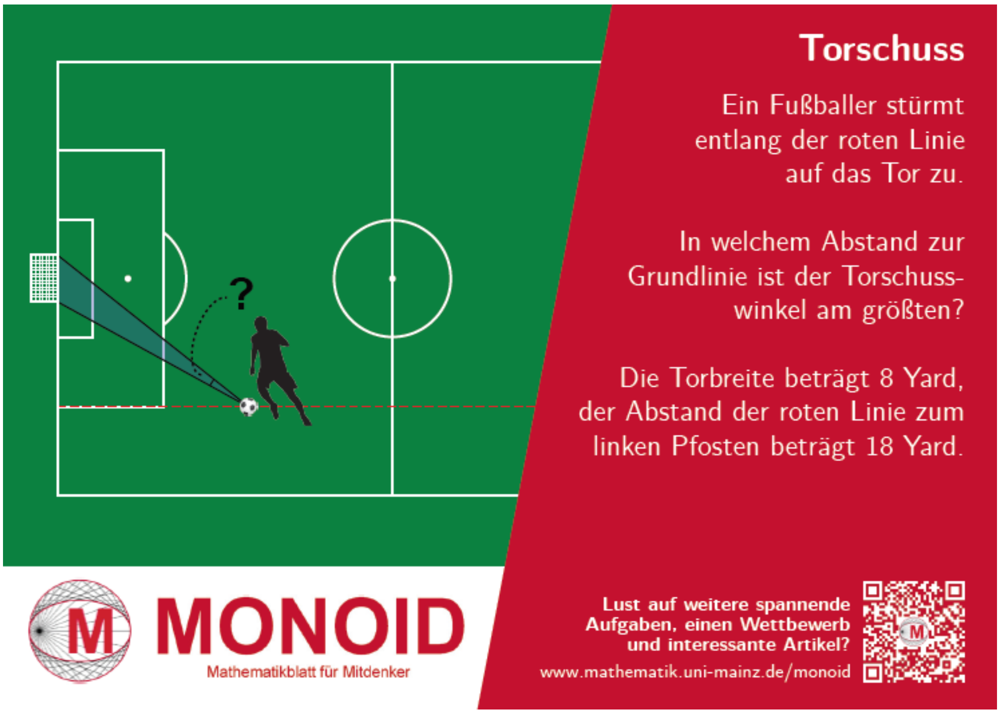
Torschuss



Aufgabe

Ein Fußballer stürmt entlang der roten Linie auf das Tor zu.
Die Torbreite beträgt 8 Yard, der Abstand der roten Linie zum linken Pfosten beträgt 18 Yard.
In welchem Abstand zur Grundlinie ist der Torschusswinkel am größten?

Lösung

Wir nehmen an, dass der Fußballer im Abstand x zur Torlinie steht. Der Winkel zwischen der gestrichelten Linie und dem der Richtung vom Fußballer zum rechten Torpfosten bezeichnen wir mit β, den entsprechenden Winkel für den linken Torpfosten mit α. Der Torschusswinkel ist dann $\gamma := \beta - \alpha$. Vom Schnittpunkt der gestrichelten Linie mit der Torlinie sind beträgt der Abstand zum linken Pfosten $a = 18\,\mathrm{yd}$ und zum rechten Pfosten $b = 18\,\mathrm{yd} + 8\,\mathrm{yd} = 26\,\mathrm{yd}$.
Für die Winkel α und β gilt

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) \qquad \text{und} \qquad \beta = \arctan\left(\frac{b}{x}\right).$$

Also ist

$$\gamma = \arctan\left(\frac{b}{x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{x}\right).$$

Wir schreiben $\gamma(x) = \gamma$, um die Abhängigkeit von x zu betonen. Der Winkel ist maximal, wenn die Ableitung $\gamma'(x)$ gleich Null ist. Das heißt,

$$\begin{aligned} 0 = \gamma'(x) &= \frac{-\frac{b}{x^2}}{1+\left(\frac{b}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2} = \frac{a}{x^2+a^2} - \frac{b}{x^2+b^2} \\ &= \frac{(b-a)(ab-x^2)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}. \end{aligned}$$

Damit dies Null ist, muss der Zähler Null sein, also

$$0 = (b - a)(ab - x^2).$$

Es folgt

$$x = \sqrt{ab} = 32{,}63\,\text{yd}.$$

Der Torschusswinkel ist also im Abstand von 32,63 yd am größten.