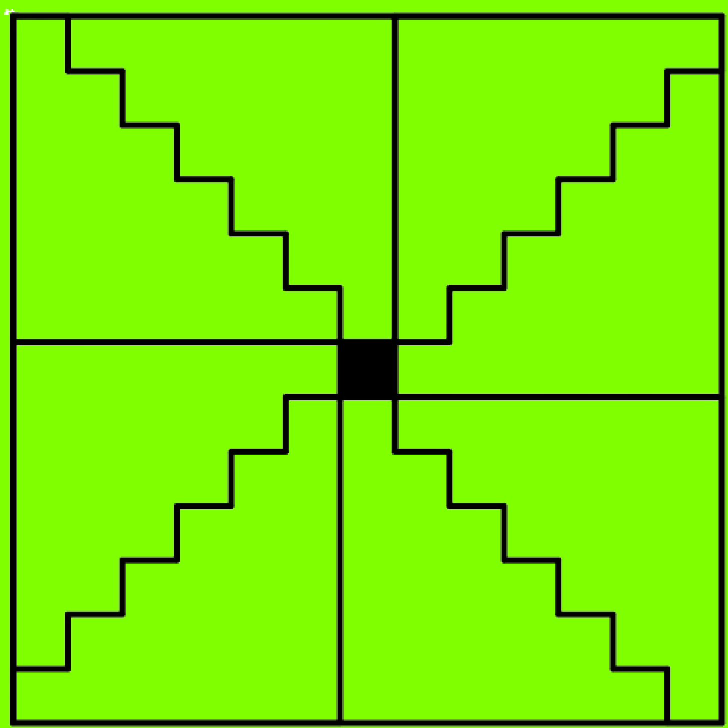
Jahrgang 43 Heft 153 März 2023

# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1981 erstmals veröffentlicht von
Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

# Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; denn auch dafür kann es schon Punkte geben, was die Chancen auf den Gewinn eines Preises verbessern kann. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

**Für Schüler/innen der Klassen 5–8** sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15. Mai 2023.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**Johannes Gutenberg-Universität**
**Institut für Mathematik**
**Monoid-Redaktion**
**55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Wir veröffentlichen im Heft und auf unserer Internetseite von allen Löserinnen und Lösern die Namen, Schule, Klassenstufe und Punktzahl. Wir gehen davon aus, dass Ihr damit einverstanden seid, wenn Ihr Lösungen einreicht. Solltet Ihr nicht einverstanden sein, dann notiert dies bitte deutlich auf Euren Einsendungen. Spätestens nach den Monoid-Feiern werden Eure Einsendungen vernichtet.

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Sebastian-Münster-Gymnasium Ingelheim** bei Frau Jasmin Haag, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, und am **Gymnasium Nackenheim** bei Frau Geis.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Jedes Jahr findet gegen Ende November bzw. Anfang Dezember eine Monoid-Feier statt, in deren Rahmen rund fünfzig Preise an die erfolgreichsten Schüler und Schülerinnen vergeben werden. Als besondere Preise gib es schon seit 1992 das „Goldene M“ und seit 2015 den „Monoid-Fuchs“, jeweils verbunden mit einem beachtlichen Geldbetrag.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit!

Die Redaktion

# Was uns über den Weg gelaufen ist

von Hartwig Fuchs

Marin Mersenne (1588-1648) war ein französischer Mönch und Gelehrter, der als wichtiger Informationsvermittler zwischen den Mathematikern und Physikern um die Mitte des 17. Jarhunderts fungierte. Man erinnert sich an ihn hauptsächlich wegen einer kühnen Behauptung, mit der er allerdings ziemlich falsch lag, nämlich:

Die Zahlen $2^n - 1$ sind Primzahlen*, wenn n eine Primzahl ist.

Aber mit einer anderen Aussage ** behielt er Recht: Die kleinste Zahl $n$ mit genau einer Millionen echter Teiler ist

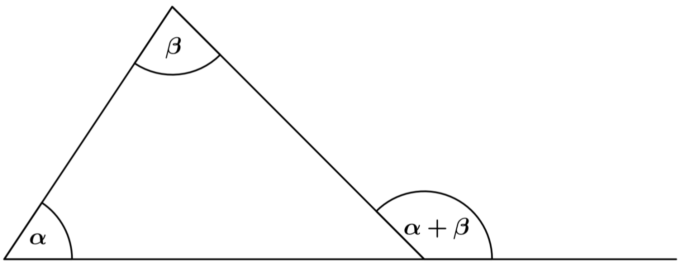
$$n = (1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376)^{99} \cdot (847\,288\,609\,443)^4.$$

Da die beiden Zahlen in den Klammern $2^{100}$ und $3^{25}$ sind, ist $n = 2^{9900} \cdot 3^{100}$ und daher hat $n$ genau

$$(9900 + 1) \cdot (100 + 1) - 1 = 1\,000\,000 \text{ echte Teiler.}$$

# Beweis ohne Worte

von Hartwig Fuchs




Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

# Vom Würfel zum Kuboktaeder

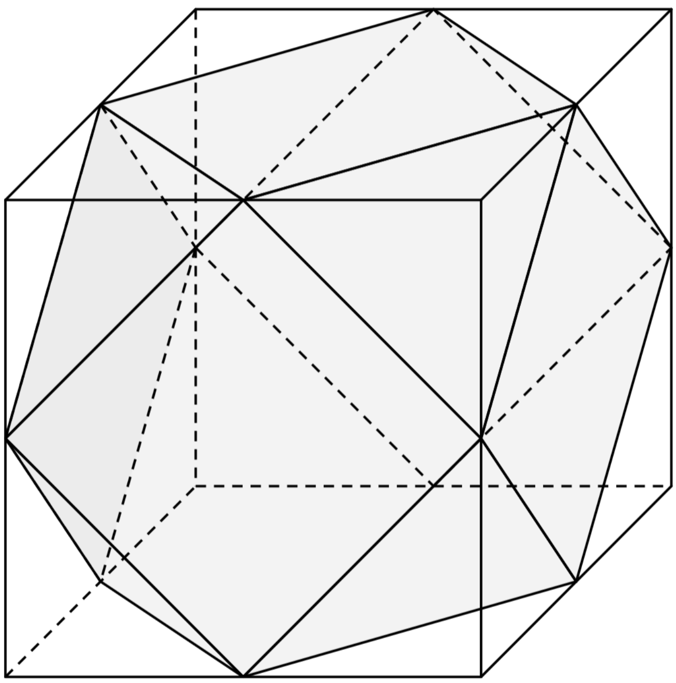
von Arthur Köpps

Schneidet man an den acht Ecken eines Würfels Dreieckspyramiden ab, wobei die Schnittflächen jeweils gleichseitige Dreiecke darstellen, so entsteht ein Kuboktaeder (siehe Abbildung).

---

* Zum Beispiel ist $2^n - 1$ für $n = 11, 23, 29, 37, 41, 43$ nicht prim.

** siehe sein Buch „Cogitata Physico-Mathematica" (Paris 1644)



**Volumenberechnung eines Kuboktaeders**

Die acht abgeschnittenen Tetraeden lassen sich zu einem Oktaeder zusammenfügen. Besitzt der Würfel die Kantenlänge $a$, so beträgt die Kantenlänge des Oktaeders nach Pythagoras $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ und somit ein Volumen von:

$$V_{Okt} = \frac{(\frac{a}{2}T_2)^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{6}.$$

Daraus folgt:

$$V_{Kubokt} = V_{W rfel} - V_{Okt}$$

und somit

$$V_{Kubokt} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3.$$

# Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

Es sei $|a|$ die aus den letzten drei Ziffern von $a = a_n \dots a_2 a_1 a_0$ gebildete Zahl. Ersetze nun die Buchstaben-Tripel MON und OID in den Gleichungen

$$|7^{9999}| = \text{MON} \quad \text{und} \quad |9^{9991}| = \text{OID}$$

durch 3-ziffrige Zahlen. Wie lautet dann die Zahl MONOID?

## Lösung

Es ist $|7^{20}| = |7^{10} \cdot 7^{10} = |249^2| = 001$ mit $001 = 1$. Daraus folgt: $|7^{n \cdot 20}| = 001$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ mit der Periode 20. Damit folgt:

$$|7^{9999}| = |7^{9980}| \cdot |7^{10}| \cdot |7^9| = 001 \cdot |249| \cdot |607| = 143 \Rightarrow \text{MON} = 143.$$

Es ist $|9^{10}| = 401 \Rightarrow |9^{20}| = |9^{10}| \cdot |9^{10}| = 801 \Rightarrow |9^{50}| = |9^{20}| \cdot |9^{20}| \cdot |9^{10}| = 001$. Daraus folgt: $|9^{n \cdot 50}| = 001$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ mit der Periode 50.

$$|9^{9991}| = |9^{9950}| \cdot |9^{20}| \cdot |9^{20}| \cdot 9 = |001 \cdot 801^2 \cdot 9| = 409 \Rightarrow \text{OID} = 409.$$

Somit gilt: MONOID= 143409.

# Wahr oder falsch?

von Hartwig Fuchs

Eine Rechenregel (?), die man in der Schule nicht lernt!
(1) Für reelle Zahlen $a, b, c, d$ mit $c \neq 0, d \neq 0$ und $c + d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a-b}{c+d} = \frac{a}{c} - \frac{b}{d}.$$

Beispiele (bitte selbst nachprüfen):

$$\frac{9-25}{6+10} = \frac{9}{5} - \frac{25}{10} \qquad \text{und} \qquad \frac{5-180}{2+12} = \frac{5}{2} - \frac{180}{12}$$

Eine Herleitung (?) der Rechenregel (1), ausgehend von der Annahme das die Rechenregel (1) zutrifft.
Aus (1) folgt wegen $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-cb}{cd}$, dass $(a-b)cd = (ad-cb)(c+d)$, woraus folgt:

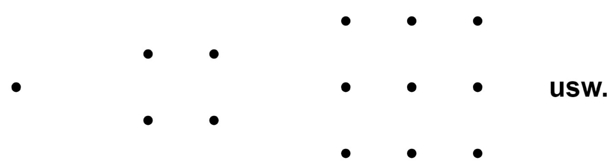
(2) $ad^2 = bc^2$.

Umgekehrt folgt aus der Gleichung (2), dass die Annahme wahr ist und somit die Rechenregel (1) gilt. Was aber ist, wenn $ad^2 \neq bc^2$ ist? Beispiel:
Für $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ ist die Gleichung (2) falsch. Zugleich ist $\frac{1-2}{3+4} = -\frac{1}{7}$, während $\frac{1}{3} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{6}$ ist und damit die Regel (1) falsch ist.
Da die Gleichung (1) also nicht für jedes Quadrupel $(a, b, c, d)$ gilt, ist sie auch keine zulässige Regel zur Umformung eines Quotienten wie in (1) in den gemäß Gleichung (1) zugehörigen anderen Quotienten.

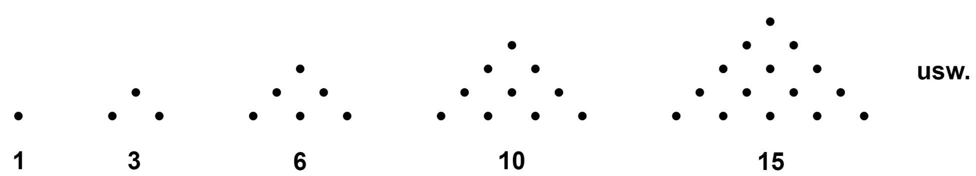
# Eigenschaften von Dreieckszahlen

von Georg Sahliger

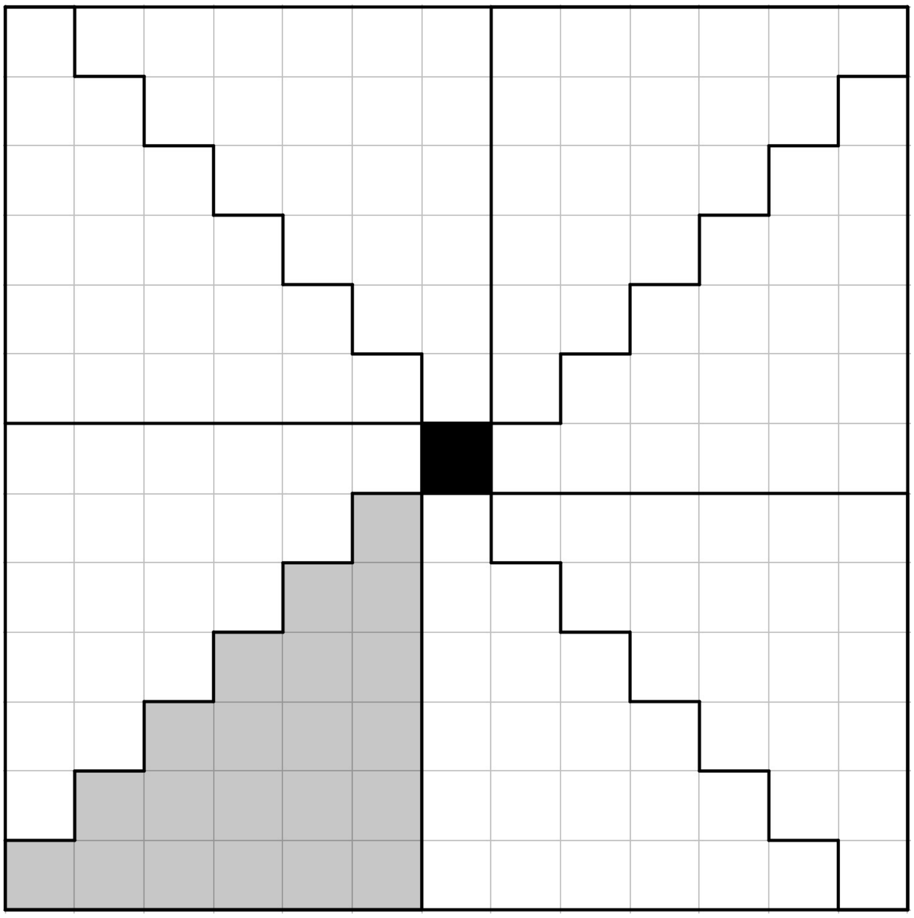
Was Quadratzahlen sind, ist unseren Lesern bestimmt bekannt: $1, 4, 9, \ldots$ Diese kann man folgendermaßen darstellen




Weniger bekannt sind wohl die Dreieckszahlen:



Auch die Dreieckszahlen bringen viele interessante Eigenschaften mit sich. Eine solche Eigenschaft möchte ich auf zweierlei Art beweisen. Der Satz, um den es geht, lautet: Das Achtfache jeder Dreieckszahl plus 1 ergibt eine Quadratzahl. Für die Dreieckszahlen 3, 10 und 21 gilt beispielsweise $8 \cdot 3 + 1 = 25 = 5^2$, $8 \cdot 10 + 1 = 81 = 9^2$ und $8 \cdot 21 + 1 = 169 = 13^2$. Da $8k + 1$ stets ungerade ist, ist auch die Quadratzahl stets ungerade. Der zu beweisende Satz lässt sich geometrisch mit folgender Zeichnung begründen:



Aber wie lässt sich der Satz: „Dreieckszahl mal 8 plus 1 ergibt eine Quadratzahl“ algebraisch beweisen? Hier leite ich zunächst Formeln für die Dreieckszahlen her. Die Formel für die Folge der Dreieckszahlen lautet $\Delta_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Dies ist gleich der Summe aller Zahlen von 1 bis $n$. Wir betrachten nun folgende Beispiele:

$$8 \cdot 1 + 1 = 3^2$$
$$8 \cdot 3 + 1 = 5^2$$
$$8 \cdot 6 + 1 = 7^2$$
$$8 \cdot 10 + 1 = 9^2.$$

Hiermit lautet der Satz, den ich beweisen möchte:

$$8 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$$

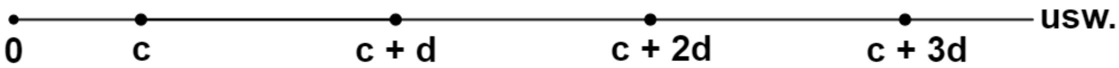
Dies lässt sich nachrechnen:

$$\begin{aligned}
8 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1 &= (2n+1)^2 \\
0 &= (2n+1)^2 - \left(8 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1\right) \\
0 &= 4n^2 + 4n - \frac{8n \cdot (n+1)}{2} \\
0 &= 4n^2 + 4n - 4n \cdot (n+1) \\
0 &= 4n^2 + 4n - (4n^2 + 4n) \\
0 &= 4n^2 + 4n - 4n^2 - 4n \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Auch den algebraischen Beweis finde ich elegant. Welcher gefällt Dir besser?

# Primzahlen in arithmetischen Folgen

von Hartwig Fuchs




Wenn man längs der Zahlengeraden, startend von einer ganzen Zahl $c \geq 0$ aus, mit der jeweils gleichen ganzzahligen Schrittlänge $d > 0$ von einer erreichten Zahl zur nächstgrößeren Zahl übergeht, dann bilden die so erhaltenen Zahlen eine nicht abbrechende Folge $c$, $c + d$, $c + 2d, \dots, c + nd$, ... die man eine *arithmetische Folge* nennt und die wir hie mit $F(c + nd)$ bezeichnen.

**Beispiel: Die Folgen $F(1 + 4n)$ und $F(3 + 4n)$**

Die Folge $F(1 + 4n)$ beginnt mit den Zahlen 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ..., die ersten Zahlen der Folge $F(3 + 4n)$ sind 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...

In den Anfangsstücken der Folgen des Beispiels sind einige Primzahlen enthalten. Sind dann auch in den vollständigen Folgen immer wieder Primzahlen anzutreffen oder ist irgendwann Schluss damit? Wir untersuchen diese Frage für die Folgen $F(3 + 4n)$ und $F(1 + 4n)$.

**Die Primzahlen–Frage bei $F(3 + 4n)$ und $F(1 + 4n)$**

Annahme: In der Folge $F(3 + 4n)$ gibt es nur endlich viele Primzahlen. Unter diesen Primzahlen gibt es dann eine größte – sie sei $g$. Nun sei $p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot g$ das Produkt aller Primzahlen $\leq g$ und es sei $r = 4p - 1$. Wegen $4p - 1 = 3 + (p - 1) \cdot 4$ gilt:

(1) $r$ ist ein Element der Folge $F(3 + 4n)$.

Aus der Annahme folgt wegen $r > g$, dass $r$ nicht prim ist und daher mindestens zwei Primteiler besitzt – und für diese gilt:

(2) Mindestens ein Primteiler $t$ von $r$ ist ein Element von $F(3+4n)$, also ist $t = 3 + 4k$ für ein $k \geq 0$.

**Nachweis**

Da jede natürliche Zahl $a$ genau eine der Darstellungen $a = 4k$, $1+4k$, $2+4k$, $3+4k$ besitzt und weil $4k$ sowie $2+4k$ nicht prim sind, gilt für die Primzahl $t$, dass $t = 1+4k$ für ein $k \geq 1$ oder $t = 3+4k$ für ein $k \geq 0$ ist. Nun kann nicht jeder Pimteiler $t_i$ von $r$ für $i = 1, 2, \dots, s$ eine Darstellung $t_i = 1 + 4k_i$ besitzen, sonst hätte ihr Produkt $r = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_5$ wegen $t_1 \cdot t_2 = 1 + 4(k_1 + k_2 + 4k_1k_2)$ und entsprechend $t_1t_2t_3$ usw. eine Darstellung $r = 1 + m \cdot 4$ mit einem $m > 1$. Dies steht im Widerspruch zu Behauptung (1).
Die Annahme ist falsch – es gilt also Aussage (2).

(3) Für einen Primteiler $t = 3 + 4k$ von $r$ gilt: $t > p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot g$.

Wäre nämlich $t \leq p$, so wäre $t$ eine der Primzahlen $\leq g$. Dann aber wäre $t$ ein Teiler von $4p$ und mithin kein Teiler von $r = 4p - 1$. Daher trifft Aussage (3) zu. Aus Aussage (3) folgt, dass $t > g$ ist – im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität von $g$. Somit gilt:

(4) In der Folge $F(3+4n)$ gibt es keine größte Primzahl; anders ausgedrückt: Es gibt unendlich viele Primzahlen in $F(3+4n)$.

Merkwürdigerweise ist ein Beweis der zu (4) analogen Aussage für die Folge $F(1+4n)$ um Einiges schwieriger, setzt er doch nicht elementare Kenntnisse aus der Theorie der quadratischen Reste voraus – weshalb wir uns darauf hier nicht einlassen.

## Ein Anzahlen–Vergleich zwischen $F(3+4n)$ und $F(1+4n)$

Wenn man für $n \geq 20$ die Primzahlen unter den Zahlen $1+4n$ und $3+4n$ auflistet, so erhält man die Tabelle

| **n** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1+4n | | 5 | | 13 | 17 | | | 29 | | 37 | 41 |
| 3+ 4n | 3 | 7 | 11 | | 19 | 23 | | 31 | | | 43 |

| **n** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1+4n | | | 53 | | 61 | | | 73 | | |
| 3+4n | 47 | | | 59 | | 67 | 71 | | 79 | 83 |

Bezeichnet man nun mit $A_1(n)$ bzw. $A_2(n)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq 1+4n$ bzw. $\leq 3+4n$ für ein gegebenes $n$, so gilt für für $n = 0, 1, 2, \dots, 20$, dass jeweils $A_3(n) > A_1(n)$ ist. Setzt man die Tabelle fort – zum Beispiel bis $n = 5000$, so findet man, dass auch für jedes $n$, mit $20 < n \leq 5000$, die Ungleichung

$A_3(n) > A_1(n)$ zutrifft. Die Vermutung jedoch, dass $A_3(n) > A_1(n)$ für jedes $n$, mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, ist falsch.
Denn für $n = 6715$ ist $1 + 6715 \cdot 4 = 26861$ eine Primzahl, für die – erstmals – $A_1(n) > A_3(n)$ ist, weil $A_1(6715) + 1 = A_3(6715)$ gilt.
Man könnte sogar beweisen, dass ein Wechsel von $A_3(\ldots) > A_1(\ldots)$ zu $A_1(\ldots) > A_3(\ldots)$ unendlich oft stattfindet – ein Sachverhalt, den man umgangssprachlich auch so umschreiben kann: In $F(1 + 4n)$ gibt es „gleich viele" Primzahlen wie in $F(3 + 4n)$.

**Die Primzahlen–Frage bei arithmetischen Folgen $F(c + nd)$**

Der deutsche Mathematiker J. P. G. Lejeune-Dirichlet (1805–1859) hat das Anzahlen- Problem der Primzahlen in arithmetischen Folgen untersucht und 1837 als Ergebnis den später nach ihm benannten Satz bewiesen:

(5) Jede arithmetische Folge $F(c+nd)$ mit $c \geq 1$ und $d \geq 1$ besitzt unendlich viele Primzahlen, wenn $c$ und $d$ keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$ haben.

*Ergänzung: Haben $c$ und $d$ einen gemeinsamen Teiler $t \neq 1$ und ist $c$ nicht prim, dann sind alle Elemente von $F(c + nd)$ nicht prim, ist dagegen $c$ prim, dann gilt $t = c$ und alle Elemente von $F(c + nd)$ mit Ausnahme von $c$ sind nicht prim.*

# Die Aufgabe für den Computer-Fan

Am rechten Straßenrand sind hintereinander 30 Parkplätze markiert. Da es geschneit hat, sind die Markierungen nicht mehr zu sehen und die Autos werden einfach unabhängig von den Linien an irgendeiner Position geparkt. Wie viele Autos passen jetzt noch auf die 30 Plätze?
Um die Fragestellung präziser zu fassen, nehmen wir an, dass jedes Auto die gleiche Länge hat und die Parkmarkierungen exakt auf die Autos abgestimmt sind. Mit anderen Worten, wir können annehmen, dass die Autos Intervalle der Länge 1 sind und der gesamte Parkplatz das Intervall $[0, 30]$. Ein Auto, dessen Heck an Position $x \in [0, 29]$ steht, nimmt daher das Intervall $[x, x + 1)$ ein. Den rechten Punkt haben wir rausgenommen, um zu erlauben, dass 30 Autos überschneidungsfrei an den Positionen $0, 1, \ldots, 29$ stehen, wie es die Parkmarkierungen eigentlich vorsehen.

Wir nehmen aber nun an, dass der Parkplatz anfangs leer ist und das erste Auto einfach an einer zufälligen Position $X_1 \in [0, 29]$ hält. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X_1 \in [a, b]$ ist (für $0 \leq a < b \leq 29$) ist also $\frac{b-a}{29}$. Das zweite Auto sucht sich ebenfalls eine zufällige Position $X_2$ in genau gleicher Weise aus. Wenn das nicht passt, weil dort schon ein Auto steht (wenn also $|X_2 - X_1| < 1$ ist), fährt es einmal um den Block und macht einen neuen Versuch nach der gleichen Methode, so lange, bis es einen Parkplatz gefunden hat. Nun kommt das dritte

Auto und so weiter, bis kein weiteres Auto mehr auf den Parkplatz passt.

*Aufgabe*: Schreibe eine Computersimulation, um die zufällige Anzahl $Y$ von Autos zu simulieren, die so geparkt werden können. Wiederhole die Simulation 10 000 mal und bilde dem Mittelwert der $Y$ als Schätzwert für die erwartete Zahl an Autos $E(Y)$. Um die Effizienz (oder Ineffizienz, je nach dem, wie man es sieht) dieses Parkverfahrens zu ermitteln, ermittle den Anteil $\frac{E(Y)}{30}$, indem Du den Schätzwert von oben einsetzt.

*Einzusenden*: Das Programm, der Schätzwert für $E(Y)$ und der Anteil $\frac{E(Y)}{30}$.

*Hinweis*: Für eine Parkbucht der Länge 4 kann man ausrechnen, dass mit dem Zufallsverfahren im Mittel $7 - \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\ln(2) \approx 2{,}74247$ Autos geparkt werden können. Du kannst Dein Programm testen, indem Du die Simulation für diese Länge der Parkbucht durchführst und mit dem exakten Wert vergleichst.

# „Das Denkerchen“

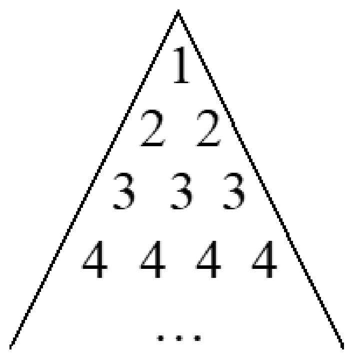
von Horst Sewerin

Zehn ganze Zahlen, die nicht unbedingt alle verschieden sein müssen, haben folgende Eigenschaft: Beim Weglassen jeweils einer der Zahlen ergeben die übrigen neun Zahlen die Summen $82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92$. (Ja, es gibt tatsächlich nur neun verschiedene Summenwerte!)
Wie lauten die zehn Zahlen? (Die Lösung ist zu begründen!)

*Hinweis:* Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2023 einschicken; denn auch hier gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen.

# Lösung der Aufgabe aus Heft 151

In Heft 151 stellten wir Euch folgende Aufgabe:
Als es wieder einmal sehr unruhig in der Mathematikstunde wurde, ließ der Lehrer die Schüler die abgebildete Zahlenpyramide ins Heft schreiben und nach unten fortsetzen. Damit nicht genug, musste die Klasse anschließend nacheinander die Summe aller Zahlen in der Pyramide ausrechnen, und zwar für immer größere Pyramiden mit jeweils einer Reihe mehr.



Mona stieß ihre Nachbarin Sina an: „Hast du auch die Summen 1, 5, 14 und 30 für die ersten vier Reihen ausgerechnet?“ – „Ja, und ich bin schon bis zur 9. Reihe fertig“, entgegnete Sina. „Aber nun habe ich etwas Merkwürdiges entdeckt. Bis jetzt kommt nämlich nach der 1 keine Quadratzahl und nach der 5 keine Primzahl mehr unter den Summen vor.“

1. Wie heißt die von Sina als nächstes auszurechnende Summe bis zur 10. Reihe?
2. Kommen tatsächlich nach der 1 und der 5 keine Quadratzahlen oder Primzahlen mehr unter den Summen vor? (Die Antworten sind zu begründen.)

**Lösung**

Offensichtlich enthält die Pyramide genau die Zahlen $1 \cdot 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 3, 4 \cdot 4, \ldots$ In Formelsammlungen (gedruckt oder im Internet) findet man folgende Summenformel für die ersten n Quadratzahlen: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$. Durch Einsetzen von $n = 10$ ergibt sich $\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$ als Summe der Zahlen bis zur 10. Reihe einschließlich.

Zur Beantwortung der 2. Frage nehmen wir an, dass es ein $n > 0$ gibt, für das $\frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ gleich einer Primzahl $p$ ist. Dann folgt $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) = 2 \cdot 3 \cdot p$.

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen drei Primzahlen, und es stehen drei Faktoren auf der linken Seite. Wenn $n > 1$ ist, muss jeder Faktor einer der Primzahlen entsprechen. $p = 2$ oder $p = 3$ ist unmöglich, denn wegen $n < n+1 < 2n+1$ ist $2 < 3 < p$. Also folgt $n = 2, n+1 = 3$ und $2n+1 = p = 5$. Wenn $n = 1$ ist, müsste $1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot p$ sein, ein Widerspruch! Also kommt nach der 5 keine weitere Primzahl unter den Summen vor.

Zur Klärung der möglichen Quadratzahleigenschaft betrachten wir $n = 24$. Hier beträgt der Summenwert $4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900 = 70^2$. Dieses Beispiel zeigt, dass nach der 1 weitere Quadratzahlen vorkommen können.

Teilweise richtige Lösungen wurden von Salvatore Ippolito und Oscar Su eingesandt.

Ein andermal hat der Mathelehrer die Zahlenpyramide mit einer Null in der ersten Zeile und zwei Einsen in der zweiten Zeile beginnen lassen. Gibt es hier auch interessante Teilbarkeitseigenschaften? Aber das ist fast schon wieder eine neue Aufgabe.

# Mathematische Entdeckungen

## Läuferecke 3

In den letzten Monoid Heften habe ich euch das Läuferecke Problem vorgestellt. Dabei geht ein Läufer in einem $n \times m$-Feld auf den schwarzen Feldern beginnend in der Ecke 0 bis er in einer Ecke landet. Siehe Abbildung 1 für $n = 7$ und $m = 5$.

Man kann das Problem aber auch eine Dimension höher betrachten: Wir können

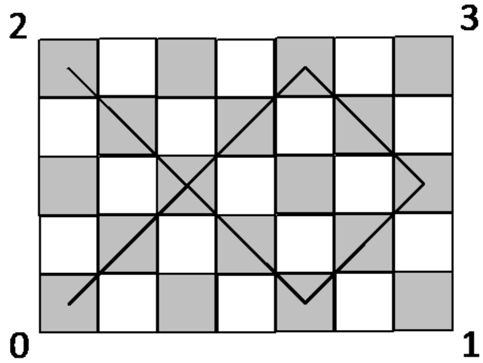



Abbildung 1: Die Läuferzüge im $7 \times 5$ - Feld

einen Quader mit Kantenlängen $n, m, k$ in $n \cdot m \cdot k$ kleine Würfel mit Kantenlänge 1 unterteilen. Jeder kleine Würfel ist damit durch 3 ganzzahlige Koordinaten beschrieben. Wir starten links unten in der Ecke 0 mit den Koordinaten $(1, 1, 1)$ und lassen einen Läufer in den Würfel $(2, 2, 2)$ laufen. Dann nach $(3, 3, 3)$ usw. immer entlang der Würfeldiagonalen, bis wir an eine Wand laufen, ab da wird von einer Koordinate immer 1 subtrahiert statt addiert. Das führen wir analog zum 2-dimensionalen Fall fort, bis wir in einer Ecke landen.
Ein Quader hat 8 Ecken. Über der Ecke $i$, die wir aus dem 2-dimensionalen Fall kennen (siehe Abbildung 1), liegt die Ecke $i+4$. Das gibt uns die Eckennummern im Quader.
Im 2-dimensionalen hatten wir eine schwarz-weiß Färbung und die schwarzen Felder waren im Prinzip begehbar vom Läufer. Was passiert in Dimension 3? Welche Würfel sind für den Läufer im Prinzip begehbar?
Wie oft kann ein Läufer maximal

1. einen inneren Würfel,
2. einen Würfel, der an einer Wand anliegt,
3. einen Würfel an einer Kante

durchqueren bei seinem Lauf?
Wir haben analog zu $\lambda_2$ eine Funktion $\lambda_3 \colon \mathbb{N}^3 \to \{0, \dots, 7\}$ die die Eckennummer des Würfels angibt, in dem wir landen.
Begründe: Der Läufer landet nie in der Ecke 0, d.h.: $\lambda_3(n, m, k) \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen $n, m, k$.

*Hinweis:* Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. Mai 2023 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Aufgabe aus Heft 151

Im Heft 151 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

**Läuferecke 2**

Im Monoid-Heft 149 habe ich Euch das Läuferecke-Problem vorgestellt. Dabei geht ein Läufer in einem $n \times m$-Feld auf den schwarzen Feldern beginnend in der Ecke 0, bis er wieder in einer Ecke landet, siehe Abbildung 1 für $n = 7$ und $m = 5$.

Bei dem Problem gibt es aber noch mehr zu entdecken. Sei $\nu_2(n, m)$ die Anzahl der Schritte von der Startecke bis zur Zielecke. Aus Abbildung 1 sehen wir $\nu_2(7, 5) = 12$.

a) Finde eine Formel zur Berechnung von $\nu_2(n, m)$. Stelle Dir dazu vor, dass man von den Kästchen am Rand des Schachbretts jeweils die Hälfte abschneidet. Man erhält ein Rechteck der Größe $(n-1) \times (m-1)$, in dem sich der Läufer wie eine Billard-Kugel bewegt. Wenn man diese Rechtecke unendlich oft passend aneinander legt und die Kugel an einer Randkante einfach geradeaus weiterlaufen lässt, so bewegt sich die Kugel in der Ebene entlang der Winkelhalbierenden. Wann kommt sie dann wieder in eine Ecke?

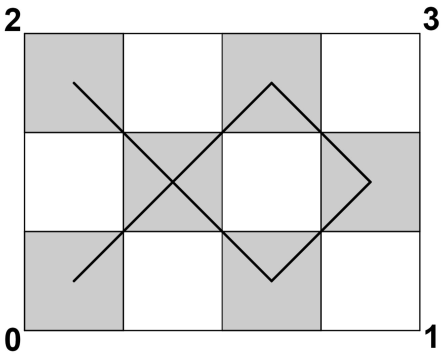



Abbildung 2: Die Läuferzüge im $4 \times 3$- Feld

b) Wir können den Läufer auch in einem beliebigen anderen schwarzen Feld starten lassen. Landet er nicht in einer Ecke, so landet er wieder in seinem Startfeld. Benutze die Methode aus Aufgabe 1, um die Anzahl Schritte zu bestimmen, die er dann zurückgelegt hat.
In Abbildung 2 läuft der Läufer „genauso“ wie in Abbildung 1.

c) Wann könnt Ihr Felder verkleinern und der Läufer läuft genauso? Wie verhalten sich die Funktionen $\lambda_2$ und $\nu_2$ unter dieser Verkleinerung?

(Stephan Rosebrock, Pädagogische Hochschule Karlsruhe)

**Lösung**

a) Es gilt: $\nu_2(n, m) = \text{kgV}(n-1, m-1)$. Beide Einsendungen fanden hier die Lösung. Zerlegt man die Ebene in lauter Rechtecke der Größe $(n-1) \times (m-1)$

mit einer Ecke im Ursprung von der man auch den Läufer starten lässt, so kann man den Läufer auf der Winkelhalbierenden $y = x$ laufen lassen bis er in eine Ecke kommt (siehe Abbildung 3). Die Schrittzahl ändert sich dadurch nicht.

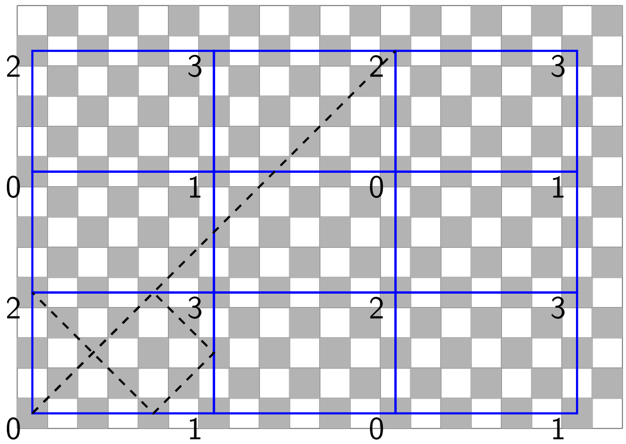



Abbildung 3: Die Läuferzüge im $7 \times 5$-Feld ersetzt durch eine Strecke

Die Frage ist dann, wann kommt er das erste Mal wieder auf eine Ecke der Zerlegung? Das ist dann der Fall, wenn $y \cdot (n-1) = x \cdot (m-1)$ gilt, für das kleinste Paar $x, y$ in N, also wenn $\text{kgV}(n-1, m-1) = y \cdot (n-1) = x \cdot (m-1)$. Salvatore Ippolito (Albert-Schäffle-Schule, 13. Klasse) schreibt „Dies ist dadurch zu erklären, dass man die aneinandergereihten Kopien der Rechtecke als Spiegelungen sehen kann. Es gilt, dass die vertikal zurückgelegte Strecke gleich der horizontal zurückgelegten Strecke ist, da wir wollen, dass er in eine Ecke landet, müssen die beiden genannten Strecken ein Vielfaches von $n-1$ und $m-1$ sein."

b) Oscar Su (Elisabeth-Langgässer-Gymnasium, 10. Klasse) schreibt: „Sollte der Weg nicht in einer Ecke landen, so ist seine Länge $2 \cdot \text{kgV}(n-1, m-1)$, da man im Quadrat nach drei Abprallungen zurück am Ausgangspunkt ist und dabei Länge und Breite jeweils 2 Mal entlanggegangen ist."
Alternativ überlegt man sich: Verschiebt man in Abbildung 3 das Koordinatensystem so, dass ein Feld, welches beim Lauf entlang einer inneren Komponente begangen wird, die Koordinaten $(1, 1)$ bekommt, so kann man auch in diesem neuen Koordinatensystem entlang der Winkelhalbierenden laufen (die gepunktete Linie in Abbildung 4). Man muss solange laufen, bis man in einem Rechteck wieder an derselben Stelle landet. Diese Schrittzahl ist aber für jedes Feld gleich. Also auch für die linke untere Ecke.
Wie viele Schritte braucht man also von der linken unteren Ecke im ursprünglichen Koordinatensystem bis man wieder in einem Rechteck an der linken unteren Ecke ist? Genauso viele, wie man braucht, um von der linken un-

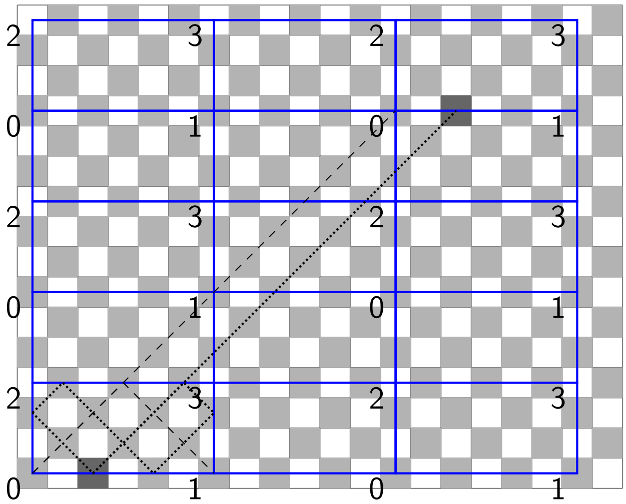



Abbildung 4: Das $7 \times 4$ - Feld. Die gepunktete Linie zeigt ein anderes Startfeld

teren Ecke zur Ecke $\lambda_2(n, m)$ und wieder zurück zur linken unteren Ecke zu gehen. Also ist eine innere Komponente genau doppelt so lang wie eine Eckenkomponente.

c) Auch hier sind beide Lösungen richtig. Oscar Su schreibt: „Es muss ein Skalar $s$ existieren, für das $(n_2 - 1) = s(n_1 - 1)$ und $(m_2 - 1) = s(m_1 - 1)$ gilt. $\lambda_2$ bleibt gleich und $\nu_2$ wird zu $s \cdot \nu_2$."
Ist etwa $n_2 > m_2$, so läuft der Läufer im $n_2 \times m_2$-Feld zuerst $m_2 - 1$ Schritte, bevor er an eine Wand stößt. Im $n_1 \times m_1$-Feld läuft er zuerst entsprechend $m_1 - 1$ Schritte, also $\frac{(m_2-1)}{s}$ viele. Analoges gilt für die weitere Reise des Läufers. Dabei wird die Anzahl der Schritte durch $s$ geteilt.

# Mathematische Lese-Ecke
## Lesetipps zur Mathematik
von Frank Rehm

**Edmund Weitz, Heike Stephan: Gesichter der Mathematik**

Diese neue Publikation von Prof. Edmund Weitz mit Illustrationen von Heike Stephan beinhaltet 111 originelle „Portraits und biographische Miniaturen", so der Untertitel des Buches. Wer Freude an Mathematik hat, hat von den meisten der hier präsentierten Mathematikerinnen und Mathematiker gehört. Aber er oder sie wird auf gerade einmal 2 Seiten pro Portrait auf jeden Fall etwas Neues entdecken. Denn Edmund Weitz ist es gelungen, nach zum Teil akribischer Suche in den Archiven und Bibliotheken kleine Geschichten über die Menschen hinter der Mathematik zusammen zu stellen. Eine halbe Seite pro Portrait ist dem Konterfei der Person gewidmet, gezeichnet von Heike Stephan, wobei so manche Darstellung erstmals überhaupt im Druck erscheint.

Es wird, gegliedert nach den Epochen Antike und Mittelalter, Neuzeit, Moderne und Gegenwart, eine Auswahl von Expertinnen und Experten getroffen, die nicht repräsentativ sein will, so Edmund Weitz im Vorwort. Die mathematischen Leistungen der einzelnen Personen werden bewusst nur angedeutet bzw. auf ein Minimum reduziert, auch dem geringen Platz pro Portrait geschuldet.
Wegen der enormen Popularität sind auch Nicht-Mathematiker aufgenommen worden, die dank ihres besonderen Engagements für die Mathematik einfach dazu gehören, wie Martin Gardner oder Pierre de Fermat.
An dieser Stelle einige wenige Namen, die im vorliegenden Buch auch Platz gefunden haben, um damit vielleicht euer Interesse zu wecken: Fibonacci, Pascal, Euler, Gauß, Fourier, Poisson, Frege, Klein, Wiener, Neumann, Gödel, Perelmann, Tao, Mirzakhami. Ihr könnt das Buch an jeder Stelle aufschlagen und werdet begeistert sein von diesen vielen Lebensdetails und Hintergründen der Portraitierten. Am Ende jeder Miniatur hat der Autor relevante Nummern eines gigantischen Literaturverzeichnisses von 334 Publikationen aufgeführt, die allein schon den Erwerb dieses Buches lohnenswert erscheinen lassen.

*Fazit:* Das Buch ist allen zu empfehlen, die an der Geschichte und den Personen der Mathematik interessiert sind. Anhand der Literaturhinweise kann man zusätzlich weitere Details zum Leben und Werk der gezeichneten Personen studieren.

Gesamtbeurteilung: sehr gut
*Angaben zum Buch:*
Edmund Weitz und Heike Stephan: Gesichter der Mathematik. 111 Portraits und biographische Miniaturen; Springer, 2022; ISBN 978-3-662-66348-6 (Taschenbuch)

# Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 152

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

## I. Weihnachtsgeschenke

Oma Kajas kauft Weihnachtsgeschenke für ihre Enkel. In ihrem Portemonnaie hat sie zehn Geldscheine und zwar nur 50-Euro-Scheine und 5-Euro-Scheine.
Im ersten Geschäft gibt sie für Geschenke die Hälfte ihres Geldes aus, im zweiten die Hälfte des Restes und im dritten Geschäft wieder die Hälfte des verbliebenen

Betrages. Bei keinem ihrer Einkäufe erhält sie Münzen als Wechselgeld. Wie viel Geld hat Oma Kajas ausgegeben? (WJB; MG, CHA)

*Lösung:*

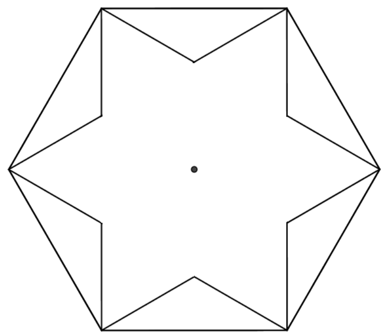
Am Ende hat Oma Kajas noch $\frac{1}{8}$ des ursprünglichen Betrages. Dieser Rest muss noch durch 5 teilbar sein, da keine Münzen gebraucht werden. Der ursprüngliche Betrag war also durch 40 teilbar. Wir prüfen die möglichen Situationen.

| 50-€-Scheine | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5-€-Scheine | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Betrag | 50 | 95 | 140 | 185 | 230 | 275 | 320 | 365 | 410 | 455 | 500 |

Die einzige Möglichkeit ist also, dass Oma Kajas anfangs sechs Scheine je 50 Euro und vier Scheine je 5 Euro hatte. Der Restbetrag ist dann $\frac{320}{8}$ Euro $=$ 40Euro. Sie hat daher 320 Euro $-$ 40 Euro $=$ 280 Euro ausgegeben.

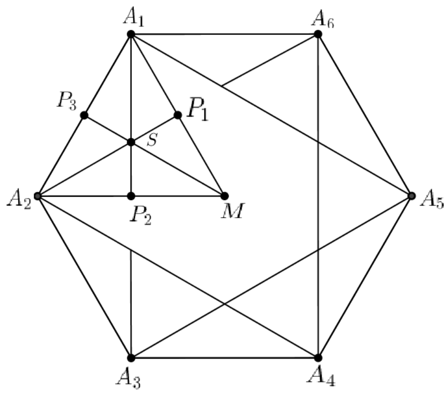
## II. Bastel-Abfall

Karin schneidet aus einem regelmäßigen Sechseck vom Flächeninhalt $F = 6\,\text{cm}^2$ sechs kongruente Dreiecke (vergleiche Figur) heraus und erhält so einen symmetrischen sechszackigen Stern. Die Seiten der ausgeschnittenen Dreiecke liegen dabei genau auf den Verbindungslinien zwischen Eckpunkten des Dreiecks und den jeweils übernächsten Eckpunkten im Sechseck.



Ist die Fläche des Sterns zweimal oder mehr oder weniger als zweimal so groß wie die Grundfläche der ausgeschnittenen Dreiecke? (H.F.)

*Lösung:*




Das regelmäßige Sechseck $A_1$, $A_2$, ..., $A_6$ und der Stern haben (neben anderen) die Symmetrieachsen $A_1A_4$ und $A_2A_5$.

Mit der $A_1A_4$-Symmetrie folgt für das gleichseitige Dreieck $\triangle = A_1A_2M$, dass $A_2A_6 \perp A_1A_4$ ist. Dann ist $A_2P_1$ eine Höhe und zugleich eine Symmetrieachse für das Dreieck $\triangle$. Ganz entsprechend ergibt sich aus der $A_2A_5$-Symmetrie: $A_1P_2$ ist eine Höhe und auch eine Symmetrieachse für das Dreieck $\triangle$.

Dann ist aber die Strecke $MP_3$ durch den Schnittpunkt $S$ von $A_1P_2$ und $A_2P_1$ ebenfalls eine Höhe und eine Symmetrieachse für das Dreieck $\triangle = A_1A_2M$.

$\Longrightarrow \triangle$ ist ein gleichseitiges Dreieck.

Durch die drei Symmetrieachsen $A_1P_2, A_2P_1$ und $MP_3$ wird das gleichseitige Dreieck $\triangle$ in sechs kongruente Teildreiecke zerlegt. Deshalb gilt $|A_1A_2S| = \frac{2}{6}|\triangle|$.

Wegen $F = 6$ und aus Symmetriegründen folgt $|\triangle| = \frac{1}{6}|A_1A_2...A_6| = \frac{1}{6}F = 1$, sodass $|A_1A_2S| = \frac{2}{6}$ ist.
Die Gesamtfläche der sechs ausgeschnittenen Dreiecke ist daher 2 und die Fläche des Sterns ist 4.
Deshalb ist die Fläche des Sterns genau doppelt so groß wie die der abgeschnittenen sechs Dreiecke.

## III. Ein Zahlendreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 4 & 5 & & \\ & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ & & & \dots\dots & & & \end{array}$$

a) Gib die siebte Zeile an.
b) Berechne die Summe der $n$-ten Zeile.

(Wolfgang J. Bühler, Diez)

*Lösung:*

a) 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55

b) Die $n$-te Zeile hat in der Mitte die Zahl $n^2$ und insgesamt $2n-1$ fortlaufende Zahlen. Die Summe ist also $(2n-1) \cdot n^2$.

## IV. Multiplikativ-magische Quadrate

| | | |
|---|---|---|
| 128 | 1 | 32 |
| 4 | 16 | 64 |
| 8 | 256 | 2 |

**Figur 1**

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

**Figur 2**

Ein Zahlenquadrat heißt *multiplikativ-magisch*, wenn die Produkte der Zahlen einer jeder seiner Zeilen, seiner Spalten und seiner Diagonalen einen gleichen Wert $m$ haben; $m$ heißt das *magische Produkt*.

a) Überprüfe selbst, dass das $3 \times 3$-Quadrat der Figur 1 multiplikativ-magisch und dass $m = 16^3$ ist.
b) Zeige: Wenn das $3 \times 3$-Quadrat multiplikativ-magisch ist, dann gilt für sein magisches Produkt $m = e^3$ (vgl. Figur 2).

(H.F.)

*Lösung:*

a) Nachrechnen der Produkte zeigt, dass das Zahlenquadrat multiplikativ-magisch ist.

b) Es ist $m = aei = beh = ceg \Longrightarrow a = \frac{m}{ei}, b = \frac{m}{eh}, c = \frac{m}{eg} \Longrightarrow m = abc = \frac{m^3}{e^3 \cdot ihg} = \frac{m^3}{e^3 \cdot m} \Longrightarrow m = \frac{m^2}{e^3} \Longrightarrow m = e^3$

## V. Einer zahlt nicht

Fünf Freunde $P, Q, R, S$ und $T$ verbringen einen Abend im Gasthaus. Als sie aufbrechen wollen, entsteht die Frage, wer von ihnen – wie bei ihnen üblich – die Rechnung von 68 Euro bezahlen soll.

$P$ sagt: „$Q$ hat heute mehr als 100 Euro in der Tasche – er könnte daher zahlen."
$R$ sagt: „$Q$ hat doch nie Geld im Beutel."
$S$ sagt: „Aber diesmal hat $Q$ mindestens 68 Euro dabei."
$T$ sagt: „$R$ lügt."
Von diesen fünf Aussagen ist nur eine wahr.
Kann $Q$ die Rechnung bezahlen oder nicht? (H.F.)

*Lösung:*

Es sei $G$ der Geldbetrag, den $Q$ in der Tasche hat.
Annahme: Die Aussage von $T$ ist falsch, die von $R$ daher wahr. Also ist $G = 0$. $Q$ kann die Rechnung nicht bezahlen.
Annahme: Die Aussage von $T$ ist wahr und daher die von R falsch. Daraus folgt: $0 < G$. Da $T$ wahr ist, ist $S$ falsch. Daraus folgt $G < 68$. Also ist $0 < G < 68$ und auch diesmal kann $Q$ die Rechnung nicht übernehmen.

## VI. Fahrradtour

Die Zwillingsschwestern Jorina und Ricarda wollen mit ihren Fahrrädern zu einer 40 km entfernten Jugendherberge fahren. Vor der geplanten Abfahrt um 8 Uhr stellen sie fest, dass ihr Cousin Torben ungefragt mit Ricardas Rad weggefahren ist. Zunächst wollen beide zu Fuß gehen, aber Jorina glaubt, eine bessere Idee zu haben: „Ich fahre eine Stunde lang und stelle das Fahrrad dann ab. Wenn Du die Stelle erreichst, nimmst Du das Rad und fährst eine Stunde lang, während ich zu Fuß gehe. So wechseln wir uns ab, bis wir am Ziel sind. Dieses erreichen wir dann schneller."

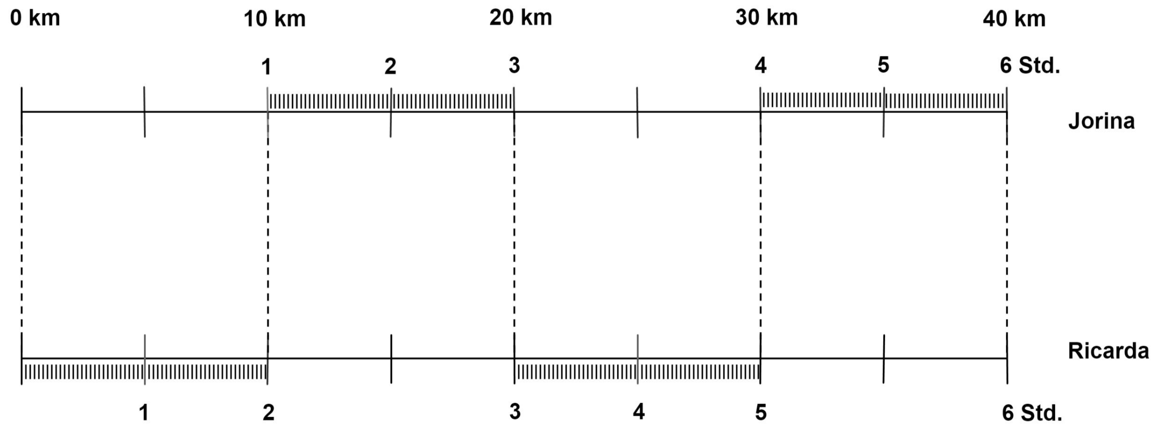
a) Stimmt Jorinas Behauptung?

b) Wann erreicht Jorina das Ziel und wann Ricarda, wenn sie zu Fuß 5 km und mit dem Fahrrad 10 km in der Stunde schaffen? (Wolfgang J. Bühler, Diez)

*Lösung:*

a) Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist für beide höher als die Geschwindigkeit zu Fuß. Beide erreichen also das Ziel früher.

b) In der folgenden Skizze sind die nach jeweils einer Stunde erreichten Positionen eingezeichnet. Die Strecken zu Fuß sind mit |||||||||| markiert.




Beide sind nach 6 Stunden am Ziel.

## VII. Drei Zahlenrätsel

Finde jeweils die zweiziffrigen Zahlen, für die gilt:

a) Die Zahl $a$ ist dreimal so groß wie die Summe ihrer Ziffern.

b) Die Zahl $b$ ist doppelt so groß wie das Produkt ihrer Ziffern.

c) Die Summe aus $c$ und der Spiegelzahl* von $c$ ist eine Quadratzahl.

Begründe Deine Lösungen. (H.F.)

*Lösung:*

Wenn $r$ und $s$ die Ziffern der jeweils gesuchten Zahl sind, dann ist die Zahl $10r + s$.

a) Wegen $a = 10r + s = 3(r + s)$ ist $r = \frac{2s}{7}$. Da $r$ ganzzahlig ist, muss $s$ durch 7 teilbar sein. Wegen $s < 10$ ist $s = 7$.
Also ist $a = 27$

b) Aus $b = 10r + s = 2 \cdot r \cdot s$ folgt $s = \frac{10r}{2r-1}$. Da $2r - 1$ für $r > 1$ kein Teiler von $r$ ist, muss $2r - 1$ Teiler von 10 sein.
Angenommen $2r - 1 = 1$, also $r = 1$, $s = 10$. Dies ist ein Widerspruch.
Angenommen $2r - 1 = 2$, also $2r = 3$. Dann ist $r$ nicht ganzzahlig.
Aus $2r - 1 = 5$ folgt $r = 3$ und somit $s = 6$. Daher ist $b = 36$.

c) Wegen $c = 10r + s$ ist $10s + r$ die Spiegelzahl von $c$.
Damit gilt: $10r + s + 10s + r = 11(r + s)$ und $11(r + s)$ ist nur dann eine Quadratzahl, wenn $r + s = 11$ ist. Daraus folgt $r \neq 1$. Für $r = 2, 3, 4, 5$ ist $s = 9, 8, 7, 6$ und $10r + s = 29, 38, 47, 56$. Dies sind die gesuchten Zahlen $c$, denn: $29 + 92 = 38 + 83 = 47 + 74 = 56 + 65 = 11^2$.

* 95 ist Spiegelzahl von 59 und so weiter.

# Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 9 dürfen die Aufgaben ebenfalls lösen, erhalten aber nur halbe Punktzahl. Ab Klassenstufe 10 gibt es keine Punkte mehr.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

### I. $\mathbf{a + b = a \cdot b = a : b}$

Gibt es reelle Zahlen $a$ und $b$, deren Summe und Produkt sowie Produkt und Quotient den gleichen Wert besitzen? (H.F.)

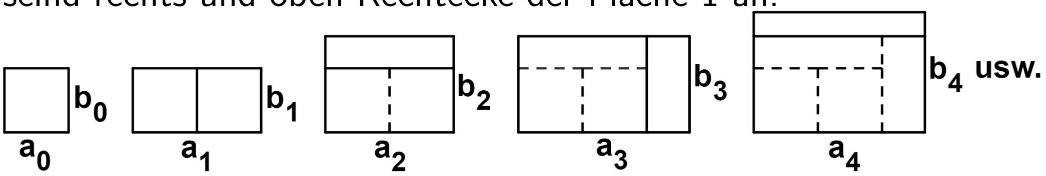
### II. Palindromfolge

Die Zahl $a_1 = 135797531$ ist ein Palindrom, d. h., wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt, ergibt sich die gleiche Zahl. Die Zahl $a_2$ sei die nächstgrößere Palindromzahl nach $a_1$, die Zahl $a_3$ die nächstgrößere Palindromzahl nach $a_2$ usw. Wie heißt die Zahl $a_{50}$?

(Klaus Ronellenfitsch)

### III. Sukzessive Rechtecke

Wir beginnen mit einem Quadrat mit Seitenlänge $a_0 = b_0 = 1$ und legen dann abwechselnd rechts und oben Rechtecke der Fläche 1 an:




Bestimme die Produkte $a_n b_n$ und $a_{n+1} b_{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ (WJB)

### IV. Kerzen-Recycling

Im Mittelalter waren Kerzen sehr teuer. Deshalb ließ ein sparsamer Pfarrer die Kerzen in seiner Kirche alle nur bis zu der gleichen Höhe niederbrennen. Aus jeweils 6 Kerzenresten schmolz er dann eine neue Kerze.
Wie viele neue Kerzen erhielt er mit dieser Recycling-Methode aus ursprünglich 111 Kerzen? (H.F.)

### V. Zifferntausch

Es sei $n$ eine positive ganze zweiziffrige Zahl und $u$ sei ihre Spiegelzahl*.
*Für welche Zahlen n* ist dann $n + u$ eine Quadratzahl? Begründe Deine Lösung.

(H.F.)

* Beispiel: Es sei $n = 37$. Dann ist $u = 73$ die Spiegelzahl von $n$.

### VI. Dreistellige Zahlen gesucht

a) Von einer dreistelligen Zahl weiß ich, dass sie durch 15 teilbar ist und dass ihre mittlere Ziffer gleich 6 ist. Reicht das um festzustellen, um welche Zahl es sich handelt?

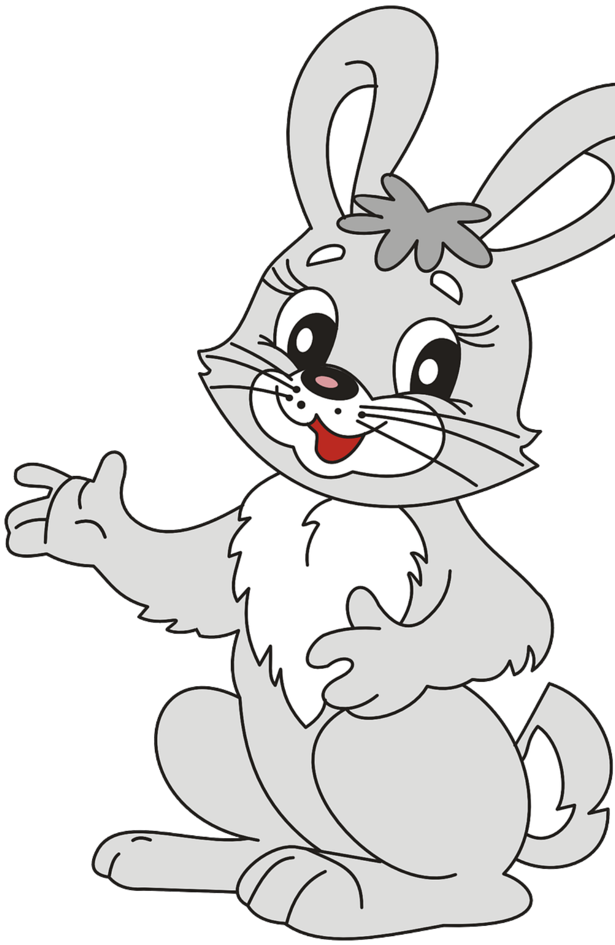
b) Ich weiß, dass eine dreistellige Zahl durch 8 teilbar ist und ihre beiden ersten Ziffern ungerade sind. Reicht diese Information aus, um die Zahl eindeutig festzulegen? Wenn nicht, wie viele solche Zahlen gibt es?

(WJB)

### VII. Primzahlteiler gesucht

Ermittle die kleinste Primzahl $p$, die beim Teilen durch $7, 11$ und $13$ jeweils den Rest 1 lässt.

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)



Die Monoid-Redaktion wünscht allen L(o)eserinnen und L(o)esern frohe Ostern.

# Neue Aufgaben
Klassen 9–13

- Bitte immer einen Lösungsweg/eine Begründung angeben.
- Auch jüngere Schülerinnen und Schüler dürfen teilnehmen und erhalten Punkte.
- Einsendeschluss: 15. Mai 2023.
- Weitere Informationen auf Seite 2.

## Aufgabe 1317: Abschätzung besonderer Terme

Zeige:

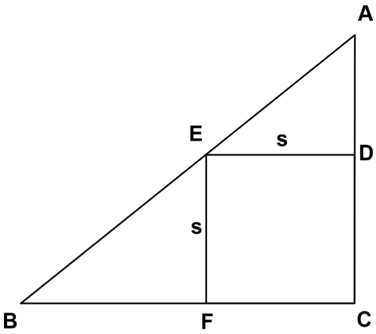
a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ für alle positiven reellen Zahlen $x, y$

b) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} \geq 8$ für alle positiven reellen Zahlen $a, b, c$

(WJB)

## Aufgabe 1318: Quadrat im Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck $ABC$ sei ein Quadrat $CDEF$ einbeschrieben wie in der Zeichnung.

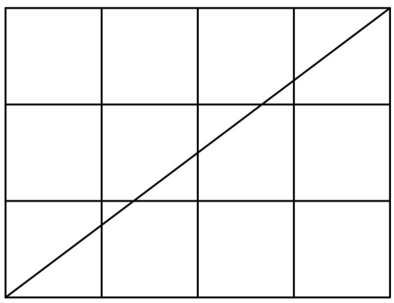


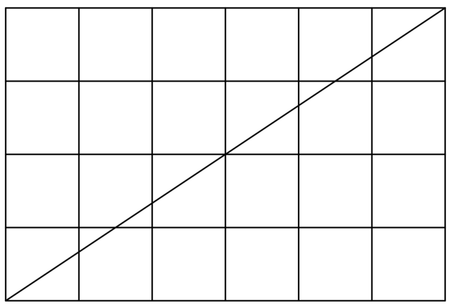

a) Berechne das Verhältnis der Fläche $F_Q$ des Quadrats zu der Fläche $F_D$ des Dreiecks in Abhängigkeit von $a$ und $b$.

b) Wie musst du das Dreieck wählen, damit das Verhältnis $\frac{F_Q}{F_D}$ möglichst groß / möglichst klein wird.

(WJB)

## Aufgabe 1319: Durchschnittene Quadrate

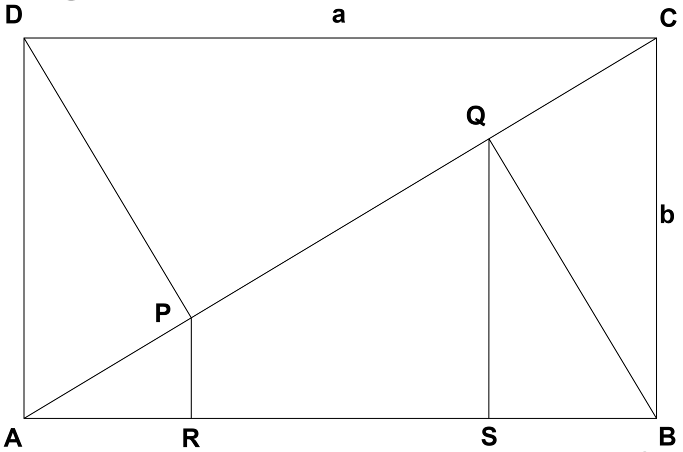




Ein Rechteck ist schachbrettartig in gleich große Quadrate unterteilt. Es sind 12345 Längsreihen und 67890 Querreihen. Wie viele Quadrate durchschneidet die Diagonale des Rechtecks?

(Klaus Ronellenfitsch)

### Aufgabe 1320: Flächeninhalt eines Rechtecks




Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit $|AB| = a, |BC| = b$ und $a > b$. Von den gegenüberliegenden Ecken $B$ und $D$ des Rechtecks werden die Lote auf die Diagonale $AC$ gefällt. Ihre Fußpunkte auf $AC$ heißen $P$ und $Q$. Die Lote von $P$ und $Q$ werden auf die Rechteckseite $AB$ gefällt. Ihre Fußpunkte auf $AB$ heißen $R$ und $S$. Berechne den Flächeninhalt $F$ des Vierecks mit den Eckpunkten $P, R, S$ und $Q$ in Abhängigkeit von $a$ und $b$. (Klaus Ronellenfisch)

### Aufgabe 1321: Vielfache von Fünf

Wie groß ist der Anteil der Vielfachen von 5 an den Zahlen der Menge $M = \{2^n + 1, 3^n + 1, \dots, 9^n + 1$ für $n = 1, 2, 3, \dots\}$? (H.F.)

### Aufgabe 1322: Quersumme eines Produktes

Gegeben sind die Zahlen $a = 2^{13} \cdot 5^{23}$ und $b = 2^{57} \cdot 5^{51}$. Welche Quersumme hat ihr Produkt $x = a \cdot b$? (Klaus Ronellenfitsch)

### Aufgabe 1323: Teilbarkeit durch 9

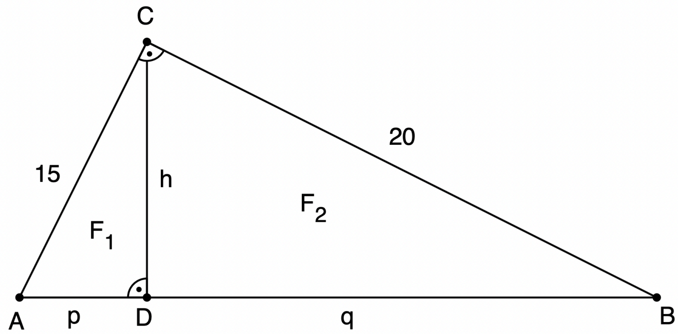
Zeige, dass $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ für jede natürliche Zahl $n$ durch 9 teilbar ist. (WJB)

# Gelöste Aufgaben aus Monoid 152

Klassen 9–13

### Aufgabe 1309: Flächen im rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit den Seitenlängen $a = 20$, $b = 15$ und $c = 25$. Ferner sei $D$ der Höhenfußpunkt der Höhe auf die Seite $c$. Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke $ADC$ und $DBC$. (H.F.)



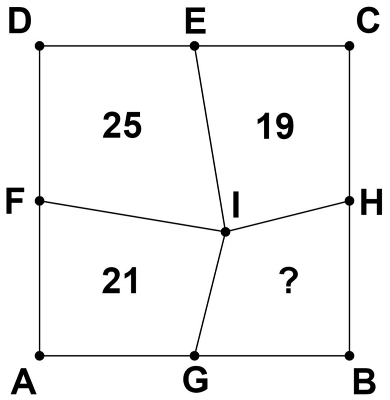

*Lösung:*

Es ist $F_1 = \frac{1}{2}ph$ und $F_2 = F - F_1$, $F = |ABC|$.

Der Flächeninhalt $F$ des Dreiecks $ABC$ ist dann $F = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$.

Es ist aber auch $F = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = 150$, sodass $h = 12$ ist.
Mit dem Satz von Pythagoras folgt damit $p^2 = 15^2 - 12^2 = 81$. Also ist $p = 9$ und daher sind $F_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ und $F_2 = 150 - 54 = 96$.

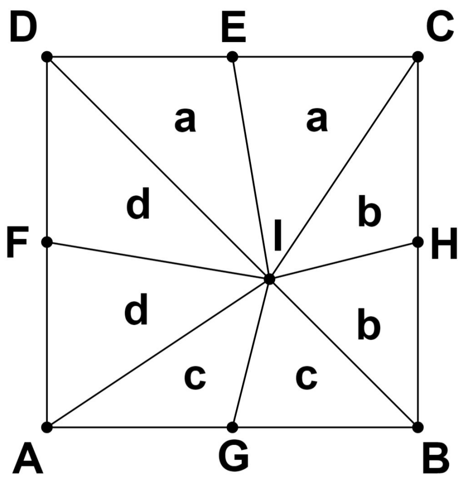
## Aufgabe 1310: Flächeninhalt einer Teilfläche




*ABCD* ist ein Quadrat. *E*, *F*, *G* und *H* sind die Seitenmitten (Bild nicht maßstäblich). Punkt *I* im Inneren des Quadrats bildet mit je zwei zueinander benachbarten Seitenmitten und dem dazwischen liegenden Eckpunkt vier Vierecke, von denen drei Flächeninhalte angegeben sind.
Wie groß ist der vierte Flächeninhalt?

(Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

*Lösung:*




Verbindet man *I* zusätzlich mit den Quadratecken, so entstehen acht Dreiecke, von denen je zwei den gleichen Flächeninhalt haben (gleiche Grundseite und gleiche Höhe). Sind $a$, $b$, $c$ und $d$ die Flächeninhalte, so gilt:

(1) $a + b = 19$,
(2) $a + d = 25$,
(3) $c + d = 21$.

Addiert man die drei Gleichungen, so erhält man $2a + b + c + 2d = 65$ und daher $b + c = 65 - 2(a + d) = 65 - 50 = 15$.
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also 15.

*Bemerkungen:* Das ganze Quadrat hat den Flächeninhalt 80 und die Quadratseite $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Wie man in dem zweiten Bild sieht, haben für jeden beliebigen Punkt *I* im Innern eines Quadrats zwei gegenüberliegende Vierecksflächen zusammen den gleichen Flächeninhalt wie die anderen beiden Vierecksflächen zusammen.

## Aufgabe 1311: Eine Froschgleichung

$$\sqrt{QUAK} = Q + UA + K,$$

wobei $K = Q + 5$, und $Q \neq 0$ ist.
Ersetze in der Gleichung gleiche (ungleiche) Buchstaben durch gleiche (ungleiche) Ziffern so, dass eine korrekte Zahlengleichung entsteht.
Die Aufgabe ist ohne Computer zu lösen. (H.F.)

*Lösung:*
Da $\sqrt{QUAK}$ eine ganze Zahl sein soll, muss $QUAK$ eine Quadratzahl sein. Die Einerziffer einer Quadratzahl ist 0, 1, 4, 5, 6 oder 9. Daher gilt $K \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. $K = 0$ ist hier ausgeschlossen, denn für $K = 0$ wäre $W = QU00$, also $A = K$, was aber ausgeschlossen ist.
Daraus folgt wegen $K = Q + 5$: Für $Q = 1$ ist $K = 6$; die Fälle $Q = 2$, 3 und $Q > 4$ sind ausgeschlossen; für $Q = 4$ ist $K = 9$.
Es sei $Q = 1$, $K = 6$. Dann gilt $1000 < QUAK < 2000$. Daraus folgt $32^2 < QUAK < 45^2$, also $QUAK \in \{34^2, 36^2, 44^2\}$. Jedoch erfüllt nur $36^2 = 1296$ die gegebene Gleichung.
Es sei $Q = 4$, $K = 9$: Dann ist $4000 < QUAK < 5000$. Daraus folgt $64^2 < QUAK < 69^2$. Deshalb gibt es keine zweiziffrige Zahl mit der Einerzifer 3, deren Quadrat die Einerziffer 9 besitzt.
Daraus folgt: $\sqrt{1296} = 1 + 29 + 6$ ist die einzige korrekte Gleichung.

Bemerkung: Ohne die Bedingung $K = Q + 5$ besitzt die gegebene Gleichung noch die zweite Lösung $\sqrt{6724} = 6 + 72 + 4$.

**Aufgabe 1312: Beim Bowling**
Tatjana und Martina besuchen einen Bowling-Club. Sie verabreden, dort nach ihrer eigenen Gewinn-Regel zu kegeln. Sie kegeln abwechselnd; gewonnen hat wer als Erste mit nur einem Wurf „Alle Zehn“ (kurz: AZ) wirft. Jede von ihnen erzielt AZ mit 50% Wahrscheinlichkeit (kurz $p = 50\%$).
Wenn Tatjana als Erste die Kugel wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit,

a) dass Tatjana mit ihrem $n$-ten Wurf, wobei $n \geq 1$, gewinnt?

b) dass Tatjana spätestens mit ihrem $n$-ten Wurf gewinnt?

(H.F.)

*Lösung:*
Das Ergebnis AZ bzw. kein AZ eines Wurf von Tatjana und von Martina sei mit $g$ bzw. $k$ bezeichnet.
Dann sind die für Tatjana erfolgreichen möglichen Spielverläufe in der Tabelle beschrieben.

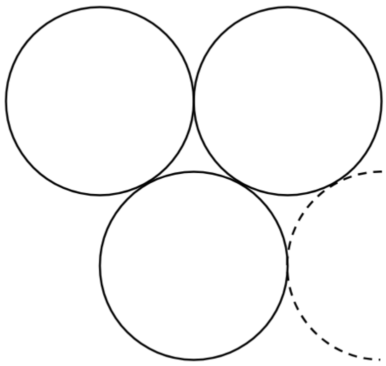
| Mögliche Gewinn-Serie | $T$ | $TMT$ | $TMTMT$ | ... |
|---|---|---|---|---|
| Wurfergebnisse einer Serie | $g$ | $kkg$ | $kkkkg$ | ... |
| Gewinn-$p$ einer Serie | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ | ... |

Begründung der letzten Tabellen-Zeile: Nach Voraussetzung ist $p(g) = p(k) = \frac{1}{2}$. Dann ist $p(k;k;g) = p(k) \cdot p(k) \cdot p(g) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$,
$p(kkkkg) = p(k) \cdot p(k) \cdot p(k) \cdot p(k) \cdot p(g) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ usw.
Aus der Tabelle ergibt sich

$p$(Tatjana gewinnt ihren $n-$ten Wurf) $= p(2n$ Mal wird $k$, einmal wird $g$ geworfen $= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$p$(Tatjana gewinnt spätestens nach ihrem $n-$ ten Wurf) $= p$(Tatjana gewinnt mit ihrem ersten oder dem zweiten oder ... oder $n-$ ten Wurf) $= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+ \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right) \approx \frac{2}{3}$.

## Aufgabe 1313: Eine Parkettierung der Ebene



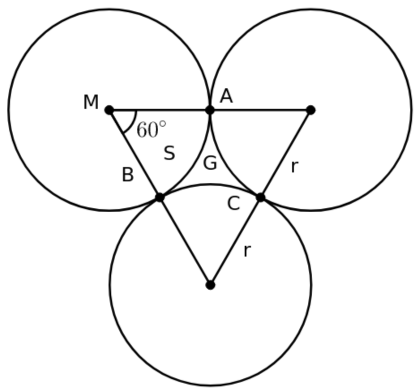
Die Ebene sei vollständig überdeckt mit Kreisen vom Radius $r$, von denen sich jeweils drei von außen berühren, sowie mit den von drei solcher Kreise begrenzten Gebieten.

Welcher Prozentsatz $p\%$ der Ebene wird nicht von den Kreisen überdeckt?

(H.F.)

*Lösung:*

Wenn man die Mittelpunkte von jeden drei sich berührenden Kreisen verbindet, so erhält man gleichseitige Dreiecke $D$ mit Seitenlänge $2r$ – und diese Dreiecke überdecken die Ebene vollständig. Daraus folgt: Der Anteil $a$ der Fläche des in einem Dreieck $D$ liegenden krummlinig begrenzten Gebiets $G$ an der Fläche von $D$ ist der Prozentsatz $p$ der Fläche der Ebene, die nicht von Kreisen überdeckt ist.




Fläche $f(D)$ eines Dreiecks $D$: Die Höhe $h$ von $D$ ist $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}$. $\Rightarrow f(D) = \frac{1}{2}r\sqrt{3}\cdot 2r = r^2\sqrt{3}$. Fläche $f(G)$ eines Gebiets $G$: $f(G) = f(D) - 3\cdot$(Fläche $f(S)$ des Kreissektors $S = AMB$) mit $f(S) = \frac{1}{6}\pi r^2$. Also ist $f(G) = r^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow a = (\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})r^2 = 0,093 \Rightarrow p = 9,3\%$ der Ebene sind nicht von Kreisen bedeckt.

## Aufgabe 1314: Zehnerziffer einer Zahl

Begründe, dass die Zehnerziffer jeder Potenz $3^n$, für $n \geq 3$, gerade ist. (H.F.)

*Lösung:*

Die Folge der Einerziffern von $3^n$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ bilden die Ziffern 7, 1, 3, 9, die sich periodisch wiederholen. Daher hat $3^n$ für jedes $n \geq 3$ die Form $3^n = k\cdot 10 + i$ mit $i = 7, 1, 3$ oder 9. Dann ist $3^{n+1} = 3k\cdot 10 + 3i$ mit $3i = 21, 3, 9$ oder 27. Nur für $3i = 21$ und $3i = 27$ findet ein Übertrag von 2 auf die Zehnerstelle von

$3^{n+1}$ statt.
Da die Zehnerziffer der „ersten Potenz" $3^3 = 27$ eine 2, also gerade ist, müssen folglich die Zehnerziffern aller Potenzen $3^n$, für $n \geq 3$, gerade sein.

## Aufgabe 1315: ? gesucht

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x^3 + y^3 &= 3 \\ x^5 + y^5 &= ? \end{aligned}$$

*Vorsicht:* Die „optisch schöne" Gleichung $x^5 + y^5 = 5$ ist falsch.
*Hinweis:* $1 = 1^3 = 1^5$. (Klaus Ronellenfitsch, Walldorf)

*Lösung:*
Wegen der ersten Gleichung $x + y = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x^3 + y^3) + 3xy(x+y) \\ &= 3 + 3xy \cdot 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $xy = -\frac{2}{3}$.
Ferner gilt

$$\begin{aligned} 1 &= (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ &= (x^5 + y^5) + 5xy\big((x^3 + y^3) + 2xy(x+y)\big) \\ &= (x^5 + y^5) + 5 \cdot \Big(-\frac{2}{3}\Big) \cdot \Big(3 + 2 \cdot \Big(-\frac{2}{3}\Big) \cdot 1\Big). \end{aligned}$$

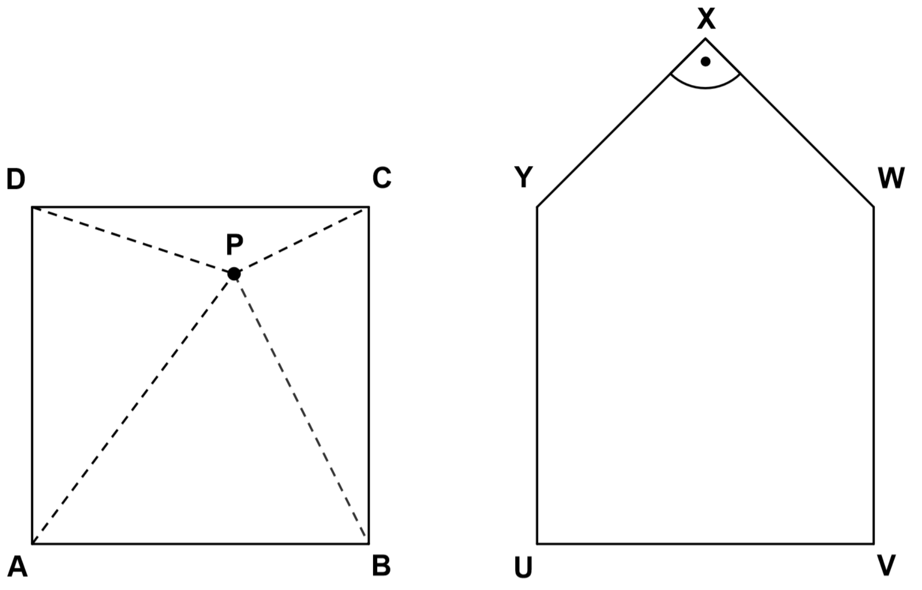
Daher gilt: $1 = (x^5 + y^5) - \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{3}$, woraus sich die Lösung $x^5 + y^5 = \frac{59}{9}$ ergibt.

## Aufgabe 1316: Quadrat und Haus vom Nikolaus

Ein Quadrat soll mit höchstens vier Schnitten in Dreiecke zerlegt werden, die zu einem Fünfeck („Haus vom Nikolaus", siehe Grafik) verschoben werden können.
Anleitung:

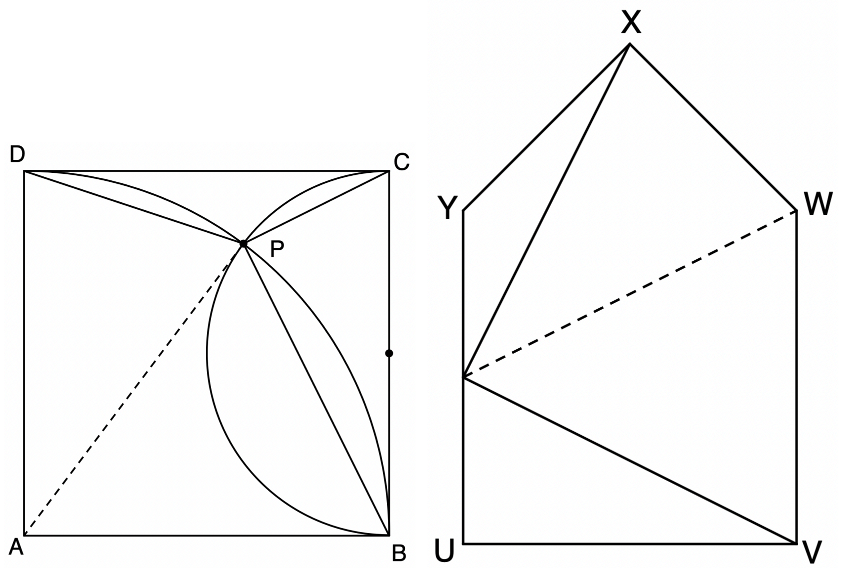
1. Zeichne ein Quadrat $ABCD$
2. Markiere einen geschickt gewählten Punkt $P$ im Quadrat. Das Problem besteht im Wesentlichen aus der geschickten Wahl.
3. Ziehe die Linien $PA$, $PB$, $PC$ und $PD$. Schneide entlang der Linien das Papier.
4. Die vier Dreiecke $ABP$, $BCP$, $CDP$ und $DAP$ werden jetzt so gedreht und geschoben, dass ein Fünfeck $UVWXY$ entsteht, das den Umriss des „Haus vom Nikolaus" bildet.

Wie muss man $P$ wählen und wie muss man die Dreicke schieben und drehen, damit das klappt?
*Hinweis: „Das Haus vom Nikolaus" ist das Fünfeck $UVWXY$ mit den Eigenschaften: $UVWY$ ist ein Quadrat, $WXY$ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei $X$.*




(AcK)

*Lösung:*




1. Zeichne einen Viertelkreis mit Mittelpunkt $A$ und einem Radius der Seitenlänge des Quadrats.
2. Zeichne den Thales-Kreis über $\overline{BC}$: Ziehe den Halbkreis um den Mittelpunkt von $B$ und $C$ mit Radius halbe Seitenlänge des Quadrats.
3. $P$ ist der Schnittpunkt der beiden Kreise.
4. Drehe das Dreieck $PCD$ um 90 Grad im Uhrzeigersinn um $D$.
5. Drehe das Dreieck $PBC$ um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn um $B$.
6. Drehe das entstandene Fünfeck im Uhrzeigersinn, bis es „aufrecht“ steht.

# Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 2023
## Runde 1

von Stefan Kermer und Volker Priebe

**Aufgabe 1**

Tick, Trick und Track haben jeweils 20, 23 und 25 Tickets für das Karussell auf dem Jahrmarkt in Entenhausen. Sie vereinbaren, dass sie nur alle drei gemeinsam fahren, wofür jeder von ihnen eines seiner Tickets abgeben muss. Außerdem können sie vor einer Fahrt, wenn sie möchten, Tickets nach folgender Regel umverteilen: Wenn einer eine gerade Anzahl von Tickets besitzt, kann er die Hälfte seiner Tickets an einen beliebigen der anderen beiden abgeben.
Kann es passieren, dass nach irgendeiner Fahrt...

a) genau einer kein Ticket mehr hat?
b) genau zwei keine Tickets mehr haben?
c) alle Tickets abgegeben sind?

*Anmerkung: Die Richtigkeit der drei Ergebnisse ist zu beweisen*

**Behauptung:** Die Konstellationen in a) und b) können passieren, eine Konstellation wie in c) kann nicht eintreten.

**Beweis:** Führen Tick, Trick und Track 20 gemeinsame Fahrten auf dem Karussell durch, so haben sie nach der letzten Fahrt jeweils 0, 3 und 5 Tickets, und damit hat genau einer von ihnen kein Ticket mehr. Also kann die Frage in a) bejaht werden.
Führen Tick, Trick und Track 17 gemeinsame Fahrten auf dem Karussell durch, so haben sie nach der bislang letzten Fahrt jeweils 3, 6 und 8 Tickets. Trick gibt nun die Hälfte seiner 6 Tickets an Track ab, so dass die drei vor der nächsten Fahrt jeweils 3, 3 und 11 Tickets haben. Nach drei weiteren gemeinsamen Fahrten auf dem Karussell haben Tick und Trick keine Tickets mehr, Track hat noch 8 Tickets. Also kann die Frage in b) bejaht werden.
Die Summe der Ticketanzahlen vermindert sich durch Umverteilungen nicht, sondern nur durch gemeinsame Fahrten und dann jeweils um 3. Da vor den Fahrten auf dem Karussell insgesamt $20+23+25=68$ Tickets vorhanden sind, kann es nicht passieren, dass alle Tickets abgegeben sind, weil 68 kein Vielfaches von 3 ist. Also muss die Frage in c) verneint werden.
Das beweist die Behauptungen. □

## Aufgabe 2

Bestimme alle Tripel $(x, y, z)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3$ erfüllen.

*Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.*

**Behauptung:** Genau die Tripel $(x, y, z) = (y - 1, y, y + 1)$, wobei $y$ eine beliebige ganze Zahl ist, und deren koordinatenweise Vertauschungen $(y-1, y+1, y), (y, y-1, y+1), (y, y+1, y-1), (y+1, y-1, y), (y+1, y, y-1)$ erfüllen die Gleichung der Aufgabenstellung.

**Erster Beweis:** Erfüllt ein Tripel $(x, y, z)$ ganzer Zahlen die Gleichung der Aufgabenstellung, so erfüllen Tripel, in denen die Reihenfolge von $x, y$ und $z$ beliebig vertauscht ist, die unter Vertauschungen von $x, y, z$ invariante Gleichung ebenfalls. Wir können also ohne Einschränkung voraussetzen, dass $x \leq y \leq z$. Weil für eine beliebige ganze Zahl $y$

$$\begin{aligned}&(y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 - (y-1)\,y - y\,(y+1) - (y+1)\,(y-1)\\&= 3y^2 - 2y + 2y + 2 - 3y^2 + y - y + 1 = 3 \qquad (2.1)\end{aligned}$$

gilt, erfüllt jedes der in der Behauptung angegebenen Tripel die Gleichung der Aufgabenstellung tatsächlich. Kein anderes Tripel ganzer Zahlen erfüllt die Gleichung der Aufgabenstellung: Sie lässt sich durch Multiplikation beider Seiten mit 2 äquivalent umformen zu

$$6 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\,. \qquad (2.2)$$

Nur $6 = 4 + 1 + 1$ ist eine Darstellung von 6 als Summe dreier Quadratzahlen. Aus $x \leq y \leq z$ folgen $0 \leq z - y \leq z - x$ und $0 \leq y - x \leq z - x$, und für Lösungen von (2.2) gilt unter dieser Voraussetzung $z - x = 2$ und $y - x = z - y = 1$. Alle drei Gleichungen sind genau für $x = y - 1$ und $z = y + 1$ erfüllt. Also haben die Tripel $(x, y, z)$ mit $x \leq y \leq z$, die die Gleichung erfüllen, über $(x, y, z) = (y - 1, y, y + 1)$ mit einer beliebigen ganzen Zahl $y$ notwendig die in der Behauptung angegebene Form. □

**Zweiter Beweis:** Wie im ersten Beweis überzeugen wir uns, dass ohne Einschränkung $x \leq y \leq z$ und dass wegen (2.1) tatsächlich jedes der in der Behauptung angegebenen Tripel die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllt. Es gibt keine weiteren solchen Tripel: Erfüllt das Tripel $(x, y, z)$ mit $x \leq y \leq z$, also $x = y - a$ und $z = y + b$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen $a, b$, die Gleichung der Aufgabenstellung, so ist

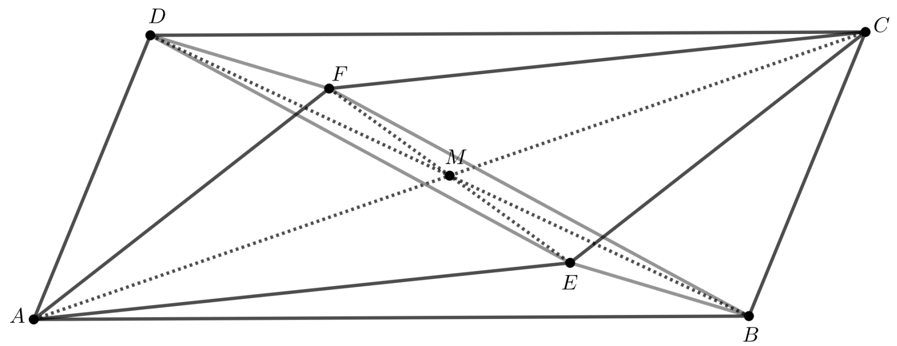
$$\begin{aligned}3 &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\\&= (y-a)^2 + y^2 + (y+b)^2 - (y-a)\,y - y\,(y+b) - (y+b)\,(y-a)\\&= a^2 + b^2 + ab \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Weil 3 keine Quadratzahl ist, folgt aus (2.3) sofort, dass weder $a = 0$ noch $b = 0$ gelten können, also $ab \geq 1$. Wegen $3 = 1 + 1 + 1$ muss sogar $a = b = 1$

gelten. Die Tripel $(x, y, z)$ mit $x \leq y \leq z$, die die Gleichung erfüllen, haben also notwendig die in der Behauptung angegebene Form $(x, y, z) = (y-1, y, y+1)$, wobei $y$ eine beliebige ganze Zahl ist. $\square$

## Aufgabe 3

Gegeben sind zwei Parallelogramme $\varparallelogram ABCD$ und $\varparallelogram AECF$ mit gemeinsamer Diagonale $AC$, wobei $E$ und $F$ im Inneren des Parallelogramms $\varparallelogram ABCD$ liegen. Zeige: Die Umkreise der Dreiecke $\triangle AEB, \triangle BFC, \triangle CED$ und $\triangle DFA$ haben einen Punkt gemeinsam.

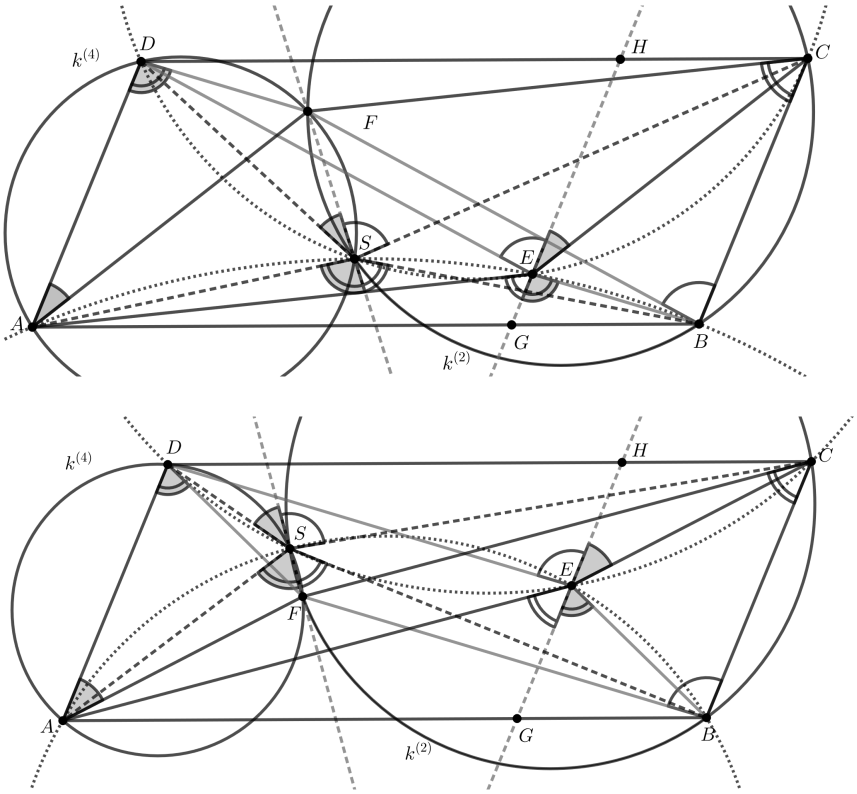



**Erster Beweis:** Das Viereck $\square ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn es punktsymmetrisch bezüglich des Schnittpunkts $M$ der Diagonalen $AC$ und $BD$ ist; es ist $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BM} = \overline{MD}$. Weil $AC$ Diagonale in $\varparallelogram AECF$ ist, ist der Punkt $M$ auch Symmetriezentrum des Parallelogramms $\varparallelogram AECF$. Bezeichnen wir das Bild eines Punktes $X$ bei Punktspiegelung an $M$ als $X'$, so sind $B' = D$ und $E' = F$; hieraus folgt, dass auch $EB \parallel DF$ und $BF \parallel DE$. (Diese Formulierung gilt auch, wenn die Punkte $B, E, F$ und $D$ auf einer Geraden liegen.) Die Parallele zu $AD$ und $BC$ durch den Punkt $E$ schneide $AB$ bzw. $CD$ in den Punkten $G$ bzw. $H$. Durch Betrachtung von Winkeln zwischen parallelen Geraden gelangen wir damit zu (siehe auch nachfolgende Skizzen 3.1 und 3.2)

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle AEG + \sphericalangle GEB = \sphericalangle FCB + \sphericalangle ADF \text{ und} \tag{3.1}$$

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle CEH + \sphericalangle HED = \sphericalangle FAD + \sphericalangle CBF. \tag{3.2}$$

Die Umkreise der Dreiecke $\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDE$ bzw. $\triangle DAF$ mögen mit $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}$ bzw. $k^{(4)}$ bezeichnet sein. Wir betrachten die Umkreise $k^{(2)}$ und $k^{(4)}$ und untersuchen zunächst die Fälle, in denen sich $k^{(4)}, k^{(2)}$ neben $F$ in einem zweiten Punkt $S$ schneiden. Wir unterscheiden Fälle nach der Lage von $S$ und nehmen zunächst an, dass $S$ im Inneren oder auf dem Rand von $\varparallelogram ABCD$ liegt und mit keinem der Punkte $A, B, C, D, E$ oder $F$ zusammenfällt (Fälle 1 und 2). Dann werden wir die Fälle $S \in \{A, B, C, D, E, F\}$ betrachten (Fälle 3, 4 und 5). Abschließend betrachten wir den Fall, dass $S$ außerhalb von $\varparallelogram ABCD$ liegt (Fall 6).




*Skizze 3.1: Der Punkt $S$ liegt im Inneren von ▱$ABCD$ (Fälle 1 und 2)*

**1. Fall** *(siehe Skizze 3.1, oben)*: Der Punkt $S$ liegt im Inneren oder auf dem Rand von ▱$ABCD$, und gegen den Uhrzeigersinn liegen die Punkte $A, S, F$ und $D$ in dieser Reihenfolge auf $k^{(4)}$, wobei $S \notin \{A, F\}$. In den Sehnenvierecken $\square ASFD$ in $k^{(4)}$ bzw. $\square BCFS$ in $k^{(2)}$ gelten $\sphericalangle ADF = 180^\circ - \sphericalangle FSA$ bzw. $\sphericalangle FCB = 180^\circ - \sphericalangle BSF$, also

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB = 360^\circ - \sphericalangle BSA &= 180^\circ - \sphericalangle BSF + 180^\circ - \sphericalangle FSA \\ &= \sphericalangle FCB + \sphericalangle ADF = \sphericalangle AEB,\end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei die letzte Gleichung (3.1) nutzt. Der Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel besagt in $k^{(2)}$ bzw. $k^{(4)}$, dass $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CSF$ bzw. $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FSD$, also zusammen mit (3.2)

$$\sphericalangle CSD = \sphericalangle CSF + \sphericalangle FSD = \sphericalangle CBF + \sphericalangle FAD = \sphericalangle CED. \tag{3.4}$$

Die Beziehungen in (3.3) bzw. (3.4) besagen nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel, dass der Punkt $S$, der wie der Punkt $E$ im Inneren von $\square ABCD$ liegt, auch auf dem Umkreis $k^{(1)}$ des Dreiecks $\triangle ABE$ bzw. auf dem Umkreis $k^{(3)}$ des Dreiecks $\triangle CDE$ liegt und damit gemeinsamer Punkt aller vier Umkreise ist.

**2. Fall** *(siehe Skizze 3.1, unten)*: Der Punkt $S$ liegt im Inneren oder auf dem Rand von ▱$ABCD$, und gegen den Uhrzeigersinn liegen die Punkte $A, F, S$ und $D$ in dieser Reihenfolge auf $k^{(4)}$, wobei $S \notin \{F, D\}$. In den Sehnenvierecken $\square AFSD$ in $k^{(4)}$ bzw. $\square BCSF$ in $k^{(2)}$ gelten dann $\sphericalangle FAD = 180^\circ - \sphericalangle DSF$ bzw.

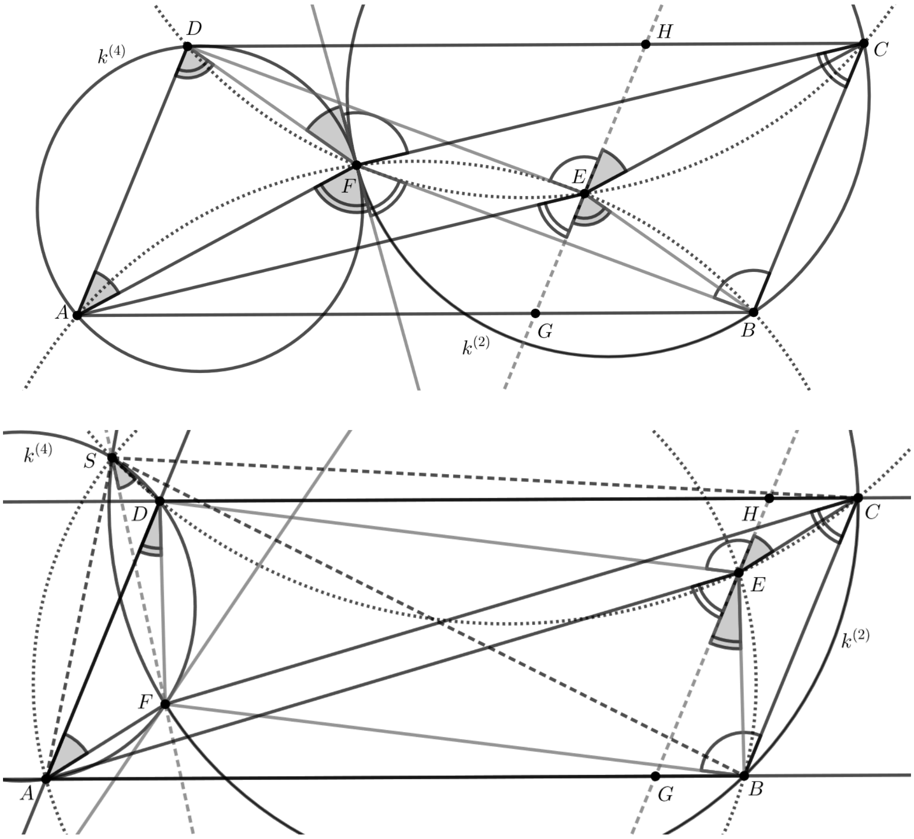
$\sphericalangle CBF = 180^\circ - \sphericalangle FSC$, also

$$\begin{aligned} \sphericalangle CSD = 360^\circ - \sphericalangle DSC &= 180^\circ - \sphericalangle DSF + 180^\circ - \sphericalangle FSC \\ &= \sphericalangle FAD + \sphericalangle CBF = \sphericalangle CED, \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei die letzte Gleichung (3.2) nutzt. Der Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel besagt in $k^{(2)}$ bzw. $k^{(4)}$, dass $\sphericalangle FCB = \sphericalangle FSB$ bzw. $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ASF$, also zusammen mit (3.1)

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASF + \sphericalangle FSB = \sphericalangle ADF + \sphericalangle FCB = \sphericalangle AEB. \tag{3.6}$$

Die Beziehungen in (3.5) bzw. (3.6) besagen nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel, dass der Punkt $S$, der wie der Punkt $E$ im Inneren von $\square ABCD$ liegt, auch auf dem Umkreis $k^{(3)}$ des Dreiecks $\triangle CDE$ bzw. dem Umkreis $k^{(1)}$ des Dreiecks $\triangle ABE$ liegt und damit gemeinsamer Punkt aller vier Umkreise ist.




*Skizze 3.2: $S = F$ oder $S$ liegt außerhalb von $\square ABCD$ (Fälle 5 und 6)*

**3. Fall:** Der Punkt $S$ fällt mit $D$ oder $A$ zusammen. Der Punkt $S = D$ liegt klar auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle CDE$ und auch auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABE$, denn der Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel besagt in $k^{(2)}$, dass $\sphericalangle FCB = \sphericalangle FDB$, zusammen mit (3.1) also $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADF + \sphericalangle FDB = \sphericalangle ADF + \sphericalangle FCB = \sphericalangle AEB$. Der Punkt $S = A$ (diese Konstellation kann beispielsweise eintreten, wenn $\sphericalangle CBA < 90^\circ$) liegt klar auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABE$ und auch auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle CDE$, denn wegen $\sphericalangle CAF = \sphericalangle CBF$ in $k^{(2)}$ gilt mit (3.2), dass $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBF + \sphericalangle FAD = \sphericalangle CED$.

Falls $S \in \{B, C\}$, so verläuft die Argumentation analog (mit $k^{(4)}$ an Stelle von $k^{(2)}$).
**4. Fall:** Der Punkt $S$ fällt mit dem Punkt $E$ zusammen. Es ist in diesem Fall klar, dass der Punkt $S = E$ auch auf den Umkreisen der Dreiecke $\triangle ABE$ bzw. $\triangle CDE$ liegt.
**5. Fall** *(siehe Skizze 3.2, oben)***:** Fällt der Punkt $S$ mit dem Punkt $F$ zusammen, so berühren sich die Umkreise $k^{(2)}$ bzw. $k^{(4)}$ von $\triangle BFC$ bzw. $\triangle DFA$ im Punkt $F$; sie haben also eine gemeinsame Tangente. Der Sehnentangentenwinkelsatz besagt dann zusammen mit (3.1) bzw. (3.2) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ADF + \sphericalangle FCB = \sphericalangle AEB$ bzw. $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CBF + \sphericalangle FAD = \sphericalangle CED$; der Punkt $F$, wie der Punkt $E$ im Inneren von $\square ABCD$, liegt also nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel auch auf den Umkreisen $k^{(1)}$ bzw. $k^{(3)}$ der Dreiecke $\triangle ABE$ bzw. $\triangle CED$ und ist damit gemeinsamer Punkt aller vier Umkreise.
**6. Fall** *(siehe Skizze 3.2, unten)***:** Liegt der Punkt $S$ außerhalb von $\square ABCD$, so liegt $S$ in einem der vier Winkelfelder derjenigen Winkel, die Scheitelwinkel zu den Innenwinkeln von $\square ABCD$ sind. *(In Skizze 3.2, unten, liegt S im Winkelfeld, das Scheitelwinkel zu $\sphericalangle ADC$ ist.)*
Wir weisen dies durch Widerspruch nach: Nehmen wir an, dass $S$ im Streifen zwischen $(AD)$ und $(BC)$, bezüglich $(AB)$ jedoch nicht in derselben Halbebene wie die Punkte $D$, $C$ liegt (sondern „unterhalb von $BC$"), so gilt in den Sehnenvierecken $\square ASFD$ in $k^{(4)}$ bzw. $\square BCFS$ in $k^{(2)}$, dass $180° - \sphericalangle DFS = \sphericalangle SAD > \sphericalangle BAD$ bzw. $180° - \sphericalangle SFC = \sphericalangle CBS > \sphericalangle CBA$, also mit der Winkelsumme im Parallelogramm $\square ABCD$

$$180° = \sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA < 360° - \sphericalangle DFS - \sphericalangle SFC = \sphericalangle CFD;$$

das ist ein Widerspruch zur Winkelsumme 180° im Dreieck $\triangle CDF$. Analog führt zum Widerspruch, wenn wir annehmen, dass $S$ im Streifen zwischen $(AD)$ und $(BC)$ „oberhalb von $CD$" liegt. Nehmen wir nun an, dass $S$ bezüglich $(AD)$ nicht in derselben Halbebene wie die Punkte $B, C$ (sondern „links von $AD$") und gleichzeitig im Streifen zwischen $(AB)$ und $(CD)$ liegt, so sind $\square AFDS$ bzw. $\square BCSF$ Sehnenvierecke in $k^{(4)}$ bzw. $k^{(2)}$. Aus der Betrachtung von Winkeln zwischen parallelen Geraden wissen wir $\sphericalangle CFD = \sphericalangle AEB$, und wir schließen mit (3.1) und mehrfacher Anwendung des Satzes vom Umkreis- und Mittelpunktswinkel in $k^{(4)}$ bzw. $k^{(2)}$

$$\begin{aligned}180° - \sphericalangle BFA &= 180° - \sphericalangle DFA - \sphericalangle CFD - \sphericalangle BFC \\ &= \sphericalangle ASD - \sphericalangle ADF - \sphericalangle FCB - \sphericalangle BSC \\ &= \sphericalangle ASD - \sphericalangle ASF - \sphericalangle FSB - \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD > 0;\end{aligned}$$

das ist ein Widerspruch zur Lage des Punktes $F$ im Inneren von $\square ABCD$, weil dann $\sphericalangle BFA > 180°$ gilt.
Wir betrachten nun den Fall, dass der Punkt $S$ wie in Skizze 3.2, rechts, im

Winkelfeld liegt, das Scheitelwinkel zu $\sphericalangle ADC$ ist. Der Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel besagt in $k^{(2)}$ bzw. $k^{(4)}$, dass $\sphericalangle FCB = \sphericalangle FSB$ bzw. $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ASF$, also mit (3.1)

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASF + \sphericalangle FSB = \sphericalangle ADF + \sphericalangle FCB = \sphericalangle AEB. \tag{3.7}$$

Im Sehnenviereck $\square BCSF$ in $k^{(2)}$ gilt $\sphericalangle CBF = 180^\circ - \sphericalangle FSC$, zudem $\sphericalangle FSD = \sphericalangle FAD$ nach dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel in $k^{(4)}$, also

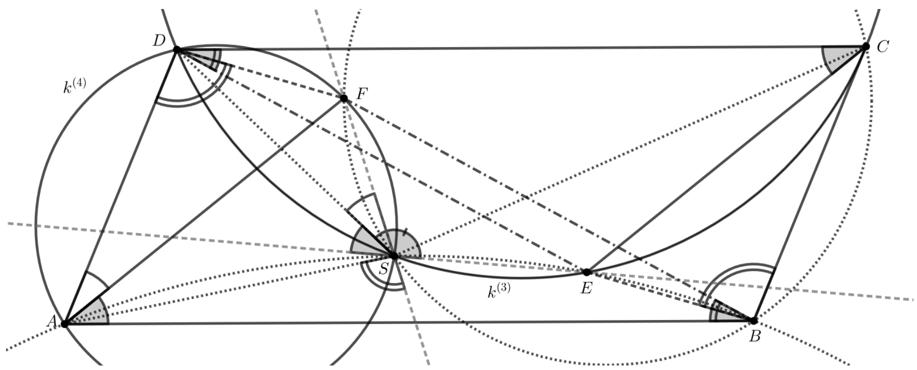
$$\sphericalangle DSC = \sphericalangle FSC - \sphericalangle FSD = 180^\circ - \sphericalangle CBF - \sphericalangle FAD = 180^\circ - \sphericalangle CED, \tag{3.8}$$

wobei die letzte Gleichung (3.2) nutzt. Die Beziehung in (3.7) besagt nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel, dass der Punkt $S$ auch auf dem Umkreis $k^{(1)}$ des Dreiecks $\triangle ABE$ liegt; die Beziehung in (3.8) besagt, dass $\square ECSD$ ein Sehnenviereck ist, der Punkt $S$ also auf dem Umkreis $k^{(3)}$ des Dreiecks $\triangle CDE$ liegt. Der Punkt $S$ ist damit gemeinsamer Punkt aller vier Umkreise.

Liegt $S$ außerhalb von $\square ABCD$ in einem der drei anderen Winkelfelder, lässt sich analog argumentieren.

Das beweist die Behauptung der Aufgabe. $\square$

**Bemerkung:** Es existieren Beweise mit Varianten der Winkelbetrachtungen, von denen wir eine anhand der Lagebeziehungen im 1. Fall skizzieren wollen. Weitergehende Fallunterscheidungen wie im ausgeführten Beweis wären noch durchzuführen. Wir definieren den Punkt $S$ als von $D$ verschiedenen Schnittpunkt der Umkreise $k^{(4)}$ von $\triangle DAF$ und $k^{(3)}$ von $\triangle CDE$, der auch nicht mit $E, F$ zusammenfallen möge.




Es lässt sich dann nachweisen, dass sich die Geraden $(ES), (FS)$ stets in den Winkeln $\alpha := \sphericalangle BAD$ bzw. $180^\circ - \alpha = \sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC$ schneiden. Beispielsweise schließen wir in der Konstellation der Skizze mit dem Sehnenviereck $\square CDSE$ in $k^{(3)}$ bzw. mit dem Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel in $k^{(4)}$

$$\begin{aligned}\sphericalangle ESF &= \sphericalangle ESD - \sphericalangle FSD = 180^\circ - \sphericalangle DCE - \sphericalangle FAD \\ &= 180^\circ - \sphericalangle BAF - \sphericalangle FAD = 180^\circ - \alpha.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Der Punkt $S$ liegt auch auf den Umkreisen der Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle BCF$: In der Konstellation der Skizze schließen wir mit dem Sehnenviereck $\square ASFD$ und (3.9)

$$\begin{aligned} \sphericalangle EBA + \sphericalangle ASE &= 180^\circ - \alpha - \sphericalangle CBE + 180^\circ - \sphericalangle ESF + 180^\circ - \sphericalangle FSA \\ &= 180^\circ - \alpha - \sphericalangle CBE + \alpha + \sphericalangle ADF = 180^\circ. \end{aligned} \tag{3.10}$$

bzw. mit dem Sehnenviereck $\square CDSE$ und (3.9)

$$\begin{aligned} \sphericalangle CSF = \sphericalangle ESF - \sphericalangle ESC &= 180^\circ - \alpha - \sphericalangle EDC \\ &= \sphericalangle CBA - \sphericalangle FBA = \sphericalangle CBF. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die Beziehungen in (3.10) bzw. (3.11) besagen, dass $\square ABES$ ein Sehnenviereck ist und damit der Punkt $S$ auch auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABE$ liegt bzw. nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel, dass der Punkt $S$ auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle BCF$ liegt und damit gemeinsamer Punkt aller vier Umkreise ist.

## Aufgabe 4

Gegeben ist eine reelle Zahl $\alpha$, in deren Dezimaldarstellung $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\cdots$ jede Nachkommaziffer $a_i$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ eine Primzahl ist. Die Nachkommaziffern werden entlang des in nebenstehender Abbildung durch Pfeile angedeuteten, nach rechts und nach unten unendlich fortgesetzt zu denkenden Weges angeordnet. Für jedes $m \geq 1$ wird die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl $z_m$ gebildet, indem vor das Komma die Ziffer 0 und nach dem

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_1 & \rightarrow & a_2 & & a_9 & \rightarrow & a_{10} & & a_{25} & \rightarrow & a_{26} & & a_{49} & \rightarrow & a_{50} \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
a_4 & \leftarrow & a_3 & & a_8 & & a_{11} & & a_{24} & & a_{27} & & a_{48} & & a_{51} \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
a_5 & \rightarrow & a_6 & \rightarrow & a_7 & & a_{12} & & a_{23} & & a_{28} & & a_{47} & & a_{52} \\
 & & & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \vdots \\
a_{16} & \leftarrow & a_{15} & \leftarrow & a_{14} & \leftarrow & a_{13} & & a_{22} & & a_{29} & & a_{46} & & \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\
a_{17} & \rightarrow & a_{18} & \rightarrow & a_{19} & \rightarrow & a_{20} & \rightarrow & a_{21} & & a_{30} & & a_{45} & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \uparrow & & \\
a_{36} & \leftarrow & a_{35} & \leftarrow & a_{34} & \leftarrow & a_{33} & \leftarrow & a_{32} & \leftarrow & a_{31} & & a_{44} & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
a_{37} & \rightarrow & a_{38} & \rightarrow & a_{39} & \rightarrow & a_{40} & \rightarrow & a_{41} & \rightarrow & a_{42} & \rightarrow & a_{43} & &
\end{array}$$

Komma die von links nach rechts gelesene Ziffernfolge der $m$-ten Zeile von oben aus nebenstehender Anordnung geschrieben wird. In analoger Weise werden für alle $n \geq 1$ die reellen Zahlen $s_n$ mit den von oben nach unten zu lesenden Ziffern der $n$-ten Spalte von links gebildet. So ist zum Beispiel $z_3 = 0{,}a_5a_6a_7a_{12}a_{23}a_{28}\cdots$ und $s_2 = 0{,}a_2a_3a_6a_{15}a_{18}a_{35}\cdots$. Zeige:

a) Wenn $\alpha$ rational ist, dann sind alle $z_m$ und alle $s_n$ rational.

b) Die Umkehrung der in a) formulierten Aussage ist falsch.

Beweis: Wir stellen dem Beweis der Aussagen a) und b) zwei Hilfssätze voraus.
**Hilfssatz 1:** Eine reelle Zahl $\beta$ mit $0 < \beta < 1$ ist genau dann rational, wenn ihre Dezimaldarstellung $\beta = 0, b_1b_2b_3\cdots$ von der Form

$$\beta = 0, b_1b_2\cdots b_q\overline{b_{q+1}b_{q+2}\cdots b_{q+p}} \text{ mit ganzzahligen Indizes } q, p \geq 0 \tag{4.1}$$

ist, das heißt, die Nachkommaziffern $b_{q+1}b_{q+2}\cdots b_{q+p}$ wiederholen sich periodisch. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass es nichtnegative ganzzahlige Indizes $q, p$ gibt, so dass für alle Indizes $r, s$ mit $s \geq r > q$ gilt:

$$\text{wenn } (s - r) \equiv 0 \,(\text{mod}\, p)\,, \text{ so ist } b_s = b_r. \tag{4.2}$$

Beweis des Hilfssatzes 1: Es ist einfach zu sehen, dass die Aussagen in (4.1) und (4.2) äquivalent sind. Gilt (4.1), so schließen wir aus $(s - r) \equiv 0 \,(\text{mod}\, p)$ für Indizes $r, s$ mit $s \geq r > q$, dass $s = r + pk$ mit $k \geq 0$ und daher $b_s = b_{r+pk} = b_{r+p(k-1)} = \cdots = b_r$. Gilt umgekehrt für die reelle Zahl $\beta$ mit Dezimaldarstellung $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots$ die Aussage in (4.2), so folgt für $s = q+i+pk$ und $r = q + i, 1 \leq i \leq p$ und $0 \leq k$, dass $b_{q+i+pk} = b_s = b_r = b_{q+i}$, also $\beta = 0, b_1 b_2 \cdots b_q \overline{b_{q+1} b_{q+2} \cdots b_{q+p}}$. (Aus dem Nachweis von (4.2) folgt nur, dass die Periode ein Teiler von $p$ ist.) ♢

Wir können die zeilen- und spaltenweise Anordnung der Nachkommaziffern gemäß Aufgabenstellung folgendermaßen beschreiben:

**Hilfssatz 2:** Wir bezeichnen, wenn die Dezimalziffern gemäß Aufgabenstellung angeordnet sind, mit $A\,(i, j)$ den Index der $j$-te Ziffer in der von links nach rechts gelesenen Ziffernfolge der $i$-ten Zeile von oben, wobei $i, j$ positive ganze Zahlen sind. (Der Index $A\,(i, j)$ stimmt mit dem Index der $i$-ten Ziffer in der von oben nach unten gelesenen Ziffernfolge in der $j$-ten Spalte von links überein.) Dann gilt für alle positiven ganzen Zahlen $k$ und $1 \leq i, j \leq 2k - 1$, dass

$$A\,(2k - 1, j) = (2k - 2)^2 + j, A\,(i, 2k - 1) = (2k - 1)^2 - i + 1 \tag{4.3}$$

sowie für alle positiven ganzen Zahlen $k$ und $1 \leq i, j \leq 2k$

$$A\,(i, 2k) = (2k - 1)^2 + i, A\,(2k, j) = (2k)^2 - j + 1. \tag{4.4}$$

Beweis des Hilfssatzes 2: Wir bemerken zunächst, dass die Aussagen zu $A\,(2k - 1, 2k - 1)$, $A\,(2k, 2k)$ in (4.3) und (4.4) für alle $k \geq 1$ wohldefiniert sind, denn auf der Diagonale der Anordnung ist

$$A\,(2k - 1, 2k - 1) = (2k - 2)^2 + 2k - 1 = 4k^2 - 6k + 3 = (2k - 1)^2 - (2k - 1) + 1$$

sowie

$$A\,(2k, 2k) = (2k - 1)^2 + 2k = 4k^2 - 2k + 1 = (2k)^2 - 2k + 1.$$

Wir beweisen die Aussagen (4.3) und (4.4) durch vollständige Induktion. Es ist nach Konstruktion in der Aufgabenstellung

$$A\,(1, 1) = 1 \,\text{sowie}\, A\,(1, 2) = 2 = 1 + 1, A\,(2, 2) = 3 = 4 - 1, A\,(2, 1) = 4;$$

das beweist den Induktionsanfang ($k = 1$). Für den Induktionsschluss $k \to k + 1$ stellen wir fest, dass nach Induktionsvoraussetzung $A\,(2k, 1) = (2k)^2$; der Weg der ersten $(2k)^2$ Nachkommaziffern endet also an dieser Stelle. Nach Konstruktion der Aufgabenstellung nimmt der Weg der Nachkommaziffern von hier aus einen Schritt nach unten, dann $2k$ Schritte nach rechts und von dort aus weitere $2k$ Schritte nach oben. Das bedeutet für $1 \le i, j \le 2(k+1)-1 = 2k+1$

$$A(2k+1, j) = (2k)^2 + j,$$
$$\begin{aligned} A(i, 2k+1) &= A(2k+1, 2k+1) + (2k+1-i) \\ &= (2k)^2 + (2k+1) + (2k+1-i) = (2k+1)^2 - i + 1, \end{aligned}$$

insbesondere $A(1, 2k+1) = (2k+1)^2$. Nach Konstruktion der Aufgabenstellung nimmt der Weg der Nachkommaziffern von hier aus einen Schritt nach rechts, dann $2k+1$ Schritte nach unten und von dort aus weitere $2k+1$ Schritte nach links. Das bedeutet für $1 \le i, j \le 2(k+1) = 2k+2 = (2k+1)+1$

$$A(i, 2k+2) = (2k+1)^2 + i,$$
$$\begin{aligned} A(2k+2, j) &= A(2k+2, 2k+2) + 2k + 2 - j \\ &= (2k+1)^2 + 2k + 2 + 2k + 2 - j = (2k+2)^2 - j + 1; \end{aligned}$$

diese Gleichungen beweisen den Induktionsschritt. $\diamondsuit$

**Beweis von Teil a) der Aufgabe:** Es sei $\alpha$ eine rationale Zahl, also existieren nach Hilfssatz 1 nichtnegative ganzzahlige Indizes $q, p$, so dass $\alpha = 0{,}a_1 a_2 \cdots a_q \overline{a_{q+1} a_{q+2} \cdots a_{q+p}}$. Das bedeutet insbesondere, dass auch

$$\alpha = 0{,}a_1 a_2 \cdots a_q \overline{a_{q+1} a_{q+2} \cdots a_{q+p} a_{q+p+1} a_{q+p+2} \cdots a_{q+2p}} \tag{4.5}$$

Wie in Hilfssatz 2 bezeichnen wir, wenn die Dezimalziffern gemäß Aufgabenstellung angeordnet sind, mit $A(i, j)$ den Index der $j$-te Ziffer in der von links nach rechts gelesenen Ziffernfolge der $i$-ten Zeile von oben, wobei $i, j$ positive ganze Zahlen sind. Für ein beliebiges, im Folgenden festes $m \ge 1$ weisen wir nach, dass für $j \ge m$

$$A(m, j+2p) - A(m, j) \equiv 0 \pmod{2p},$$

denn nach (4.3) und (4.4) ist für $j \ge m$ und $j$ ungerade, also $j$ und $j + 2p$ ungerade,

$$\begin{aligned} &A(m, j+2p) - A(m, j) \\ &= (j+2p)^2 - m + 1 - j^2 + m - 1 = 4p(j+p) \equiv 0 \pmod{2p} \end{aligned}$$

bzw. für $j \ge m-1$ und $j$ ungerade, also $j+1$ und $j+1+2p$ gerade,

$$\begin{aligned} &A(m, j+1+2p) - A(m, j+1) \\ &= (j+2p)^2 + m - j^2 - m = 4p(j+p) \equiv 0 \pmod{2p}. \end{aligned}$$

Wegen (4.5) und sofern $j \ge m$ zusätzlich so groß gewählt wird, dass $A(m, j) > q$, ist damit auch $a_{A(m,j+2p)} = a_{A(m,j)}$. Insbesondere folgt für die Dezimaldarstellung $z_m = 0{,}b_1 b_2 b_3 \cdots$ der reellen Zahl $z_m$, dass für alle solche $j$ auch $b_{j+2p} = b_j$. Nach Hilfssatz 1 ist $z_m$ demnach rational. Ebenso weisen wir für ein beliebiges, im Folgenden festes $n \ge 1$ nach, dass für $i \ge n$

$$A(i+2p, n) - A(i, n) \equiv 0 \pmod{2p},$$

denn nach (4.3) und (4.4) ist für $i \geq n$ und $i$ gerade, also $i$ und $i + 2p$ gerade,

$$A(i + 2p, n) - A(i, n) = (i + 2p)^2 - n + 1 - i^2 + n - 1 = 4p(i + p) \equiv 0 \pmod{2p}$$

bzw. für $i \geq n - 1$ und $i$ gerade, also $i + 1$ und $i + 1 + 2p$ ungerade,

$$A(i + 1 + 2p, n) - A(i + 1, n) = (i + 2p)^2 + n - i^2 - n = 4p(i + p) \equiv 0 \pmod{2p}.$$

Wegen (4.5) und sofern $i \geq n$ zusätzlich so groß gewählt wird, dass $A(i, n) > q$, ist damit auch $a_{A(i+2p,n)} = a_{A(i,n)}$. Insbesondere folgt für die Dezimaldarstellung $s_n = 0{,}c_1c_2c_3 \cdots$ der reellen Zahl $s_n$, dass für alle solche $i$ auch $c_{i+2p} = c_i$. Nach Hilfssatz 1 ist $s_n$ demnach rational. Wie im Beweis von Hilfssatz 1 angemerkt, ist die so gefundene Länge $2p$ der sich periodisch wiederholenden Nachkommaziffern von $z_m$ bzw. $s_n$ nicht notwendig minimal. Für $\alpha = \frac{123}{999} = 0{,}\overline{123}$ ergibt sich gemäß Aufgabenstellung die folgende Anordnung. Sie zeigt, dass es Konstellationen gibt, in denen die Periodenlänge tatsächlich $2p$ ist. Grau unterlegt sind die Nachkommaziffern $a_{A(i,i)} = a_{1+i(i-1)}$ nach Hilfssatz 2.

**Beweis von Teil b) der Aufgabe:** Steht in der Anordnung der Nachkommaziffern wie in der Aufgabenstellung ausschließlich auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten eine 2, ansonsten eine 3, so sind alle $z_m$ und alle $s_n$ rational, denn für alle $n \geq 1$ ist $z_n = s_n = 3^{-1} - 10^{-n} = \frac{10^n - 3}{3 \cdot 10^n}$. Die Zahl $\alpha$, die hierdurch repräsentiert wird, ist jedoch nicht rational, denn $a_d = 2$ genau dann, wenn $d$ ein Element der Folge $(d\,(i))_{i \geq 1} = (1 + i\,(i-1))_{i \geq 1}$ ist; die Indizes $d\,(i)$ haben also die streng monoton wachsenden Abstände $1 + (i+1)\,i - 1 - i\,(i-1) = 2i, i \geq 1$. Das heißt, es kann keine endliche Periodenlänge $p$ geben, die die Abfolge der Nachkommaziffern beschreibt.
Damit sind die Behauptungen der Aufgabenstellung bewiesen. $\square$

*Wir danken Herrn StD a.D. Fegert, Frau Dr. Annamária Kovács, Herrn Friedemann Schwarz und Herrn OStR Dr. Strich für ihre Anmerkungen zum Artikel.*

# Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 151

**Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium** (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
**Kl. 6:** Robert Schmitt 13,5;
**Kl. 7:** Lisa Schäfer 18, Peter Knobloch 21;
**Kl. 8:** Mai Chi Tran 19,5, Rachel Tao 18;
**Kl. 10:** Oscar Su 33, Jan Christian Weber 22;
**Kl. 12:** Lukas Born 41.

**Espelkamp, Söderblom-Gymnasium:**
**Kl. 5:** Silas Salloch 18;
**Kl. 8:** Mika Schäfer 8.

**Frankenthal, Karolinen-Gymnasium** (betr. Lehrerin: Frau Haag)**:**
**Kl. 6:** Nico Mathy 10, Philip Mühlbeyer 9,5.

**Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Schule:**
**Kl. 12:** Theresa Horstkötter 14.

**Ingolstadt, Christoph-Scheiner-Gymnasium:**
**Kl. 5:** Imran Aouzi 5, Johannes Goller 15;
**Kl. 9:** Sarah Markhof 18.

**Mainz, Maria-Ward-Schule:**
**Kl. 11:** Amira Freund 9.

**Mainz, Gymnasium Oberstadt:**
**Kl. 12:** Pascal Bohlinger 12.

**Mainz, Otto-Schott-Gymnasium:**
**Kl. 8:** Victor Mayer 24.

**Mainz, Willigis-Gymnasium:**
**Kl. 6:** Ioan Salaru 42.

**Nackenheim, Gymnasium:** (betr. Lehrerin: Frau Geis)**:**
**Kl. 5:** Philipp Mühl 12,5;
**Kl. 7:** Daniel Laibach Muñiz 42.

**Nürtingen, Albert-Schäffle-Schule:**
**Kl. 11:** Mike Wurster 12;
**Kl. 13:** Salvatore Ippolito 43.

**Oberursel, Gymnasium:**
**Kl. 9:** Dóra Emilia Mézáros 32;
**Kl. 13:** Josephine Kaßner 22.

**Schrobenhausen, Gymnasium:**
**Kl. 9:** Luca Sindel 11,5.

**Tangermünde, Diesterweggymanisum:**
**Kl. 8:** Mai Linh Dang 43;
**Kl. 11:** Tu Sam Dang 41.

**Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:**
**Kl. 11:** Philipp Lörcks 37.

**Trostberg, Hertzhaimer-Gymnasium:**
**Kl. 9:** Marie Baumgartner 8.

**Wiesbaden, Martin-Niemöller-Schule:**
**Kl. 9:** Greta Waldmüller 32,5.

**Worms, Gauß-Gymnasium:**
**Kl. 5:** Sultan Aner 15, Sid Ahmed Ould Sid Ahmed 29,5
**Kl. 7:** Emma Schubert 19,5, Greta Schubert 13,5.

**Schüler:innen, bei denen keine Schule angegeben wurde:**
**Kl. 5:** Helena Röhrenbeck 7, Jana Röhrenbeck 8.

# Errata

Vor dem Druck der Hefte lesen wir die Druckfahnen mehrfach Korrektur. Leider schleichen sich trotzdem manchmal kleine Fehler in Monoid ein, die wir dann erst nach dem Druck entdecken. So auch im Heft 152:

- **Eine unerwartete Quersumme (Seite 19)**
  Die Lösung zur Quersumme von $10^{226}-3$ beinhaltet unglücklicherweise einen

kleinen Zahlenfehler. $225 \cdot 9 + 7 = 2032$ und nicht 2022. Somit ist das richtige Ergebnis der Aufgabe $Q(10^{226} - 3) = 2023$.
Vielen dank an Herrn Frank Fiedler, der uns auf diesen Fehler hingewiesen hat.

- **Monodiale Knobelei (Seite 14)**
Bei der Aufgabenstellung der Knobelei ist uns ein Tippfehler unterlaufen. Im Heft 153 heißt es $A \neq O$, allerdings sollte es $A \neq 0$ sein.

# Mitteilungen

- **Abo-Beitrag:** Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag von 15 € für das Kalenderjahr 2023 auf das Monoid-Konto (IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18) zu überweisen (Angabe des Abonnenten nicht vergessen!).
Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.
- **Soziale Netzwerke:** Monoid ist auch in den sozialen Netzwerken zu finden:
`www.facebook.com/monoid.matheblatt`
`www.facebook.com/monoid.redaktion`
`www.instagram.com/monoid.matheblatt`
Dort könnt Ihr regelmäßig aktuelle Hinweise zu Monoid finden. Wir freuen uns, wenn Ihr uns auch dort folgt.
Und natürlich gibt es weiterhin unsere Internetseite
`https://monoid.mathematik.uni-mainz.de/`.

# Die Redaktion

**Leitung:** Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
**Mitglieder:** Laura Biroth, Christa Elze, Prof. Dr. Frank Fischer, Dr. Hartwig Fuchs, Jasmin Haag, Prof. Dr. Achim Klenke, Arthur Köpps, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Dr. Maximilian Preisinger, Frank Rehm, Georg Sahliger, Silke Schneider
**Weitere Mitarbeiter:** Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Stefan Kermer, Dr. Volker Priebe
**Zusammenstellung und Satz:** Benjamin Landgraf
**Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen:** Judith Straub
**Druck und Vertrieb der Hefte:** Verein der Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e. V.
**Betreuung der Abonnements und Versand:** Marcel Gruner (Vorstandsmitglied im Verein der Freunde der Mathematik)

| Jahrgang 43 | Heft 153 | März 2023 |
|---|---|---|

## Inhalt



**Abonnementbestellungen** per Post oder über unsere Internetseite.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 15 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen. Eine günstige Form, den Abo-Beitrag zu überweisen, ist der *Dauerauftrag*, da man dann die Überweisung nicht mehr vergisst und das Abonnement ohne Unterbrechung weiterläuft.

**Herausgeber:** Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird unterstützt vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz.


### Impressum

**Anschrift:** Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
**Telefon:** 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
**E-Mail:** `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
**Homepage:** `https://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`