

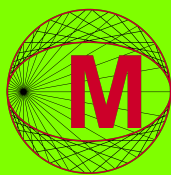
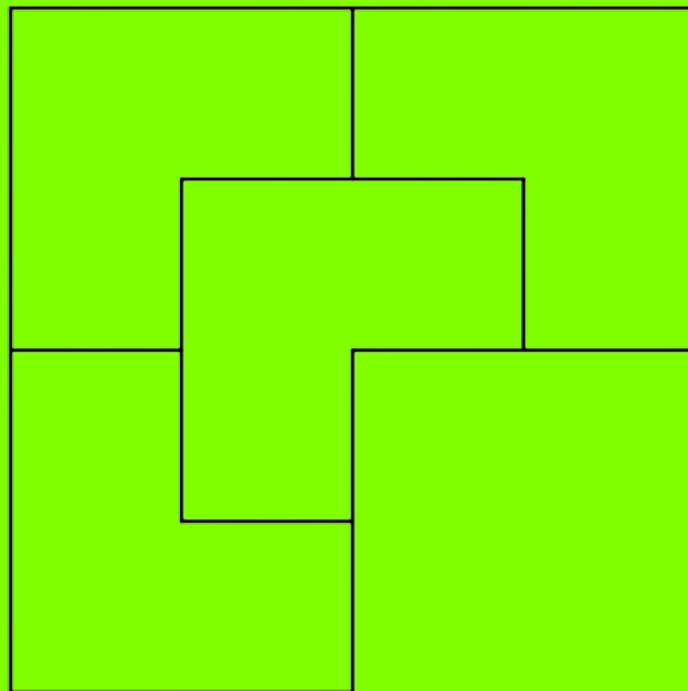
Jahrgang 43

Heft 154

Juni 2023

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler

herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

15. August 2023.

**Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den MONOID-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

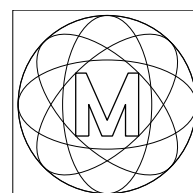
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Martinus-Gymnasium Linz** bei Herrn Helmut Meixner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Franziska Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine MONOID-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „MONOID-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion



Wo liegt der Fehler?

Punkte im Kreis

von Hartwig Fuchs

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r . Ich möchte dann „beweisen“, dass jeder Punkt im Innengebiet des Kreises auf der Kreisperipherie liegt.

Man bestimme zunächst auf der Verlängerung von OA denjenigen Punkt B , für den

$$(*) \quad |OA| \cdot |OB| = r^2$$

gilt, wobei mit $|OA|$ die Länge der Strecke OA bezeichnet ist.

Die Mittelsenkrechte der Strecke AB schneide den Kreis in den Punkten P und Q und AB im Punkt M .

Es gilt dann:

$$|OA| = |OM| - |AM| = |OM| - \sqrt{|AP|^2 - |MP|^2},$$

$$|OB| = |OM| + |MB| \stackrel{(**)}{=} |OM| + |AM| = |OM| + \sqrt{|AP|^2 - |MP|^2},$$

wobei die Gleichheit $(**)$ wegen $|MB| = |AM|$ gilt.

Mit der Voraussetzung (1) folgt dann

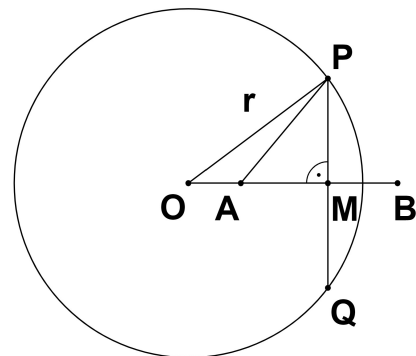
$$\begin{aligned} r^2 &= |OA| \cdot |OB| \\ &= \left(|OM| - \sqrt{|AP|^2 - |MP|^2} \right) \cdot \left(|OM| + \sqrt{|AP|^2 - |MP|^2} \right) \\ &= |OM|^2 - (|AP|^2 - |MP|^2) \\ &= (|OM|^2 + |MP|^2) - |AP|^2 \\ &= r^2 - |AP|^2. \end{aligned}$$

Danach ist $|AP|^2 = 0$, so dass $A = P$ ist. Folglich liegt A auf der Kreisperipherie.

Lösung

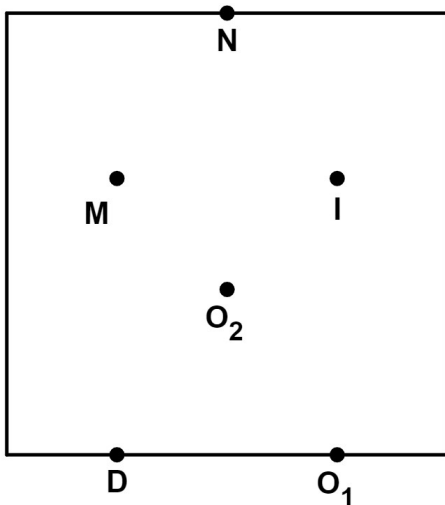
Es sei $r = 2$ und es sei $|OA| = 1$.

Nach $(*)$ ist dann $|OA| \cdot |OB| = 4$, so dass $|AB| = 3$ und mithin $|AM| = 1,5$ ist. Daraus folgt: $|OM| = |OA| + |AM| = 1 + 1,5 = 2,5 > r$. Der Punkt M liegt daher außerhalb des Kreises und die „Schnittpunkte“ P und Q der Mittelsenkrechten von AB mit dem Kreis gibt es nicht. Damit ist die obige Argumentationskette sinnlos – also kein Beweis für irgendeine Behauptung. Der Fehler im obigen „Beweis“ liegt also in der Annahme, dass die Forderung $(*)$ für alle Punkte A des Kreisinneren zu Schnittpunkten P und Q führt, was nicht allgemein zutrifft.



Monoidale Knotelei

von Hartwig Fuchs



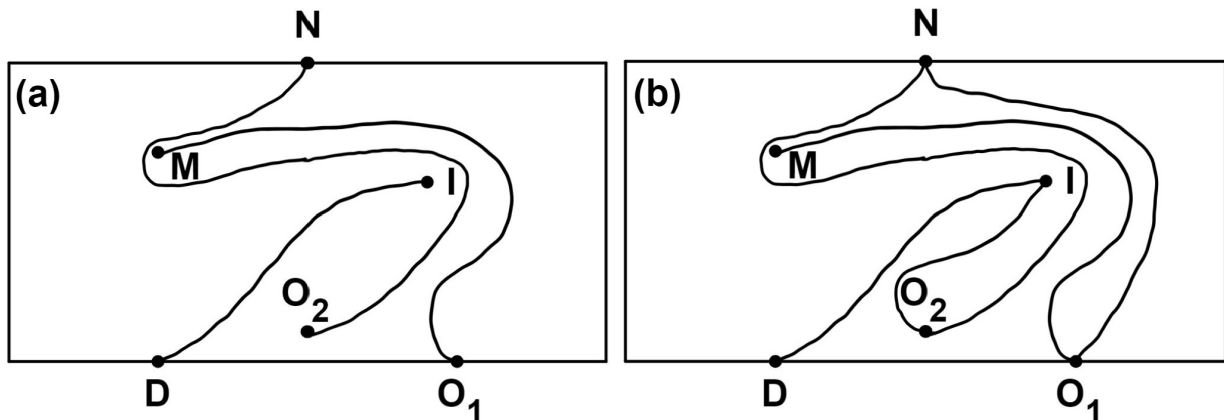
In der Ebene seien drei Punkte M, O_2, I innerhalb eines Rechtecks und drei Punkte N, O_1, D auf dessen Rand so wie beispielsweise in der Figur gegeben. Diese Punkte sollen so durch Linien verbunden werden, dass gilt:

- (1) Eine Linie verbindet genau zwei Punkte.
- (2) Jede Linie außer ihre Endpunkte liegen innerhalb des Rechtecks.
- (3) Keine zwei Linien überkreuzen sich.

Finde einen Linienzug MO_1NO_2ID .

Eine Lösung

- Finde zunächst drei geeignete Verbindungslinien MO_1, NO_2, ID , etwa wie in Figur (a).
- Ergänze die Figur (a), etwa so wie in Figur (b).



Eine besondere Zahlenfolge

von Stefan Deichmann

Das Sieb des Eratosthenes ist ein einfacher Algorithmus, um in wenigen Schritten die Primzahlen (hier im Zahlenraum bis 100) zu finden: Man notiert systematisch (jeweils zehn Zahlen der Größe nach in einer Zeile) alle möglichen Zahlen. Da die Zahl 1 nur sich selbst als Teiler besitzt und somit keine Primzahl ist, streichen wir diese heraus. Anschließend betrachten wir die nächstgrößere Zahl und streichen

alle Vielfachen dieser Zahl, da diese nach Definition keine Primzahlen sind. In unserem Fall ist diese Zahl die 2. Also streichen wir die Zahlen 4, 6, 8, 10, ..., 100. Anschließend betrachten wir die nächstgrößere nicht gestrichene Zahl, in unserem Fall die 3, und streichen erneut alle Vielfache, die noch nicht gestrichen wurden 9, 15, Nachdem wir dies mit allen Zahlen wiederholt haben, erhalten wir ein Tableau, auf dem nur die Zahlen übrig bleiben, welche auch Primzahlen sind. Für unseren Zahlenraum ergibt sich somit das folgende Tableau:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Durch Sieben zu den Quadratzahlen

Durch ein ähnliches „Sieben“ (bzw. hier eigentlich Konstruieren) können wir die Quadratzahlen innerhalb unseres Zahlenraumes ermitteln. Die Differenz von einer Quadratzahl n^2 bis zur nächstgrößeren Quadratzahl $(n + 1)^2$, beträgt genau $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

Betrachten wir nun das Tableau des Siebs des Eratosthenes, diesmal jedoch mit dem Ziel, alle Quadratzahlen zu sieben. Da für $1^2 = 1$ gilt, ist 1 die erste Quadratzahl. Um die nächstgrößere Quadratzahl zu erhalten, setzen wir $n = 1$ und erhalten somit eine Differenz von $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Somit ist die nächstgrößere Quadratzahl $1 + 3 = 4$. Die Zahlen zwischen den Quadratzahlen 1 und 4 streichen wir.

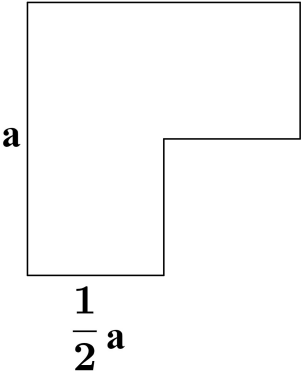
Nun wiederholen wir dies mit $n = 2$. Wir erhalten eine Differenz von $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Damit kommen wir auf die nächste Quadratzahl $4 + 5 = 9$ und streichen die vier Zahlen zwischen 4 und 9. So gehen wir immer weiter vor, indem wir ab der Quadratzahl n^2 die nächsten $2n$ Zahlen streichen. Übrig bleiben die Quadratzahlen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Lösung eines Problems ohne Worte

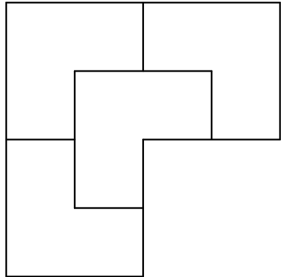
von Hartwig Fuchs

Daniel Schwenter (1585 - 1636), Mathematiker und Professor für alt-orientalische Sprachen an der Universität Altdorf, veröffentlichte 1616 - 1618 ein 3-bändiges Werk „Geometriae practicae novae tractatus ...“ auf Deutsch trotz seines lateinischen Titels, das als die wohl beste Darstellung der Geometrie in seiner Zeit galt, was man daran sieht, dass es mehrere Auflagen im 17. Jahrhundert erlebte. In diesem Buch findet sich die schöne Aufgabe:



Ein Bauer will seinen großen Acker – der eine quadratische Form der Seitenlänge a mit einem quadratischen Ausschnitt der Seitenlänge $\frac{1}{2}a$ hat – an seine vier Kinder so vererben: Jedes Kind soll ein gleich großes Stück von der gleichen Form wie das ungeteilte Feld erhalten.

Nach einiger Zeit des Überlegens haben die Kinder herausgefunden, wie man den Wunsch des Vaters erfüllen kann. Ihre Lösung haben sie ohne Worte mit einer Figur beschrieben.



Leonardos Apfelaufgabe

von Hartwig Fuchs

Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (1170 - um 1240), ist wohl der bedeutendste Mathematiker der frühen Mathematik in Europa. Sein Buch „Liber Abaci“ (Buch vom Abakus) von 1202 (heute verloren) gilt in der erhaltenen Bearbeitung von 1228 als ein Grundstein der Entwicklung der mittelalterlichen Mathematik – insbesondere auch deshalb, weil er in seinem Buch als Erster Zahlen nur mit indisch-arabischen Ziffern schreibt und damit die Vorteile dieser heute einzig verwendeten Darstellung für das Rechnen im dezimalen Stellenwertsystem im Vergleich zur damals üblichen römischen Zahlendarstellung gezeigt hat. Daneben sind im „Liber Abaci“ neben mathematischen Themen auch viele Aufgaben behandelt – darunter das heute noch diskutierte Problem der sogenannten Fibonacci-Folge und nicht zuletzt

Die Apfelaufgabe*

Ein Obstgarten ist umgeben von sieben Mauern, jede mit genau einem Tor, das jeweils von einem korrupten Wächter bewacht wird. Ein Mann pflückt im Garten mehrere Körbe Äpfel, die er auf seinen Karren lädt und sich dann auf den Weg nach Hause macht.

Beim Verlassen des Gartens muss er dem Wächter des ersten Tors die Hälfte seiner Äpfel und noch einen zusätzlichen Apfel geben. Dem Wächter des zweiten Tors muss er von den ihm gebliebenen Äpfeln ebenfalls die Hälfte und einen Apfel geben. Ganz ebenso ergeht es ihm an jedem der anderen fünf Tore. Am Ende bleibt ihm nur ein Apfel.

Wie viele Äpfel hatte der Mann geerntet?

Lösung

Es sei v_i die Anzahl der Äpfel vor und n_i die Anzahl der Äpfel nach dem i -ten Tor.

$$v_1 = ? \dots \longrightarrow \begin{array}{c} | \\ v_i \quad n_i \\ | \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} | \\ v_{i+1} \quad n_{i+1} \\ | \end{array} \dots \longrightarrow n_7 = 1$$

Man weiß zwar, dass für $i = 1, 2, 3, \dots, 7$ gilt:

$$(1) \quad n_i = \frac{1}{2}v_i - 1,$$

aber da man v_1 nicht kennt, kann man mit Gleichung (1) keine der Zahlen v_i oder n_i berechnen. Man hat jedoch die konkrete numerische Information $n_7 = 1$. Damit lässt sich v_7 angeben mit der aus (1) folgenden Gleichung

* Leonardos Aufgabe samt Lösung werden hier nicht in wörtlicher Übersetzung, sondern in freier Bearbeitung wiedergegeben.

$$(2) \quad v_i = 2n_i + 2.$$

Es ist nämlich $v_7 = 2n_7 + 2$, also $v_7 = 4$. Wenn man nun beachtet, dass gilt

$$(3) \quad v_i = n_{i-1},$$

so folgt aus $v_7 = 4$, dass $n_6 = 4$ und daher $v_6 = 10$ ist usw. im Rückwärtsgang bis hin zu v_1 – wie in der Tabelle angegeben.

i	7	6	5	4	3	2	1
n_i	1	4	10	22	46	94	190
$v_i = 2n_i + 2$	4	10	22	46	94	190	382

Der Mann hatte also 382 Äpfel gepflückt.

„Das Denkerchen“ von Horst Sewerin

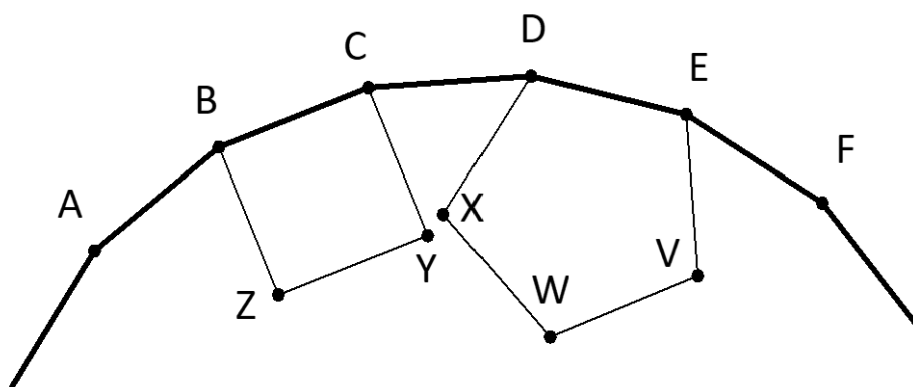
Frau Pommer backt 15 Plunderteilchen: sieben davon mit Kirschfüllung, sieben mit Pfirsichfüllung und eines mit Apfelfüllung. Sie legt sie in genau dieser Reihenfolge im Kreis auf ein rundes Blech und schiebt sie in die Mikrowelle. Alle Teilchen sehen gleich aus und Herr Pommer kennt nur ihre relative Reihenfolge, weil das Blech sich im Ofen gedreht hat. Er möchte unbedingt das Apfelteilchen essen, aber seine Frau erlaubt ihm nur, von höchstens drei Teilchen nacheinander zu probieren, bevor er sich endgültig für ein Plunderteilchen entscheiden muss. Kann er unter dieser Bedingung sicher das Apfelteilchen identifizieren? (Die Antwort ist zu begründen!)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2023 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 152

In Heft 152 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

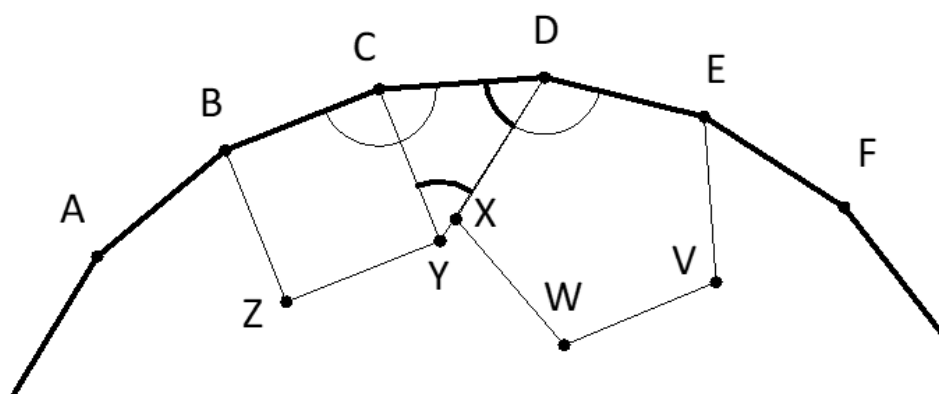
Tessa kommt zu Besuch und findet ihre Freundin Mila am Schreibtisch vor, konzentriert über ein Blatt Papier gebeugt. „Was hast Du denn da Tolles gezeichnet?“, fragt sie Mila. „Wir haben gelernt, wie groß die Innenwinkel regelmäßiger Vielecke sind, und damit will ich ein regelmäßiges 20-Eck zeichnen“, entgegnet diese. „Außerdem habe ich über einer der Seiten nach innen ein Quadrat und über der übernächsten Seite nach innen ein regelmäßiges Fünfeck konstruiert“, fährt Mila fort. Tessa betrachtet sich die Figur eine Weile und meint dann: „Es sieht so aus, als ob die Verlängerung der einen Fünfecksseite genau durch die Ecke des Quadrats geht. Oder ist das nur fast richtig?“



Hat Tessa mit ihrer Vermutung Recht, dass Y auf der Verlängerung von DX liegt? (Die Antwort ist zu begründen.)

Lösung

Die Antwort lautet: Ja, die Punkte D, X und Y sind kollinear. Dazu betrachten wir die eingezeichneten Winkel.



Die Summe der Innenwinkel eines regelmäßigen n -Ecks beträgt $(n - 2) \cdot 180^\circ$, sodass jeder Innenwinkel im Zwanzigeck die Weite 162° besitzt. Also gilt wegen des rechten Winkels bei C , dass $\sphericalangle YCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCY = 162^\circ - 90^\circ = 72^\circ$. Wegen $|CY| = |CB| = |CD|$ ist das Dreieck DCY gleichschenkelig und daher $\sphericalangle CDY = \sphericalangle DYC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle YCD) = 54^\circ$. Im Fünfeck $DXWVE$ hat jeder Innenwinkel die Weite 108° , also gilt $\sphericalangle XDE = 108^\circ$. Andererseits ist auch $\sphericalangle YDE = \sphericalangle CDE - \sphericalangle CDY = 162^\circ - 54^\circ = 108^\circ$. Damit liegen Y und X auf dem gleichen Strahl mit Ursprung D , was zu zeigen war.

Eine richtige Lösung wurde von Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, Alzey, Klasse 10) eingesandt.

Tessa und Mila haben sich gefragt, ob es noch andere Möglichkeiten gibt, zwei regelmäßige Vielecke ins Innere des regelmäßigen Zwanzigecks so zu zeichnen, dass eine ihrer Seiten jeweils mit einer der Seiten des Zwanzigecks übereinstimmt und die Verlängerung einer andere Seite des einen Vielecks durch einen Eckpunkt des anderen Vielecks verläuft. Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

Die besondere Aufgabe

Fünferpotenzen und deren Summen

von Klaus Ronellenfitsch

Die Fünferpotenzen $1, 5, 25, 125, \dots$ sowie aus ihnen gebildete Summen mit paarweise verschiedenen Summanden werden in einer aufsteigenden Folge angeordnet: $1, 5, 6, 25, 26, 30, 31, 125, \dots$

Wie heißt die 2023. Zahl in dieser Folge?

Lösung

Jede Zahl z besitzt die Form $a_0 \cdot 5^0 + a_1 \cdot 5^1 + \dots + a_n \cdot 5^n$, wobei die Koeffizienten a_0, \dots, a_n entweder 0 oder 1 sind. Im Fünfersystem geschrieben besteht die Folge also aus den Zahlen $1_5, 10_5, 11_5, 100_5, 101_5, 110_5$ usw.. Mit den gleichen Ziffern geschrieben bilden diese Zahlen im Zweiersystem die lückenlos aufeinander folgenden Zahlen, die im Zehnersystem den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ entsprechen. Die 2023. Zahl im Zweiersystem ist 11111100111_2 .

Rechnung: $2023 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1$.

Wird diese Zahl im Fünfersystem gedeutet, so gilt:

$11111100111_5 = 9 \cdot 765 \cdot 625 + 1 \cdot 953 \cdot 125 + 3 \cdot 90 \cdot 625 + 78 \cdot 125 + 15 \cdot 625 + 3 \cdot 125 + 25 + 5 + 1$. Damit heißt die 2023. Zahl der Folge $12\,206\,281$.

Zu Besuch ...

bei Emmy Noether

von Martin Mattheis



Sehr geehrte Frau Prof. Noether, wo lebten und wirkten Sie?

Geboren wurde ich am 23. März 1882 in Erlangen als Tochter von Ida und Max Noether. Mein Vater war Professor für Mathematik an der dortigen Universität

und so sind meine drei jüngeren Brüder und ich schon früh mit dieser spannendsten aller Wissenschaften in Berührung gekommen.

Nach meinem Mathematikstudium in Erlangen wechselte ich 1915 nach Göttingen zu Felix Klein und David Hilbert*. Obwohl ich mathematisch brillante Ergebnisse vorzuweisen hatte, durfte ich mich – trotz der großen Unterstützung durch David Hilbert – vor dem von Euch so genannten Ersten Weltkrieg nicht habilitieren, was die Voraussetzung gewesen wäre, um Professorin werden zu können. Solche Ungerechtigkeiten gibt es zum Glück in Eurer Zeit nicht mehr. In der Weimarer Republik durfte ich mich dann endlich habilitieren und auch an der Universität lehren. Eine bezahlte Anstellung geschweige denn eine Professur erhielt ich als Frau leider dennoch nicht.

Nach meiner Emigration in die USA 1933 verstarb ich am 14. April 1935 an den Folgen einer Unterleibsoperation.

In welchen Teilgebieten der Mathematik haben sie geforscht?

Mein hauptsächliches Forschungsgebiet war die abstrakte Algebra**, ein Teilgebiet der Mathematik, in dem man sich mit den Strukturen, die in verschiedenen Mengen vorherrschen beschäftigt. In Eurer Schulmathematik gibt es Rechengesetze wie das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz. Mit solchen – aber wesentlich komplizierteren – Strukturen habe ich mich beschäftigt. Heute werden manche dieser Strukturen nach mir „noethersch“ genannt.

Auch wenn ich keine Professur inne hatte, betreute ich doch zahlreiche Doktorarbeiten, so dass man zurecht sagen kann, dass ich mit der modernen abstrakten Algebra ein neues mathematisches Teilgebiet geöffnet hatte. Manche bezeichnen mich unter anderem deshalb sogar als „die größte Mathematikerin, die jemals gelebt hat“.

Durch David Hilbert kam ich 1916 in Kontakt zu Albert Einstein und habe 1918 einen Beitrag zu Einsteins Relativitätstheorie veröffentlicht: „Invariante Variationsprobleme“. Mit diesem Beitrag wurde ich nicht nur habilitiert, sondern er ist zurecht bis heute berühmt.

Ihre Familie gehörte dem liberalen Judentum an. Was änderte sich für Sie 1933 mit der Machtübernahme durch die Nationalsozialisten?

Alles! Am 7. April 1933 wurde ein Gesetz erlassen, mit dem jüdische und politisch missliebige Beamte entlassen wurden. Ich durfte nicht mehr lehren und stand plötzlich völlig mittellos da. Die Folge davon war meine Emigration in die USA. Aber auch für die Universität Göttingen – bis dahin führendes Weltzentrum

* Der in MONOID-Heft 148 bereits interviewt wurde.

** Die Inhalte, die in der heutigen Schulmathematik „Algebra“ genannt werden, würde man in der Universitätsmathematik „Arithmetik“ nennen. Algebra bedeutet dort kein konkretes Rechnen, sondern die dem Rechnen zugrundeliegenden Strukturen zu analysieren.

für Mathematik – hat sich von der Entlassung von Max Born, Felix Bernstein, Richard Courant und mir nicht wieder erholt.

Seit Ende 1933 lehrte ich dann als Professorin am Women's College Bryn Mawr, einem Frauencollege in Pennsylvania in den USA.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern noch über sich berichten?

Es war für mich als Frau in meiner Zeit eigentlich unmöglich Abitur zu machen und zu studieren. Ich habe nach acht Jahren „Höherer Töchterschule“ diese mit der 10. Klasse beendet.

Damit ich mich mit einer Sondererlaubnis als Gasthörerin an der Universität Erlangen einschreiben durfte, habe ich 1900 die Staatsprüfung zur Lehrerin für die Fächer Englisch und Französisch an Mädchenschulen abgelegt. Mit diesem Abschluss belegte ich dann an der Universität Lehrveranstaltungen in Mathematik, Geschichte und den romanischen Sprachen. Währenddessen bereitete ich mich auf die Abiturprüfung vor, die ich 1903 extern, da dies in Erlangen nicht möglich war, am Realgymnasium in Nürnberg ablegte.

Danach ging ich für ein Semester an die Universität Göttingen, wo zu dieser Zeit die besten Mathematiker Deutschlands lehrten. Von 1904 bis 1907 studierte ich danach in Erlangen Mathematik, was seit 1903 für Frauen in Bayern erlaubt war. Mein Studium beendete ich mit einer Promotion mit der Bestnote „summa cum laude“. Damit war ich die zweite Deutsche, die in Mathematik einen Dokortitel erworben hatte.

Nach dem Abschluss studierte ich in Erlangen weiter und unterstützte die beiden dortigen Mathematikprofessoren – ohne eine Stelle zu haben – bei ihrer Arbeit.

In welchem Buch kann man mehr über Sie als Person nachlesen?

Im letzten Herbst erschien eine Biographie von Lars Jaeger: „Emmy Noether. Ihr steiniger Weg an die Weltspitze der Mathematik“.

Eine Biographie in englischer Sprache gibt es von David E. Rowe und Mechthild Koreuber: „Proving It Her Way. Emmy Noether, a Life in Mathematics“. Zufälligerweise habe ich auch gerade einen Kriminalroman entdeckt, in dem mein Name im Titel auftaucht. Ob mein Leben darin eine Rolle spielt, weiß ich allerdings nicht.

Was möchten Sie unseren Leserinnen und Lesern mit auf den Weg geben?

„Meine [algebraischen] Methoden sind wirklich Methoden des Arbeitens und Denkens; deshalb haben sie sich überall anonym eingeschlichen.“

Liebe Frau Prof. Noether, wir danken Ihnen für dieses aufschlussreiche Gespräch.

Mathematische Lese-Ecke

Lesetipps zur Mathematik

von Martin Mattheis

Jürgen Brater: „Mathe Magic“

Jürgen Brater, Zahnarzt und Autor zahlreicher populärwissenschaftlicher Bücher vor allem rund um Medizin und Biologie, wagt sich jetzt erstmals in den Bereich der Mathematik. Mit „Mathe Magic“ legt er ein Buch mit 96 Kapiteln vor, in denen jeweils auf ein bis zwei Seiten eine interessante mathematische Beobachtung, eine Anekdote aus der historischen Entwicklung der Mathematik, ein Witz über Mathematik oder Ähnliches vorgestellt wird. Zwischen den Kapiteln gibt es immer wieder Knobelaufgaben – insgesamt 93 – bei denen manchmal die mathematischen Überlegungen auch um die Ecke gedacht werden müssen. Am Ende des Buches folgen Zitate über Mathematik und Mathematiker sowie ein Kapitel mit den Lösungen aller Aufgaben. Die Themen der Kapitel umfassen unter anderem bekannte Sätzen wie den Vierfarbensatz, Anekdoten wie die vom kleinen Gauß, Wissenswertes über mathematische Begriffe wie Primzahlen und sehr häufig schöne Zahlenspielerien. Durch die immer wieder eingestreuten Knobelaufgaben kann man beim Lesen nicht nur passiv rezipieren, sondern man wird auch immer wieder kreativ gefordert, selbst etwas zu lösen. Vor allem diese Mischung macht den Reiz des Buches aus. Ein Manko von Mathe Magic ist, dass der Autor so gut wie keine Literaturangaben macht, so dass jemand, der zu einem der Themen gerne mehr erfahren möchte, alleine auf die Suche gehen muss.

Fazit

Kennern entsprechender Bücher über Kuriositäten und allgemein verständlicher, spannender Auffälligkeiten aus der Mathematik werden viele der aufgeführten Begebenheiten bekannt vorkommen. Für Einsteiger kann sich allerdings – auch durch den günstigen Preis – eine spannende Welt in die Mathematik öffnen.
Gesamtbeurteilung: sehr gut 😊 😊 😊

Angaben zum Buch

Brater, Jürgen: Mathe Magic. Spannendes und Kurioses aus der Welt der Zahlen, Wiesbaden (YES) 2022, ISBN 978-3-96905-178-8, Taschenbuch, 160 Seiten
Art des Buches: Mathematische Plaudereien
Mathematisches Niveau: leicht verständlich
Altersempfehlung: ab 11 Jahren

Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 153

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. $a + b = a \cdot b = a : b$

Gibt es reelle Zahlen a und b , deren Summe und Produkt sowie Produkt und Quotient den gleichen Wert besitzen? (H.F.)

Lösung:

Annahme: Zwei Zahlen a und b erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

Dann gelten

$$(1) \quad a + b = a \cdot b \text{ sowie}$$

$$(2) \quad a \cdot b = a : b.$$

In der ersten Gleichung sei $a = 0$. Dann folgt $b = 0$ – ein Widerspruch zur zweiten Gleichung, denn $a : b$ ist dann nicht definiert. Sei also $a \neq 0$. Aus Gleichung (2) folgt dann $b = \frac{1}{b}$, also $b^2 = 1$ und daher $b = \pm 1$.

Für $b = 1$ lautet die Gleichung (1): $a + 1 = a$ – ein Widerspruch. Für $b = -1$ lautet die Gleichung (1): $a - 1 = -a$ und daher $a = \frac{1}{2}$.

Tatsächlich ist $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ eine Lösung (und zwar die einzige), denn es sind $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} : (-1)$.

II. Palindromfolge

Die Zahl $a_1 = 135797531$ ist ein Palindrom, d. h., wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt, ergibt sich die gleiche Zahl. Die Zahl a_2 sei die nächstgrößere Palindromzahl nach a_1 , die Zahl a_3 die nächstgrößere Palindromzahl nach a_2 usw.

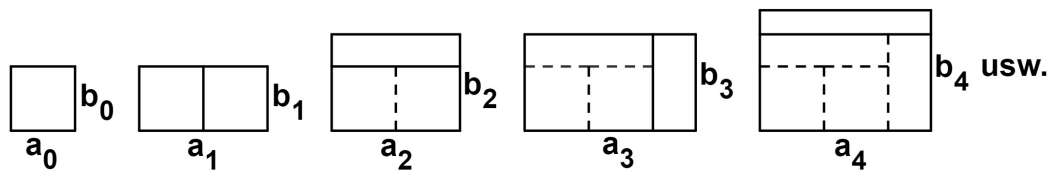
Wie heißt die Zahl a_{50} ? (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Die Zahl $a_1 = 135797531$ entsteht aus der Zahl $b_1 = 13579$ durch Anhängen der gespiegelten Ziffern 7531. Die nächstgrößere Zahlen sind $b_2 = 13580$ und $a_2 = 135808531$. Da sich bei der Parallelfolge (b_n) die Werte jeweils um 1 vergrößern, ist $b_{50} = b_1 + 49 = 13628$ und daher $a_{50} = 136282631$.

III. Sukzessive Rechtecke

Wir beginnen mit einem Quadrat mit Seitenlänge $a_0 = b_0 = 1$ und legen dann abwechselnd rechts und oben Rechtecke der Fläche 1 an:



Bestimme die Produkte $a_n b_n$ und $a_{n+1} b_{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

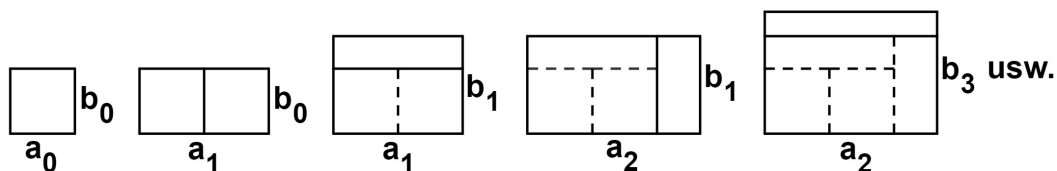
Lösung:

Die Produkte sind die Flächeninhalte der sukzessiven Rechtecke. Diese Flächeninhalte erhöhen sich bei jedem Übergang um 1. Deshalb bilden die Produkte $a_n b_n$ die Folge 1, 2, 3, ... und die Produkte $a_{n+1} b_{n+1}$ die verschobene Folge 2, 3, 4, ... Allgemein gelten also

$$a_n b_n = n + 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} b_{n+1} = n + 2$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$

Bemerkung: Leider hat sich beim Setzen der Aufgabe ein Fehler eingeschlichen, sodass die Aufgabe einfacher geworden ist. Ursprünglich sollten die Rechtecke so bezeichnet sein:



Hier hätten dann die Produkte $a_{n+1} b_n$ und $a_n b_n$ bestimmt werden sollen. Mit diesen Bezeichnungen bilden die Flächeninhalte $a_{n+1} b_n$ die Folge 1, 3, 5, ... und die Flächeninhalte $a_n b_n$ die Folge 2, 4, 6, ..., allgemein also

$$a_{n+1} b_n = 2(n + 1) \quad \text{und} \quad a_n b_n = 2n + 1.$$

IV. Kerzen-Recycling

Im Mittelalter waren Kerzen sehr teuer. Deshalb ließ ein sparsamer Pfarrer die Kerzen in seiner Kirche alle nur bis zu der gleichen Höhe niederbrennen. Aus jeweils sechs Kerzenresten schmolz er dann eine neue Kerze.

Wie viele neue Kerzen erhielt er mit dieser Recycling-Methode aus ursprünglich 111 Kerzen? (H.F.)

Lösung:

Mit $K =$ Kerzen, $R =$ Kerzenresten, $b =$ brennen, $s =$ schmelzen erhält man:

$$111K \xrightarrow{b} 111 R \xrightarrow{s} 18 K + 3 R \xrightarrow{b} 18 R + 3 R = 21 R$$

$$\xrightarrow{s} 3 K + 3 R \xrightarrow{b} 3 R + 3 R = 6 R \xrightarrow{s} 1 K$$

Der Pfarrer erhält durch sein Recycling $18 + 3 + 1 = 22$ zusätzliche Kerzen.

V. Zifferntausch

Es sei n eine positive ganze zweiziffrige Zahl und u sei ihre Spiegelzahl.*

Für welche Zahlen n ist dann $n + u$ eine Quadratzahl? Begründe Deine Lösung.
(H.F.)

Lösung:

Es sei $n = 10x + y$ mit $1 \leq x$ und $y \leq 9$. Dann ist $u = 10y + x$ und $n + u = 11x + 11y = 11 \cdot (x + y)$

Daraus folgt: $n + u$ ist eine Quadratzahl, wenn $x + y = 11$ und deshalb $x > 1$ ist.** Nun gilt:

x	2	3	4	5
$y = x - 11$	9	8	7	6
n	29	38	47	56
$n + u$	$29 + 92 = 11^2$	$38 + 83 = 11^2$	$47 + 74 = 11^2$	$56 + 65 = 11^2$

Es gibt daher acht Lösungen: $n = 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92$, wobei für jedes dieser n gilt: $n + u = 11^2$.

VI. Dreistellige Zahlen gesucht

- Von einer dreistelligen Zahl weiß ich, dass sie durch 15 teilbar ist und dass ihre mittlere Ziffer gleich 6 ist. Reicht das, um festzustellen, um welche Zahl es sich handelt?
- Ich weiß, dass eine dreistellige Zahl durch 8 teilbar ist und ihre beiden ersten Ziffern ungerade sind. Reicht diese Information aus, um die Zahl eindeutig festzulegen? Wenn nicht, wie viele solche Zahlen gibt es?

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- Eine Zahl ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 5 und 3 teilbar ist. Es muss also die letzte Ziffer eine 5 oder 0 sein und die Summe der Ziffern durch 3 teilbar sein. Wenn a als letzte Ziffer der gesuchten Zahlen zwischen 1 und 9 liegen und die Summe $6 + 5$ oder $6 + 0$ zu einer durch 3 teilbaren Zahl ergänzt werden soll, gibt es für a jeweils drei Möglichkeiten: 165, 465, 765, 360, 660 und 960.
- Die Information reicht nicht. Beispiele: 512, 536.
Regel: Eine dreistellige Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre erste Ziffer gerade und die Zahl aus den beiden letzten Ziffern durch 8 teilbar ist oder wenn die erste Ziffer ungerade und die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist. Mit mittlerer ungerader Ziffer heißt das,

* Beispiel: Es sei $n = 37$. Dann ist $u = 73$ die Spiegelzahl von n .

** Auch für $x + y = k^2 \cdot 11$, wobei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl ist, also 44, 99, 176, ..., wäre $n + u$ eine Quadratzahl, allerdings kann $x + y$ für $x = 9$ oder $y = 9$ nicht so groß werden.

dass für die letzten beiden Ziffern 12, 36, 52, 76, 92, also fünf Möglichkeiten in Frage kommen. Für die erste Ziffer gibt es auch fünf Fälle, insgesamt also $5 \cdot 5 = 25$ solche Zahlen.

VII. Primzahlteiler gesucht

Ermittle die kleinste Primzahl p , die beim Teilen durch 7, 11 und 13 jeweils den Rest 1 lässt. (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Ist p die gesuchte Primzahl, so ist $p - 1$ durch 7, 11 und 13, also auch durch $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ teilbar. Die Primzahl p hat also die Form $1001 \cdot k + 1$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$, ist also unter den Zahlen 1002, 2003, 3004, 4005, 5006, ... zu suchen. Da p ungerade ist, kommt 2003 als erste Zahl in Frage. Wegen $\sqrt{2003} \approx 44,8$ muss man nur für die Primzahlen 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 und 43 die Teilerprobe machen. Da keine dieser Zahlen ein Teiler von 2003 ist, ist 2003 die gesuchte Primzahl.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. August 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

I. 2023 als 7er-Potenz

Es gelten zum Beispiel $7^3 = 343$ und

$$7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^1 + 7^1 + 7^1 = 1981.$$

- a) Wie viele der natürlichen Zahlen von 1 bis 2023 lassen sich als Potenzen von 7 mit natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... als Exponenten oder als Summen von solchen schreiben?
- b) Gib – wenn möglich – auch eine entsprechende Darstellung für 2023 an oder begründe, warum dies nicht möglich ist.

(MG)

II. Größte Zahl

99 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen haben die Summe 9999. Bestimme die größte Zahl in dieser Summe. (H.F.)

III. Würfelergebnisse

Beim Wurf zweier regulärer Würfel W_1 und W_2 seien w_1 und w_2 die möglichen gewürfelten Augenzahlen; damit sind auch die zweiziffrigen Zahlen $w_1 w_2 = 10w_1 + w_2$ sowie die Augensummen $w_1 + w_2$ mögliche Ergebnisse. Ordne nun nach wachsender Größe die Wahrscheinlichkeiten P der Ereignisse E_1, E_2, E_3 :

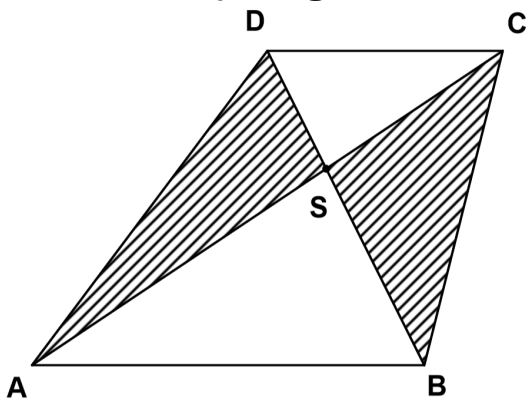
E_1 : Die Zahl $w_1 w_2$ ist gerade;

E_2 : Die Zahl $w_1 w_2$ ist prim;

E_3 : Die Augensumme $w_1 + w_2$ ist nicht prim.

(H.F.)

IV. Eine Trapezeigenschaft



Die Diagonalen eines Trapezes $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ schneiden sich im Punkt S .

Begründe:

- Die Dreiecke ABC und ABD sind flächengleich.
- Die Dreiecke ASD und CSB sind ebenfalls gleich groß.

(H.F.)

V. Lösung einer Gleichung

Für jede reelle Zahl z bedeutet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Für welche x gilt dann

$$\left[\frac{3x - 2}{4} \right] = \frac{5x}{7} ?$$

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

VI. Fünfeck und Dreieck

Zeige: In jedem konvexen* Fünfeck kann man stets drei Diagonalen so auswählen, dass jeweils eine ihre Teilstrecken zusammen die Seiten eines Dreiecks bilden.

(H.F.)

VII. Ausschluss von Produkten

Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen mit n Ziffern. Diese Ziffern dürfen nur 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 sein und müssen mindestens einmal vorkommen.

Begründe: Es gibt keinen Faktor $f = 2, 3, 4, \dots$, für den das Produkt aus f und einer der Zahlen in M immer noch in M liegt.

Tipp: Betrachte die Fälle $f \geq 3$ und $f = 2$.

(H.F.)

* Ein n -Eck heißt konvex, wenn alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Neue Aufgaben

Klassen 9–13

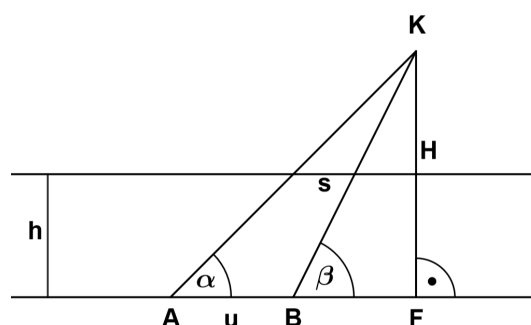
- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. August 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

Aufgabe 1324: Finde alle Lösungen

Finde alle Lösungen der Gleichung $y = \frac{x^2}{x+6}$ mit ganzzahligen $x \geq 0$ und $y \geq 0$.
(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1325: Flugzeug und Kondensstreifen

Ein Flugzeug fliegt wie in nebenstehender Skizze dargestellt in der Höhe $h = 1000$ m mit der Geschwindigkeit $v = 540 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ von West nach Ost. Am Boden direkt unter der Flugstrecke sieht ein Beobachter A das Flugzeug einen Kondensstreifen kreuzen unter dem Blickwinkel $\alpha = 45^\circ$. Ein weiterer Beobachter B steht $u = 1000$ m weiter östlich und sieht unter dem Blickwinkel $\beta = 49^\circ$ die gleiche Szene etwas später.



- In welcher Höhe H befindet sich der Kondensstreifen?
- Um wieviel später als A macht B seine Beobachtung?

Hinweis: Beachte unbedingt die Abbildung zur Eindeutigkeit der Lösung.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Aufgabe 1326: Unterstrichen und durchgestrichen

Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Schreibe alle natürlichen Zahlen von 1 bis $2n^2$ nacheinander auf. Nun werden die ersten n dieser Zahlen unterstrichen, die nächsten n durchgestrichen, die übernächsten n wieder unterstrichen usw.

- Bestimme die Summe $S_1(n)$ aller unterstrichenen Zahlen.
Beispiel: $S_1(3) = 1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + 13 + 14 + 15 = 72$.
- Es sei $S_2(n)$ die Summe der durchgestrichenen Zahlen und

$$d(n) = S_2(n) - S_1(n).$$

Bestimme $d(n)$

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Tipp: Du darfst die Gaußsche Summenformel $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ verwenden.

Aufgabe 1327: Summen 1 und 2

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 99 werde mit je einem Vorzeichen + oder – versehen und aufsummiert, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt.

Kannst Du die Zahlen 1 und 2 als eine solche Summe darstellen?

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Aufgabe 1328: Periodische Dezimalbrüche

Es sei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl. Prüfe, ob die folgenden Behauptungen richtig sind:

a) Die Dezimalentwicklung von $\frac{1}{p}$ ist periodisch. Die Länge l der Periode (das heißt die Anzahl der Ziffern in einer Periode) ist höchstens $p - 1$.

b) Jede der Zahlen $\frac{j}{p}$, mit $j = 1, 2, \dots, p - 1$, hat eine Periode der gleichen Länge l .

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

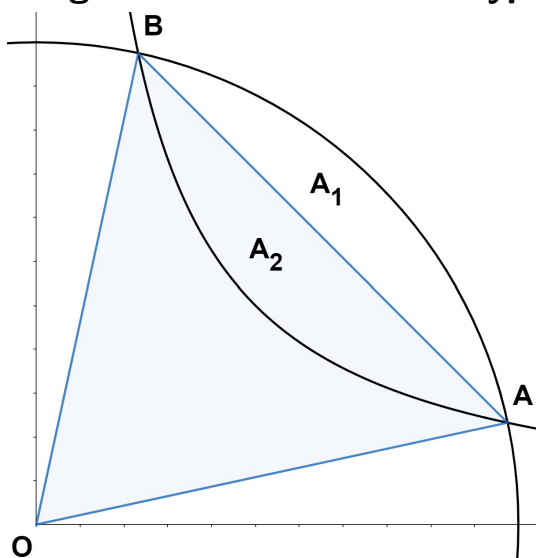
Aufgabe 1329: Teilersumme

Beweise die folgende Aussage.

Für eine Primzahl p und eine positive ganze Zahl k gilt: Die Summe der echten Teiler von p^k ist kleiner als p^k .

(H.F.)

Aufgabe 1330: Kreis und Hyperbel



Zeichnet man einen Viertelkreis mit dem Mittelpunkt $(0;0)$ und Radius r (mit $r > 1$) sowie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ in ein Koordinatensystem, so ergeben sich zwei Schnittpunkte A und B (siehe Abbildung).

a) Welchen Radius muss der Kreis haben, damit das Dreieck OAB gleichseitig ist?

b) Sind die Flächen A_1 und A_2 der beiden „Bögen“ dann gleich groß? Begründe Deine Antwort

(Christoph Sievert, Bornheim)

Zu dieser Aufgabe haben wir Euch ein Applet erstellt, welches Du unter dem folgenden Link oder mithilfe des nebenstehenden QR-Codes aufrufen kannst.

<https://www.geogebra.org/m/a4wm4a4e>



Gelöste Aufgaben aus MONOID 153

Klassen 9–13

Aufgabe 1317: Abschätzung besonderer Terme

Zeige:

- a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ für alle positiven reellen Zahlen x, y
b) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} \geq 8$ für alle positiven reellen Zahlen a, b, c .

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

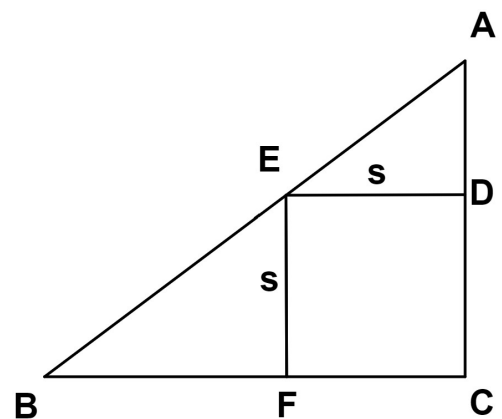
- a) $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ergibt $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
Diese Ungleichung dividieren wir durch xy .

b)
$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} \\ &= \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{c}{b} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot 1 + \frac{b}{a} \cdot 1 \cdot \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{a}{c} \\ &= 2 + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \\ &\geq 4 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 1318: Quadrat im Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei ein Quadrat $CDEF$ einbeschrieben wie in der Zeichnung.

- a) Berechne das Verhältnis der Fläche F_Q des Quadrats zu der Fläche F_D des Dreiecks in Abhängigkeit von den Katheten a und b .
b) Wie musst Du das Dreieck wählen, damit das Verhältnis $\frac{F_Q}{F_D}$ möglichst groß oder möglichst klein wird?



(Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

- a) Die Seitenlänge s des Quadrats ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und EBF , nämlich $\frac{s}{(a-s)} = \frac{b}{a}$. Damit ist $F_Q = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}$. Andererseits ist $F_D = \frac{1}{2}ab$.

Somit ist das Verhältnis $\frac{F_Q}{F_D} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$.

- b) Für das Verhältnis der Flächen kommt es nicht auf die Größe des Dreiecks an sondern nur auf seine Form. Wir dürfen deshalb $b = 1$ und $a = x$ setzen.

Damit erhalten wir somit für das Verhältnis

$$\frac{F_Q}{F_D} = \frac{2x}{(x+1)^2} =: V(x).$$

Nun ist offenbar $V(0) = 0$ und $V(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Dies beantwortet die Frage nach dem minimalen Verhältnis.

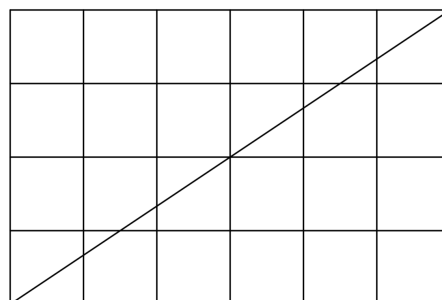
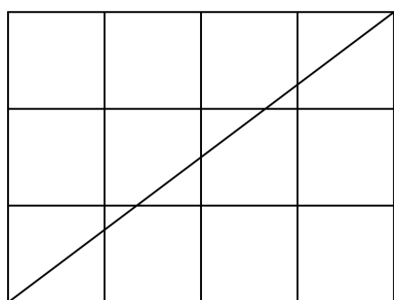
Für das Maximum bemühen wir die Differentialrechnung:

$$V'(x) = 2 \frac{1 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot (x+1)x}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^4} (-x^2 + 1).$$

Für positive x hat V' die einzige Nullstelle $x = 1$. Das Verhältnis $\frac{F_Q}{F_D}$ ist also maximal, wenn $x = 1$, das heißt $b = a$, ist also im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck.

Der Wert von $\frac{F_Q}{F_D}$ ist dann $\frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1319: Durchschnittene Quadrate



Ein Rechteck ist schachbrettartig in gleich große Quadrate unterteilt. Es sind 12345 Längsreihen und 67890 Querreihen. Wie viele Quadrate durchschneidet die Diagonale des Rechtecks?

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

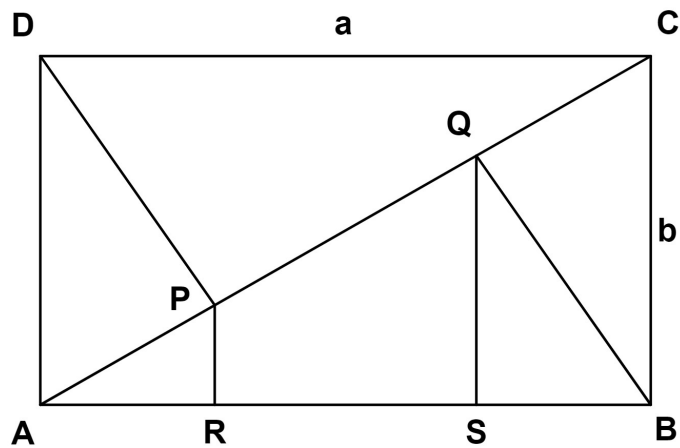
Lösung:

Wir betrachten zunächst zwei Beispiele. Das Bild links zeigt drei Längsreihen und vier Querreihen. Durchschnitten werden sechs Quadrate. Das Bild rechts zeigt vier Längsreihen und sechs Querreihen. Durchschnitten werden acht Quadrate. Was ist der Unterschied zwischen diesen beiden Beispielen? Bei dem ersten Beispiel sind die Zahlen 3 und 4 teilerfremd ($\text{ggT} = 1$), bei dem zweiten Beispiel haben die beiden Zahlen 4 und 6 den $\text{ggT} = 2$. Allgemein gilt: Hat das Rechteck a Längsreihen und b Querreihen und sind a und b teilerfremd (wie im ersten Beispiel), so liegen auf beiden Seiten der Diagonalen nach Wegnahme der durchschnittenen Quadrate zwei punktsymmetrische Figuren, die sich zu einem Rechteck der Seitenlängen $a - 1$ und $b - 1$ zusammensetzen lassen. Also ist die Gesamtzahl der durchschnittenen Quadrate $a \cdot b - (a - 1) \cdot (b - 1) = a \cdot b - (a \cdot b - a - b + 1) = a + b - 1$.

Sind dagegen a und b nicht teilerfremd (wie im zweiten Beispiel) und ist $c = \text{ggT}(a; b)$ ihr größter gemeinsamer Teiler, so liegen entlang der Diagonale $c \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right) = a + b - c = a + b - \text{ggT}(a; b)$ Rechtecke. Für $a = 12345$, $b = 67890$ und $c = \text{ggT}(a; b) = 15$ gilt: Die gesuchte Gesamtzahl der durchschnittenen Rechtecke ist $12345 + 67890 - 15 = 80220$.

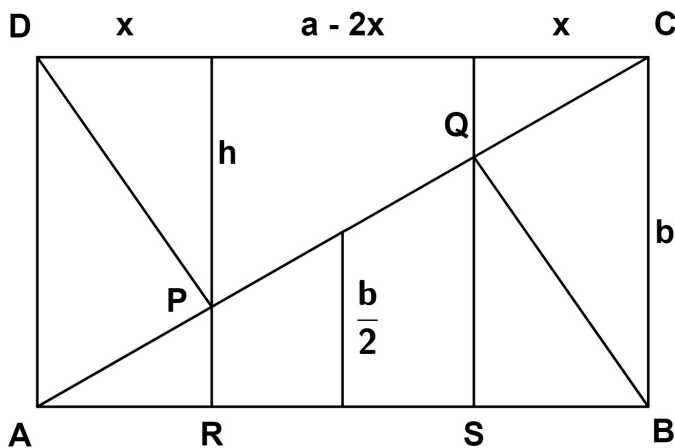
Aufgabe 1320: Flächeninhalt eines Rechtecks

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit $|AB| = a$, $|BC| = b$ und $a > b$. Von den gegenüberliegenden Ecken B und D des Rechtecks werden die Lote auf die Diagonale AC gefällt. Ihre Fußpunkte auf AC heißen P und Q . Die Lote von P und Q werden auf die Rechteckseite AB gefällt. Ihre Fußpunkte auf AB heißen R und S .



Berechne den Flächeninhalt F des Vierecks mit den Eckpunkten P , R , S und Q in Abhängigkeit von a und b . (Klaus Ronellenfisch, Walldorf)

Lösung:



Die ganze Figur ist punktsymmetrisch zum Diagonalenmittelpunkt und enthält einige ähnliche rechtwinklige Dreiecke. Der gesuchte Flächeninhalt hat die Größe $F = \frac{b}{2} \cdot (a - 2x)$.

Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = x \cdot (a - x)$$

und nach der Ähnlichkeit

$$\frac{x}{h} = \frac{b}{a}$$

Also ist

$$\begin{aligned}h^2 &= \frac{a^2 x^2}{b^2} = x \cdot (a - x) \\a^2 x^2 &= x \cdot b^2 \cdot (a - x) \\a^2 x &= ab^2 - xb^2 \\x &= \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}F &= \frac{b}{2} \cdot (a - 2x) = \frac{b}{2} \cdot \left(a - \frac{2ab^2}{a^2 + b^2} \right) = \frac{ab}{2} - \frac{ab^3}{a^2 + b^2} \\&= \frac{ab(a^2 + b^2) - 2ab^3}{2 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{a^3 b + ab^3 - 2ab^3}{2 \cdot (a^2 + b^2)}\end{aligned}$$

Ergebnis: $F = \frac{a^3 b - ab^3}{2 \cdot (a^2 + b^2)}$.

Aufgabe 1321: Vielfache von Fünf

Wie groß ist der Anteil der Vielfachen von 5 an den Zahlen der Menge

$$M = \{2^n + 1, 3^n + 1, \dots, 9^n + 1 \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots\}?$$

(HF)

Lösung:

Mit $[m]$ sei die Einerziffer der natürlichen Zahl m bezeichnet. Dann gilt:

- (*) Nur wenn $[m] = 4$ oder 9 ist gilt $[m + 1] = 5$ oder 0 und dann ist $m + 1$ ein Vielfaches von 5.

Keine der Zahlen 5^n und 6^n erfüllt die Bedingung (*), denn $[5^n] = 5$ und $[6^n] = 6$ für jedes $n \geq 1$. Die Hälfte der Zahlen $4^n + 1$ und $9^n + 1$ sind Vielfache von 5, denn für sie gilt: $[4^n] = 4$ oder 6 und $[9^n] = 9$ oder 1 – das sind insgesamt die Hälfte von zwei Achtel der Zahlen aus M . Jeweils ein Viertel der Zahlen $2^n + 1$, $3^n + 1$, $7^n + 1$ und $8^n + 1$ sind Vielfache von 5, weil $[2^n] = 2, 4, 8$ oder 6 , $[3^n] = 3, 9, 7$ oder 1 , $[7^n] = 7, 9, 3$ oder 1 sowie $[8^n] = 8, 4, 2$ oder 6 ist – das sind 4 mal je ein Viertel von einem Achtel der Zahlen aus M .

Insgesamt gilt also: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ der Zahlen aus M sind Vielfache von 5.

Aufgabe 1322: Quersumme eines Produktes

Gegeben sind die Zahlen $a = 2^{13} \cdot 5^{23}$ und $b = 2^{57} \cdot 5^{51}$. Welche Quersumme hat ihr Produkt $x = a \cdot b$?
(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

Lösung:

Es gilt

$$x = 2^{13} \cdot 5^{23} \cdot 2^{57} \cdot 5^{51} = (2^{70} \cdot 5^{70}) \cdot 5^4 = 10^{70} \cdot 5^4 = 625 \underbrace{000 \dots 000}_{70 \text{ Nullen}}.$$

Also ist die Quersumme von x gleich der Quersumme von 625, nämlich 13.

Aufgabe 1323: Teilbarkeit durch 9

Zeige, dass $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ für jede natürliche Zahl n durch 9 teilbar ist. (Wolfgang J. Bühler, Diez)

Lösung:

1. Lösung:

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \\ &= (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\ &= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2). \end{aligned}$$

Nun ist entweder n durch 3 teilbar oder von der Form $n = 3m \pm 1$. In diesen Fällen ist $n^2 + 2 = (3m \pm 1)^2 + 2 = 9m^2 \pm 6m + 1 + 2$ durch 3 teilbar, also ist immer $3n \cdot (n^2 + 2)$ teilbar durch 9.

2. Lösung (mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion):

Wir rechnen nach, dass $a_1 = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$ durch 9 teilbar ist.

Sei nun a_n durch 9 teilbar für ein $n \geq 1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 - ((n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3) \\ &= (n+2)^3 - (n-1)^3 \\ &= (n^3 + 6n^2 + 6n + 8) - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \\ &= 9n^2 + 9n + 9 \end{aligned}$$

ist durch 9 teilbar, also auch a_{n+1} .

Bemerkung: Beide Beweise lassen sich verallgemeinern, um zu zeigen, dass $(n-k)^3 + n^3 + (n+k)^3$ für jedes Paar (n, k) natürlicher Zahlen mit $n > k$ durch 9 teilbar ist.

Die Aufgabe für den Computer-Fan

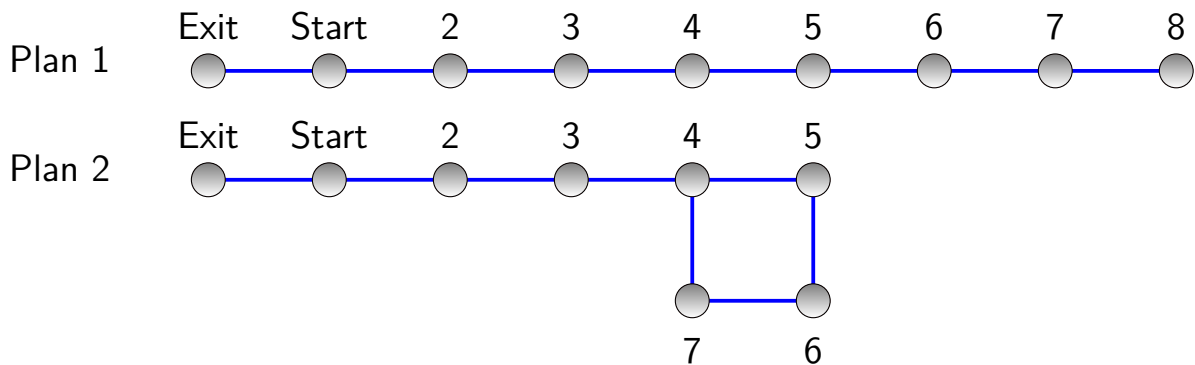
In der Grafik sind zwei Spielpläne abgebildet. Wir beginnen mit dem oberen Plan (Plan 1). Auf das Feld *Start* wird eine Spielfigur gestellt. Mit einem fairen Münzwurf entscheiden wir, ob die Figur ein Feld nach rechts oder nach links geht. Wenn sie auf dem rechten Feld (Feld 8) steht, geht sie immer nach links. Wir wiederholen dies, bis die Figur das Feld *Exit* erreicht.

Wie viele Schritte sind hierfür im Mittel notwendig?

Wir betrachten nun das gleiche Problem für den unteren Spielplan (Plan 2). Die Regeln sind die gleichen wie für Plan 1, jedoch wird auf Feld 4 mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{3}$ eines der benachbarten Felder 3, 5 oder 7 ausgesucht. Wie lange braucht die Spielfigur hier im Mittel, um *Exit* zu erreichen?

Bei welchem Plan erreicht die Spielfigur im Mittel schneller das Feld *Exit*?

Aufgabe: Schreibe ein Computerprogramm, das für beide Pläne die Irrfahrt simuliert und die Anzahl der Schritte bis zum Erreichen von *Exit* ermittelt. Wiederhole die Simulation so oft, dass mit einiger Präzision die mittlere Verlassenszeit ermittelt wird. Vergleiche nun die Ergebnisse für Plan 1 und Plan 2.



Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. August 2023 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die Exe-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 152

In Heft 152 stellten wir Euch folgende Aufgabe: Im Science-Center *Experimenta* in Heilbronn werden die Besucher an einer der Stationen aufgefordert, schwarze Holzscheiben auf einer großen quadratischen Fläche zufällig zu verteilen. Das Ergebnis wird dann von einer Kamera aufgenommen und von einem Computer statistisch analysiert. Es ist gar nicht so einfach, hier ein gutes Ergebnis zu erzielen. Viele Besucher verteilen die Steine zu gleichmäßig, zu ungleichmäßig oder zu regelmäßig.

Die statistische Auswertung, die dort vorgenommen wird, ist einigermaßen kompliziert und basiert zum Beispiel auf den typischen Abständen zum nächsten Nachbarn, die bei einer zufälligen Verteilung vorliegen. Wir wollen hier eine viel einfachere Situation anschauen, in der sich ein Mensch Münzwurfresultate *ausdenkt* und diese vom Computer auf Zufälligkeit untersucht werden sollen.

Konkret soll der Mensch an der Tastatur in jedem Schritt „W“ für *Wappen* eingeben oder „Z“ für *Zahl*. Der Computer rät vorab die Eingabe. Wenn die W und Z tatsächlich rein zufällig kämen, dann könnte der Computer eine Trefferquote von etwa 50% nicht übertreffen. Bei einem Menschen, der sich zufällige Ergebnisse ausdenkt, ist dies durchaus möglich. Die Quote für korrekte Vorhersagen des Computers stellt also ein Maß für die Zufälligkeit der ausgedachten Münzwürfe dar.

Ein ganz einfaches Verfahren für die Vorhersage sieht so aus: Das Programm führt Buch darüber, wie häufig der Mensch W oder Z gewählt hat, wenn die vier Eingaben davor beispielsweise WWWW waren. Wurde häufiger W gewählt, so tippt der Computer auf W, falls die letzten vier Eingaben WWWW waren. War es häufiger Z, so wählt der Computer Z. Bei Gleichstand wählt der Computer zufällig W oder Z. Ebenso wird über die Eingaben W und Z Buch geführt bei allen 16 Möglichkeiten WWWW, WWWZ, WWZW, ..., die als letzte vier Eingaben möglich sind.

Die Aufgabe hier besteht darin, das entsprechende Computerprogramm zu schreiben und auszuprobieren.

- Das Programm soll eine Tastatureingabe akzeptieren (W oder Z, bzw. Q für Abbruch). Es soll vor jeder Eingabe die kommende Eingabe erraten (aber zunächst geheimhalten) und nach der Eingabe mitteilen, ob es richtig geraten hat. Zudem soll die Quote richtig vorhergesagter Eingaben in Prozent nach jeder Eingabe mit ausgegeben werden.
- Wenn Euch ein pfiffigeres Verfahren zur Vorhersage einfällt, seid Ihr eingeladen, dieses zu programmieren und einzusenden.
- Welche Trefferquote erzielt Euer Programm bei den folgenden 100 ausgedachten Münzwürfen? Sendet auch diese Prozentzahl mit ein.

ZWWZW ZZZZW WWZZW ZWZYZ ZZWZW
 WWZZZ WZWZW WWZWZ ZZWZW WZWYZ
 WZWZW WWZZZ WWWZW ZWWZW WWZWZ
 WZWZZ ZWWWZ WZZZW ZWWZW WZWZZ

Wenn Euch über Weihnachten langweilig wird, könnt Ihr die Verwandtschaft auffordern, sich Münzwürfe auszudenken, während Ihr den jeweils nächsten Vorschlag mit dem Computer vorhersagt. Welche Trefferquote könnt Ihr damit erzielen? (AcK)

Lösung im Python-Code

Dieser Python Code ist *quick and dirty* programmiert: Die vier letzten Eingaben werden in einer Variablen `liste` gespeichert. Dies ist eine Binärzahl mit vier Ziffern. Jede Ziffer gibt an, ob ein Wappen (1) oder eine Zahl (0) vorlag. So

werden etwa die vier letzten Eingaben WWZW als $8*1 + 4*1 + 2*0 + 1 = 13$ kodiert. Für jede der 16 Möglichkeiten für die vergangenen vier Würfe wird Buch darüber geführt, wie viel öfter Wappen folgte als Zahl (Liste bisher). Ist diese Zahl positiv, so rät der Computer Wappen. Ist diese Zahl negativ, so rät der Computer Zahl. Ist die Zahl null, so rät der Computer zufällig. Dies passiert in der Funktion `vermutung`.

Der Rest des Programms ist Buchführung: Es werden anfangs alle Listen auf null gesetzt. Das Programm erlaubt eine Zeile mit mehreren Symbolen W oder Z und arbeitet diese von links nach rechts ab. Bei jedem Symbol wird zunächst bisher aktualisiert, dann wird die fünftletzte Eingabe vergessen und die letzte Eingabe hinzugefügt (zu `liste`). Dies passiert so lange, bis die Eingabe Q kommt.

Der Computer rät eigenständig, teilt uns aber erst nach der Eingabe mit, ob er richtig geraten hat, sowie die bisherige Quote richtig geratener Würfe.

Für die 100 Münzwürfe aus der Aufgabenstellung erzielt der Computer mit diesem Code eine Trefferquote von etwa 60%, abhängig davon, wie die ersten vier Würfe vom Computer zufällig geraten werden.

```
import random
def vermutung():
    # errechnet die Vermutung des Computers
    if laenge>3:
        if bisher[liste]>0:
            return(1)
        elif bisher[liste]<0:
            return(0)
    return(random.randint(0,1)) # Zufaelliches Raten
bisher = [0]*16 # Liste Vorsprung Wappen
liste = 0 # Letzte vier Eingaben
laenge = 0 # Anzahl der Eingaben
treffer = 0 # Wie oft richtig geraten
eingabe = ""

while True:
    v = vermutung()
    eingabezeile = input("Wappen (W) oder Zahl (Z)")
    while len(eingabezeile)>0: # Eingaben von links
        # nach rechts auslesen
        v = vermutung()
        eingabe = eingabezeile[0]
        # lies linkes Element von eingabezeile
        # und entferne es
        eingabezeile = eingabezeile[1:]
```

```

if (eingabe in "Ww1"):
    if laenge >3:
        bisher[liste] += 1
        # Vorsprung Wappen steigt
    liste = (2*liste) % 16 + 1
    # Historie aktualisieren

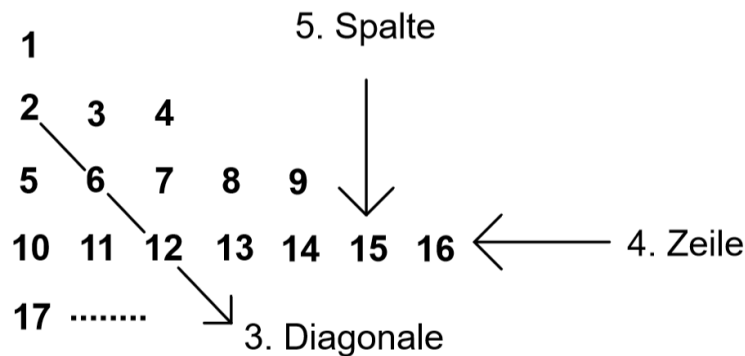
    laenge += 1
    if v == 1:
        treffer +=1
        print("Ich habe richtig geraten.")
    else:
        print("Ich habe falsch geraten.")
    print(treffer/laenge)
elif (eingabe in "Zz0"):
    if laenge >1:
        bisher[liste] -= 1
        # Vorsprung Wappen sinkt
        liste = (2*liste) % 16
        # Historie aktualisieren
    laenge += 1
    if v == 0:
        treffer +=1
        print("Ich habe richtig geraten.")
    else:
        print("Ich habe falsch geraten.")
    print(treffer/laenge)
if eingabe in "qQxX":
    # Code fuer quit oder exit
    break
if eingabe in "qQxX":
    break

```

Mathematische Entdeckungen

Untersuchung eines Zahlenschemas

Die natürlichen Zahlen seien in folgendem Schema angeordnet:



Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst Du im Aufbau dieses Schemas? Zum Beispiel: Wie lautet das Bildungsgesetz der n -ten Zeile, n -ten Spalte, n -ten Diagonalen? Wie heißt die mittlere Zahl der n -ten Zeile? Wie groß ist die Summe der Zahlen der n -ten Zeile? Und so weiter.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. August 2023 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

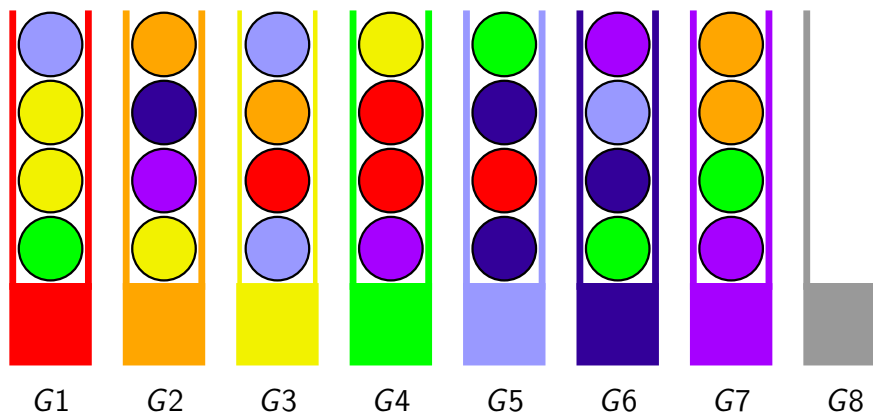
Lösung der Aufgabe aus Heft 152

Im Heft 152 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

In der „Frag doch mal die Maus“-Show vom 30. April 2022 (ARD) wurden die Kandidaten aufgefordert, folgendes Problem zu lösen: In acht Gestellen G_1 bis G_8 ist jeweils Platz für vier bunte Kugeln übereinander. Die linken sieben Gestelle G_1 bis G_7 haben jeweils eine eigene Farbe und zu jeder dieser sieben Farben gibt es vier gleichfarbige Kugeln. Das achte Gestell hat keine Farbe. Anfangs liegen die 28 Kugeln bunt durcheinander in den acht Gestellen. Das Ziel besteht darin, in jedem Gestell die Kugeln der zugehörigen Farbe zu sortieren. Dabei darf in jedem Schritt aus einem der Gestelle die oberste Kugel entnommen und von oben in eines der Gestelle gelegt werden, in dem noch Platz ist. Wir haben ein Scratch-Programm zum Ausprobieren ins Netz gestellt:

<https://scratch.mit.edu/projects/691480451/>.

- a) Wie viele unterschiedliche Anfangssituationen gibt es? Das achte Gestell G_8 muss nicht (wie im Bild) leer sein.



- b) Gib eine Zugfolge an, mit der die Kugeln aus der Position in der Grafik sortiert werden. Wie viele Züge brauchst Du? Die kürzeste Zufolge bekommt zwei zusätzliche Punkte.
- c) Gib ein Verfahren (Algorithmus) an, mit dem man die Kugeln aus jeder Anfangsposition in die sortierte Zielposition bringen kann.

Damit wir in Teil b) Deine Lösung prüfen können, sende bitte die Zugfolge in folgendem Format. Dies kann handschriftlich oder als Txt-Datei sein.

Wird im ersten Schritt die (oberste) Kugel aus Gestell 1 in Gestell 3 gelegt, dann die aus Gestell 2 in Gestell 3 und schließlich die aus Gestell 3 in Gestell 5, so soll die Aufzeichnung aussehen wie nebenstehend.

1	3
2	3
3	5

(AcK)

Lösung

a) Wir gehen in drei Schritten vor:

1. Wir legen 28 weiße Kugeln in die acht Gestelle und zählen die Möglichkeiten N_1 dafür.
2. Wir nummerieren die 28 Kugeln von 1 bis 28 willkürlich. Dafür gibt es N_2 Möglichkeiten.
3. Wir färben die Kugeln 1 - 4 rot, die Kugeln 5 - 8 orange und so weiter und übermalen dabei die Nummern der Kugeln. Durch das Übermalen werden jeweils N_3 unterschiedliche Anordnungen zu einer zusammengefasst. Insgesamt haben wir dann $N_1 \cdot \frac{N_2}{N_3}$ unterschiedliche Konfigurationen.

Und nun zur Berechnung von N_1 , N_2 und N_3 .

1. Das schwerste Problem kommt gleich am Anfang. Da wir die Kugeln nicht unterscheiden können, reicht es, für jedes Gestell festzustellen, wie viele Kugeln fehlen. Unser Problem ist also gleichwertig damit, vier Fehlstellen auf acht Gestelle zu verteilen. Wir unterscheiden vier Fälle.

Fall 1. Alle Fehlstellen in unterschiedlichen Gestellen: Es gibt $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$ Möglichkeiten, die vier Gestelle mit den Fehlstellen auszuwählen.

Fall 2. Zwei mal je zwei Fehlstellen in einem Gestell: Es gibt $\frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$

Möglichkeiten, die beiden Gestelle mit den Fehlstellen auszuwählen.

Fall 3. Ein Gestell mit zwei Fehlstellen, zwei mit je einer: Es gibt acht Möglichkeiten, das Gestell mit den zwei Fehlstellen auszuwählen und $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Möglichkeiten, aus den verbliebenen sieben Gestellen die beiden anderen auszuwählen, also insgesamt 168 Möglichkeiten.

Fall 4. Ein Gestell mit drei Fehlstellen, eines mit einer: Es gibt acht Möglichkeiten, das Gestell mit den drei Fehlstellen auszuwählen und sieben für das andere Gestell, also insgesamt 56 Möglichkeiten.

Fall 5. Ein Gestell mit vier Fehlstellen: Es gibt acht Möglichkeiten, das Gestell auszuwählen.

Insgesamt haben wir

$$N_1 = 70 + 28 + 168 + 56 + 8 = 330.$$

Diese Berechnung geht etwas systematischer, wenn sie als das Ziehen von nummerierten Objekten (die acht Gestelle) mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge angesehen wird. Nehmen wir an, dass die Objekte von 1 bis $n = 8$ nummeriert sind und $k = 4$ daraus gezogen werden. Beim Lotto, wo ohne Rücklegen gezogen wird, werden die gezogenen Kugeln nach der Ziehung aufsteigend angeordnet. So findet man sie meist in den Nachrichten. Beim Anordnen wird die ursprüngliche Reihenfolge vergessen. Nehmen wir also an, dass die Ergebnisse $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ sind mit Werten $x_i \in \{1, \dots, n\}$. Beim Lotto gilt sogar $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ und es gibt hierfür $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Möglichkeiten. Wir verwenden nun einen Trick und setzen $y_1 = x_1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 2$ und so weiter. Dann gilt $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ und die y_i haben Werte in $\{1, \dots, n + k - 1\}$. Es gibt also $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ Möglichkeiten. Mit $n = 8$ und $k = 4$ ist dies

$$N_1 = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330.$$

2. Es gibt $N_2 = 28!$ Möglichkeiten, die 28 Kugeln zu nummerieren.
3. Wenn wir nur die Kugeln 1, 2, 3, 4 betrachten, so gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge sie liegen. Nachdem die Nummern rot übermalt sind, können wir diese 24 Möglichkeiten nicht mehr auseinanderhalten. Dies geschieht in gleicher Weise für alle sieben Farben. Es ist also $N_3 = 24^7$.

Zusammenfassend ist die Anzahl der Möglichkeiten, die 28 farbigen Kugeln auf die acht Gestelle zu verteilen

$$\frac{N_1 N_2}{N_3} = \frac{330 \cdot 28!}{24^7} = 21\,936\,941\,151\,617\,992\,500\,000.$$

d) Die uns kürzeste bekannte Lösung mit 42 Zügen:

$1 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 8, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3,$

4 → 1, 4 → 1, 4 → 1, 4 → 1, 3 → 4, 5 → 4, 2 → 5, 2 → 4, 2 → 4, 2 → 3,
 5 → 2, 7 → 2, 7 → 2, 7 → 5, 6 → 7, 4 → 7, 1 → 7, 6 → 2, 6 → 4, 6 → 1,
 4 → 6, 4 → 6, 5 → 4, 1 → 4, 5 → 6, 5 → 1, 5 → 6, 8 → 5, 2 → 5, 8 → 2,
 8 → 5, 8 → 5.

Diese Zugfolge kann als Video auf unserer Internetseite unter folgendem Link angesehen werden:

<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/videos.php>

Aktuell (Stand Mai 2023) arbeitet Nick Johannes Peter Rassau an seiner Masterarbeit „Sorting colored balls into a colored tube rack“ in Informatik bei Prof. Dr. Ernst Althaus (der auch diesen Text verbessern geholfen hat) an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Er hat ein Computerprogramm entwickelt, mit dem er zeigen kann, dass es tatsächlich keine kürzere Zugfolge gibt. Ganz grob gesprochen funktioniert die Sache so: In jedem Schritt gibt es bis zu 28 Möglichkeiten, eine Kugel zu bewegen (vier Gestelle, in die eine Kugel rein passt, und sieben Gestelle, aus denen die Kugel kommen kann). Der Computer probiert zunächst einmal alle Möglichkeiten durch, bis er die Kugeln sortiert hat, und nimmt dann die kürzeste gefundene Zugfolge. Da es so enorm viele Möglichkeiten gibt (Größenordnung $28^{42} \approx 6 \cdot 10^{60}$), dauert das aber viel zu lange. Es müssen also möglichst früh Versuche abgebrochen werden. Zugfolgen werden abgebrochen, wenn eine Konfiguration schon auf andere Art erreicht wurde (zum Beispiel führt $1 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 8$ zur gleichen Konfiguration wie $3 \rightarrow 8, 1 \rightarrow 8$) oder wenn man zeigen kann, dass mit einer Zugfolge das Ziel nicht mehr in 42 Zügen erreicht werden kann. Um eine Schätzung zu erhalten, wie weit man noch vom Ziel entfernt ist, betrachtet Herr Rassau die Variante des Spieles mit einem beliebig großen grauen Gestell (G8). Dies ist ein etwas anderes Spiel, aber es ist klar, dass die kürzeste Zugfolge für dieses Spiel nicht länger ist als die kürzeste für das originale Spiel. Mit diesem sehr großen grauen Gestell kann der Computer aber sehr viel schneller rechnen und so unbrauchbare Versuche schnell genug abbrechen. Daneben wurden noch andere Tricks benutzt, um das Programm schneller zu machen.

- e) Ein einfacher Algorithmus funktioniert so: Sortiere zunächst die Kugeln in Gestell G1, dann G2, dann G3 und so weiter. Die unterste Kugel wird jeweils zuerst in die korrekte Position gebracht, dann die zweitunterste, die drittunterste und dann die oberste.

Jetzt zu den Details. Der Schritt „Bringe die korrekte Kugel in die unterste Position von Gestell k “ funktioniert so: Ist $k > 1$, so sind die Gestelle links davon schon sortiert und die benötigten Kugeln liegen nur in G_k und rechts davon. Alles, was schon sortiert ist, bleibt also sortiert. Suche nun also eine Kugel der passenden Farbe k und bringe sie nach ganz oben in ein Gestell rechts von k . Dafür werden die darüber liegenden Kugeln in beliebige Gestelle

mit freien Plätzen gelegt. Gibt es ein Gestell rechts von k mit drei Kugeln, so lege dort die Kugel der Farbe k hinein. Ansonsten fülle zunächst ein Gestell mit beliebigen Kugeln auf, bis es drei Kugeln enthält und lege dann die Kugel der Farbe k obenauf. Räume nun das Gestell k leer und lege die passende Kugel in das Gestell.

Für die weiteren Kugeln in Gestell k verfahren wir genauso, nur wird natürlich im vorletzten Schritt das Gestell nur bis auf die schon korrekten Kugeln freigeräumt.

Die *abc*-Vermutung

von Hartwig Fuchs

Für teilerfremde natürliche Zahlen $a > 1$ und $b \geq 1$ gelte

$$(1) \quad a + b = c.$$

Dann sei das Tripel (a, b, c) als ein *abc-Tripel* bezeichnet.

Die Zahl c hat wegen (1) eine additive Struktur und – falls sie nicht prim ist – als Produkt ihrer Primteiler auch eine multiplikative Struktur. Daher besteht eine Abhängigkeit der Zahl c von den Bausteinen ihrer beiden Strukturen.

Die Beziehung zwischen c und den verschiedenen Primteilern von a , b und c soll nun mit der von Joseph Osterlé und David Masser konzipierten Operation rad untersucht werden.*

Definition

Es sei (a, b, c) ein *abc-Tripel*. Dann ist $\text{rad}(c)$ das Produkt der verschiedenen Primteiler von a , b und c .

Beispiel 1: $\text{rad}(c)$

(a) Das Tripel $(100, 121, 221)$ ist ein *abc-Tripel* und $\text{rad}(221) = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

(b) Für das *abc-Tripel* $(2, 3^{10} \cdot 109, 23^5)$ ist $\text{rad}(23^5) = 2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23$.

Für das Tripel in Beispiel a ist $\text{rad}(221) > 221$ und für das Tripel in Beispiel b gilt $\text{rad}(23^5) < 23^5$. Das führt zu der Frage: Für welche *abc-Tripel* ist $\text{rad}(c) > c$? Welches sind die *abc-Tripel* mit $\text{rad}(c) < c$ (man nennt sie *abc-Treffer*)?

Beispiel 2: *abc-Treffer*

Unter den 3044 *abc-Tripeln* mit $c \leq 100$ gibt es sieben *abc-Treffer*, darunter $(1, 8, 9)$, $(5, 27, 32)$ und $(32, 49, 81)$; von den 15,2 Millionen *abc-Tripeln* mit $c \leq 10000$ sind 124 *abc-Treffer* und von den 380 Millionen *abc-Tripeln* mit $c \leq 50000$ sind nur 276 *abc-Treffer*.

* rad steht für Radikal.

Die in Beispiel 2 enthaltenen Informationen weisen auf vermutliche numerische Beziehungen zwischen der Komponente c eines abc -Tripels und $\text{rad}(c)$ hin. Mit Ausnahme der sehr seltenen** abc -Treffer gilt für jedes andere abc -Tripel

$$(2) \quad c < \text{rad}(c).$$

Frage: Um wie viel kann die Komponente c eines abc -Treffers größer als $\text{rad}(c)$ sein?

Beispiel 3: Hinweis auf eine mögliche Antwort

Für die abc -Treffer in Beispiel 2 mit $c \leq 100$ gilt:

Ist $c = 9$, so ist $\text{rad}(9) = 6$ und daher $9 < (\text{rad}(9))^2 = 36$;

Ist $c = 32$, so ist $\text{rad}(32) = 30$ und somit $32 < (\text{rad}(32))^2 = 900$;

Ist $c = 81$, so ist $\text{rad}(81) = 42$ und daher $81 < (\text{rad}(81))^2 = 1764$.

In allen drei Fällen ist $c < (\text{rad}(c))^2$.

Die schwache abc -Vermutung

(3) Für jedes abc -Tripel (a, b, c) gilt: $c < (\text{rad}(c))^2$.

Ist (a, b, c) kein abc -Treffer, dann trifft (3) zu, denn nach Definition gilt dann bereits $c < \text{rad}(c)$. Daher ist Ungleichung (3) eine Vermutung nur über abc -Treffer.

Der Exponent 2 in der Ungleichung (3) führt meist zu einer sehr großen Differenz von c und $(\text{rad}(c))^2$.

Beispiel 4: $(\text{rad}(c))^2$

Das Tripel $(2, 3^{10} \cdot 109, 23^5)$ ist ein abc -Treffer, für den (vergleiche mit Beispiel 1) $23^5 \approx 6,4 \cdot 10^6$ und $(\text{rad}(23^5))^2 \approx 2,26 \cdot 10^8$ gilt.

Dieses Beispiel legt die Frage nahe, ob sich der Exponent 2 in Ungleichung (3) verkleinern lässt. Bei vielen untersuchten abc -Treffern zeigt sich, dass das möglich ist.

Beispiel 5: $(\text{rad}(c))^{1+\varepsilon}$ mit $1 + \varepsilon < 2$

Für den abc -Treffer $(5, 27, 32)$ mit $\text{rad}(32) = 30$ gilt

$$32 < 30^2 \text{ sowie } 32 < 30^{1,5} \text{ und } 32 < 30^{1,05},$$

für den abc -Treffer $(32, 49, 81)$ mit $\text{rad}(81) = 42$ gilt

$$81 < 42^2 \text{ sowie } 81 < 42^{1,5} \text{ und } 81 < 42^{1,2}.$$

In allen konkret berechneten Fällen zeigt sich, dass man für jeden abc -Treffer (a, b, c) – für den also $\text{rad}(c) < c$ ist – stets ein $\varepsilon > 0$ finden kann, so, dass

** Es gibt jedoch unendlich viele abc -Treffer, wie Sander Dahmen 2006 bewies.

$c < (\text{rad}(c))^{1+\varepsilon}$ ist. Träfe das auf jeden abc -Treffer (a, b, c) zu, dann ließe sich die damit gegebene Beziehung zwischen c und den verschiedenen Primteilern von a, b und c auch so beschreiben:

(4) c ist nur unwesentlich größer als $\text{rad}(c)$.

Das ist der Kern einer von Joseph Osterlé und David Masser 1985 aufgestellten Vermutung, die heute so formuliert wird:

Die abc -Vermutung

Es sei (a, b, c) ein abc -Tripel, für das $c < \text{rad}(c)$ ist. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Konstante K_ε so, dass gilt:

(5) $c < K_\varepsilon \cdot (\text{rad}(c))^{1+\varepsilon}$.

Ist $c < (\text{rad}(c))^{1+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$, dann genügt es in Ungleichung (5) $K_\varepsilon = 1$ zu setzen, und wenn dann noch $\varepsilon = 1$ ist, so folgt: Die schwache abc -Vermutung ist ein Sonderfall der abc -Vermutung.

Ist dagegen $c < (\text{rad}(c))^{1+\varepsilon}$, dann verlangt Ungleichung (5), dass K_ε eine Zahl $> \frac{c}{(\text{rad}(c))^{1+\varepsilon}}$ ist.

Die Frage ist offen, ob die abc -Vermutung bewiesen ist. Zwar hat Shin'ichi Mochizuki 2012 einen „Beweisvorschlag“ gemacht, der aber seither kontrovers diskutiert wird. Denn sein Beweis ist nur schwer zugänglich; er ist etwa 600 Seiten lang und gründet sich auf mehr als 500 Seiten Vorarbeit Mochizukis; zudem ist er in einer so extrem verdichteten Darstellung geschrieben, dass manche seiner Herleitungsschritte anscheinend nicht nachvollziehbar sind. Sie könnten also auch falsch sein.***

Eine bewiesene abc -Vermutung wäre von großer Bedeutung für die Zahlentheorie, denn zahlreiche ihrer Probleme sind Aussagen über diophantische Gleichungen**** vom Typ $a + b = c$, die sich mit der abc -Vermutung beweisen ließen.

Einige als enorm schwierig geltende Beispiele hierzu:

- Pierre de Fermat hat um 1640 vermutet: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für $n \geq 3$ keine Lösung mit natürlichen Zahlen x, y und z . Der berühmte Beweis dieser Vermutung von Andrew Wiles nach mehr als 350 Jahren ist hoch komplex und lang. Ein Beweis mit der abc -Vermutung hat Platz auf einer Buchseite.
- Eugène Charles Catalan äußerte 1844 die Vermutung: Es gibt nur endlich viele Potenzen natürlicher Zahlen vom Abstand 1. Das ist eine Vermutung über die Gleichung $x^n + 1 = y^m$ mit natürlichen Zahlen x, y sowie $n, m \geq 1$. Erst 2002 konnte sie Preda Mihălescu mit großem Aufwand beweisen. Im

*** Jakob Stix und Fields-Medaillen-Träger Peter Scholze merkten 2018 an, eine fundamentale Lücke im Beweis ausgemacht zu haben.

**** Das sind algebraische Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen. Benannt sind sie nach Diophant von Alexandria (ca. um 150 v. Chr. bis 350 n. Chr.), von dem ein Buch über solche Gleichungen überliefert ist.

Vergleich dazu ist der Aufwand für einen Beweis mit der *abc*-Vermutung minimal.

- Die Vermutung von Arthur Wieferich (1909): Es gibt nur endlich viele Primzahlen p , so dass gilt: $2^{p-1} - 1$ ist ohne Rest durch p^2 teilbar – oder als Gleichung vom Typ (1): Die Gleichung $m \cdot p^2 + 1 = 2^{p+1}$ hat nur endlich viele Lösungen p , wobei p eine Primzahl ist – die einzig bekannten Lösungen sind 1093 und 3511. Bis heute konnte Wieferichs Vermutung nur mit der *abc*-Vermutung bewiesen werden.

Aus den Archiven der Mathematik

Der Satz von Thales und seine nächsten Verwandten

von Hartwig Fuchs

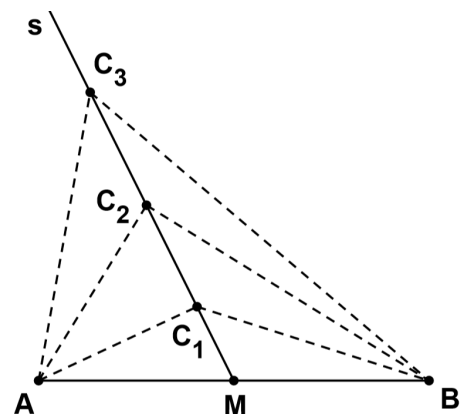
Bereits im 6. Jahrhundert v. Chr. am Beginn der Antike, gab es Griechen, die sich mit elementaren mathematischen Problemen beschäftigten. Sie erkannten, dass sich Beobachtungen, die sie an einfachsten geometrischen Objekten gemacht hatten, mit Argumenten – die man später als verbindliche logische Regeln allgemein akzeptierte – zu unumstößlich wahren Aussagen erhärten ließen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel, das man damals durchaus so diskutiert haben könnte: Wir nennen es das „Thales-Problem der Dreiecke mit gleicher Basis“.

Das Thales-Problem

Vom Mittelpunkt M einer Strecke AB zeichnet man einen Strahl s in beliebiger Richtung aber so, dass S weder A noch B enthält.

Auf s wähle man einen weit entfernten Punkt C_3 . Dann ist das Dreieck ABC_3 spitzwinklig. Bewegt man sich nun längs s auf M zu, dann trifft man irgendwann auf einen Punkt C_2 , für den das Dreieck ABC_2 rechtwinklig ist mit rechtem Winkel in C_2 . Geht man dann weiter zu einem Punkt C_1 , so ist das Dreieck ABC_1 stumpfwinklig.



Wie lassen sich diese drei anschaulich möglichen Fälle des Thales-Problems, die wir die Fälle C_3 , C_2 , C_1 nennen, als mathematische Sätze beweisen? Dieser Frage werden wir nachgehen.

Der Fall C_2

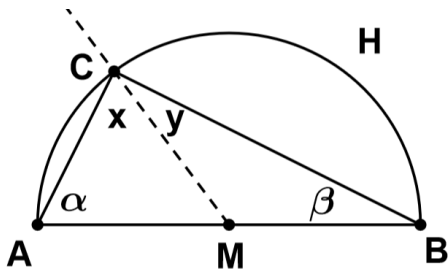
Thales (um 625-547 v. Chr.), ein sehr erfolgreicher griechischer Kaufmann aus Milet, gab irgendwann seine Geschäfte auf, um sich ganz seinen philosophischen, naturwissenschaftlichen und mathematischen Interessen zu widmen. Vermutlich war er es, der für den Fall C_2 des Dreiecksproblems eine logisch begründete Antwort fand. Thales gilt deshalb als einer der Ersten, der jemals einen exakten mathematischen Beweis geführt hat und er wurde damit zu einem der Mitbegründer der Mathematik, wie wir sie kennen. Sein Theorem heißt

Der Satz von Thales

- (1) Ein Dreieck ABC , dessen Seite AB ein Durchmesser eines Halbkreises H ist und dessen Eckpunkt C auf H liegt, hat einen rechten Winkel bei C .

Von Satz (1) gilt auch die Umkehrung.

Beweis von Satz (1)



Weil die Punkte A , B und C auf H liegen, gilt $|MA| = |MB| = |MC|$ und die Dreiecke $\triangle MCA$ sowie $\triangle MBC$ sind gleichschenkelig. Daraus folgt für die Winkel x und y (vgl. Figur): $x = \alpha$ und $y = \beta$. Also ist im Dreieck $\triangle ABC$:

$$\alpha + \beta + x + y = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Wegen $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist auch $x + y = 90^\circ$, was zu zeigen war.

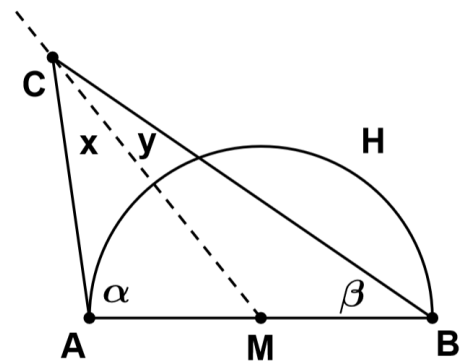
Der Fall C_3 : Ein Verwandter des Satzes von Thales

- (2) Ein Dreieck ABC , dessen Seite AB ein Durchmesser eines Halbkreises H ist und dessen Eckpunkt C im Außengebiet von H liegt, hat einen spitzen Winkel bei C .

Von Satz (2) gilt auch die Umkehrung.

Beweis von Satz (2)

Für einen Punkt C im Außengebiet von H gilt $|MA| < |MC|$ sowie $|MB| < |MC|$ woraus $x < \alpha$ und $y < \beta$ folgt (die Begründung ist im Nachtrag zu finden). Im $\triangle ABC$ ist daher $x + y < \alpha + \beta = 180^\circ - (x + y)$, so dass $2(x + y) < 180^\circ$ und mithin $x + y < 90^\circ$ gilt, was zu beweisen war.

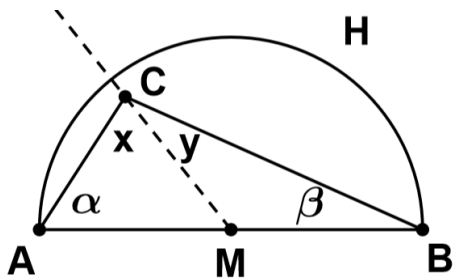


Der Fall C_1 : Ein weiterer Verwandter des Satzes von Thales

- (3) Ein Dreieck ABC , dessen Seite AB ein Durchmesser eines Halbkreises H ist und dessen Eckpunkt C im Innengebiet von H liegt, hat einen stumpfen Winkel bei C .

Hiervon gilt auch die Umkehrung.

Beweis von Satz (3)



Liegt der Punkt C im Innengebiet von H , dann ist $|MA| > |MC|$ und $|MB| > |MC|$ und daher $x > \alpha$ sowie $y > \beta$ (vgl. den Nachtrag). Im $\triangle ABC$ gilt daher

$$x + y > \alpha + \beta = 180^\circ - (x + y),$$

so dass $2(x + y) > 180^\circ$ und $x + y > 90^\circ$.

Mit den Sätzen (1), (2) und (3) ist das Thales-Problem der Dreiecke mit gleicher Basis gelöst. Wir wissen nicht, ob Thales für die Sätze (2) und (3) Beweise gehabt hat, sie hätten ihm aber sicher viel Freude gemacht.

Nachtrag

- (4) In jedem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.

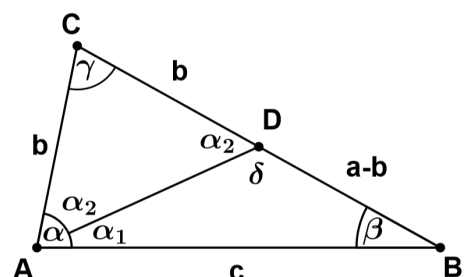
Das Vorbild für die nachfolgende Herleitung von (4) ist uralt und findet sich in dem berühmten Buch „Elemente“ des Euklid (lebte um 350 v. Chr.), das eine meisterhafte Darstellung der griechischen Geometrie ist.

Beweis von Satz (4)

Bei einem Dreieck ABC seien a , b und c die Seitenlängen sowie α , β und γ die Innenwinkel wie in der Figur angegeben. Es genügt zum Beispiel zu zeigen:

- (5) Es sei $a > b$. Dann ist $\alpha > \beta$.

Auf der Seite CB des Dreiecks $\triangle ABC$ sei D derjenige Punkt, für den $|CD| = b$ ist. Wegen $a > b$ liegt D zwischen C und B . Durch AD wird $\triangle ABC$ in das gleichschenklige Dreieck $\triangle ADC$ mit gleich großen Winkeln α_2 bei A und D sowie in das $\triangle ABD$ mit dem Winkel $\alpha_1 > 0^\circ$ bei A zerlegt. Aus $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_1 > 0^\circ$ folgt $\alpha > \alpha_2$.



Für den Winkel α_2 im Dreieck $\triangle ADC$ ist $\alpha_2 + \delta = 180^\circ$, ferner ist $\alpha_1 + \beta + \delta = 180^\circ$, woraus $\alpha_2 + \delta = \alpha_1 + \beta + \delta$ und daher $\alpha_2 > \beta$ folgt. Aus $\alpha > \alpha_2$ und $\alpha_2 > \beta$ folgt $\alpha > \beta$, was zu zeigen war.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 152

Bemerkung: Aufgrund eines Fehlers beim Setzen wurden in Heft 153 bereits bei fast allen Löserinnen und Lösern Punkte hinzugefügt, die erst in dieser Ausgabe veröffentlicht werden sollten. Aus diesem Grund sind die Punktzahlen in diesem Heft bei den meisten gleich geblieben.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Lünig):

Kl. 6: Robert Schmitt 13,5;

Kl. 7: Lisa Schäfer 18, Peter Knobloch 21;

Kl. 8: Mai Chi Tran 19,5, Rachel Tao 18;

Kl. 10: Oscar Su 33, Jan Christian Weber 22;

Kl. 12: Lukas Born 41.

Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:

Kl. 5: Silas Salloch 18;

Kl. 8: Mika Schäfer 16.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Haag):

Kl. 6: Nico Mathy 10, Philip Mühlbeyer 9,5.

Freising, Josef-Hofmiller Gymnasium:

Kl. 9: Philipos Dimitriou 66.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:

Kl. 12: Theresa Horstkötter 14.

Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:

Kl. 5: Imran Aouzi 5, Johannes Goller 15;

Kl. 9: Sarah Markhof 18.

Mainz, Maria-Ward-Schule:

Kl. 11: Amira Freund 9.

Mainz, Gymnasium Oberstadt:

Kl. 7: Philippa Lamke 19;

Kl. 12: Pascal Bohlinger 12.

Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:

Kl. 8: Victor Mayer 24.

Mainz, Willigis-Gymnasium:

Kl. 6: Ioan Salaru 42.

Nackenheim, Gymnasium (betreuende Lehrerin: Frau Geis):

Kl. 5: Philipp Mühl 12,5;

Kl. 7: Daniel Laibach Muñoz 42.

Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:

Kl. 11: Mike Wurster 12;

Kl. 13: Salvatore Ippolito 43.

Oberursel, Gymnasium:

Kl. 9: Dóra Emilia Mézáros 32;

Kl. 13: Josephine Kaßner 22.

Schrobenhausen, Gymnasium:

Kl. 9: Luca Sindel 11,5.

Tangermünde, Diesterweggymnasium:

Kl. 8: Mai Linh Dang 43;

Kl. 11: Tu Sam Dang 41.

Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:

Kl. 11: Philipp Lörcks 37.

Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:

Kl. 9: Marie Baumgartner 8.

Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:

Kl. 9: Greta Waldmüller 32,5.

Worms, Gauß-Gymnasium:

Kl. 5: Sultan Amer 15, Sid Ahmed Ould Sid Ahmed 29,5;

Kl. 7: Emma Schubert 19,5, Greta Schubert 13,5.

Schülerinnen, bei denen keine Schule angegeben wurde:

Kl. 5: Helena Röhrenbeck 7, Jana Röhrenbeck 8.

Erratum

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal kleine Fehler in MONOID ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch im Heft 153:

- **Eine unerwartete Quersumme (Errata, Seite 42; betrifft Heft 152, Seite 19)**

Innerhalb des Erratums ist ein Fehler aufgekommen. Das richtige Ergebnis der Aufgabe: Wie groß ist die Quersumme von $10^{226} - 3$? beträgt mit $Q(n)$ als Quersumme der natürlichen Zahl n

$$Q(10^{226} - 3) = Q(\underbrace{999 \cdots 9}_{225 \text{ Ziffern } 9}7) = 225 \cdot 9 + 7 = 2032$$

Vielen Dank an Herrn Friedel Fiedler, der uns auf diesen Fehler hingewiesen hat.

Mitteilungen

- **Nachruf:** Am 11. April 2023 verstarb unser langjähriges Redaktionsmitglied Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh.
Viele Leser werden sich gerne an seine Artikel und Aufgaben mit Schwerpunkten aus den Themenbereichen der Stochastik und Analysis erinnern.
Die MONOID-Redaktion trauert mit seinen Angehörigen.
- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Schuljahr 2023/24 auf das MONOID-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen, wenn Ihr ein Schuljahresabo habt. Bitte die Angabe des Abonnenten nicht vergessen (Abonummer und Name).
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** MONOID ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
www.facebook.com/monoid.matheblatt
www.facebook.com/monoid.redaktion
www.instagram.com/monoid.matheblatt
Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu MONOID finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
<https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/>.

Mainzer Mathe-Akademie 27. September bis 1. Oktober 2023

Bei der Mainzer Mathe-Akademie können an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler über mehrere Tage einen ersten Einblick in echte Uni-Mathematik erfahren. Es handelt sich um einen viertägigen Workshop (von Mittwochabend bis Sonntagmittag) für 30 Schülerinnen und Schüler. Dabei werden in drei Arbeitsgruppen mit je 10 Schülerinnen und Schülern, unter der Anleitung von Professorinnen und Professoren der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, verschiedene mathematische Themen erarbeitet. Am Sonntagmorgen präsentieren die Gruppen sich dann gegenseitig die von ihnen gefundenen Ergebnisse. Alle Schülerinnen und Schüler ab 15 Jahren sind herzlich eingeladen, sich zur Mainzer Mathematik-Akademie anzumelden, die vom 27. September bis 1. Oktober 2023 an der Universität Mainz stattfindet.

Ein genauerer Programmplan wird bei der Anmeldung bekannt gegeben oder

kann auf der Internetseite der MMA eingesehen werden.

Unterbringung

Jugendhaus Don Bosco Haus, Am Fort Gonsenheim 54, 55122 Mainz

Kosten

Es entstehen lediglich die Kosten für die Anfahrt sowie ein Pauschalpreis von 50 €. Die übrigen Kosten übernimmt der Verein der Freunde der Mathematik der Universität Mainz.

Anmeldung

Nähere Informationen und ein Online-Formular zur Anmeldung findet Ihr unter:
<https://freunde.mathematik.uni-mainz.de/mma/>

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

Mitglieder: Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Franziska Geis, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider

Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe

Zusammenstellung und Satz: Benjamin Landgraf

Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Judith Straub

Druck und Vertrieb der Hefte: Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.

Betreuung der Abonnements und Versand: Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)

Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

Inhalt

H. Fuchs: Wo liegt der Fehler	3
H. Fuchs: Monoidale Knobelei	4
S. Deichmann: Eine besondere Zahlenfolge	4
H. Fuchs: Lösung eines Problems ohne Worte	6
H. Fuchs: Leonardos Apfelaufgabe	7
H. Sewerin: Das Denkerchen	8
K. Ronellenfisch: Die besondere Aufgabe	10
M. Mattheis: Zu Besuch bei Emmy Noether	10
M. Mattheis: Mathematische Lese-Ecke	13
Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 153	14
Neue Mathespielereien	17
Neue Aufgaben	19
Gelöste Aufgaben aus MONOID 153	21
Die Aufgabe für den Computer-Fan	25
Mathematische Entdeckungen	30
H. Fuchs: Die <i>abc</i> -Vermutung	34
H. Fuchs: Der Satz von Thales und seine nächsten Verwandten	37
Rubrik der Löser und Löserinnen	40
Erratum	41
Mitteilungen	42
Einladung zur Mainzer Mathematik-Akademie 2023	42
Redaktion	43
Impressum	44

Abonnementbestellungen per Post oder über unsere Internetseite.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295

E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>

