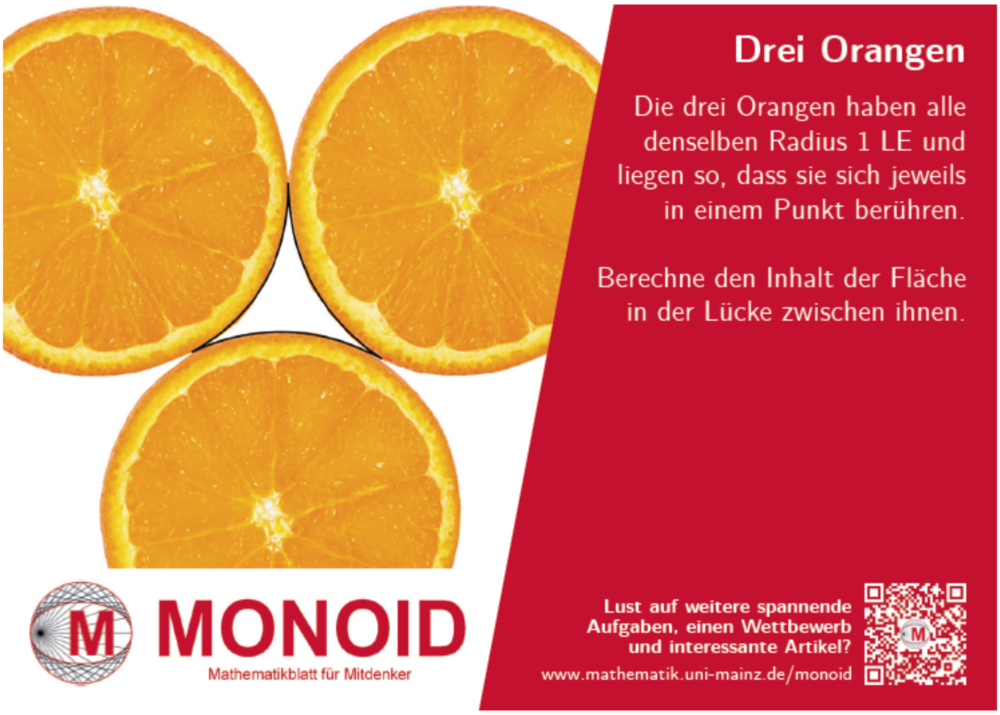
Drei Orangen



Aufgabe

Die drei Orangen haben alle den selben Radius 1 LE und liegen so, dass sie sich jeweils in einem Punkt berühren.
Berechne den Inhalt der Fläche in der Lücke zwischen ihnen.

Lösung

Wir modellieren die drei Orangen vereinfachend als Kreise.
Wenn sich zwei Orangen berühren, dann liegen ihre Mittelpunkte und der Berührpunkt in einer Geraden. Verbindet man daher die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der gegebenen Orangen resp. Kreise, dann ergibt sich ein Dreieck $M_1M_2M_3$ mit den Eigenschaften:

- $M_1M_2M_3$ ist gleichseitig,
- die Punkte B_1, B_2 und B_3 liegen in den Strecken M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 und
- die Punkte B_1, B_2 und B_3 sind Mittelpunkte dieser Strecken.

Nun gilt:

$$|\text{Fläche in der Lücke}| = |\triangle M_1M_2M_3| - 3 \cdot |\text{Sektor } M_1B_1B_3|.$$

Es sind

$$|\triangle M_1M_2M_3| = \frac{1}{2}|M_1M_2| \cdot |\text{Höhe } B_1M_3| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

und

$$|\text{Sektor } M_1B_1B_3 \text{ mit } 60^\circ\text{-Winkel bei } M_1| = \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{\pi}{6}.$$

Daraus folgt: Der Inhalt der Fläche $B_1B_2B_3$ in der Lücke zwischen den drei Orangen beträgt $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}16$, da $M_1M_2M_3$ gleichschenklig ist.