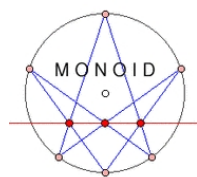
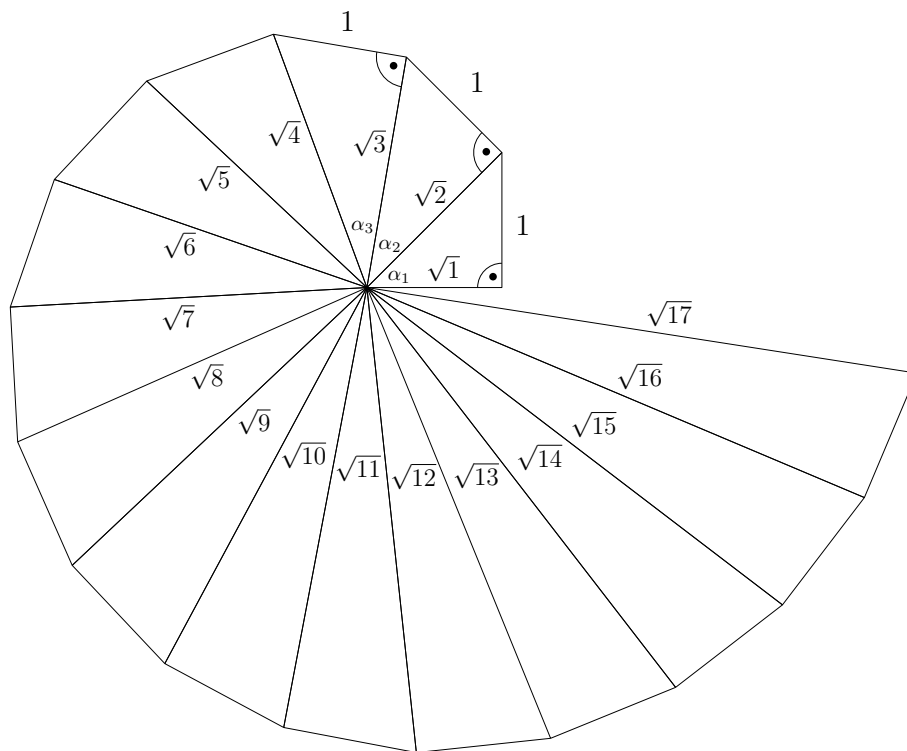


# MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift  
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)  
1980 gegründet von Martin Mettler  
herausgegeben von der  
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz  
vertreten durch den Präsidenten  
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch



JOHANNES GUTENBERG  
UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

**Wichtig:** Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

**Für Schüler/innen der Klassen 5–8** sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und „*Denkerchen*“ werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der  
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

**15.11.2016.**

**Johannes Gutenberg–Universität  
Institut für Mathematik  
MONOID-Redaktion  
55099 Mainz**

Tel.: 06131/3926107  
Fax: 06131/3924389

E-Mail: [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de)

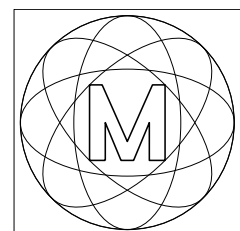
An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, bei denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Life School Frankfurt** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in MONOID in der *Rubrik der Löser* und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.



Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die  
Redaktion

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

# Einladung zur MONOID-Feier 2016

mit der Preisvergabe

an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2015/2016

am Samstag, dem 3. Dezember 2016, Beginn 10 Uhr,

im Atrium Maximum (Alte Mensa), der Uni Mainz.

Johann-Joachim-Becher-Weg 3 – 9

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Manfred Lehn, Universität Mainz, halten.

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.

Weitere Informationen demnächst auf der MONOID-Internetseite

[www.mathematik.uni-mainz.de/monoid](http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid).

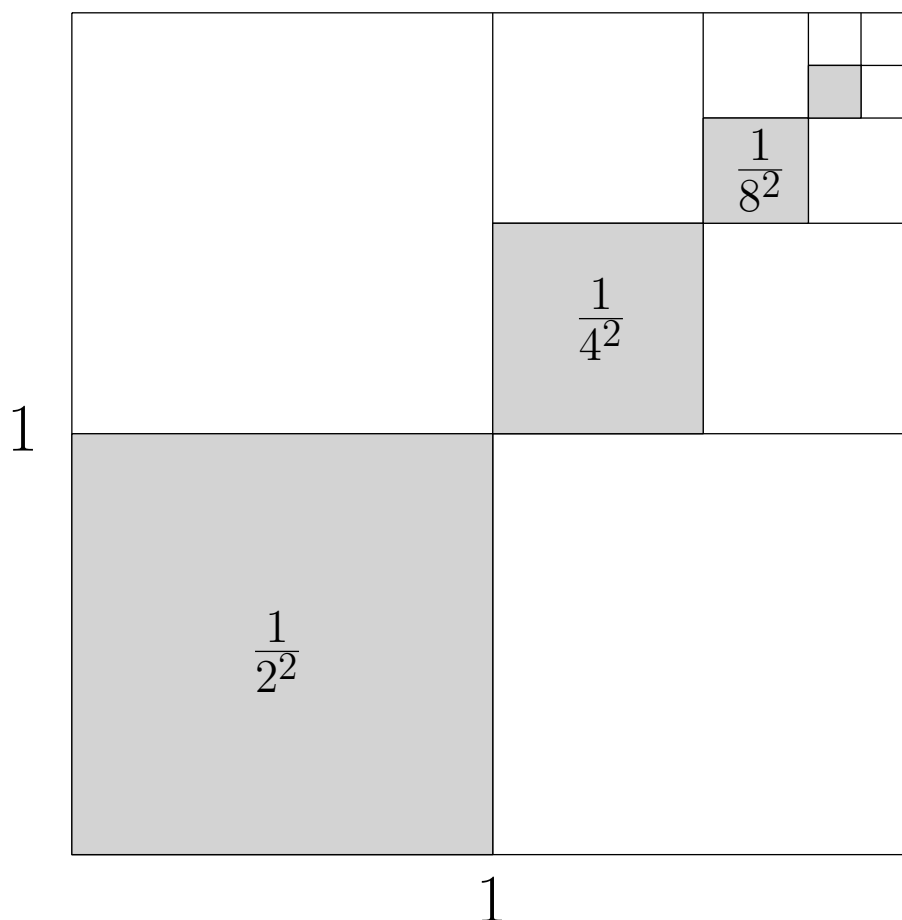
## Beweis ohne Worte

gefunden von Hartwig Fuchs

Es gilt:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{16^2} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Beweis:



# Zum Titelbild

Auf dem Titelbild ist die sogenannte Wurzelspirale oder Spirale des Theodorus\*.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n &\geq \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \dots + \sin \alpha_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,\end{aligned}$$

das heißt, diese Spirale dreht sich unendlich oft um ihr Zentrum.

## Aus den Archiven der Mathematik Eine Aufgabe von Gottfried W. Leibniz von Hartwig Fuchs

Es sei  $L = g^7 - g$ ,  $g$  eine beliebige ganze Zahl. Überprüfe dann die Behauptung von G. W. Leibniz:

Wie auch immer  $g$  gewählt wird, stets ist  $L$  ohne Rest durch 7 teilbar.

### Lösung

$7|L$  bedeutet im Folgenden: 7 teilt  $L$  ohne Rest.

Zunächst gilt:

$$(1) \quad L = g^7 - g = g(g^6 - 1) = g(g^3 - 1)(g^3 + 1) = g(g - 1)(g^2 + g + 1)(g^3 + 1).$$

1. Fall: Es sei  $g > 0$ . Dann setzen wir  $g = 7n + r$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  und  $r = 0, 1, 2, \dots, 6$ , aber  $n$  und  $r$  nicht beide 0.

Sei  $r = 0 \Rightarrow g = 7n \Rightarrow 7|L$ .

Sei  $r = 1 \Rightarrow g = 7n + 1 \Rightarrow g - 1 = 7n \Rightarrow 7|(g - 1)$  und wegen (1) gilt  $7|L$ .

Sei  $r = 2 \Rightarrow g^2 + g + 1 = (7n + 2)^2 + (7n + 2) + 1 = 49n^2 + 35n + 7 \Rightarrow 7|(g^2 + g + 1) \Rightarrow 7|L$  wegen (1).

Sei  $r = 3, 5$  oder  $6 \Rightarrow g^3 + 1 = (7n + r)^3 + 1 = 7^3n^3 + 3 \cdot 7^2n^2r + 3 \cdot 7 \cdot n \cdot r^2 + r^3 + 1 = 7(49n^3 + 21n^2r + 3nr^2) + r^3 + 1$ . Weil nun  $3^3 + 1 = 7 \cdot 4$ ,  $5^3 + 1 = 7 \cdot 18$  und  $6^3 + 1 = 7 \cdot 31$  ist, gilt  $7|(g^3 + 1)$  und wegen (1)  $7|L$ .

Sei  $r = 4 \Rightarrow g^2 + g + 1 = (7n + 4)^2 + (7n + 4) + 1 = 49n^2 + 63n + 21 \Rightarrow 7|(g^2 + g + 1) \Rightarrow 7|L$ .

2. Fall: Es sei  $g = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow 7|L$ .

\* Theodorus von Kyrene, um 475/460 – 399 v. Chr., griechischer Mathematiker.

3. Fall: Es sei  $g < 0$ . Dann setzen wir  $g = -h$ ,  $h = 1, 2, 3, \dots$   
 $\Rightarrow L = g^7 - g = -(h^7 - h)$ . Im 1. Fall wurde gezeigt, dass gilt:  
 $7|(h^7 - h) \Rightarrow 7|(-(h^7 - h)) \Rightarrow 7|L$ .

Die Behauptung von G. W. Leibniz trifft also zu.

## Hättest Du es gewusst? Was sind chinesische Primzahlen und ihre nächsten Verwandten?

von Hartwig Fuchs

### Eine bemerkenswerte Aufgabe

Der Zahlen-Fan Arturo Knack entdeckte kürzlich in einer Aufgabensammlung ein Problem, das ihm in zweifacher Hinsicht rätselhaft war:

- (1) Die Zahl\* 2017 ist ein Teiler jeder Zahl  $a^{2016} - 1$  für  $a = 2, 3, \dots, 2016$ .  
 Man überprüfe diese Behauptung ohne Computer.

### Vorbetrachtungen

Knack konnte sich nicht erklären, wie man ohne Computer in angemessener Zeit auch nur einige der insgesamt 2015 Einzelfälle mit  $a = 2, 3, \dots, 2016$  von (1) löst – ist doch bereits  $2^{2016} - 1$  eine 607-ziffrige Zahl.

Noch weniger vermochte er sich vorzustellen, wie man überhaupt zu der Aufgabe (1) gelangt war.

Als er sich deshalb Hilfe suchend an seinen Freund, den Zahlentheoretiker Dr. Quaoar, wandte, schlug der ihm vor, als Erstes die Frage zu untersuchen:

- (2) Hat jede Zahl  $a^{2016} - 1$  überhaupt Teiler  $t$  mit  $t \neq 1$  und  $t \neq a^{2016} - 1$  – solche Teiler  $t$  heißen *echte* Teiler?

Knack folgte seinem Rat und fand die Regel:

- (3) Für jedes  $n \geq 2$  ist  $a - 1$  ein echter Teiler von  $a^n - 1$ , falls  $a \geq 3$  ist.

Diese Regel folgt unmittelbar aus  $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ .

Es sei nun  $a = 2$  und  $n$  sei nicht prim,  $n = rs$  mit  $r \geq 2$ ,  $s \geq 2$ . Dann ist  $2^n - 1 = (2^r)^s - 1$ . Mit  $2^r = a$  ist  $a > 3$  und wegen  $s \geq 2$  folgt aus (3):

- (3') Für jedes nicht prime  $n \geq 2$ ,  $n = rs$  ist  $2^r - 1$  ein echter Teiler von  $2^n - 1$ .

Für prime Exponenten  $n \geq 2$  sind unter den Zahlen  $2^n - 1$  manche ebenfalls prim. Das hat wohl Marin Mersenne (1588–1648) als Erster bemerkt, als er die später nach ihm benannten *Mersenne-Zahlen*  $2^n - 1$  angeblich (!) bis zur 78-ziffrigen Zahl  $2^{257} - 1$  auf Teilbarkeit/Primalität untersuchte. Er hat dabei herausgefunden, dass zumindest für  $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$  jeweils  $2^n - 1$  eine Primzahl ist.

\* „Zahl“ heißt hier stets: natürliche Zahl.

(3'') Nur für prime  $n \geq 2$  kann  $2^n - 1$  ohne echten Teiler, also eine Primzahl sein.

Aus (3), (3') und (3'') ergibt sich auf Quaoars Frage (2):

(4) Jede Zahl  $a^{2016} - 1$  aus Aufgabe (1) hat einen echten Teiler, weil 2016 nicht prim ist.

### Fermat-Teiler

Knack fragte sich, nachdem er das Ergebnis (4) erhalten hatte: Kommt 2017 unter den echten Teilern der Form  $a^r - 1$ ,  $r \geq 1$ , von  $a^{2016} - 1$  vor?

Annahme: Es sei  $2017 = a^r - 1$  für ein  $r \geq 1$ . Dann ist  $a^r = 2018 = 2 \cdot 1009$ . Für  $r = 1$  ist  $a > 2016$ ; für  $r \geq 2$  ist  $a^r$  entweder ungerade oder ein Vielfaches von 4 – beide Male ergibt sich ein Widerspruch. Die Annahme ist also falsch.

Teiler von  $a^{2016} - 1$ , die nicht von der Form  $a^r - 1$ ,  $r \geq 1$ , sind, bezeichnete Quaoar als „Fermat-Teiler“. Die Zahl 2017 ist ein solcher Fermat-Teiler. Wie findet man Fermat-Teiler? – fragte Knack.

Auch hier half Quaoar weiter: Er wies Knack darauf hin, dass in der Aufgabe (1) der Teiler 2017 womöglich nicht zufällig um 1 größer als der Exponent von  $a^{2016}$  gewählt wurde – vielleicht ließe sich aus dem Zusammenhang „Teiler = Exponent + 1“ ein Weg zur Bestimmung von Fermat-Teilern erkennen.

Knack ging diesem Hinweis nach und untersuchte den „kleinsten“ Fall  $2^n - 1$  für einige zerlegbare Exponenten  $n$ . Hier folgt seine Liste, in der er Fermat-Teiler  $2^n - 1$  bestimmte, für die die Gleichung „Teiler = Exponent + 1“ zutrifft.

Exponent von $2^n - 1$	$2^n - 1$	Fermat-Teiler von $2^n - 1$
4	$3 \cdot 5$	5
6	$7 \cdot 9$	7
8	$3 \cdot 5 \cdot 17$	–
9	$7 \cdot 73$	–
10	$3 \cdot 11 \cdot 31$	11
12	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	13
14	$3 \cdot 43 \cdot 127$	–
15	$7 \cdot 31 \cdot 151$	–
16	$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257$	17
⋮	⋮	⋮

Diese Liste führte Knack zu der Vermutung:

(5) Eine Primzahl  $n + 1$  ist ein Teiler von  $2^n - 1$  für jedes  $n \geq 2$ .

Knacks Vermutung sei richtig, bemerkte Quaoar. Sie stelle einen Sonderfall des berühmten „Kleinen Satzes von Fermat“ dar, den sein Entdecker Pierre de Fermat (1601 – 1665) in einem Brief an den Mathematiker Frénicle de Bressy (1601 – 1675) selbst als „eine Erleuchtung durch ein helles Licht“ beschrieb:

(6) Es seien  $n + 1$  und  $a \geq 2$  teilerfremde Zahlen. Dann gilt: Ist  $n + 1$  eine Primzahl, dann ist  $n + 1$  ein Teiler von  $a^n - 1$ .

Fermat hat mit dem Satz (6) eines der mächtigsten Werkzeuge der Zahlentheorie entdeckt. Mit ihm erhält man Zugriff auf Zahlen, die weit jenseits allen Vorstellungsvermögens groß sind. So weiß man ohne jede Rechnung etwa: Die Primzahl  $p = 2^{43112809} - 1$  ist ein Teiler des Zahlgiganten  $10^{p-1} - 1$ ,

### Die Lösung der Aufgabe

Fermats Satz (6) ist der Schlüssel zur Lösung von Aufgabe (1).

Knack braucht nur noch 2017 als Primzahl zu identifizieren, um feststellen zu können: 2017 ist ein Teiler jeder Zahl  $a^{2016} - 1$  mit  $a = 2, 3, 4, \dots, 2016$  und darüber hinaus sogar für jedes  $a > 2016$ , das kein Vielfaches von 2017 ist. Auch Knacks Frage, wie man die Aufgabe (1) gefunden hat, war nun einfach zu klären: Sie ist ein Spezialfall von (6) für  $n + 1 = 2017$  und  $2 \leq a \leq 2016$ .

Für Dr. Quaoar schien damit jedoch noch kein Abschluss des in der Aufgabe (1) angesprochenen Problemkreises erreicht zu sein, denn er bemerkte, dass der Fermat-Satz (6) Anlass zu vielen Fragen gebe – und er murmelte etwas von chinesischen Primzahlen und anderen Exoten. Arturo Knack wollte natürlich wissen, was es damit auf sich hatte.

### Chinesische Primzahlen

Dr. Quaoar: Man stößt auf chinesische Primzahlen bei der Frage, ob Fermats Satz umkehrbar ist – im einfachsten Fall (5) also, ob gilt:

(5') Wenn  $n + 1$  ein Teiler von  $2^n - 1$ ,  $n \geq 2$ , ist, dann ist  $n + 1$  eine Primzahl.

Knack überlegte: Wenn (5') falsch ist, dann müsste es einen Teiler  $n + 1$  von  $2^n - 1$  geben, der keine Primzahl ist. Er machte sich also auf die Suche nach einer solchen Zahl; dabei überprüfte er alle Zahlen  $n + 1 < 200$  unter den Voraussetzungen

- $n + 1$  ist ungerade, weil eine gerade Zahl kein Teiler von  $2^n - 1$  sein kann;
- $n + 1 \geq 9$ , weil (5') für  $n + 1 = 3, 5$  und  $7$  zutrifft.

Aber er fand keine Zahl  $n + 1$ , die (5') widerlegte – tatsächlich hätte er bis  $n + 1 = 339$  rechnen können: das Ergebnis wäre das Gleiche gewesen.

Eine so lange Liste von Misserfolgen bei dem Versuch (5') zu widerlegen, war nun nicht nur für Knack ein starkes Argument für die Richtigkeit von (5') – bereits die Mathematiker im alten China vor 2500 Jahren und viel später sogar noch G. W. Leibniz (1646 – 1716) hielten (5') für wahr, weil auch ihre Rechnungen kein Gegenbeispiel für (5') zu Tage förderten.

Dazu bemerkte Dr. Quaoar trocken: Sie haben alle nicht weit genug gerechnet! Erst der französische Mathematiker Pierre F. Sarrus (1798 – 1861) bewies 1819 mehr Ausdauer. Er untersuchte größere Zahlen  $n + 1$  als all seine Vorgänger und er wurde fündig:

$n + 1 = 341$  widerlegt (5').

Zunächst gilt: 341 ist ein Teiler von  $2^{10} - 1 = 3 \cdot 341$ . Wegen  $2^{340} - 1 = (2^{10} - 1)((2^{10})^{33} + (2^{10})^{32} + \dots + 2^{10} + 1)$  und wegen  $341 = 11 \cdot 31$  gilt: Die nicht prime Zahl 341 ist ein Teiler von  $2^{340} - 1$ .

Es gibt also ungerade nicht prime Zahlen  $n + 1$ , die Teiler von  $2^n - 1$  sind und die daher die Gültigkeit von (5') verhindern. Solche Zahlen  $n + 1$  heißen *ungerade chinesische Primzahlen*.

341 ist die kleinste chinesische Primzahl; die nächst größeren sind 561, 645, 1105, 1387, .... Chinesische Primzahlen sind weitaus seltener als Primzahlen. So etwa gibt es unterhalb von  $2 \cdot 10^{10}$  genau 882 206 716 Primzahlen, aber nur 19865 Chinesische Primzahlen.

Man hat jedoch bewiesen, dass es dennoch unendlich viele von ihnen gibt.

Eine ungerade chinesische Primzahl  $n + 1$  ist nicht nur Teiler von  $2^n - 1$ , sondern auch von  $2(2^n - 1)$ . Lässt man nun zu, dass  $n + 1$  auch gerade sein darf, dann definiert man  $n + 1$  als *gerade chinesische Primzahl*, wenn gilt:  $n + 1$  ist eine gerade nicht prime Zahl, die ein Teiler von  $2(2^n - 1)$  ist.

Es gibt unendlich viele gerade chinesische Primzahlen – sie sind viel seltener als die ungeraden. Die kleinste von ihnen ist  $161038 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$ , das heißt: 161038 ist ein Teiler der 48478-ziffrigen Zahl  $2 \cdot (2^{161037} - 1)$  (entdeckt von D. N. Lehmer, 1949).

## Pseudo-Primzahl

Da der Satz (5) nicht umkehrbar ist, vermutet Knack, dass auch der kleine Satz von Fermat (6) für  $a > 2$  nicht umkehrbar ist, dass also gilt:

(6') Es gibt nicht prime ungerade und mit  $a$  teilerfremde Zahlen  $n + 1$ , die Teiler von  $a^n - 1$ ,  $a \geq 2$  sind.

Quaoar nannte solche Zahlen *Pseudo-Primzahlen zur Basis  $a$* ; insbesondere sind chinesische Primzahlen damit Pseudo-Primzahlen zur Basis 2.

Nach einigen Rechnereien hatte Knack tatsächlich zwei dieser Pseudo-Primzahlen aufgespürt:

$n + 1 = 15$  ist Pseudo-Primzahl zur Basis 4 wegen  $4^{14} - 1 = 15 \cdot 17895697$ .

$n + 1 = 9$  ist Pseudo-Primzahl zur Basis 8 wegen  $8^8 - 1 = 9 \cdot 1864135$ .

Da kennt Quaoar aber weitaus mehr Pseudo-Primzahlen – in der folgenden Liste sind nur die mit  $n + 1 < 500$  und Basen  $\leq 8$  aufgeführt.



Basis $a$	Pseudo-Primzahl zur Basis $a$
2	341
3	91, 121
4	15, 85, 91, 341, 451
5	217
6	35, 185, 217, 301, 481
7	25, 325
8	9, 21, 45, 63, 65, 105, 117, 133, 153, 231, 273, 341, 481

Tatsächlich gilt: Zu jeder Basis  $a \geq 2$  gibt es unendlich viele Pseudo-Primzahlen.

## Carmichael-Zahlen

In Dr. Quaoars Liste sind die Zahlen 217 und 341 pseudoprim zu mehr als einer Basis. Und hätte man die Liste bis zu Basis  $a = 90$  fortgesetzt, dann hätte sich gezeigt, dass zum Beispiel 91 sogar für 35 verschiedene Basen  $\leq 100$  pseudoprim ist. Man wird sich also fragen – so Quaoar:

Gibt es auch eine Pseudo-Primzahl zu unendlich vielen Basen?

Mit diesem Problem hat sich der amerikanische Mathematiker Robert D. Carmichael (1879 – 1967) in einer Arbeit aus dem Jahr 1910 befasst und dabei entdeckt, dass die Zahl  $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$  pseudoprim ist zu jeder der unendlich vielen Basen  $a$ , die teilerfremd mit 3, 11 und 17 sind. Seither sagt man:

Eine ungerade zerlegbare Zahl  $n+1$  heißt *Carmichael-Zahl* oder auch absolute Pseudo-Primzahl zur Basis  $a \geq 2$ , wenn  $n+1$  ein Teiler von  $a^n - 1$  ist für jede zu  $n+1$  teilerfremde Basis  $a$ .

Beispiel: 561 ist ein Teiler jeder Zahl  $a^{560} - 1$  für jede Basis  $a \geq 2$ , die kein Vielfaches von 3, von 11 oder von 17 ist. Weil  $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$  und  $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$  teilerfremd sind, gilt etwa: 561 ist ein Teiler der unendlich vielen Zahlen  $(2015^m)^{560} - 1$  mit  $m = 1, 2, 3, \dots$

Die Folge der Carmichael-Zahlen beginnt mit 561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911,  $\dots$

Carmichael-Zahlen sind recht selten. Bezeichnet man mit  $C(x)$  die Anzahl der Carmichael-Zahlen, die  $\leq x$  sind, so hat man die folgende Liste berechnet:

$X$	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	$10^9$	$10^{10}$	...
$C(X)$	0	0	1	7	16	43	105	255	646	1547	...

Und dennoch gilt: Es gibt unendlich viele Carmichael-Zahlen (bewiesen 1992 von Ashford, Granville und Pomerance).

Die Carmichael-Zahlen sind „Gegenstücke“ zu den Primzahlen des Kleinen Satzes von Fermat. Ist nämlich  $n+1$  eine Carmichael-Zahl oder eine Primzahl, dann gilt für jede Basis  $a \geq 2$ , die mit  $n+1$  teilerfremd ist:  $n+1$  ist ein Teiler von  $a^n - 1$ .

An dieser Stelle brach Arturo Knack seinen Ausflug in das Reich der chinesischen Primzahlen und ihrer Verwandten ab.

Dr. Quaoar hatte aber noch einen Vorschlag: Man kann doch mal versuchen nachzuweisen, dass 561 tatsächlich Teiler von  $a^{260} - 1$  für die kleinsten zehn (20, 30, ...) mit 561 teilerfremden Basen  $a$  ist.

## Monoidale Knochelei

von Hartwig Fuchs

$$\begin{array}{r}
 S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \\
 \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \\
 M \ O \ N \ O \ I \ D \\
 + \ M \ O \ N \ O \ I \\
 + \ M \ O \ N \ O \\
 + \ M \ O \ N \\
 + \ M \ O \\
 + \ M \\
 \hline
 O \ M \ X \ N \ I \ Y \ D
 \end{array}$$

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine korrekte Addition entsteht, wobei gelten soll:

$$(1) \ M + O + N + O + I + D = OO,$$

$$(2) \ X = 5 \cdot O.$$

Gleichen (verschiedenen) Buchstaben sollen dabei gleiche (verschiedene) Ziffern zugeordnet werden. Bestimme die Zahl, die dem Wort *MONOID* zugeordnet ist.

### Lösung

Aus der Bedingung (2) folgt: Wegen  $X < 10$  gilt  $5 \cdot O < 10$ , sodass

$$(3) \ O = 1 \text{ und daher } X = 5 \text{ ist.}$$

Es ist  $S_1 = 6 \cdot M = OM = 10 + M$ , also  $5 \cdot M = 10$  und daher

$$(4) \ M = 2.$$

Wegen (3) findet kein Übertrag von  $S_4$  nach  $S_3$  statt und wegen (2) keiner von  $S_3$  nach  $S_2$ . Somit ist  $S_3 = 4 \cdot N = N$ , woraus folgt:

$$(5) \ N = 0.$$

Es ist  $S_5 = 2 \cdot I < 20$ . Annahme: Es sei  $2 \cdot I \geq 10$ , sodass also ein Übertrag 1 von  $S_5$  nach  $S_4$  stattfindet. Dann ist  $S_4 = 3 \cdot O + 1 = I$ , woraus mit (3) folgt:  $I = 4$ . Damit ergibt sich wegen  $S_5 = 2 \cdot I = 2 \cdot 4 < 10$  ein Widerspruch zur Annahme. Es ist daher  $2 \cdot I < 10$ , sodass  $S_4 = 3 \cdot O = I$  ist. Mithin gilt:

$$(6) \ I = 3 \text{ und } Y = 6.$$

Aus (1) folgt mit (3) bis (6):  $2 + 1 + 0 + 1 + 3 + D = 11$ , also

$$(7) \ D = 4.$$

Die eindeutige Lösung lautet somit: *MONOID* = 210134.

# Kleine Exkursion in die Teilbarkeit

von Hartwig Fuchs

## Primzahl-Zwillinge

Primzahl-Zwillinge sind zwei Primzahlen im Abstand 2 in der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen. Ein Zahlenpaar  $(n-1, n+1)$  aus Primzahl-Zwillingen  $n-1$  und  $n+1$  nennen wir ein Zwillingspaar, kurz ein  $Z$ -Paar.

$Z$ -Paare  $(n-1, n+1)$  gelten als ungezähmte Gesellen – kennt man doch bis heute außer dem direkten Nachweis der Primalität ihrer Komponenten  $n-1$  und  $n+1$  keine Methode, um sie in  $\mathbb{N}$  zu lokalisieren.

Dennoch kann man für diese anscheinend wahllos in  $\mathbb{N}$  verteilten  $Z$ -Paare durch ihre jeweiligen Komponenten Zahlen  $P_n$  definieren, die sämtlich in einer bemerkenswerten numerischen Eigenschaft übereinstimmen. Darauf wollen wir nun eingehen.

## Die Zahlen $P_n$

Für jedes  $Z$ -Paar  $(n-1, n+1)$  außer den beiden kleinsten  $Z$ -Paaren  $(3, 5)$  und  $(5, 7)$  sei die Zahl  $P_n$  so festgelegt:

$$P_n = (n-1)n^2(n+1) + 37n^2, \quad n \geq 12.$$

Für die vier ersten der im Folgenden betrachteten  $Z$ -Paare  $(11, 13)$ ,  $(17, 19)$ ,  $(29, 31)$  und  $(41, 43)$  sind  $P_{12} = 25920$ ,  $P_{18} = 116640$ ,  $P_{30} = 842400$  und  $P_{42} = 3175200$ .

Wir beabsichtigen, die Zahlen  $P_n$  auf ihre Teilbarkeit zu untersuchen. Deshalb formulieren wir  $P_n$  um:

$$P_n = n^2(n^2 + 36), \quad n \geq 12.$$

## Teilbarkeit durch 2

Weil  $n-1$  und  $n+1$  nach Voraussetzung Primzahlen  $\geq 11$  sind, also beide ungerade sind, ist  $n$  gerade. Es sei daher  $n = 2k$ ,  $k \geq 6$ . Für gerade  $k$  sei  $k = 2m$ , sodass  $n = 4m$  ist.

Dann gilt\*  $4|n \Rightarrow 16|n^2$  und  $4|n^2 + 36 \Rightarrow 64|P_n$ .

Für ungerades  $k$  sei  $k = 2m+1$ . Dann ist  $n = 4m+2$  und daher  $n^2 = 4(4m^2 + 4m + 1)$  sowie  $n^2 + 36 = 8(2m^2 + 2m + 5)$ . Daraus folgt  $4|n^2$  und  $8|n^2 + 36$ .

Daraus folgt:

- (1) Für jedes  $Z$ -Paar  $(n-1, n+1)$  mit  $n \geq 12$  gilt:  $32|P_n$ .

## Teilbarkeit durch 3

Da die Primzahlen  $n-1$  und  $n+1$  mit  $n \geq 12$  nicht durch 3 teilbar sind, ist  $n$  ein Vielfaches von 3.

\*  $a|b$  für ganze Zahlen  $a, b$  bedeutet:  $a$  ist ein Teiler von  $b$ .  $a \nmid b$  ist die Verneinung von  $a|b$ .

Aus  $3|n$  folgt  $9|n^2$  und  $9|n^2 + 36$ . Damit haben wir:

(2) Für jedes  $Z$ -Paar  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n \geq 12$  gilt:  $81|P_n$ .

### Teilbarkeit durch 5

Weil  $n \geq 12$  und gerade ist, setzen wir  $n = 10k + i$  mit  $i = 0, 2, 4, 6, 8$ . Für  $i = 0$  gilt  $5|n$  und daher  $25|n^2$ . Für  $i = 2$  oder  $i = 8$  gilt zwar  $5 \nmid n$ . Jedoch folgt aus  $n^2 + 36 = 100n^2 + 20in + i^2 + 36$  mit  $i^2 = 4$  oder  $i^2 = 64$ , dass  $5|(n^2 + 36)$ . Die Fälle  $i = 4$  und  $i = 6$  sind nicht möglich, denn für  $i = 4$  wäre  $n + 1 = 10k + 4 + 1$  nicht prim und für  $i = 6$  wäre  $n - 1 = 10k + 6 - 1$  nicht prim.

(3) Für jedes  $Z$ -Paar  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n \geq 12$  gilt:  $5|P_n$ .

### Zusammenfassung von (1), (2) und (3)

Aus  $2^5|P_n$  und  $3^4|P_n$  sowie  $5|P_n$  folgt  $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 = 12960|P_n$ :

(4) Für jedes  $Z$ -Paar  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n \geq 12$  hat  $P_n$  den Teiler 12960.

Mit einem Taschenrechner prüft man schnell nach, dass zum Beispiel  $P_{12} = 2 \cdot 12960$  und  $P_{30} = 65 \cdot 12960$  ist, sodass 12960 der größte gemeinsame Teiler von  $P_{12}$  und  $P_{30}$  ist. Daraus folgt mit (4) eine für sämtliche Zahlen  $P_n$ ,  $n \geq 12$ , numerisch übereinstimmende Eigenschaft:

(5) Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen  $P_n$  mit  $n \geq 12$  ist 12960.

### Anzahl der Teiler von $P_n$

Es sei  $A(m)$  die Anzahl der Teiler einer Zahl  $m \geq 1$ . Eine Berechnung von  $A(m)$  ermöglicht der

#### Satz

Für  $m \geq 1$  sei  $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$  mit lauter verschiedenen Primzahlen  $p_i$  und ganzen Zahlen  $e_i \geq 0$  sowie  $t \geq 1$  die (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Darstellung von  $m$  als Produkt von Primzahl-Potenzen. Dann gilt:  $A(m) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_t + 1)$ .

Aus diesem Satz folgt:

(6) Für jedes  $Z$ -Paar  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n \geq 12$  gilt:  $P_n$  hat mindestens 60 Teiler.

(6) ergibt sich so:

Wegen (5) ist  $P_n = 12960 \cdot k$  mit einem  $k \geq 1$  und daher  $A(P_n) = A(12960 \cdot k) \geq A(2^5 \cdot 3^4 \cdot 5) = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ .

Tatsächlich haben aber die Zahlen  $P_n$  wohl mehr als 60 Teiler – vergleiche die nachfolgende Tabelle, in der  $T = 12960$  gesetzt ist.

$n$	12	18	30	42	60	72	102	108	...
$P_n$	$2T$	$9T$	$65T$	$245T$	$1010T$	$2088T$	$8381T$	$10530T$	...
$A(P_n)$	70	84	180	270	210	252	360	378	...

Nach dieser Tabelle wird man vermuten, dass für  $n \geq 30$  die Anzahl  $A(P_n)$  der Teiler von  $P_n$  möglicherweise gilt:

(7) Für jedes  $Z$ -Paar  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n \geq 30$  gilt:  $P_n$  hat mindestens 180 Teiler.

Um der Vermutung (7) nachzugehen, stützen wir uns auf eine bemerkenswerte Eigenschaft aller  $Z$ -Paare  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n \geq 12$ . Wir hatten zwar eingangs behauptet,  $Z$ -Paare seien – wenn überhaupt! – nach einer nicht bekannten Regel in der Menge  $\mathbb{N}$  verteilt. Aber ein wenig können wir das Dunkel erhellen, das ihre Positionen in  $\mathbb{N}$  umgibt. Es gilt nämlich:

Ein Zahlenpaar  $(n - 1, n + 1)$  kann nur dann ein Paar aus Primzahlen (ein  $Z$ -Paar) sein, wenn  $n = 4, 6, 12, 18$  oder  $n = 30k, 30k + 12, 30k + 18$  mit einem  $k \geq 1$  ist. (Hiervon gilt die Umkehrung nicht, wie die Paare  $(n - 1, n + 1)$  mit  $n = 90, 132$  und  $48$  zeigen.)

Den einfachen Beweis dieses Satzes überlassen wir unseren Lesern.\*\* Nun zur Herleitung von (7).

Es sei  $n = 30k$  mit  $k \geq 2$ . Dann ist  $P_n = 30^2 k^2 (30k^2 + 36) = 30^2 \cdot 36k^2 (25k^2 + 1)$ . Wir setzen  $P_n = abc$  mit  $a = 30^2 \cdot 36 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ ,  $b = k^2$  und  $c = 25k^2 + 1$ . Wie groß ist  $A(P_n)$  mindestens?

Wenn  $b$  einen Primteiler  $p > 5$  besitzt, dann setzen wir  $b = p^2 \cdot b'$  mit  $b' \geq 1$ . Es ist dann  $A(P_n) = A(abc) \geq A(ap^2) = A(2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot p^2) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 > 180$ . Hat  $c$  einen Primteiler  $p > 5$ , so sei  $c = p \cdot c'$  mit  $c' \geq 1$ .

Weil  $bc$  eine gerade Zahl ist, gilt  $bc = 2 \cdot p \cdot d$  mit  $d \geq 1$ . Daraus folgt:  $A(P_n) \geq A(a \cdot 2p) = A(2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot p) = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ .

Nun sei vorausgesetzt, dass weder  $b$  noch  $c$  einen Primteiler  $> 5$  besitzen. Dann ist  $bc = 2^r 3^s 5^t$  mit  $r \geq 1$  ( $bc$  ist gerade),  $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Damit gilt:

(8)  $A(P_n) = (5 + r)(5 + s)(3 + t)$  wegen  $abc = 2^{4+r} 3^{4+s} 5^{2+t}$ ,  $r \geq 1$ ,  $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .

Es sei  $t \geq 3$ . Aus (8) folgt mit  $r \geq 1$ , dass  $A(P_n) \geq 6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$  ist.

Es sei  $t = 2$ . Für  $s \geq 1$  erhält man aus (8):  $A(P_n) \geq 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ . Ist  $s = 0$ , so folgt aus  $k \geq 2$ , dass  $bc = 2^r \cdot 3^0 \cdot 6^2 \geq 2^2(25 \cdot 2^2 + 1) = 404$  und somit  $r \geq 3$  ist. Dann gilt  $A(P_n) \geq 8 \cdot 5 \cdot 5 > 180$ .

Es sei  $t = 1$ . Für  $s \geq 3$  ist dann nach (8):  $A(P_n) \geq 6 \cdot 8 \cdot 4 > 180$ . Es sei nun  $s \leq 2$ . Dann ergibt sich aus  $bc = 2^r 3^s 5^1 \geq 404$ : Für  $s = 2$  ist  $r \geq 4$ , für  $s = 1$  ist  $r \geq 5$  und für  $s = 0$  ist  $r \geq 7$ . In allen drei Fällen erhält man aus (8), dass  $A(P_n) \geq 180$  ist.

Es sei  $t = 0$ . Für  $s \geq 5$  ist  $A(P_n) \geq 6 \cdot 10 \cdot 3 = 180$ . Es sei nun der Reihe nach  $s = 4, 3, 2, 1, 0$ . Aus  $bc = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^0 \geq 404$  ergibt sich dann eine – dem jeweiligen

\*\* Hinweis: Man betrachte die Zahlen  $30k + i$  mit  $0 \leq i < 30$  mit  $i \neq 0, 12, 18$ .

s entsprechende – Bedingung für den  $r$ -Wert:  $r \geq 3, 4, 6, 8, 9$ . Damit erhält man jeweils aus (8), dass  $A(P_n) \geq 180$  ist.

Es ist nun die Vermutung (7) für  $n = 30k + 12$  mit  $P_n = (30k + 12)^2((30k + 12)^2 + 36) = 6^4 \cdot 5(5k + 2)^2(5k^2 + 4k + 1)$  und für  $n = 30k + 18$  mit  $P_n = (30k + 18)^2((30k + 18)^2 + 36) = 6^4 \cdot 5(5k + 3)^2(5k^2 + 6k + 2)$  zu beweisen.

In beiden Fällen kann man (7) im Wesentlichen auf die gleiche Weise – zum Teil sogar in wörtlicher Übereinstimmung – wie oben für den Fall  $n = 30k$  herleiten. Wir verzichten deshalb hier auf diesen Beweis. Es gilt also (7).

Die Aussage (7) zeigt, dass die von  $Z$ -Paaren  $(n-1, n+1)$  festgelegten Zahlen  $P_n$  nicht wenige Teiler besitzen. Deren in (7) angegebene Mindestanzahl 180 wird allerdings häufig beträchtlich übertroffen – so etwa hat die zum  $Z$ -Paar  $(3359, 3361)$  gehörige Zahl  $P_{3360} = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 97$  bereits 4680 Teiler.

## Mathematische Entdeckungen

### Quader mit primen Seitenlängen

Die Seitenlängen  $x, y$  und  $z$  eines Quaders  $Q$  seien Primzahlen und seine Oberfläche sei eine Primzahlpotenz  $S^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ .

- a) Untersuche: Für welche Exponenten  $n$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots, 15$  gibt es Quader  $Q$ ?
- b) Finde eine Regel, mit der man nach den Quadern  $Q$  suchen kann!
- c) Kannst Du eine Beziehung (Gleichung) zwischen Oberfläche und Volumen der Quader  $Q$  angeben? (H.F.)

*Hinweis:* Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2016 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

## Lösung der Aufgabe aus Heft 125

In Heft 125 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

### Eine kanadische Knochelei

Betrachte die folgende Addition:

$$\begin{array}{r}
 T E N \\
 T E N \\
 N I N E \\
 E I G H T \\
 + T H R E E \\
 \hline
 = F O R T Y
 \end{array}$$

Man ersetze jeden Buchstaben so durch eine Ziffer, dass eine korrekte Addition entsteht.

Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern zugeordnet werden; führende Ziffern seien verschieden von 0.

(B. Shawyer, Universität Neu-Fundland, gefunden von H.F.)

*Hinweis:* Ein erfolgreicher Ansatz könnte die Annahme  $Y=0$  sein.

## Ergebnisse

Die kanadische Knobelei haben ausgeknobelt: Maximilian Göbe, Gymnasium Oberursel, Silas Rathke, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium Neumünster, Theresa Schöche, Frauenlob-Gymnasium Mainz, und Adriana Stenger, Karolinen-Gymnasium Frankenthal.

Für  $Y = 0$  ergibt sich als einzige Lösung:

$$\begin{array}{r} 417 \\ 417 \\ 7871 \\ 18324 \\ + 42511 \\ \hline = 69540 \end{array}$$

# Die Aufgabe für den Computer-Fan

## Treppenzahlen

Wie in den „Mathematischen Entdeckungen“ in MONOID 126 betrachten wir sogenannten Treppenzahlen. Treppenzahlen sind solche natürlichen Zahlen, die sich als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lassen. Zum Beispiel ist  $18 = 3 + 4 + 5 + 6$ , aber auch  $5 + 6 + 7$ ; 18 erlaubt also zwei Treppen, wogegen die Zahl 16 überhaupt keine solche Darstellung erlaubt. 16 ist also keine Treppenzahl.

Untersuche mit einem Computerprogramm die Zahlen von 3 bis 100 (oder auch größer) darauf, wie viele Treppen sie erlauben und berechne auch die Teilermenge der jeweiligen Zahl! Was fällt Dir bei den Ergebnissen auf? Sie enthalten die Begründung (nicht den Beweis), wie viele Treppen entstehen. (WG)

*Hinweis:* Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2016 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an [monoid@mathematik.uni-mainz.de](mailto:monoid@mathematik.uni-mainz.de) einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 125

## Eine Verallgemeinerung der kanadischen Knobelei aus den mathematischen Entdeckungen für Computer-Fans

Betrachte wie bei den mathematische Entdeckungen auf Seite ?? die Addition:

$$\begin{array}{r}
 T E N \\
 T E N \\
 N I N E \\
 E I G H T \\
 + T H R E E \\
 \hline
 = F O R T Y
 \end{array}$$

Schreibe ein Programm, das jeden Buchstaben so durch eine Ziffer ersetzt, dass eine korrekte Addition entsteht.

Dabei sollen verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern zugeordnet werden; führende Ziffern seien verschieden von 0. Verzichte jedoch auf die Annahme  $Y = 0$  (berechne also alle möglichen Lösungen). (nach H.F.)

### Ergebnisse

Die „Kanadische Knobelei“ in der Rubrik „Mathematik entdecken“ von H.F. kann mittels Computer ohne die Zusatzbedingung  $Y = 0$  gelöst werden und zwar nach dem Prinzip „Brute Force“; das heißt, es werden alle Möglichkeiten für die 10 vorkommenden Buchstaben durchprobiert. Dabei entspricht jedem der Buchstaben  $T, N, E, F$  genau einer der Ziffern 1 bis 9, für alle anderen kommt noch die Ziffer 0 dazu. Das sind dann  $9^4 \cdot 10^6 = 6\,561\,000\,000$  Möglichkeiten. Für jede Kombination ergeben sich verschiedene Summanden. Sollte ihre Summe *FORTY* ergeben, dann ist die jeweilige Kombination eine Lösung der Knobelaufgabe. Es ergeben sich sieben verschiedene Lösungen:

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>N</i>	<i>I</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>O</i>	<i>Y</i>	<i>S = FORTY</i>
1	4	8	2	3	9	6	7	0	5	70615
3	2	9	4	8	6	0	7	1	5	71035
4	1	7	8	3	2	5	6	9	0	69540
6	2	4	0	7	5	3	9	1	8	91368
6	3	1	0	7	5	2	9	8	4	98264
7	1	3	4	2	0	6	8	9	5	89675
7	1	8	2	3	4	0	9	6	5	96075



Erstaunlicherweise braucht mein Computer für diese Methode mit zehn Schleifen und über 6 Milliarden Tests für die jeweilige Summe noch nicht mal eine Minute! Dies haben auch die Schüler Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal, Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster, Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey herauszufinden versucht. Bei Marcel sind Programm und Lösung perfekt. Bei Silas gibt es nur einen kleinen Schönheitsfehler; er hat die drei Lösungen, bei denen eine Zahl mit Ziffer 0 beginnt, von Hand eliminiert, ansonsten perfekt. Bei Maximilian Hauck ist das Programm nicht ganz allgemein, sodass nur vier der sieben Lösungen heraus kommen.

## Lösungen der Mathespielereien aus MONOID 126

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

### I. Positive Produkte

Für beliebige Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt:

Die drei Produkte  $p_1 = (a - 2b)(ab - c^2)$ ,  $p_2 = (b - 2c)(bc - a^2)$  und  $p_3 = (c - 2a)(ac - b^2)$  können nicht sämtlich positiv sein. Warum? (H.F.)

*Lösung:*

Aus

$$p_1 = a^2b - ac^2 - 2ab^2 + 2bc^2,$$

$$p_2 = b^2c - a^2b - 2bc^2 + 2a^2c,$$

$$p_3 = ac^2 - b^2c - 2a^2c + 2ab^2,$$

folgt:  $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ . Daher können  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  nicht gleichzeitig  $> 0$  sein.

### II. Folgen

Es sei  $a_1, a_2, a_3, \dots$  eine arithmetische Folge, das heißt, es gelte  $a_{j+1} = a_j + d$  für alle  $j = 1, 2, 3, \dots$  und ein  $d > 0$ .

a) Gibt es eine solche Folge mit  $a_n = n$  für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$ ?

b) Gibt es eine solche Folge mit  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$  für alle  $n$ ? (WJB)

*Lösung:*

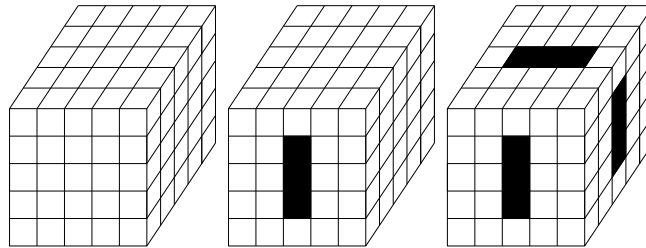
a) Es ist  $a_{j+1} - a_j = (j+1) - j = 1$  für alle  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Es gilt also  $a_{j+1} = a_j + 1$  für alle  $j = 1, 2, 3, \dots$ , das heißt die arithmetische Folge  $1, 2, 3, \dots$  erfüllt die Forderung.

b) Es muss gelten:  $a_1 = 1^2 = 1$ ,  $a_2 = 2^2 - a_1 = 4 - 1 = 3$ , also  $d = 2$ . Es handelt sich also um die Folge der ungeraden Zahlen  $a_n = 2n - 1$ . Für diese

ist tatsächlich  $s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 2(1 + 2 + \dots + n) - n = 2 \frac{(n+1)n}{2} - n = n^2$ .

### III. Quadervolumina

Gegeben seien drei Quader wie in der Abbildung. Dabei sei der erste Quader massiv und bestehe aus einer Vielzahl von Teilquadern, die jeweils ein Volumen von  $1\text{cm}^3$  haben. Im zweiten Würfel wird dann ein drei Teilquader breiter „Tunnel“ herausgeschnitten, im letzten Würfel sogar drei solcher „Tunnel“. Wie groß sind die Volumina der drei Quader? (gefunden: Ch. Sievert)



*Lösung:*

Der erste Quader besteht aus  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  Teilquadern, hat also ein Volumen von  $125\text{cm}^3$ . Beim zweiten Quader wurden  $3 \cdot 5 = 15$  Teilquader entfernt. Also ist sein Volumen  $125\text{cm}^3 - 15\text{cm}^3 = 110\text{cm}^3$ . Beim dritten wurden insgesamt  $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 33$  Quader entfernt, also ist das Volumen  $125\text{cm}^3 - 33\text{cm}^3 = 92\text{cm}^3$ .

### IV. Punkte-Verteilung in Halbebenen

In der Ebene seien 2000 Punkte markiert. Begründe: Man kann dann stets eine Gerade finden, die durch keinen dieser Punkte verläuft, sodass in jeder von der Geraden erzeugten Halbebene 1000 Punkte liegen. (H.F.)

*Lösung:*

Da die Anzahl der Punkte endlich ist, kann eine Gerade  $g$  so gewählt werden, dass keiner der 2000 Punkte auf ihr liegt und dass sie zu keiner Geraden parallel ist, die je zwei Punkte verbindet. Liegen in jeder der von  $g$  erzeugten Halbebenen  $H_1$  und  $H_2$  jeweils 1000 Punkte, dann sind wir fertig.

Wenn in  $H_1$   $p$  Punkte liegen,  $p \neq 1000$ , dann verschiebe man  $g$  parallel über so viele Punkte hinweg bis in  $H_1$  1000 Punkte liegen. Dann befinden sich auch in  $H_2$  1000 Punkte.

### V. Geburtsdatum

Die beiden Zwillinge Laura und Laurenz haben das folgende Gespräch. Laurenz: „Vorgestern waren wir noch 15.“ Laura: „Stimmt, und nächstes Jahr werden wir volljährig.“ Laurenz: „Das stimmt auch.“ Das Gespräch fand in diesem Jahr statt. Wann sind die Zwillinge geboren? (WJB)

*Lösung:*

Die Unterhaltung fand am Neujahrstag 2016 statt, einen Tag nach dem 16. Geburtstag 31.12.2015. Die beiden sind also am 31.12.1999 geboren und werden am 31.12. des nächsten Jahres (2017) 18 Jahre alt, also volljährig.

## VI. Summe und Produkt

Zeige: Die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist nicht durch 4 teilbar, aber ihr Produkt ist durch 8 teilbar. (H.F.)

*Lösung:*

Die vier aufeinander folgenden Zahlen seien  $n, n + 1, n + 2, n + 3$ . Dann ist  $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3)$ . Weil  $2n + 3$  ungerade ist, ist  $2(2n + 3)$  zwar durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

Zwei der vier Zahlen sind gerade und zwar ist eine von ihnen ein Vielfaches von 2, die andere ein Vielfaches von 4. Mithin ist das Produkt der vier aufeinander folgenden Zahlen durch  $2 \cdot 4 = 8$  teilbar.

## VII. Zehn Teiler

Bestimme alle Zahlen kleiner 100, die genau zehn Teiler haben. (KG)

*Hinweis:* Was hat die Primfaktorzerlegung mit den Teilern einer Zahl zu tun?

*Lösung:*

Eine Zahl  $n$  mit der Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  hat genau  $m = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$  Teiler. Denn jeder Teiler von  $n$  hat die Form  $t = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ , wobei  $0 \leq b_i \leq a_i$  für  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Eine Zahl  $n$  mit  $m = 10$  Teilern hat daher wegen  $m = 10 = 2 \cdot 5 = (1 + 1)(1 + 4)$  genau zwei Primteiler (eine Zahl  $n = p^9$  besitzt zwar ebenfalls genau 10 Teiler, Zahlen dieser Form sind aber wegen  $n = p^9 \geq 2^9 = 512$  immer  $> 100$ ) und eine Primfaktorzerlegung der Form  $n = p^4 q^1$ . Für  $p = 2$  und  $q = 3$  ergibt sich  $n = 2^4 \cdot 3 = 48$  und für  $p = 2$  und  $q = 5$  ergibt sich  $n = 2^4 \cdot 5 = 80$ . Alle anderen Wahlen für  $p$  und  $q$  führen zu Zahlen größer 100.

# Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

## I. Wie viele Nullen?

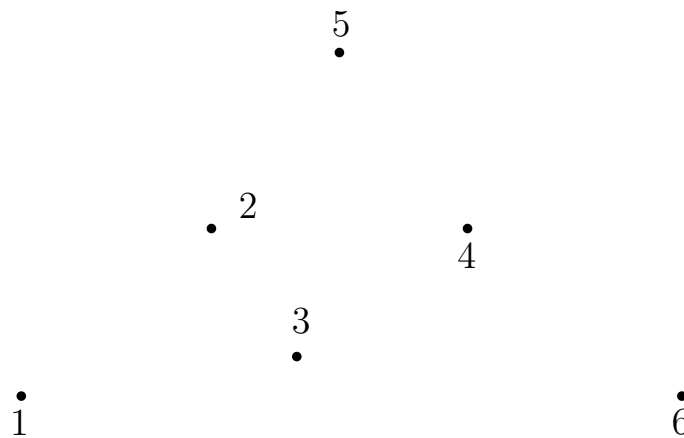
Wie viele Nullen stehen am Ende der Zahl 2016! ? (Christoph Sievert)

## II. Quersumme

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es mit Quersumme 9? (H.F.)

### III. Sechs Punkte, 12 Strecken

Verbinde die sechs Punkte 1, 2, ..., 6 durch Strecken so, dass jeder Punkt mit vier anderen Punkten verbunden ist und die Verbindungsstrecken sich nicht schneiden. (H.F.)



### IV. Ein magisches Quadrat

112	36	12	40
60	8	144	28
72	84	20	16
4	80	56	108

Finde heraus, warum das Zahlenquadrat wohl magisch heißt! Welches ist die magische Zahl des Quadrats? (WJB)

### V. Durchschnittsgeschwindigkeiten

Zwei Läufer haben eine Wette abgeschlossen. Der eine sagt zum anderen, dass er niemals zwei Runden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $10\frac{m}{s}$  laufen könnte. Eine Runde hat eine Länge von 1km. In der ersten Runde kommt der Läufer nur auf eine Durchschnittsgeschwindigkeit von  $8\frac{m}{s}$ . Wie schnell müsste er also die zweite Runde laufen, damit er seine Wette noch gewinnt? (Kevin Mours, Karolinen-Gymnasium, Frankenthal)

### VI. Winkelbestimmung

In einem spitzwinkligen, aber nicht gleichseitigen Dreieck  $\triangle ABC$  sei  $w_\alpha$  die Halbierende des Winkels  $\alpha$  bei  $A$  und  $h_C$  sei die Höhe aus  $C$ .  $w_\alpha$  und  $h_C$  schneiden sich im Punkt  $P$  und es gelte:  $|AP| = |CP|$ . Wie groß ist der Winkel  $\alpha$ ? (H.F.)

### VII. Zwei Teiler

Eine natürliche Zahl  $n$  habe genau 16 Teiler – zwei davon sind 21 und 22. Welche Zahl ist  $n$ ? (H.F.)

# Neue Aufgaben

Klassen 9–13

## Aufgabe 1162: Nullstellen-Summe

Es sei  $f$  eine Funktion, für die gilt:  $f$  ist für alle reellen Zahlen definiert und  $f(672 - x) = f(672 + x)$ .  $f$  hat genau drei reelle Nullstellen  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$  mit  $r_3 = 1345$ . Wie lautet dann die Summe  $r_1 + r_2 + r_3$ ? (H.F.)

## Aufgabe 1163: Murmeln

In einer Schachtel liegen rote und blaue Murmeln. Entnimmt man der Schachtel eine rote Kugel, dann sind danach  $\frac{1}{4}$  der Kugeln in der Schachtel rot.

Legt man aber noch eine rote Kugel in die Schachtel, so sind dann  $\frac{1}{3}$  aller Kugeln in der Schachtel rot.

Wie viele blaue Kugeln befinden sich in der Schachtel? (H.F.)

## Aufgabe 1164: Rechnung für ein Geschäftsessen

Eine Gruppe von Geschäftsleuten traf sich in einem Restaurant. Nach dem Essen beschlossen sie, jeder von ihnen solle den gleichen Betrag zur Bezahlung der Rechnung beisteuern. Wenn jeder von ihnen 32 € gab, fehlten 8 € zum Rechnungsbetrag. Gab aber jeder von ihnen 38 €, dann konnten sie Rechnung sowie 15% Trinkgeld bezahlen und es blieben 4 € übrig. Wie viele Personen nahmen am Essen teil und wie hoch war die Rechnung? (H.F.)

## Aufgabe 1165: Eine päpstliche Regel

Im frühen Mittelalter war das mathematische Wissen der Griechen und der Römer fast vollständig in Vergessenheit geraten. Damals stellt Gerbert von Aurillac (um 950–1003) – der spätere Papst Sylvester II, von dem berichtet wird, dass er als der größte Gelehrte seiner Zeit galt und wegen seiner für die damalige Zeit erstaunlichen mathematischen Kenntnisse sogar als Zauberer verdächtigt wurde – folgende geometrische Regel auf:

Im gleichseitigen Dreieck ist die Höhe stets um  $\frac{1}{7}$  der Seitenlänge kürzer als die Dreiecksseite.

Überprüfe diese Regel auf Korrektheit! (H.F.)

## Aufgabe 1166: Ränder-Zahlenspiel

Auf einem Blatt Papier wird eine gerade Anzahl von beliebigen positiven Zahlen auf einer Linie notiert. Auch gleiche Zahlen sind zulässig. Zwei Spieler spielen damit folgendes Spiel: Abwechselnd streicht jeder der Spieler eine der beiden Randzahlen links oder rechts. Es gewinnt, wer die höchste Gesamtsumme der gestrichenen Zahlen erzielt.

Überprüfe, welcher der beiden Spieler nach welcher Strategie gewinnen kann bzw.

bei gerader Gesamtsumme aller Zahlenwerte mindestens Remis erzwingen kann. (FR)

### Aufgabe 1167: Größter gemeinsamer Teiler 1

Unter  $n + 1$  positiven ganzen Zahlen  $g_i$ , die sämtlich  $\leq 2n$  sind, gibt es stets mindestens zwei Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Trifft diese Behauptung zu? (H.F.)

### Aufgabe 1168: Niemals eine Primzahl

Wenn  $p$  eine Primzahl  $\neq 3$  ist, dann ist  $p^2 + 2$  keine Primzahl. Zeige dies. (H.F.)

## Gelöste Aufgaben aus MONOID 126

Klassen 9–13

### Aufgabe 1155: Lösbar oder nicht?

Entscheide, ob die Gleichung

$$(1) \quad x + y + x \cdot y = 2016$$

eine positive ganzzahlige Lösung besitzt oder nicht. (H.F.)

*Lösung:*

Aus  $2016 = x + y + x \cdot y = (x + 1)(y + 1) - 1$  folgt  $2017 = (x + 1)(y + 1)$ . Da 2017 eine Primzahl ist, muss einer der beiden Faktoren gleich 1 und damit  $x$  oder  $y$  gleich 0 sein. Es existiert also keine ganzzahlige Lösung der Gleichung (1).

### Aufgabe 1156: Potentzturm

Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  und eine reelle Zahl  $k > 1$  definieren wir einen Potentzturm durch:  $k \wedge 1 = k$  und  $k \wedge n = k^{k \wedge (n-1)}$ ,  $n > 1$ . So ist etwa  $k \wedge 3 = k^{k^k}$  ein Potentzturm mit drei „Etagen“. Es sei nun  $T_{2016}$  der Potentzturm  ${}^{2016}\sqrt{2016} \wedge 2016$  mit 2016 Etagen. Welche Zahl ist dann größer:  $T_{2016}$  oder 2016? (H.F.)

*Lösung:*

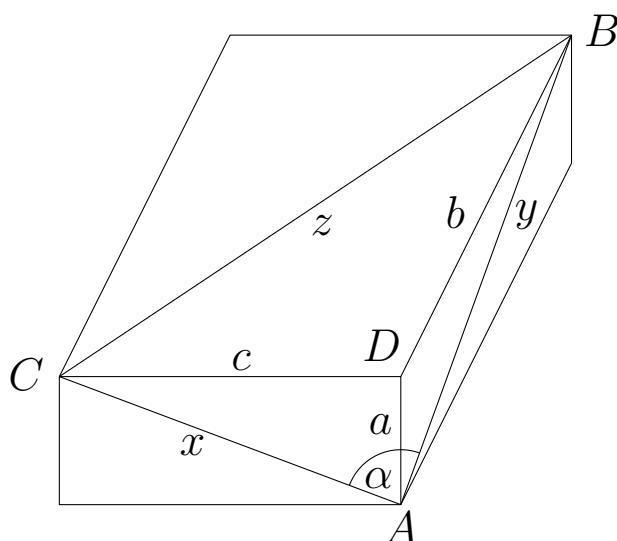
Es sei  $k = \sqrt[n]{n}$  für ein  $n > 1$ . Dann ist  $k < n$  wegen  $k^n = \sqrt[n]{n^n} = n$ . Daher ist  $k \wedge 2 = k^k < k^n = n$ . Weiter ist  $k \wedge 3 < n$  wegen  $k \wedge 3 = k^{k \wedge 2} < k^n = n$ . So fortfahrend ergibt sich  $k \wedge n < n$  wegen  $k \wedge n = k^{k \wedge (n-1)} < k^n = n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$

Für  $k = {}^{2016}\sqrt{2016}$  und  $n = 2016$  gilt somit  $T_{2016} < 2016$ .

### Aufgabe 1157: Zündholzschachtel

Sonia misst zwei Diagonalen von Seiten einer Zündholzschachtel:  $x = 4\text{cm}$ ,  $y = 5\text{cm}$ . Sie schätzt die dritte Diagonale auf  $7\text{cm}$ . Ihre Freundin Kirsten denkt kurz nach und sagt dann: „Nein, die dritte Diagonale ist kürzer.“ Zeige, dass Kirsten recht hat! (WJB)

Lösung:



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:  $x^2 = a^2 + c^2$ ,  $y^2 = a^2 + b^2$ ,  $z^2 = b^2 + c^2$ . Daraus folgt  $x^2 + y^2 - z^2 = 2a^2 > 0$ . Also ist  $z < \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 25}\text{cm} = \sqrt{41}\text{cm} < 7\text{cm}$ .

*Alternative Lösung:* Der Cosinussatz für das Dreiecke  $\triangle ABC$  liefert:

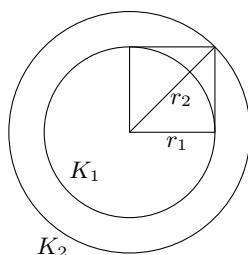
$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha) < x^2 + y^2$ , da  $\alpha < 90^\circ$ , also  $\cos(\alpha) > 0$ . Also ist  $z < \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 25}\text{cm} = \sqrt{41}\text{cm} < 7\text{cm}$ .

### Aufgabe 1158: Verdopplung einer Kreisscheibe

Konstruiere zu einem Kreis  $K_1$  mit beliebigem Radius  $r_1$  einen Kreis  $K_2$  mit dem doppelten Flächeninhalt.

In welchem Verhältnis stehen die Umfänge der beiden Kreise? (AK)

Lösung:



Es sei  $r_2$  der Radius von  $K_2$ . Nach Anwendung des Satzes des Pythagoras gilt:  $r_2^2 = 2r_1^2$ , also  $r_2 = r_1\sqrt{2}$ . Die Umfänge sind also  $U_1 = 2r_1\pi$  und  $U_2 = 2r_1\sqrt{2}\pi$ , also gilt  $\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{2}$ .

*Bemerkung:* Hat der Kreis  $K_2$  allgemein den  $x$ -fachen Kreisinhalt,  $x$  eine beliebige positive reelle Zahl, des Kreises  $K_1$ , so zeigt eine analoge Rechnung, dass die Umfänge der beiden Kreise im Verhältnis  $\sqrt{x}$  stehen.

### Aufgabe 1159: Skilifte

In einem Skigebiet gibt es zwischen den Stationen  $A$ ,  $B$  und  $C$  jeweils mehrere Skilifte. Diese führen entweder mit einmaligem Umsteigen an einer der Stationen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  oder ohne Umsteigen unmittelbar von einer Station zu einer anderen Station. Dabei kann jeder Lift in beide Richtungen benutzt werden.

Es gibt zehn Möglichkeiten, um von  $A$  nach  $B$ , 14 Möglichkeiten, um von  $B$  nach  $C$  und weniger als zwölf Möglichkeiten, um von  $C$  nach  $A$  zu gelangen. Wie viele Lifte gibt es insgesamt? (H.F.)

*Lösung:*

Es seien  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Anzahlen der Lifte, die ohne Umsteigen von  $A$  nach  $B$ , von  $B$  nach  $C$  und  $C$  nach  $A$  führen. Dann gibt es

- (1)  $x + yz = 10$  Liftstrecken von  $A$  nach  $B$ ,
- (2)  $y + xz = 14$  Liftstrecken von  $B$  nach  $C$  und
- (3)  $z + xy < 12$  Liftstrecken von  $C$  nach  $A$ .

Aus (1) und (2) folgt durch Addition

$$x + y + xz + yz = (x + y) + (x + y) \cdot z = (x + y)(1 + z) = 24.$$

Daher müssen  $1 + z$  und  $x + y$  Teiler von 24 sein. Die möglichen Werte für  $1 + z$  und  $x + y$  sind die folgenden:

$1 + z$		1	2	3	4	6	8	12	24
$x + y$		24	12	8	6	4	3	2	1

Die Werte  $1 + z = 12$ ,  $24$  entfallen wegen (3) und (1). Der Wert  $1 + z = 1$  entfällt wegen  $z \neq 0$ . Der Wert  $1 + z = 2$  entfällt, weil nach Tabelle  $x + y = 12$  und nach (1)  $x + y = 10$  ist.

Dann lautet (1) nacheinander

für  $1 + z = 3$  und  $x + y = 8$  so:  $8 + y = 10$ , also  $y = 2$ ,  $x = 6$ , aber  $z = 2$ ,  $y = 2$ ,  $x = 6$  widerspricht (3);

für  $1 + z = 4$  und  $x + y = 6$  so:  $6 + 2y = 10$ , also  $y = 2$ ,  $x = 4$  und  $z = 3$ ,  $y = 2$ ,  $x = 4$  erfüllt (1), (2) und (3);

für  $1 + z = 6$  und  $x + y = 4$  so:  $4 + 4y = 10$ , also ist  $y$  nicht ganzzahlig;

für  $1 + z = 8$  und  $x + y = 3$  so:  $3 + 6y = 10$ , also ist  $y$  nicht ganzzahlig.

Also führen ohne Umsteigen 4 Lifte von  $A$  nach  $B$ , 2 Lifte von  $B$  nach  $C$  und 3 Lifte von  $C$  nach  $A$ . Es gibt daher insgesamt  $4 + 2 + 3 = 9$  Lifte.

### Aufgabe 1160: Mädchen oder Junge?

In einer Klinik wurden im März 2016 23 Kinder geboren (darunter keine Zwillinge). Unter der (näherungsweise richtigen) Annahme, dass ein Neugeborenes mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Mädchen oder ein Junge ist,

- a) berechne die Wahrscheinlichkeit, dass 10 Jungen und 13 Mädchen geboren wurden.



b) Finde ein Ereignis  $E$ , dessen Wahrscheinlichkeit gleich

$$\binom{12}{4} \binom{11}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{23}$$

ist.

c) Wenn Du b) gelöst hast, bist Du auch in der Lage, ohne Rechnung zu begründen, dass

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{12}{j} \binom{11}{10-j} = \binom{23}{10}.$$

Gib diese Begründung!

(WJB)

*Lösung:*

a)  $X$  sei die Anzahl der geborenen Jungen. Die Wahrscheinlichkeit, dass 10 Jungen geboren wurden, kann wie folgt berechnet werden.

$$P(X = 10) = \binom{23}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{13} = \binom{23}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{23},$$

denn es gibt  $\binom{23}{10}$  Möglichkeiten, 10 der 23 Geburten auszuwählen, die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesen 10 Geburten nur Jungen geboren werden, beträgt  $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$  und die Wahrscheinlichkeit, dass bei den anderen 13 Geburten nur Mädchen geboren werden, beträgt  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{13}$ . ( $X$  ist in diesem Fall eine sogenannte binomialverteilte Zufallsgröße.)

b)  $E =$  „4 Jungen unter den ersten 12 Geburten und 6 Jungen unter den letzten 11 Geburten“ hat die gegebene Wahrscheinlichkeit.

c) Mit  $E_j =$  „ $j$  Jungen der ersten 12 und  $(10 - j)$  unter den letzten 11 Geburten“ ist

$$P(E_j) = \binom{12}{j} \binom{11}{10-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{23}$$

und

$$P(X = 10) = P(E_0) + P(E_1) + \dots + P(E_{10}) = \sum_{j=0}^{10} \binom{12}{j} \binom{11}{10-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{23}.$$

Andererseits wissen wir aus a), dass

$$P(X = 10) = \binom{23}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{23},$$

also auch

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{12}{j} \binom{11}{10-j} = \binom{23}{10}.$$

## Aufgabe 1161: Zahlen zur Basis $n$

Eine Zahl sei im System mit der Basis  $n$  dreistellig:  $(xyz)_n$ .

- a) Was wissen wir über  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $n$ , wenn  $(xyz)_n = (n+1)^2$ ?  
b) Es sei  $n = 5$ . Bestimme die Lösung von  $(xyz)_n = (n+2)^2$  (WJB)

*Lösung:*

- a)  $(xyz)_n = x \cdot n^2 + y \cdot n + z = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = (121)_n$ , also ist  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1$  und  $n > 2$ , da  $x, y, z < n$  sein müssen. (Für  $n = 2$  wäre  $n^2 + 2n + 1 = 9 = (1001)_2$  vierstellig.)  
b)  $x \cdot n^2 + y \cdot n + z = n^2 + 4n + 4 = (144)_n = 5^2 + 4 \cdot 5 + 4 = 49$ .

## Trugschluss – Reich durch Tauschen

von Laura Biroth

Bob ist Teilnehmer an einer Spielshow. Die Moderatorin Alice zeigt ihm zwei Umschläge, von denen der eine doppelt so viel Geld enthält, wie der andere. Nachdem Bob einen davon ausgewählt hat, fragt Alice ihn, ob er nicht doch nochmal wechseln möchte.

Bob überlegt: „Wenn der Umschlag, den ich jetzt in der Hand halte,  $x\text{€}$  enthält, dann habe ich, wenn ich wechsle eine Chance von 50%  $2x\text{€}$  zu bekommen, und ebenso eine Chance von 50% nur  $\frac{x}{2}\text{€}$  zu erhalten. Im Durchschnitt sollte ich also  $0,5 \cdot 2x + 0,5 \cdot \frac{x}{2} = 1,25x\text{€}$  erhalten. Das ist mehr als ich jetzt habe. Ich sollte also wechseln.“

Nachdem Bob den Umschlag gewechselt hat, stellt er wieder die gleiche Überlegung an. Langsam kommen ihm Zweifel: „Wenn ich jetzt tausche, habe ich wieder den gleichen Umschlag wie am Anfang. Ich kann doch durch hin und her tauschen nicht mein Geld vermehren?!“

Was stimmt hier nicht? Bob nimmt an, dass unabhängig von dem Betrag  $x$  in seinem Umschlag die Beträge  $2x\text{€}$  und  $\frac{x}{2}\text{€}$  im anderen Umschlag gleich wahrscheinlich sind. Diese Annahme ist aber nicht nur ungerechtfertigt, sondern unmöglich. Selbst wenn man annimmt, dass die Veranstalter der Show jeden rationalen Betrag (gleichgültig, ob es sich um ganze Euro, Cent oder Bruchteile davon handelt) in ihre Umschläge packen könnten, können sie Bobs Annahme nicht erfüllen.

Sei  $U_1$  der Betrag im ausgewählten, und  $U_2$  der Betrag im anderen Umschlag. Nehmen wir an  $p_1 > 0$  sei die Wahrscheinlichkeit, dass der billigere Umschlag den Betrag  $\frac{x}{2}$  und der teurere Umschlag den Betrag  $x$  enthält. Genauso sei  $p_2$  die Wahrscheinlichkeit, dass im billigeren Umschlag  $x$  und im teureren Umschlag  $2x$  Euro sind. In jedem dieser Fälle ist die Wahrscheinlichkeit, von den beiden

Umschlägen den Umschlag mit Betrag  $x$  zu ziehen gleich  $\frac{1}{2}$ . Also gilt:

$$P(U_1 = x\text{€ und } U_2 = \frac{x}{2}\text{€}) = p_1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$P(U_1 = x\text{€ und } U_2 = 2x\text{€}) = p_2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt:

$$P(U_1 = x\text{€}) = p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Also gilt, für die Wahrscheinlichkeiten den Betrag von  $\frac{x}{2}\text{€}$  bzw.  $2x\text{€}$  im anderen Umschlag zu finden:

$$\begin{aligned} P(U_2 = \frac{x}{2}\text{€, wenn } U_1 = x\text{€}) &= \frac{P(U_1 = x\text{€ und } U_2 = \frac{x}{2}\text{€})}{P(U_1 = x\text{€})} \\ &= \frac{p_1 \cdot \frac{1}{2}}{p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \\ P(U_2 = 2x\text{€, wenn } U_1 = x\text{€}) &= \frac{P(U_1 = x\text{€ und } U_2 = 2x\text{€})}{P(U_1 = x\text{€})} \\ &= \frac{p_2 \cdot \frac{1}{2}}{p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{p_2}{p_1 + p_2}. \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten, sind also nur dann gleich groß, wenn  $p_1 = p_2$  ist.

Bobs Annahme kann also nur stimmen, wenn für jeden möglichen Betrag  $x$  der mit Wahrscheinlichkeit  $p > 0$  gewählt wird, auch die Beträge  $\dots, \frac{x}{4}, \frac{x}{2}, x, 2x, 4x, \dots$ , oder mit anderen Worten alle Beträge der Form  $2^n x$  für eine (positive oder negative) ganze Zahl  $n$ , gleich wahrscheinlich sind.

Für Wahrscheinlichkeiten gilt aber, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eines von zwei Ereignissen eintritt, die nicht gleichzeitig eintreten können (wie zum Beispiel:  $A$  = „Der Betrag in Umschlag 1 ist  $x$ “ und  $B$  = „Der Betrag in Umschlag 1 ist  $2x$ “), die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist. In Formeln:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Das Gleiche gilt auch für die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Ereignissen (also allen Ereignissen die sich mit den ganzen oder natürlichen Zahlen durchnummerieren lassen). Bezeichnen wir also mit  $A_n$  das Ereignis „Der erste (billigere) Umschlag enthält  $2^n x\text{€}$ “, so gilt

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p = \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn Wahrscheinlichkeiten können nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Bobs Annahme, dass alle Beträge gleich wahrscheinlich auftreten, muss also falsch gewesen sein.

# Die besondere Aufgabe Der Spionagesatellit

von Wolfgang J. Bühler

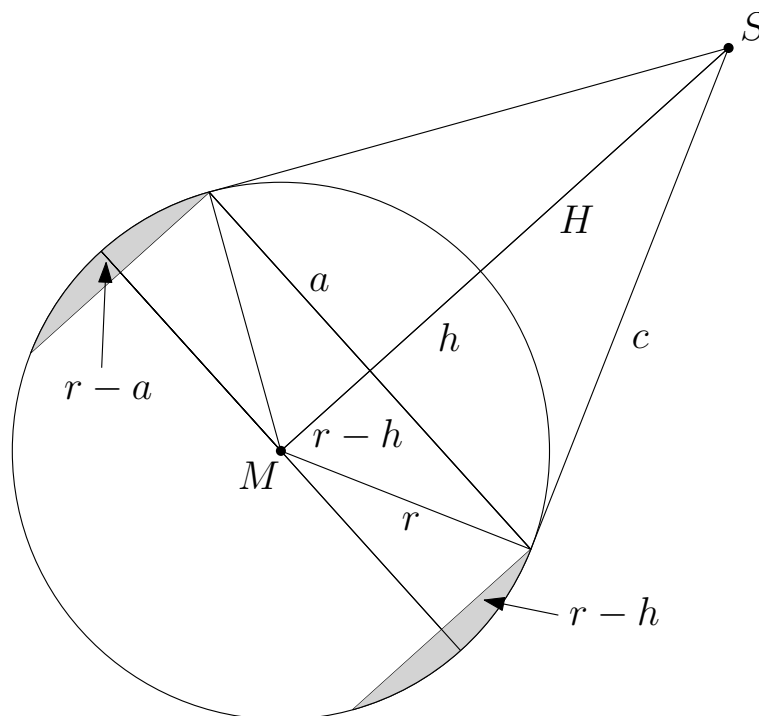
## Die Aufgabe

Ein Spionagesatellit umrunde die Erde auf einer kreisförmigen Bahn, deren Zentrum der Erdmittelpunkt ist, sodass der Satellit in einer Höhe  $H$  von 800km über der Erdoberfläche schwebt.

- Welchen Anteil der Erdoberfläche „sieht“ der Satellit zu einem festen Zeitpunkt?
- Wie viel „sieht“ er insgesamt während eines Umlaufs?  
Nimm dabei an, die Erde sei eine exakte Kugel mit Radius  $r = 6366\text{km}$ .
- Lässt sich der jeweils gesehene Anteil verbessern, indem man eine andere Richtung der Umlaufbahn wählt?

## Lösung

Die Skizze zeigt einen Querschnitt senkrecht zur Umlaufbahn des Satelliten.



Die vom Satelliten momentan sichtbare Oberfläche ist die  $S$  zugewandte Kugelkappe. Die während eines Umlaufs nie sichtbare Oberfläche besteht aus den beiden grauen Kugelkappen.

Wir brauchen also für a) die Fläche der ersten Kugelkappe. Für diese gilt:  $F_1 = 2\pi rh$ . Entsprechend ergibt sich für b) die gesuchte Fläche  $F_2 = 4\pi r^2 - 2 \cdot 2\pi r(r - a) = 4\pi ra$ . Zur Lösung der Aufgabe brauchen wir also  $h$  und  $a$ .

Zur Bestimmung dieser Größen verwenden wir den Satz des Pythagoras dreimal:

$$(1) \quad c^2 = a^2 + (h + H)^2;$$

$$(2) \quad a^2 = r^2 - (r - h)^2;$$

$$(3) \quad (r + H)^2 = r^2 + c^2.$$

Aus (2) ergibt sich

$$a^2 = r^2 - (r - h)^2 = r^2 - (r^2 - 2rh + h^2) = 2rh - h^2.$$

Aus (3) und (1) schließen wir

$$r^2 + 2rH + H^2 = (r + H)^2 = r^2 + c^2 = r^2 + a^2 + (h + H)^2 = r^2 + r^2 - (r - h)^2 + (h + H)^2 = r^2 + 2rh - h^2 + h^2 + 2hH + H^2, \text{ das hei\u00dft } 2rH = 2rh + 2hH.$$

Nach  $h$  aufgel\u00f6st:

$$h = \frac{rh}{h+H} = 710,7\text{km}.$$

Damit ergibt sich die Fl\u00e4che  $F_1 = 2\pi rh = 28427117\text{km}^2$ .

Zur Berechnung von  $F_2$  bestimmen wir zun\u00e4chst  $a$  aus (2):

$$a = \sqrt{r^2 - (r - h)^2} = 2923\text{km},$$

also

$$F_2 = 4\pi(r^2 - r^2 + ra) = 4\pi ra = 26840316\text{km}^2.$$

Die jeweils gesuchten Anteile sind also

$$\frac{F_1}{4\pi r^2} = 0,0558 = 5,58\%$$
$$\frac{F_2}{4\pi r^2} = 0,459 = 45,9\%.$$

Zur Aufgabe c): Bei einer anderen Umlaufbahn d\u00fcrfen wir erwarten, dass der Satellit nach einem vollst\u00e4ndigen Umlauf nicht \u00fcber der gleichen Stelle der Erdoberfl\u00e4che ankommt, das hei\u00dft beim n\u00e4chsten Umlauf andere Teile der Erde beobachtet.

## Eine Geometrie, die nicht konstruiert

von Hartwig Fuchs

In der Ebene seien endlich viele Punkte beliebig verteilt. Man versucht dann herauszufinden, ob man diese Punkte auf eine vorgegebene Weise durch Linien (Geraden, Kreise, ...) voneinander trennen kann. Dabei verlangt man nicht, dass die gesuchten Trennlinien konstruiert werden. Vielmehr begn\u00fcgt man sich damit, dass man ihre Existenz nachweist.

Wir werden einige typische S\u00e4tze der Trennungsgeometrie herleiten.

Grundlegend daf\u00fcr ist:

## Satz 1

- (1) In der Ebene sei eine Menge  $M$  von  $2n$  Punkten,  $n \geq 1$ , beliebig gegeben. Dann gibt es eine Trenngerade  $t$ , für die gilt: Auf jeder Seite von  $t$  befinden sich  $n$  Punkte aus  $M$ .

Zunächst zeigen wir:

Zu jeder endlichen Menge von Punkten der Ebene gibt es stets eine Kreislinie  $k$ , in deren Innengebiet sich alle Punkte aus  $M$  befinden.

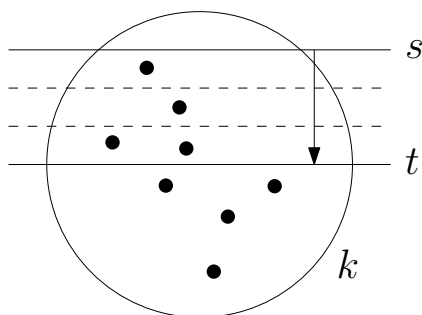
Nachweis:

Es sei  $d$  der größte der Abstände, den ein beliebiger Punkt  $P$  aus  $M$  von den übrigen Punkten aus  $M$  hat. Dann gilt die Behauptung für jede Kreislinie  $k$  mit dem Mittelpunkt  $P$  und dem Radius  $d + a$ ,  $a > 0$ .

Nun zum Beweis von Satz 1\*:

Man verbinde jede zwei Punkte aus  $M$  durch eine Strecke. Da die Anzahl der Punkte aus  $M$  endlich, nämlich  $2n$ , ist, erhält man so auch nur endliche viele – höchstens  $n(2n - 1)$  – Strecken.

Dann kann man stets eine Gerade  $s$  außerhalb einer sämtliche Punkte von  $M$  einschließenden Kreislinie  $k$  so wählen, dass gilt:  $s$  ist zu keiner der höchstens  $n(2n - 1)$  Verbindungsstrecken von Punkten aus  $M$  parallel.



Wir können nun  $s$  parallel so verschieben, dass dabei  $s$  nacheinander immer nur einen der Punkte aus  $M$  überquert – denn überquerte  $s$  gleichzeitig zwei Punkte  $P$  und  $Q$  aus  $M$ , so wäre die Strecke  $PQ$  parallel zu  $s$  im Widerspruch zur Wahl von  $s$ .

Beenden wir die Parallelverschiebung von  $s$  nach der Überquerung von genau  $n$  Punkten aus  $M$  mit einer Geraden  $t$ , so ist mit  $t$  Satz 1 bewiesen.

Eine naheliegende Verallgemeinerung der Situation in Satz 1 ist: Man zerlege eine Menge  $M$  von Punkten durch mehrere Trenngeraden. Wir betrachten hier nur den Fall zweier Trenngeraden. Der Fall paralleler Trenngeraden ist leicht auf Satz 1 zurückführbar, weshalb wir ihn unseren Lesern überlassen als

## Aufgabe 1 (Lösung ab Seite ??)

In der Ebene seien  $3n$  Punkte beliebig gegeben. Dann gibt es zwei parallele Geraden, die die Ebene in drei Gebiete so zerlegen, dass gilt: Im Inneren jeden Gebiets liegen  $n$  der gegebenen Punkte.

\* Die Figuren sind im Folgenden keine Bestandteile des logischen Gerüsts von Beweisen. Sie dienen nur der Veranschaulichung von Beweis-Schritten.

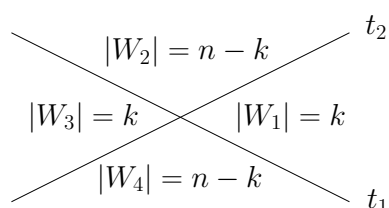
## Satz 2

- (2) In der Ebene sei eine Menge  $M$  von  $2n$  Punkten,  $n \geq 1$ , beliebig gegeben. Dann gibt es zwei sich schneidende Geraden, die die Ebene so in vier Winkel zerlegen, dass gilt: Im Inneren nicht benachbarter Winkelfelder liegen gleich viele Punkte aus  $M$ .

Beweis von Satz 2:

Man verbinde jede zwei Punkte aus  $M$  durch eine Strecke. Dann gibt es zwei sich schneidenden Strecken  $s_1$  und  $s_2$ , von denen keine parallel zu einer Verbindungsstrecke von Punkten aus  $M$  ist. Nach (1) gibt es daher zwei sich schneidende Geraden  $t_1$ ,  $t_1 \parallel s_1$ , und  $t_2$ ,  $t_2 \parallel s_2$ , für die gilt:

Auf jeder Seite von  $t_1$  und ebenso auf jeder Seite von  $t_2$  befinden sich jeweils  $n$  Punkte aus  $M$ .



Wir bezeichnen die von  $t_1$ ,  $t_2$  gebildeten Winkelfelder (ohne ihre Begrenzungen) mit  $W_i$  und die Anzahl der Punkte aus  $M$  in  $W_i$  mit  $|W_i|$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Für  $W_1$  gelte:  $|W_1| = k \leq n$ . Wegen  $|W_1 \cup W_2| = n$  ist dann  $|W_2| = n - k$ , woraus wegen  $|W_2 \cup W_3| = n$  folgt, dass  $|W_3| = k$  ist. Dann ist  $|W_4| = n - k$ , weil  $|W_3 \cup W_4| = n$  ist.

Damit ist gezeigt:  $|W_1| = |W_3|$  und  $|W_2| = |W_4|$ .

## Aufgabe 2 (Lösung ab Seite ??)

Man begründe, dass man in Satz 2 die sich schneidenden Trenngeraden auch so finden kann, dass gilt:

In zwei nicht benachbarten Winkelfeldern befinden sich keine, in den beiden anderen benachbarten Winkelfeldern befinden sich jeweils  $n$  Punkte aus  $M$ .

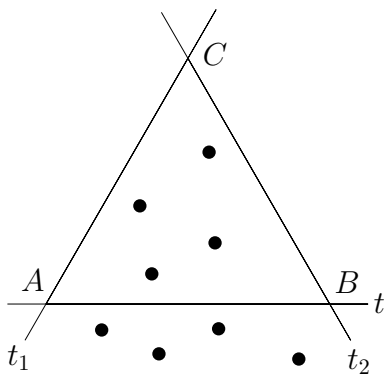
In unserer Geometrie treten nicht nur Geraden als Trennlinien auf. Sie können auch geschlossene Linien sein. Als Beispiel betrachten wir jeweils ein Trennungsproblem mit einem Dreieck und mit einem Kreis.

## Satz 3

- (3) In der Ebene sei eine Menge  $M$  von  $2n$  Punkten,  $n \geq 1$ , beliebig gegeben. Dann gibt es ein gleichseitiges Dreieck  $D$ , für das gilt: Im Innen- und Außengebiet von  $D$  liegen gleich viele Punkte aus  $M$ .

Beweis von Satz 3:

Es sei  $t$  eine Trenngerade, welche die Punktmenge  $M$  in zwei Teilmengen  $M_1$  und  $M_2$  mit jeweils  $n$  Punkten zerlegt.



Dann gibt es zwei Geraden  $t_1$  und  $t_2$ , welche sich in einem Punkt  $C$  schneiden, für die gilt (vergleiche die Figur):  $t_1$  und  $t_2$  schneiden  $t$  unter einem Winkel von  $60^\circ$  im Punkt  $A$  beziehungsweise im Punkt  $B$  und sowohl im Winkelfeld  $BAC$  als auch im Winkelfeld  $CBA$  befinden sich sämtliche  $n$  Punkte aus einer der Mengen  $M_1, M_2$  und nur diese Punkte. Das Dreieck  $\triangle ABC$  beweist somit Satz 3.

### Aufgabe 3 (Lösung ab Seite ??)

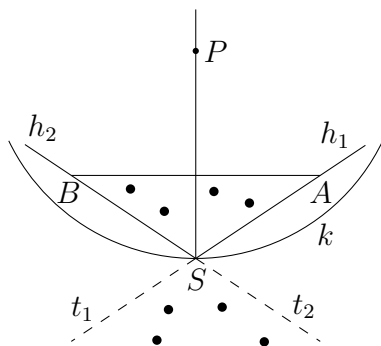
Begründe, dass Satz 3 gültig bleibt, wenn man in (3) das Wort „gleichseitiges Dreieck“ durch das Wort „Quadrat“ ersetzt.

### Satz 4

- (4) In der Ebene sei eine Menge  $M$  von  $2n$  Punkten,  $n \geq 1$ , beliebig gegeben. Dann gibt es stets eine Kreislinie  $k$ , für die gilt: Im Innen- und Außengebiet von  $k$  liegen gleich viele Punkte aus  $M$ .

Beweis von Satz 4:

Nach Aufgabe 2 gibt es zwei sich in einem Punkt  $S$  schneidende Geraden  $t_1$  und  $t_2$ , für die gilt: In einem aus  $S$  und zwei mit  $h_1$  und  $h_2$  bezeichneten Halbgeraden von  $t_1$  beziehungsweise  $t_2$  gebildeten Winkelfeld liegen genau  $n$  Punkte aus  $M$ .



Auf  $h_1$  sei ein Punkt  $A$ , auf  $h_2$  ein Punkt  $B$  so gewählt, dass  $|SA| = |SB|$  ist und das Dreieck  $\triangle SAB$  unsere  $n$  Punkte aus  $M$  enthält. Dann gibt es eine Kreislinie  $k$  durch den Punkt  $S$ , deren Mittelpunkt  $P$  auf dem Mittellot von  $AB$  liegt und für dessen Radius  $r = |SP|$  gilt:  $r > |PA|$  und  $r > |PB|$ . Dann liegt das Innengebiet des Dreiecks  $\triangle SAB$  und damit unsere  $n$  Punkte aus  $M$  im Innengebiet der Kreislinie  $k$  – was (4) beweist.

Abschließend zeigen wir, wie der grundlegende Satz 1 der Trennungsgeometrie manchmal auch bei räumlichen Trennungsproblemen oder sogar bei nicht unmittelbar zur Trennungsgeometrie gehörigen Aufgaben den entscheidenden Beitrag zur Lösung liefert.

### Zunächst ein kleiner Ausflug in eine farbige Welt

### Satz 5

- (5) In der Ebene sei eine Menge  $M$  von  $2n$  Punkten,  $n \geq 1$ , beliebig gegeben. Dann gibt es eine Gerade  $t$  und eine Möglichkeit jeden Punkt aus  $M$  durch eine Strecke mit genau einem anderen Punkt aus  $M$  zu verbinden, sodass  $t$  jede dieser  $n$  Strecken schneidet.



Zum Beweis von Satz 5 zeigen wir zunächst:

- (6) Färbt man  $n$  Punkte aus  $M$  rot und die übrigen  $n$  Punkte aus  $M$  blau, dann gibt es eine Gerade  $t$ , für die gilt: Auf jeder Seite von  $t$  befinden sich gleich viele Punkte verschiedener Farbe.

Nach Satz 1 gibt es eine Gerade  $t$ , welche die Ebene in zwei Halbebenen  $H_1$  und  $H_2$  mit jeweils  $n$  Punkten aus  $M$  zerlegt. Sind dann in  $H_1$   $r$  rote Punkte, dann sind dort zugleich  $n - r$  blaue Punkte. Da es insgesamt  $n$  rote und  $n$  blaue Punkte gibt, muss es in  $H_2$   $n - r$  rote und  $r$  blaue Punkte geben – was (6) beweist.

Beweis von Satz 5:

Wenn sich in der von der Geraden  $t$  bestimmten Halbebene  $H_1$   $r$  rote Punkte und daher wegen (6) in  $H_2$   $r$  blaue Punkte befinden, so verbinde man jeden der  $r$  roten Punkte mit genau einem der  $r$  blauen Punkte. Jede der so erhaltenen  $r$  Strecken wird dann von der Geraden  $t$  geschnitten. Entsprechend werden auch die  $n - r$  Strecken, deren  $n - r$  blaue Endpunkte in  $H_1$  und deren  $n - r$  rote Endpunkte in  $H_2$  liegen, jeweils von  $t$  geschnitten. Daher gilt (5).

### **... und zuletzt ein Abstecher ins Dreidimensionale**

Ein Bäcker backt eine Kuchenrolle, in der  $2n$  Rosinen beliebig verteilt sind. Kann er sein Gebäck durch einen ebenen Schnitt so zerlegen, dass jeder der beiden Teile gleich viele Rosinen enthält?

Ein mathematisches Modell: Die Kuchenrolle sei ein Zylinder und die Rosinen seien Punkte im Inneren des Zylinders. Wenn man nun durch jede zwei dieser Punkte eine Gerade legt, dann gibt es zu den so erhaltenen endlichen vielen Geraden stets eine Gerade  $s$ , die zu keiner von ihnen parallel ist.

Der Zylinder sei dann auf eine zu  $s$  orthogonale Ebene  $E$  gelegt. Bildet man nun die  $2n$  Punkte durch eine Projektion in Richtung von  $s$  in die Ebene ab, so haben keine zwei Punkte den gleichen Bildpunkt – man hat also  $2n$  Bildpunkte in  $E$ .

Nach Satz 1 können diese  $2n$  Punkte durch eine Gerade  $t$  so getrennt werden, dass sich auf jeder Seite von  $t$  genau  $n$  Punkte befinden. Ein ebener Schnitt, der orthogonal zu  $E$  so geführt wird, dass er die Ebene  $E$  in der Geraden  $t$  schneidet, löst dann das Problem des Bäckers.

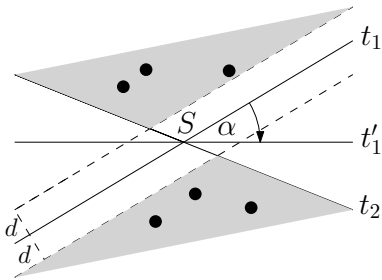
## **Lösungen der Aufgaben**

### **Aufgabe 1**

So wie im Beweis von Satz 1 verschiebe man die Gerade  $s$  parallel zunächst über genau  $n$  Punkte aus  $M$  hinweg in eine Gerade  $t_1$  und danach über weitere  $n$  Punkte aus  $M$  in eine Gerade  $t_2$ . Die Geraden  $t_1$  und  $t_2$  zerlegen die Ebene in drei Gebiete, von denen jedes  $n$  Punkte aus  $M$  enthält.

### **Aufgabe 2**

Es seien  $t_1$  und  $t_2$  die in  $S$  sich schneidenden Trenngeraden im Beweis des Satzes 2.

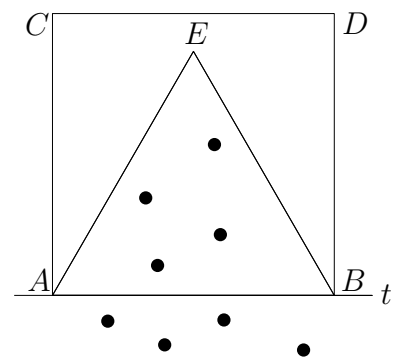


Es gibt dann eine reelle Zahl  $d > 0$  derart, dass jeder Punkt aus  $M$  einen Abstand  $> d$  von  $t_1$  hat und sich somit in einem der schraffierten Winkelbereiche befindet (vergleiche die Figur).

Man kann daher  $t_1$  um einen Winkel  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < \sphericalangle(t_1, t_2)$  um den Punkt  $S$  in eine Gerade  $t'_1$  drehen, sodass dabei kein Punkt aus  $M$  überquert wird. Dann zerlegen  $t_1$  und  $t'_1$  die Ebene in vier Winkelbereiche, von denen zwei nicht benachbarte keinen Punkt aus  $M$  enthalten.

### Aufgabe 3

Es sei  $\triangle ABE$  ein nach Satz 3 existierendes gleichseitiges Dreieck, in dessen Innen- und Außengebiet jeweils  $n$  Punkte aus  $M$  liegen. Wenn man dieses Dreieck mit einem Quadrat  $ABCD$  umschließt, dann haben wir im Beweis von Satz 3 gezeigt, dass die  $n$  Punkte außerhalb des Dreiecks in einem Winkelbereich liegen, das heißt etwa in der unteren Halbebene unter  $AB$  (vergleiche die Skizze). Satz 3 gilt also auch mit Quadraten als Trennfiguren (und sogar für regelmäßige  $n$ -Ecke,  $n \geq 3$ , mit einer Seite  $AB$ ).



## „Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

### Die Farbe der Mützen

Fünf Personen  $A, B, C, D$  und  $E$  tragen je eine schwarze oder weiße Mütze, ohne zu wissen, welche Farbe die Mütze auf ihrem Kopf hat. Allerdings sagt eine Person mit einer schwarzen Mütze immer die Wahrheit und eine mit einer weißen Mütze sagt immer die Unwahrheit. Nun treffen vier der Personen folgende Aussagen:

$A$ : „Ich sehe drei schwarze Mützen und eine weiße Mütze.“

$B$ : „Ich sehe vier weiße Mützen.“

$C$ : „Ich sehe eine schwarze Mütze und drei weiße Mützen.“

$D$ : „Ich sehe vier schwarze Mützen.“

Welche Farbe hat die Mütze jeder der fünf Personen? (Die Lösung soll auch eine kurze Begründung enthalten.)

*Hinweis:* Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. November 2016 an die MONOID-Redaktion senden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

# Lösung der Aufgabe aus Heft 125

In Heft 125 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

## Gleiche Abstände

Annie schaut sich während der großen Pause auf dem Schulhof um. Dann sagt sie zu Betty: „Du stehst genauso weit von mir entfernt wie Connie, Daria und Elsa. Denselben Abstand voneinander wie zu mir hast du auch zu Daria, denselben Abstand haben Connie und Elsa, Franzi und Connie, Franzi und Elsa, Gigi und Daria, Gigi und Franzi sowie Gigi und du.“

Betty runzelt die Stirn. „Wir stehen alle auf dem ebenen Hof und keine zwei von uns stehen auf demselben Fleck. Das kann doch gar nicht sein“, entgegnet sie.

Gibt es eine Anordnung mit den von Annie genannten Eigenschaften?

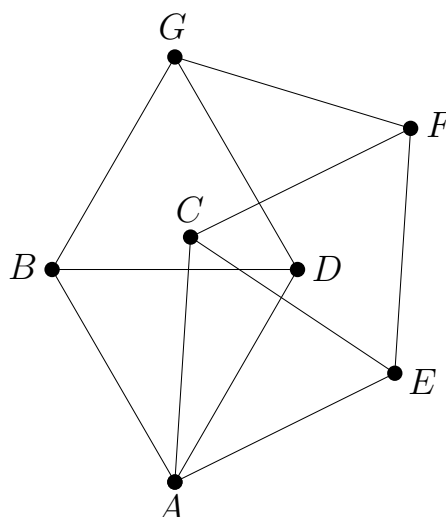
## Ergebnisse

Mit dieser Aufgabe haben sich beschäftigt: Maximilian Göbel, Tobit Roth, Jan Wabing und Silas Rathke, wobei Silas zusätzlich die Anzahl der durch Vertauschung möglichen Aufstellungen der Schülerinnen richtig angegeben hat.

Wir reduzieren die Namen auf ihre Anfangsbuchstaben und betrachten die Schülerinnen als punktförmig. Dann folgt aus der Aufgabenstellung, dass  $\triangle ABD$  und  $\triangle BDG$  gleichseitige Dreiecke mit der gemeinsamen Seite  $BD$  sind; also ist  $ABGD$  eine Raute mit der Diagonalen  $BD$ . Entsprechend sind  $\triangle ACE$  und  $\triangle CEF$  gleichseitige Dreiecke mit der gemeinsamen Seite  $CE$ ; also ist  $ACFE$  eine zu  $ABGD$  kongruente Raute mit der Diagonalen  $CE$ .

Diese beiden Rauten haben den Eckpunkt  $A$  gemeinsam. Daher kann man  $ABGD$  gegenüber  $ACFE$  um  $A$  so drehen, dass die Punkte  $F$  und  $G$  denselben Abstand voneinander haben wie die Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke. Somit ist auch die letzte in der Aufgabe genannte Bedingung erfüllt. Allerdings müssen wir uns davon überzeugen, dass bei der Drehung nicht  $C$  oder  $E$  mit  $B$  oder  $D$  zusammenfällt. Wäre dies aber so, dann würden die Diagonalen  $AF$  und  $AG$  bei  $A$  einen Winkel von  $60^\circ$  bilden, so dass das Dreieck  $\triangle AFG$  gleichseitig wäre. Dann ist  $FG$  aber nicht genauso lang wie die anderen Abstände der Schülerinnen.

*Bemerkung:* Wenn der Hof nicht eben ist, sind Aufstellungen in Eckpunkten von regulären Tetraedern möglich, bei denen mehr Schülerinnen gleichzeitig denselben Abstand voneinander haben; aber das wäre fast schon wieder eine neue Aufgabe!



# Mathematische Lese-Ecke

## – Lesetipps zur Mathematik –

von Martin Mattheis

### **Schreibauer, Thorsten: „Mach mal Mathe“**

Das „Mach mal Mathe“ Buch soll Kinder dazu anregen sich mit Mathematik zu beschäftigen ohne dass das Klischee von „der langweiligen Rechnerei“ bedient wird. Es soll mit und in dem Buch gearbeitet werden, so der Autor Thorsten Schreibauer, Mathematiklehrer an einem Gymnasium in Reutlingen, über sein Buch. Was den Ansatz eines „Action-Mathe-Buches“ angeht, so ist dies durchaus gelungen. Auch wenn die 94 Seiten als Taschenbuch gebunden vorliegen, so handelt es sich tatsächlich nicht um ein Mathematikbuch im herkömmlichen Sinne. Stattdessen erinnert der Band durch seine erfrischende Herangehensweise eher an eine Sammlung von Partyspielen für einen Kindergeburtstag oder eine Kinderfreizeit.

Inhaltlich geht es unter anderem um Dualzahlen, die römische Zahlschreibweise, geometrische Figuren, Längen-, Flächen- und Zeitmessungen, Zahlenfolgen, einfache Wahrscheinlichkeiten oder geometrische Muster. Der mathematisch gebildete Lesende findet aber auch den Vierfarbensatz, Parkettierungen, den Buffonschen Nadelversuch und Antinomien, was passend kindgemäß aufbereitet wurde. Die gestellten Aufgaben variieren dabei in Themenfeldern und nötiger Vorgehensweise, lassen aber auch manche Chance ungenutzt. Wenn aus den ersten 609 Nachkommastellen der Kreiszahl  $\pi$  nur Ziffern ausgeschnitten werden sollen, so hätte man statt  $\pi$  auch einfach jede der 10 Ziffern 61mal hintereinander abdrucken können.

„Ein Buch zum Basteln, Spielen, Knobeln und Forschen“ so beschreibt es der Untertitel. An manchen Stellen erscheinen die Aufforderungen, die Experimente im und mit dem Buch durchzuführen, bewusst übertrieben, wie diejenige auf einer Seite des Buches Kakaocreme zu verteilen oder diejenige eine Seite herauszureißen. Gerade jüngere Schülerinnen und Schüler werden solche Anregungen begeistern, auch wenn sie statt dem Buch dann doch ihren Schmierblock dafür verwenden. Schön sind Aufgaben, bei denen der Leser Mitmenschen befragen oder Sätze über Mathematik formulieren soll. Dadurch wird den Schülerinnen und Schülern – und auch den von ihnen Befragten – vermittelt, dass man über Mathematik genauso reden kann wie über Geschichte, Biologie oder Religion.

Die Arbeitsaufträge und auch die Inhalte legen nahe, dass sich „Mach mal Mathe“ primär an jüngere Schülerinnen und Schüler bis zur Klassenstufe 7 richtet, dem steht allerdings entgegen, dass an einzelnen Stellen auch Wurzeln, Integralzeichen, die Kreiszahl  $\pi$  oder Begriffe wie Hypothenuse, goldener Schnitt und eulersche Zahl auftauchen, ohne in irgend einer Form erläutert zu werden.

Unpassend findet der Rezensent allerdings Aufgaben wie das mathematisch sinn-

lose Ausfüllen eines Lückentextes zur Konstruktion des goldenen Schnittes, „mit lustigen Textbausteinen“ oder die Korrektur einer vom Autor „bearbeiteten“ Klassenarbeit mit der Zusatzbedingung „Sei ein fieser Lehrer!!!“.

*Fazit:* Die Sammlung umfasst schöne Aktivitäten, mit denen jüngere Schülerinnen und Schüler angeregt werden, sich durch aktives Handeln mit mathematischen Fragestellungen auseinanderzusetzen. Der versuchte Spagat eines „Action-Mathe-Buches“ für alle Altersstufen erscheint jedoch überreizt. Hier wäre eine klare Beschränkung auf eine Altersgruppe überzeugender gewesen.

*Gesamtbeurteilung:* noch gut 😊😊



### **Angaben zum Buch:**

Schreibauer, Thorsten: Mach mal Mathe. Eigenverlag, [www.Cryingfarmer.de](http://www.Cryingfarmer.de) 2015, ISBN 978-3-00-050701-4, Taschenbuch 94 Seiten, 9,95 €

Art des Buches: Mathematisches Action-Buch

Mathematisches Niveau: weitgehend verständlich

Altersempfehlung: ab 8 Jahren

## Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 125

### **Altendiez, Oranien-Campus Altendiez:**

**Kl. 6:** Sebastian Braun 56.

### **Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg:**

**Kl. 5:** Leonie Fischbach 4, Laura Oligschläger 11, Tobit Roth 20;

**Kl. 11:** Sven Pleger 6, Frauke Stoll 20.

### **Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium** (Betr. Lehrerin: Frau Lüning):

**Kl. 6:** Lukas Born 24, Lea Daum 37, Nils Koch 13, Paul Schall 16, Jonas Schneider 37, Victoria Strunck 18, Fenja Teichmann 7, Chiara Zimmermann 4;

**Kl. 8:** Torben Bürger 65, Virginia Fox 55, Maximilian Hauck 121, Sarah Kästner 65, Marcel Schneider 4, Rabea Zimmermann 22;

**Kl. 12:** Katharina Rößler 38.

### **Frankenthal, Karolinen-Gymnasium** (betr. Lehrerin: Frau Schneider):

**Kl. 6:** Noah Böhm 7, Vivian Marton 7, Olivia Stachow 12, Simon Taubert 14;

**Kl. 8:** Johan Hochbaum 5, Leonie Sophie Marton 8;

**Kl. 9:** Gina Bader 20;

**Kl. 12:** Adriana Stenger 40, Marcel Wittmann 65.

### **Frankenthal, Robert-Schuman-Schule:**

**Kl. 10:** Patrick Riebe 47.

**Friedberg, Augustinerschule:**

**Kl. 5:** Aleksandra Herbst 56;

**Kl. 8:** Tobias Jedich 25.

**Friedrichsdorf, Maint/Taunus International School** (Betreuende Lehrerin: Frau Elze):

**Kl. 3:** Ben Bergmann 19, Mateo Dorsch 13, Frida Lunau 8, Keito Ogino 18, Tim Pilger 17, Sosan Rahman 8, Hannah Schnee 10;

**Kl. 4:** Atreyee Choudhury 19, Lina Decker 18, Ana Flores 17, Aditi Girish 8, Sven Reiß 14;

**Kl. 5:** Mia Großkreutz 32, Amelie Höchsmann 5, Jacob Huck 29, Phil Steinbichler 10;

**Kl. 6:** Aleksandra Burchala 29, Philipp Kraus 3, Henri Lunau 26.

**Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule** (Betreuender Lehrer: Herr Grasse):

**Kl. 5:** Louis Fritz 10, Mara Meurer 15, Johannes Sabel 3, Justin Sehl 30, Alina Wick 15; **Kl. 9:** Melanie Schuy 42; **Kl. 10:** David Storzer 99; **Kl. 12:** Marvin Weisbender 6.

**Kelkheim, Eichendorffschule:**

**Kl. 8:** Denis Mayle 72.

**Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:**

**Kl. 8:** Beatrice Popescu 10.

**Linz, MartinusGymnasium:**

**Kl. 5:** Simon Waldek 16.

**Mainz, Frauenlob-Gymnasium** (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis):

**Kl. 5:** Lukas Bergholz 2, Annika Eble 3, Caro Hürkamp 2, Eugene Koch 7, Julie Külzer 2, Vienna März 1, Sina Katharina Sturm 2, Koray Tasaroglu 2, Ezgi Ugurlu 2;

**Kl. 11:** Melanie Weibrich 28;

**Kl. 13:** Theresa Schöche 48.

**Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium:**

**Kl. 11:** Silas Rathke 74.

**Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium** (Betreuender Lehrer: Herr Gruner):

**Kl. 5:** Karina Razlaw 2;

**Kl. 6:** Aimeé Schellert 4;

**Kl. 7:** Marius Ahlfeld 7, Avin Alo 7;

**Kl. 9:** Louisa Witzel 7;

**Kl. 10:** Jonas Ahlfeld 22, Emrah Kökyar 2;

**Kl. 11:** Matthias Bergen 21, Jasmin Hallyburton 2, Verena Rüsing 8;

**Kl. 13:** Daniel Fink 23;

**Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:**

**Kl. 8:** Sonja Kowallek 14.

**Oberursel, Gymnasium** (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich):

**Kl. 6:** Paulina Herber 29, Josefine Kaßner 14;

**Kl. 7:** Sönke Schneider 95.

**Kl. 9:** Lara Braun 17, Maximilian Göbel 101, Philipp Karn 14, Fabian Leipach 45, Jara Müller-Kästner 27, Kristin Teichert 51;

**Kl. 12:** Yvonne Selig 17, Annika Teichert 19, Julia Theis 16;

**Sankt Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:**

**Kl. 6:** Laura Mai 3, Tobias Stiller 9.

**Tangermünde, Diesterweggymnasium:**

**Kl. 6:** Miriam Büttner 59.

**Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:**

**Kl. 5:** Lara Wilbert 6;

**Kl. 6:** Raphael Gaedtke 20.

**Wittlich, Cusanus-Gymnasium:**

**Kl. 5:** Mareike Bühler 22.

<h2>Die Redaktion</h2>
------------------------

**Leitung:** Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner

**Mitglieder:** Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Verena Lucas, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Frank Rehm, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

**Weitere Mitarbeiter:** Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer

**Zusammenstellung und Satz:** Maximilian Preisinger

**Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen:** Emily Searle-White

**Betreuung der Abonnements und Versand:** Marcel Gruner, Katherine Pillau

Jahrgang 36

Heft 127

September 2016

## Inhalt

**Abonnementbestellungen** per Post oder über die Homepage.

Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMD55 (bei der Mainzer Volksbank), Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.

**Herausgeber:** Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.

MONOID wird unterstützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,  
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,  
Gymnasium Oberursel.

Wir übernehmen keine Haftung für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen.

## Impressum

**Anschrift:** Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,  
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz

**Telefon:** 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295

**E-Mail:** monoid@mathematik.uni-mainz.de

**Homepage:** <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>