen aber nun an, dass der Parkplatz anfangs leer ist und das erste Auto einfach an einer zufälligen Position $X_1 \in [0, 29]$ hält. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X_1 \in [a, b]$ ist (für $0 \leq a < b \leq 29$) ist also $\frac{b-a}{29}$. Das zweite Auto sucht sich ebenfalls eine zufällige Position X_2 in genau gleicher Weise aus. Wenn das nicht passt, weil dort schon ein Auto steht (wenn also $|X_2 - X_1| < 1$ ist), fährt es einmal um den Block und macht einen neuen Versuch nach der gleichen Methode, so lange, bis es einen Parkplatz gefunden hat. Nun kommt das dritte Auto und so weiter, bis kein weiteres Auto mehr auf den Parkplatz passt.

Aufgabe: Schreibe eine Computersimulation, um die zufällige Anzahl Y von Autos zu simulieren, die so geparkt werden können. Wiederhole die Simulation 10 000 mal und bilde den Mittelwert der Y als Schätzwert für die erwartete Zahl an Autos $E(Y)$. Um die Effizienz (oder Ineffizienz, je nach dem, wie man es sieht) dieses Parkverfahrens zu ermitteln, ermittle den Anteil $\frac{E(Y)}{30}$, indem Du den Schätzwert von oben einsetzt.

Einzusenden: Das Programm, der Schätzwert für $E(Y)$ und der Anteil $\frac{E(Y)}{30}$.

Hinweis: Für eine Parkbucht der Länge 4 kann man ausrechnen, dass mit dem Zufallsverfahren im Mittel $7 - \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\ln(2) \approx 2{,}74247$ Autos geparkt werden können. Du kannst Dein Programm testen, indem Du die Simulation für diese Länge der Parkbucht durchführst und mit dem exakten Wert vergleichst. (AcK)

Lösung im Python-Code

Mit `simul(1000000,30)` bekommen wir den Mittelwert der Anzahl geparkter Autos in 1 000 000 Versuchen: $22{,}1738 \pm 0{,}0021$ (95%-Fehlerintervall mit anderer Rechnung bestimmt). Wir teilen noch durch 30 und erhalten so die Effizienz von $0{,}7391 \pm 0{,}0001$.

```
import random
def simul( n, laenge ):
    summe = 0  # Summenzaehler der geparkten Autos
               # ueber alle n Versuche
    for versuch in range( n ) :
        pos=[ -1, laenge ] # fiktive Autos bei -1 und
                           # laenge zur Begrenzung
        voll = ( laenge<=1 )
```

```
        while  not voll:
        # wiederhole bis Parkplatz voll
            while True:
                neu = random.uniform( 0, laenge )
                # Parkversuch
                frei = True
                for p in pos:
                # prueft ob position frei
                    if abs( p - neu ) < 1:
                        frei = False
                        break
                if frei: # wenn frei, fuege 'neu' ein
                    pos = ( pos + [neu] )
                    pos.sort()
                    # sortiere pos der Groesse nach
                    break
            voll = True
            for i in range( 0, len( pos ) - 1 ):
                if pos[ i + 1 ] - pos[ i ] > 2:
                    voll = False
        summe += len( pos ) - 2
        # ohne die Autos bei -1 und laenge
    return(summe / n)
```

Rechnung für den exakten Wert

Wir bezeichnen mit $f(x)$ die erwartete Anzahl von Autos, die in einer Parkbucht der Länge x nach dem Zufallsprinzip geparkt werden können.
Offenbar ist $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(x) = 1$ für $1 \leq x \leq 2$. Sei nun $x \in [2, 3]$. Mit X_1 bezeichnen wir die zufällige Position des ersten geparkten Autos. Diese ist gleichverteilt auf den möglichen Positionen $[0, x-1]$. Wenn das erste Auto steht, gibt es eine Lücke der Länge X_1 am Heck des Autos und eine Lücke der Länge $x-1-X_1$ am Bug des Autos. Im Mittel können also weitere $f(X_1)$ Autos vor und $f(x-1-X_1)$ Autos hinter diesem Auto geparkt werden. Insgesamt erhalten wir

$$f(x) = 1 + \mathbf{E}[f(X_1)] + \mathbf{E}[f(x-1-X_1)].$$

Da X_1 gleichverteilt auf $[0, x-1]$ ist, ist auch $x-1-X_1$ gleichverteilt auf $[0, x-1]$. Damit sind die beiden Erwartungswerte oben gleich und wir bekommen

$$f(x) = 1 + 2\mathbf{E}[f(X_1)].$$

Noch einmal verwenden wir, dass X_1 gleichverteilt auf $[0, x-1]$ ist, denn damit ist der Erwartungswert das Integral über die möglichen Werte von X_1, und wir bekommen

$$f(x) = 1 + 2\frac{1}{x-1}\int_0^{x-1} f(z)\,dz.$$

Da $x \in [2,3]$ ist, folgt weiter

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}\left(\int_0^1 f(z)\,dz + \int_1^{x-1} f(z)\,dz\right) = 1 + \frac{2(x-2)}{x-1} = 3 - \frac{2}{x-1}.$$

Speziell bekommen wir $f(3) = 2$, was wir uns aber auch leicht so überlegen können: Nur wenn das erste Auto zufällig exakt in der Mitte parkt, passen vorne und hinten je ein weiteres Auto hin. Ansonsten ist entweder vorne etwas zu wenig Platz, oder hinten, und es passen zwei Autos hin. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto *genau* in der Mitte parkt ist aber 0.

Das Ziel war es, $f(4)$ zu bestimmen, was nicht mehr so elementar geht, wie $f(3)$. Wir erhalten aber wieder für $x \in [3,4]$, wie oben, eine Zerlegung danach, wo das erste Auto steht durch

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{2}{x-1}\left(\int_1^2 f(z)\,dz + \int_2^{x-1} f(z)\,dz\right)\\ &= 1 + \frac{2}{x-1}\left(1 + \int_2^{x-1}\left(3 - \frac{2}{z-1}\right)dz\right)\\ &= 1 + \frac{2}{x-1}\left(3x - 8 - \int_1^{x-2}\frac{2}{z}\,dz\right)\\ &= 1 + \frac{2}{x-1}\big(3(x-1) - 5 - 2\ln(x-2)\big)\\ &= 7 - \frac{10}{x-1} - \frac{4\ln(x-2)}{x-1}. \end{aligned}$$

Für $x = 4$ erhalten wir also

$$\mathbf{E}[Y] = f(4) = 7 - \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\ln(2) \approx 2{,}74247.$$

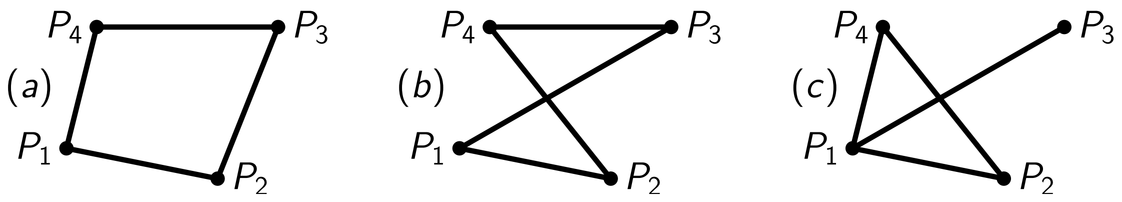
Die anteilige Ausnutzung liegt also bei

$$\frac{1}{4}f(4) \approx 0{,}6856.$$

Wenn man dieses Verfahren weiterführt, erhält man $\frac{f(5)}{5} = 0{,}6970\ldots$, $\frac{f(6)}{6} = 0{,}7055\ldots$ und so fort und man kann im Prinzip den Wert für $x = 30$ berechnen. Allerdings ist das extrem kompliziert, da immer wieder Integrale in Integrale eingesetzt werden. Immerhin weiß man, dass der Grenzwert der anteiligen Ausnutzung $\frac{f(x)}{x}$ für $x \to \infty$ numerisch den Wert $0{,}7475\ldots$ hat (Blaisdell and Solomon, *J. Appl. Probab.* 7:667 (1970)).

Mathematische Entdeckungen

Gegeben seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Verbinden wir diese vier Punkte durch vier Strecken, so erhalten wir Figuren wie diese



Die Figuren a und b bilden geschlossene Streckenzüge, dass heißt: Wenn man in einem beliebigen der vier Punkte beginnend alle Strecken genau einmal durchläuft, dann gelangt man zum Ausgangspunkt zurück,dagegen stellt c keinen geschlossenen Streckenzug dar.
In der Figur b „überschneiden" einander zwei Strecken. Diese Überschneidung gilt nicht als ein fünfter Punkt der Figur b.
Man nennt die Figuren a und b jeweils ein Viereck ohne und mit Überschneidung.
Untersuche nun, wie viele Überschneidungen in einem Fünfeck aus fünf Punkten und fünf Strecken und ein Sechseck aus sechs Punkten und sechs Strecken haben kann, und so weiter, soweit deine Ausdauer reicht. (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2023 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 153

Im Heft 153 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Läuferecke 3

In den letzten Monoid-Heften habe ich Euch das Läuferecke-Problem vorgestellt. Dabei geht ein Läufer in einem $n \times m$-Feld auf den schwarzen Feldern beginnend in der Ecke 0 bis er in einer Ecke landet, siehe Abbildung 1 für $n = 7$ und $m = 5$. Man kann das Problem aber auch eine Dimension höher betrachten: Wir können einen Quader mit Kantenlängen n, m, k in $n \cdot m \cdot k$ kleine Würfel mit Kantenlänge eins unterteilen. Jeder kleine Würfel ist damit durch drei ganzzahlige Koordinaten beschrieben. Wir starten links unten in der Ecke 0 mit den Koordinaten $(1, 1, 1)$ und lassen einen Läufer in den Würfel $(2, 2, 2)$ laufen. Dann nach $(3, 3, 3)$ und

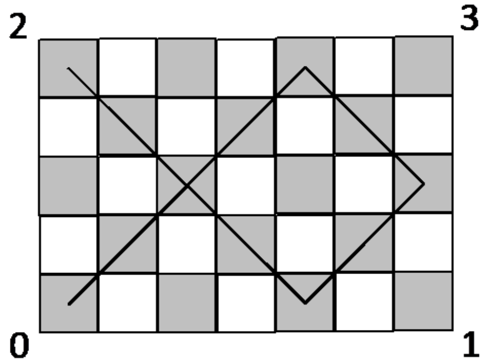


Abbildung 1: Die Läuferzüge im 7×5-Feld

so weiter immer entlang der Würfeldiagonalen, bis wir an eine Wand laufen, ab da wird von einer Koordinate immer eins subtrahiert statt addiert. Das führen wir analog zum 2-dimensionalen Fall fort, bis wir in einer Ecke landen.
Ein Quader hat acht Ecken. Über der Ecke i, die wir aus dem 2-dimensionalen Fall kennen (siehe Abbildung 1), liegt die Ecke $i + 4$. Das gibt uns die Eckennummern im Quader.
Im 2-dimensionalen hatten wir eine schwarz-weiß Färbung und die schwarzen Felder waren im Prinzip begehbar vom Läufer. Was passiert in Dimension 3? Welche Würfel sind für den Läufer im Prinzip begehbar?
Wie oft kann ein Läufer maximal

1. einen inneren Würfel,
2. einen Würfel, der an einer Wand anliegt,
3. einen Würfel an einer Kante

bei seinem Lauf durchqueren?
Wir haben analog zu λ_2 eine Funktion $\lambda_3\colon \mathbb{N}^3 \to \{0, \dots, 7\}$, die die Eckennummer des Würfels angibt, in dem wir landen.
Begründe: Der Läufer landet nie in der Ecke 0, das heißt $\lambda_3(n, m, k) \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen n, m, k.

Lösung

Haben die drei Koordinaten eines Würfels dieselbe Parität, sind also alle drei Zahlen entweder ungerade oder alle drei Zahlen gerade, so kann der Läufer in diesen Würfel laufen. In alle anderen Würfel jedoch nicht. Dies liegt daran, dass wir mit den Koordinaten $(1, 1, 1)$ starten. Hier haben alle drei Zahlen dieselbe Parität, sie sind alle drei ungerade. In jedem weiteren Schritt werden nun von jeder Koordinate entweder eins abgezogen oder eins hinzu addiert. Die Parität der drei Koordinaten ist also immer gleich.
Ein innerer Würfel kann maximal vier mal durchlaufen werden, da ein Würfel vier Diagonalen besitzt.

Ein Würfel, der an einer Wand anliegt, besitzt vier Ecken an der Wand und vier Ecken im Inneren. Er kann zwei Mal durchlaufen werden. Der Läufer tritt an einer Ecke in den Würfel ein und an einer anderen Ecke wieder heraus.
Würfel, die an einer Kante anliegen, haben sechs Ecken an Wänden und zwei Ecken im Inneren. Sie können also nur einmal durchlaufen werden.
Der Läufer kann nicht wieder in der Ecke 0 landen, weil er sonst Diagonalen in Würfeln zurücklaufen müsste, auf denen er bereits lief. Umkehren kann er aber nur in den Ecken, doch an dieser Position stoppen wir den Lauf des Läufers.

Unveränderlich in der Veränderung

von Hartwig Fuchs

Flohsprünge

Ein mathematischer Floh macht eine Reise durch den mit einem Koordinatensystem versehenen Raum. Seine Route legt er durch eine Regel fest. Von einem Punkt (x, y, z) hüpft er zum nächsten Punkt (x', y', z') nach der Vorschrift:

$$x' = 1 + y - z$$
$$y' = 2 + x + y + z$$
$$z' = 3 - x - 2y.$$

Bei jeder Landung auf einem Punkt (x', y', z') muss er eine Gebühr entrichten, die dem arithmetischen Mittel von x', y', und z' entspricht.
Wie teuer wird seine Tour, wenn er 100 Punkte – den Endpunkt mitgezählt – besucht?

Lösung

Seine Landegebühr beim Sprung vom Punkt (x, y, z) auf den Punkt (x', y', z') beträgt

$$\frac{1}{3}(x' + y' + z') = \frac{1}{3}(1 + y - z + 2 + x + y + z + 3 - x - 2y) = 2.$$

Für jeden Punkt, den er besucht, bezahlt er die *gleiche* Gebühr – also kostet seine Tour insgesamt den Betrag von 200.

Unveränderlich im Veränderlichen

Schon in den Anfängen der Mathematik hat man Größen entdeckt, die wie die Landegebühr des Flohs in bestimmten sich verändernden mathematischen Situationen ungeändert bleiben – so etwa diese: Bei *jedem* Kreis ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser die gleiche, später als π bezeichnete Zahl.
Allerdings haben die frühen Geometer dieser Zahl π jeweils einen anderen Wert zugeordnet: Für die Sumerer um 2000 v. Chr. hatte π den Wert $3\,\frac{1}{8}$; die Ägypter um 1700 v. Chr. rechneten mit $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ und in der Bibel ist $\pi = 3$.

Nach der Überlieferung gelang die erste exakte Bestimmung einer unveränderlichen Größe dem griechischen Mathematiker Thales von Milet (um 624 bis 547 v. Chr.), dem man wohl die für die Mathematik fundamentale Erkenntnis verdankt, dass Beweisen die notwendige Vorgehensweise zur sicheren Begründung mathematischer Zusammenhänge ist. Thales bewies:
Wie auch immer man einen Punkt C auf einem Halbkreis vom Durchmesser AB wählt, stets hat das Dreieck $\triangle ABC$, $C \neq A, B$ einen rechten Winkel beim Punkt C. Es ist also $|\sphericalangle C| = 90^\circ$ eine unveränderliche Größe bei Thales-Dreiecken.

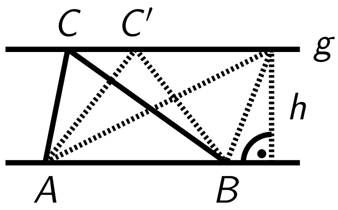
Invarianten

Mit fortschreitender Entwicklung der Mathematik fand man immer wieder Unveränderliche und es zeigte sich, dass sie in vielen Fällen entscheidend für die Lösung insbesondere von Problemen im Zusammenhang mit Transformationen sind. Diese Problemlöser wollen wir uns nun anschauen.
Sei X ein mathematisches Objekt, das durch Vorschriften T, T', T'', ... in andere Objekte gleichen Typs $T(X)$, $T'(X)$, $T''(X)$, ... transformiert werden. Auch wenn X und seine Transformierten verschieden sind, kann X eine Eigenschaft E aufweisen, die auch jede Transformierte von X besitzt. Solch eine Eigenschaft nennt man eine *Invariante* (Unveränderliche) bei den Transformationen T, T', T'', ... von X.

Beispiel 1

Invarianten können in jedem mathematischen Gebiet vorkommen.

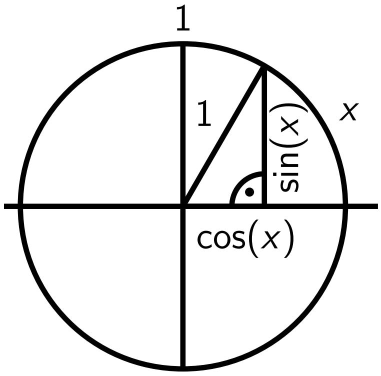
a) *Eine geometrische Invariante*



Es sei g eine zu einer gegebenen Strecke AB parallele Gerade und C sei ein Punkt auf g.
Wenn man dann C längs g in einen beliebigen anderen Punkt C' verschiebt, dann gilt bei jeder Verschiebung:
Das Dreieck $\triangle ABC'$ hat die gleiche Höhe h und die gleiche Fläche f wie das Dreieck $\triangle ABC$. Die Größen h und f sind Invarianten bei den durch die Verschiebung von C erzeugten Transformationen des Dreiecks $\triangle ABC$.

b) *Eine arithmetische Invariante*
Die Einerziffer 7 der Zahl 17 ist eine Invariante bei jedem Übergang T_n von 17 zu einer Potenz 17^{5+4n}, $n = 1, 2, 3, ...$
Nachweis:
Es sei $E(m)$ die Einerziffer der natürlichen Zahl m. Dann ist $E\left(17^4\right) = 1$ und somit $E\left(17^{4n}\right) = \left(E\left(17^4\right)\right)^n = 1$ für jedes $n \geq 1$. Wegen $E\left(17^5\right) = 7$ ist $E\left(17^{5+4n}\right) = E\left(17^5\right) \cdot E\left(17^{4n}\right) = 7 \cdot 1 = 7$.

c) *Eine trigonometrische Invariante*



Wenn man den trigonometrischen Ausdruck $\sin(x)$, x reell, – in der Figur veranschaulicht – in einen Ausdruck $\sin(x + a)$ transformiert, dann gilt für reelle $a \neq 0$:
Bei jeder Transformierten $\sin(x+a)$ hat die Summe $S_a = \sin^2(x + a) + \cos^2(x + a)$ den gleichen Wert wie die zu $\sin(a)$ gehörige Summe $S_0 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$, nämlich den Wert 1.

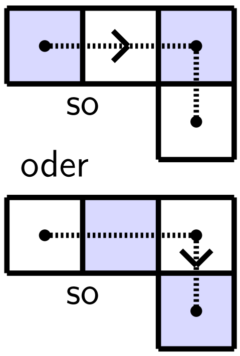
Also ist $S_a = 1$ eine Invariante bei jeder Transofmation von $\sin(x)$ in $\sin(x+ a)$.

Wie findet man Invarianten?

Es gibt keine allgemein zielführende Methode zur Bestimmung einer Invarianten, jeder Fall verlangt seine eigene Vorgehensweise.
Für den mathematischen Einsteiger bedeutet das: Nur nach dem Prinzip „Lernen durch Tun“ - also durch die Bearbeitung von Beispielen und Aufgaben, erlangt er die Erfahrung, die bei der Suche nach Invarianten unabdingbar ist. Hierzu einige Hinweise, wie man manchmal zum Ziel kommt.

Beispiel 2: Man sieht es

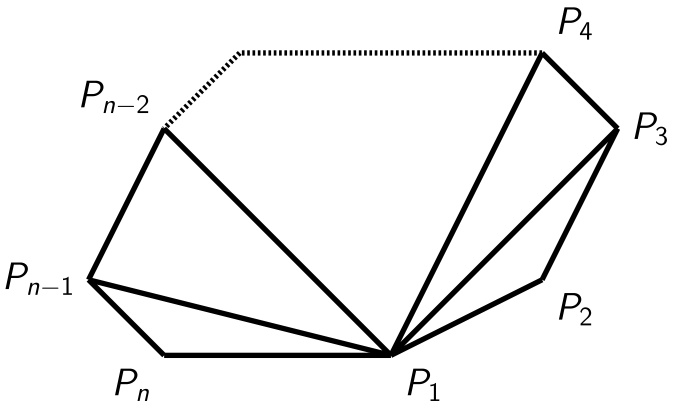
Auf einem Feld eines Schachbrettes befindet sich ein Springer, der von dort einen nach den Schach-Regeln erlaubten Sprung auf ein anderes Feld macht. *Man sieht*: Auf welchem Feld auch immer der Springer landet, stets sind das Startfeld und das Landefeld von verschiedener Farbe. Dieser *Farbwechsel* (!) ist daher eine Invariante bei den Sprüngen des Springers.



Beispiel 3: Man weiß es

Wenn man ein Dreieck D in beliebige andere Dreiecke transformiert, dann gilt *bekanntlich*: Die Winkelsummen von D und seiner sämtlichen Transformierten ist $\omega = 180°$. Somit ist die *Winkelsumme* von D eine Invariante bei jeder Transformation von D.

Beispiel 4: Man zählt



Es seien E_n, $n = 4, 5, 6, \ldots$ konvexe n-Ecke mit den Ecken P_1, P_2, ..., P_n. Dann ist jede dieser Ecken Endpunkte von der jeweils gleichen Anzahl d_n von Diagonalen – das sind zum Beispiel bei der Ecke P_1 die Diagonalen P_1P_3, P_1P_4, ..., P_1P_{n-1}. Durch Abzählen der Diagonalen aus einer Ecke eines beliebig vorgegebenen n-Ecks E_n gelangt man zu der Einsicht (die man mit vollständiger Induktion für jedes $n \geq 4$ rechtfertigen kann):
Es gilt $n - d_n = 3$.
Diese Aussage ist eine Invariante für jedes konvexe n-Eck.
Bemerkung: Ein n-Eck heißt konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt.

Beispiel 5: Man rechnet

Eine Zahlenfolge a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist definiert durch $a_1 = 1+\sqrt{3}$, $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$.
Dann gilt:

$$a_1 = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73 < 3,$$

$$a_2 = 1 + \sqrt{a_1} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{3}} < 1 + \sqrt{3} < 3,$$

$$a_3 = 1 + \sqrt{a_2} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{3}}} < 1 + \sqrt{3} < 3, \ldots$$

Angenommen es sei berechnet, dass $a_n < 3$ für ein beliebiges $n > 1$ ist. Dann ist $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n} < 1 + \sqrt{3} < 3$.
Jedes Folgenelement a_n ist somit < 3 und *diese Eigenschaft* ist daher eine Invariante für jedes a_n.

Beispiel 6: Man hat eine Idee

Vorweg: Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sind $x = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$; man nennt $d = a^2 - 4b$ die Diskriminante der Gleichung. Es sei nun $p(x) = 0$ die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ mit der Diskriminante $d = 5$. Wenn man dann $p(x) = 0$ in die Gleichung $p(x - c)$ mit beliebigen $c \neq 0$ transformiert, gibt es dann eine Invariante bei diesen Transformationen? Ist sie vielleicht die jeweilige Diskriminante der Gleichung? Tatsächlich hat jede Gleichung $p(x-c) = (x-c)^2 - (x-c) - 1 = x^2 - (2c+1)x + (c^2+c-1) = 0$ die Diskriminante $d = (-(2c+1))^2 - 4(c^2 + c - 1) = 5$. Daher ist die *Diskriminante* $d = 5$ eine Invariante bei jeder Transformation von $p(x) = 0$ in eine Gleichung $p(x - c) = 0$, $c \neq 0$.

Unsere Beispiele zeigen einige Situationen auf, wie man Invarianten bestimmen kann. Aber es bleibt die entscheidende Frage zu klären: Was lässt sich mit Invarianten anfangen?

Wie arbeitet man mit Invarianten?

Eine identifizierte Invariante kann der Schlüssel zur Lösung eines mathematischen Problems sein - was wir nun durch singuläre Beispiele für einige Problemtypen andeutungsweise begründen werden.

Beispiel 7: Invarianten in direkten Beweisen

Es sei M die Menge der Polynome $p(x) = x^2 - x - 1$ und $p(x - c)$, $c \neq 0$ reell, mit den zugehörigen Gleichungen $p(x) = 0$ und $p(x - c) = 0$, deren Diskriminante die Invariante $d = s$ ist (vergleiche Beispiel 6).
Um also zur Menge M zu gehören, muss daher die zu einem quadratischen Polynom gehörige Gleichung notwendiger Weise die Diskriminante $d = 5$ sein.

a) Für welches e ist $q(x) = x^2 - 45x - e$ ein Element von M?
Damit $q(x) \in M$ ist, muss für die Diskriminante d von $q(x) = 0$ gelten: $d = (-45)^2 - (-4e) = 5$. Dann ist $e = 505$ und $q(x) = p(x - c)$ mit $c = 22$ (siehe Beispiel 6). Somit ist $q(x) \in M$.

b) Gibt es eine reelle Zahl $e \neq 1$, so dass $r(x) = x^2 - x - e$ ein Element von M ist?
Die Diskriminante d von $r(x)$ ist $d = (-1)^2 - (-4e) = 1 + 4e \neq 5$ wegen $e \neq 1$. Also ist $r(x) \notin M$.

Beispiel 8: Invarianten in indirekten Beweisen (Widerspruchsbeweise)

Kann ein Dreieck D mit den Seitenlängen n, $n + 1$ und $n + 2$ mit $n > 3$ rechtwinklig sein?
Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c mit $a < c$ und $b < c$ ist die Aussage: $a^2 + b^2 = c^2$ eine Invariante.
Annahme: Das Dreieck D ist rechtwinklig.
Dann gilt für D: $n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$ und daher $n^2 - 2n = 3$.
Für $n > 3$ ist jedoch $n^2 - 2n = n(n - 2) > 3 \cdot (3 - 2) = 3$ - ein Widerspruch.
Die Annahme ist falsch - es gibt für kein $n > 3$ ein rechtwinkliges Dreieck D.

Beispiel 9: Invarianten in induktiven Beweisen

Man bestimme die Anzahl der Teilmengen einer Menge $M_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $n \geq 1$. Es seien T_1, T_2, ..., T_m die Teilmengen von M_n, deren Anzahl wir mit $[M_n] = m$ bezeichnen inklusive der leeren Teilmenge.
Wenn man nun M_n um ein von e_1, e_2, ..., e_n verschiedenes Element e erweitert zu einer Menge M_{n+1}, so sind deren Teilmengen T_1, ..., T_m, $T_1 \cup \{e\}$, ..., $T_m \cup \{e\}$. Daher gilt: $[M_{n+1}] = [M_n] \cdot 2$ - die Anzahlverdoppelung ist demnach

eine Invariante bei jeder Erweiterung einer Menge um ein Element.
Nun zur Frage:

- Da eine Menge $M_1 = \{e_1\}$ die Teilmengen $\{\,\}$ und $\{e_1\}$ besitzt, ist $[M_1] = 2$.
- Annahme: Bei $n-1$ aufeinanderfolgenden Erweiterungen von M_1 durch jeweils ein Element bewirkt die Invariante, dass schließlich gilt:
  $[M_n] = [M_1] \cdot 2^{n-1} = 2^n$.
- Für $M_{n+1} = M_n \cup \{e\}$ ist dann: $[M_{n+1}] = [M_n] \cdot 2 = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$. Damit ist durch vollständige Induktion gezeigt, dass eine n-elementige Menge 2^n Teilmengen besitzt.

Beispiel 10: Invarianten in rekursiven Beweisen

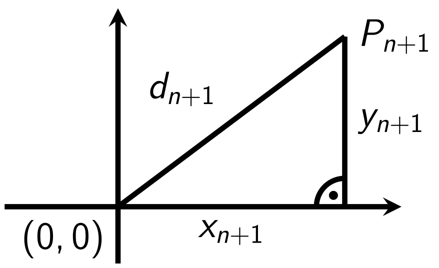
In der mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene ist eine Folge von Punkten $P_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, definiert durch die Setzung: Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist

$$P_{n+1} : (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{x_n - 2y_n}{\sqrt{5}}, \frac{2x_n + y_n}{\sqrt{5}}\right) \text{ und } P_1 : (x_1, y_1) = (2, 2).$$

Man finde eine Aussage über die Positionen der Punkte P_n in der Ebene.

Eine mögliche Positionsbeschreibung der Punkte P_n sind ihre Abstände d_n vom Punkt $(0, 0)$. Nach Definition und dem Satz des Pythagoras gilt für ein $n > 1$:

$$d_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \frac{(x_n - 2y_n)^2 + (2x_n + y_n)^2}{5} = x_n^2 + y_n^2 = d_n^2$$



Es ist also $d_{n+1} = d_n$. Ganz entsprechend erhält man rekursiv (=rückschreitend): $d_n = d_{n-1}$, $d_{n-1} = d_{n-2}$, ..., $d_2 = d_1$. Wegen $d_1^2 = 2^2 + 2^2$, also $d_1 = \sqrt{8}$, ist der Abstand $\sqrt{8}$ eines jeden Punktes P_n vom Punkt $(0, 0)$ eine Invariante. Daraus folgt:

Jeder Punkt Pn, $n = 1, 2, 3, \ldots$, liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $\sqrt{8}$.

Beispiel 11: Invarianten in algorithmischen Prozessen

a) In einer Menge M_0 aus 100 Zahlen ersetzt man zwei Zahlen durch ihr Produkt. Von der so entstandenen neuen Menge M_1 geht man durch die gleiche Ersetzungsprozedur über zu einer Menge M_2, von M_2 ganz entsprechend nacheinander zu Mengen M_3, M_4, … . Wie lautet dann die eventuell letzte Menge?
   Vergleicht man zwei Mengen M_i und M_{i+1}, dann zeigt sich, dass es bei dem Ersetzungsprozess zwei Invarianten gibt:
   - Die Anzahl der Elemente von M_{i+1} ist um eins kleiner als die von M_i.

- Die Produkte aller Zahlen in M_i und aller Zahlen in M_{i+1} sind gleich.

Daraus folgt: Der Ersetzungsprozess endet nach 99 Schritten mit einer einelementigen Menge $M_{99} = \{e\}$ und e ist das Produkt aller Zahlen in M_0.

b) Vom weißen Eckfeld F_1 in der rechten unteren Ecke eines Schachbretts versucht der Springer aus Beispiel 3 das diagonal gegenüberliegende weiße Eckfeld F_{64} zu erreichen. Kann ihm das gelingen?
Dazu benötigt er 63 Sprünge $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow ... \rightarrow F_{64}$, wobei jeweils von Feld zu Feld ein Farbwechsel der Felder stattfindet. Daraus folgt: Nach 1, 3, 5, ..., 63 Sprüngen landet er jeweils auf einem schwarzen Feld. Das Feld F_{64} ist also schwarz – ein Widerspruch. Wie auch immer er springt, er gelangt nicht auf das weiße Feld F_{64}.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 153

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Levi Brunn 2, Noah Fitting 7, Quirin Fritsch 4;
Kl. 6: Robert Schmitt 20,5;
Kl. 7: Lisa Schäfer 27, Peter Knobloch 34;
Kl. 8: Mai Chi Tran 30,5, Rachel Tao 33;
Kl. 10: Oscar Su 55, Jan Christian Weber 35;
Kl. 12: Lukas Born 41.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:
Kl. 5: Silas Salloch 26;
Kl. 8: Mika Schäfer 16.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag)**:**
Kl. 6: Nico Mathy 10, Philip Mühlbeyer 9,5.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:
Kl. 9: Philipos Dimitriou 97.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:
Kl. 12: Theresa Horstkötter 14.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:
Kl. 5: Imran Aouzi 5, Johannes Goller 15;
Kl. 9: Sarah Markhof 28,5.

Ludwigshafen, Carl-Bosch-Gymnasium:
Kl. 5: Lina Jürgens 5, Mira Pohlki 6;
Kl. 6: Ben Löhngen 7, Nelson Ngatattd 5;

Kl. 7: Mircea Cimpeann 6;
Kl. 8: Viktoria Anliner 4, Asude Arikan 5,5;
Kl. 9: Fynn Jürgens 9,5.

Mainz, Maria-Ward-Schule:
Kl. 11: Amira Freund 9.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:
Kl. 7: Philippa Lamke 19; **Kl. 12:** Pascal Bohlinger 12.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:
Kl. 8: Victor Mayer 34.

Mainz, Willigis-Gymnasium:
Kl. 6: Ioan Salaru 67.

Markkleeberg, Rudolf-Hildesrandt Schule:
Kl. 9: Alexa Lehmann 25.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis)**:**
Kl. 5: Philipp Mühl 12,5;
Kl. 7: Daniel Laibach Muñiz 60.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:
Kl. 11: Mike Wurster 12;
Kl. 13: Salvatore Ippolito 66.

Oberursel, Gymnasium:
Kl. 8: Jasmin Borrmann 18;
Kl. 9: Dóra Emilia Mézáros 32;
Kl. 10: Emilie Borrmann 11;
Kl. 13: Josephine Kaßner 22.

Saarburg, Gymnasium:
Kl. 10: Nils Angel 22.

Schrobenhausen, Gymnasium:
Kl. 9: Luca Sindel 34,5.

Tangermünde, Diesterweg-Gymanisum:
Kl. 8: Mai Linh Dang 65;
Kl. 11: Tu Sam Dang 64.

Trier, Angela-Merici-Gymnasium:
Kl. 10: Felicitas Bauer 15.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:
Kl. 11: Philipp Lörcks 64.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:
Kl. 9: Marie Baumgartner 14.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:
Kl. 9: Greta Waldmüller 43.

Worms, Gauß-Gymnasium:
Kl. 5: Sid Ahmed Ould Sid Ahmed 43,5,Helena Röhrenbeck 9,5, Jana Röhrenbeck 10,5, Amer Saltan 22,5;
Kl. 7: Emma Schubert 19,5, Greta Schubert 13,5.

Schüler, bei denen keine Schule angegeben wurde:
Jannes Hitzelberger 3.

Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2023/24 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
  Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub
Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.
Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Jahrgang 43 | Heft 155 | September 2023

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`