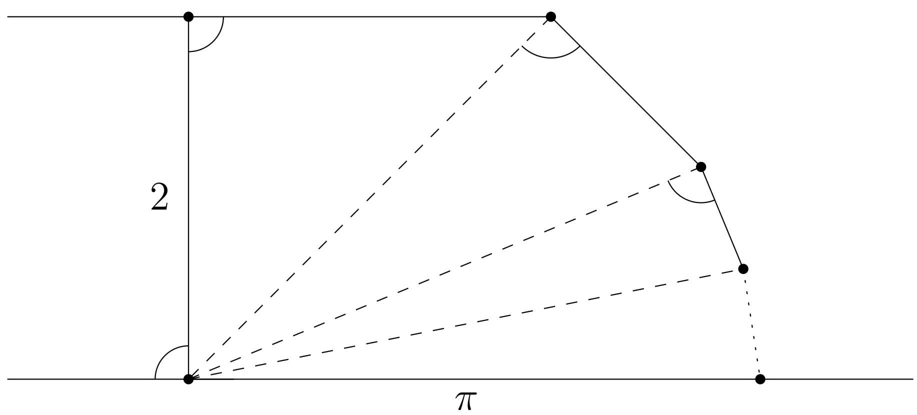
Jahrgang 35 Heft 123 September 2015

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben von der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz
vertreten durch den Präsidenten
Herrn Prof. Dr. Georg Krausch

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–8 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klasse 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 9–13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathematische Entdeckungen* und *„Denkerchen“* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Einsende-(Abgabe-)Termin für Lösungen ist der **15.11.2015.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

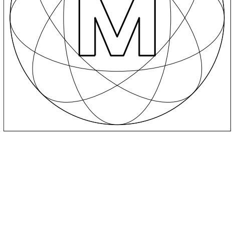
Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Frau Susanne Lüning, am **Lina-Hilger-Gymnasium Bad Kreuznach** bei Frau Julia Gutzler, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Herrn Matthias Grasse, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Martin Mattheis, an der **Rhein-Main International Montessori School in Friedrichsdorf** bei Frau Christa Elze, in **Mannheim** bei Herrn Ulrich Wittekindt, am **Rhein-Wied-Gymnasium Neuwied** bei Herrn Marcel Gruner, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Angelika Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Klaus Ronellenfitsch und am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Helmut Meixner.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der *Rubrik der Löser* und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1992 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.



Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Feier 2015

mit der Preisvergabe
an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2014/2015
am Samstag, dem 28. November 2015, Beginn 10 Uhr,
am Gymnasium Oberursel,

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Matthias Ludwig, Goethe-Universität Frankfurt, halten.

Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.

Weitere Informationen findet Ihr demnächst auf der MONOID-Internetseite
www.mathematik.uni-mainz.de/monoid.

„Das Denkerchen“

von Horst Sewerin

Unter diesem Titel hat der Autor an der Main-Taunus-Schule in Hofheim am Taunus mehrere Jahre lang jeden Monat eine Problemaufgabe gestellt. Die Schüler/innen haben Lösungen eingeschickt, die korrigiert und prämiert wurden. Eine besonders schöne Lösung wurde jeweils veröffentlicht.

Die Redaktion von MONOID möchte diese Aufgaben auf Anregung des Autors einem breitem Lo(e)serkreis bekanntmachen und beginnt in dieser Ausgabe mit der Veröffentlichung jeweils eines der „Denkerchen“. Auch zu diesen Aufgaben sind Lösungen (mit Lösungsweg) erwünscht. Die „Spielregeln“ sind die gleichen wie den mathematischen Entdeckungen beziehungsweise der Aufgabe für den Computer-Fan. Und nun viel Spaß bei dieser neuen Herausforderung!

Rote und grüne Äpfel

Nachdenklich kommt Herr Pommer aus seinem Keller zurück. „Die Apfelernte vom letzten Herbst ist doch schon weit aufgebraucht. Es sind nur noch etwas mehr rote als grüne Äpfel übrig, und zusammen sind es nun weniger als 50“, brummelt er. „Dann kannst du uns ja noch zwei Äpfel heraufholen“, entgegenet seine Frau. „Ich mag jetzt nicht mehr hinuntergehen“, sagt Herr Pommer und fährt fort: „Wenn du nachher sowieso unten bist, greife doch einfach blind in den Korb und nimm zwei Äpfel zufällig heraus. Ich weiß, dass du mit derselben Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenfarbene Äpfel mitbringst wie zwei gleichfarbige.“

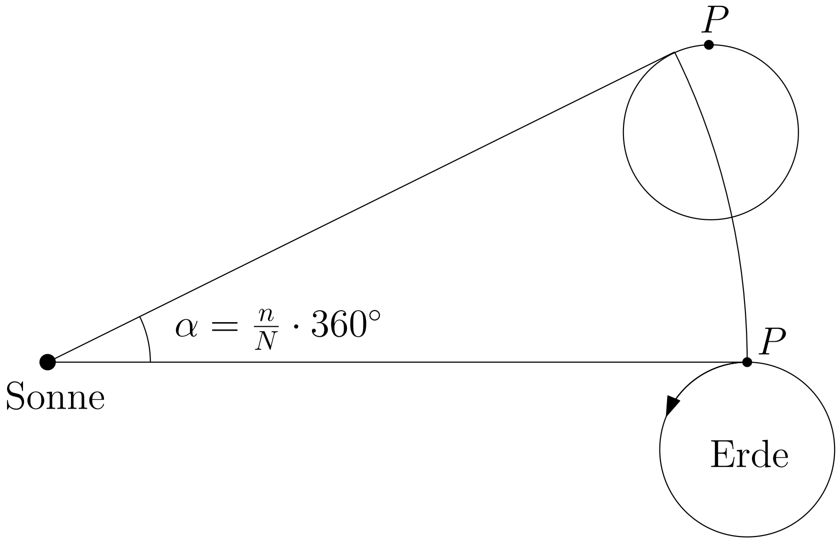
Wie viele rote und wie viele grüne Äpfel sind in dem Korb?

Hinweis: Eure Lösungen könnt Ihr bis zum 15. November 2015 an die MONOID-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Die Erde dreht sich schneller, als man denkt

von Wolfgang J. Bühler

Wir vereinfachen die Diskussion etwas: Die Erde bewege sich auf einem Kreis um die Sonne und benötige für einen Umlauf N Tage, N ganzzahlig.
Die Abbildunge zeigt die Situation zur Zeit 0 und nach n Umdrehungen der Erde um ihre Achse:



Ein Punkt P, an dem ein Beobachter zur Zeit 0 die Sonne aufgehen sieht, ist auch nach n Umdrehungen in der Abbildung wieder oben. Bis dort die Sonne zum n-ten Mal wieder aufgeht, fehlt aber noch einige Zeit. Wenn der Winkel α den Wert 360° erreicht hat (das heißt $n = N$) ist gerade der $N - 1$-te Sonnenaufgang, das heißt nach N Umdrehungen sind für den Beobachter $N - 1$ Tage vergangen. In $N - 1 = 365$ Tagen hat sich die Erde also 366 Mal um ihre Achse gedreht.

Eine genauere Diskussion findet sich bei Johannes Kepler „Der Traum oder: Mond-Astronomie".

Monoidale Knobelei

von Hartwig Fuchs

(1) $\sqrt{M+O+N+O+I+D} = A$ mit $A > 0$
(2) und $\sqrt{MONOID} = ADD$.

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass ein korrektes Gleichungssystem entsteht. Dabei sollen gleichen Buchstaben gleiche Ziffern zugeordnet werden, aber ungleiche Buchstaben dürfen auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Welche Zahl entspricht dem Wort Monoid? (H.F.)

Lösung

Man quadriere (2).
Dann folgt aus $MONOID = (ADD)^2 = (100 \cdot A + 10 \cdot D + D)^2$, dass D^2 die Einerziffer D hat - sodass $D = 0$, 1, 5 oder 6 ist.

Es sei $D = 0$. Aus $ADD = 100 \cdot A$ folgt, dass im Radikand von (2) der Block $NOID = 0000$ und daher $N = O = I = D = 0$ ist. Damit gilt: $\sqrt{MONOID} = 100\sqrt{MO} = 100\sqrt{10 \cdot M} = 100 \cdot A$, sodass $10 \cdot M$ eine Quadratzahl sein muss, was aber wegen $M < 10$ nicht der Fall ist. Also ist $D \neq 0$.

Es sei $D = 1$. Dann ist $ADD = 100 \cdot A + 11$ mit $A = 1, 2, 3, \dots, 9$. Wegen (2) hat die Zahl $(ADD)^2$ an der zweiten und vierten Stelle (von links) die gleiche Ziffer. Das trifft nur zu für $(ADD)^2 = 111^2 = 12321$. Dieser erste Fall scheidet aus, weil $(ADD)^2$ wegen (2) sechsziffrig sein muss. Daher ist $D \neq 1$.

Also ist $D = 5$ oder $D = 6$. Aus der quadrierten Gleichung (1) mit $A > 0$ und $D \geq 5$ ergibt sich: $5 \leq A^2 \leq 5 \cdot 9 + 6$ und daher $3 \leq A \leq 7$. Es gibt daher zehn Zahlen, die die quadrierte Gleichung (2) eventuell erfüllen, nämlich: $MONOID = 355^2, 366^2, 455^2, 466^2, 555^2, 566^2, 655^2, 666^2, 755^2, 766^2$. Bei den sechsziffrigen Zahlen $MONOID = 355^2, 366^2, 566^2, 655^2, 666^2, 755^2, 766^2$ stimmen die Ziffern an der zweiten und vierten Stelle von links nicht überein. Die Quersumme $M + O + N + O + I + D$ ist bei den Zahlen $466^2 = 217156$ und $555^2 = 308025$ keine Quadratzahl, wie die Gleichung (1) verlangt. Die gennanten neun Zahlen können daher keine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) sein.

Dagegen gilt für $455^2 = 207025$ einerseits $\sqrt{2 + 0 + 7 + 0 + 2 + 5} = 4$ und andererseits $\sqrt{207025} = 455$, sodass $A = 4$ und $D = 5$ sind. Daraus folgt:
Die eindeutige Lösung lautet: $MONOID = 207025$.

Das Handbuch der Meeresinsel
Teil 2: Vermessung unerreichbarer Objekte
von Steffen Fröhlich und Jan Fuhrmann

Das Handbuch der Meeresinsel

Im ersten Teil unseres Artikels (zu finden auf Seite 6 in Monoid 122) haben wir Thales' Bestimmung der Pyramidenhöhe und die Bergvermessung aus den Neun Büchern diskutiert. Diese Probleme haben eines gemeinsam: Die zu vermessenden Objekte sind vom Vermesser prinzipiell erreichbar, das heißt ihre Entferungen können explizit ausgemessen werden.

Der chinesische Mathematiker Liu Hui bemerkte in einem im Jahre 263 verfassten Kommentar zu den Neun Büchern, dass die dortigen Methoden nicht ausreichten, um Vermessungen an unerreichbaren Objekten vorzunehmen, deren Entfernungen also unbekannt sind. Daraufhin fügte er dieser Sammlung neun eigene Probleme zur Vermessung unerreichbarer Objekte hinzu, um diese Lücke zu schließen.[1] Im siebenten Jahrhundert wurden Liu Huis neun Probleme als eigenständige Aufgabensammlung unter dem Titel Haidao Suanjing publiziert, besser bekannt als Mathematisches Handbuch der Meeresinsel.[2]

Vermessung einer unerreichbaren Meeresinsel

Wir wollen die erste Aufgabe der Sammlung Liu Huis vorstellen:[3]

> Jetzt wollen wir eine Meeresinsel vermessen. Wir errichten zwei Pfähle gleicher Höhe, nämlich 6,9 Meter gemessen vom Boden. Der Abstand zwischen dem vorderen und dem hinteren Pfahl beträgt 1380 Meter. Wir nehmen an, dass die Insel, der vordere Pfahl und der hintere Pfahl in einer Linie ausgerichtet sind. Entferne dich nun 169,74 Meter vom vorderen Pfahl und beobachte den Gipfel der Insel von der Bodenoberfläche aus; es zeigt sich, dass dann die Spitze des vorderen Pfahls mit dem Gipfel übereinstimmt. Entferne dich nun 175,26 Meter vom hinteren Pfahl und beobachte wieder den Gipfel der Insel von der Bodenoberfläche aus; die Spitze des hinteren Pfahls stimmt dann ebenfalls mit dem Gipfel überein. Frage: Wie hoch ist die Insel, und wie weit ist sie vom vorderen Pfahl entfernt?

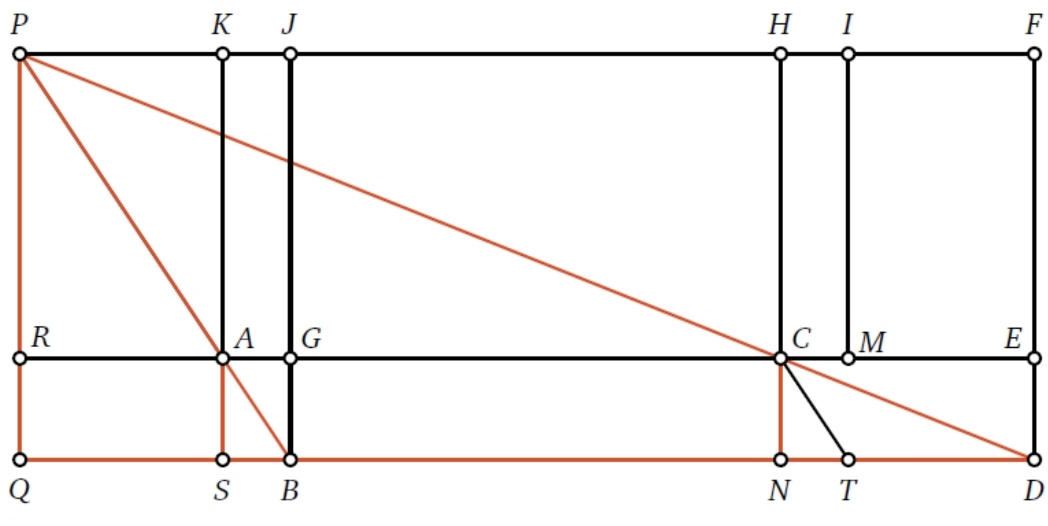


Abbildung: Zum Problem der Meeresinsel

Mit Hilfe der Abbildung übersetzen wir diese Aufgabe in geometrische Sprache:

- PQ ist die Gipfelhöhe, $|PQ|$ ist gesucht;

[1] Diese Aufgaben dienten z.T. militärischen Zwecken.

[2] Eine englische Ausgabe, nach der wir auch vorgehen, liegt uns vor mit F.J. Sweetz: The sea island mathematical manual. The Pennsylvania State University Press, 1992.

[3] Übersetzt aus F.J. Sweetz, S. 20; im Ausdruck angelehnt an K. Vogel; Umrechnung aller Längeneinheiten in Meter nach K. Vogel.

- QS ist die Entfernung des Berges zum vorderen Pfahl, $|QS|$ ist gesucht;
- AS und CN sind die beiden Pfähle, gegeben sind $|AS| = |CN| = 6{,}9$;
- NS ist der Abstand der beiden Pfähle, gegeben ist $|NS| = 1380$;
- der vordere Beobachtungspunkt ist in B, gegeben ist $|BS| = 169{,}74$;
- der hintere Beobachtungspunkt ist in D, gegeben ist $|DN| = 175{,}26$.

Außerdem fügen wir die zu AB parallele Strecke CT hinzu.
Behauptung: Der Berg ist 42435m vom vorderen Pfahl entfernt und 1731,9m hoch.

Beweis
Die Dreiecke PRA, CNT sowie PAC, CTD sind jeweils ähnlich zueinander. Daraus schließen wir mit dem Thalesschen Satz

$$\frac{|PR|}{|CN|} = \frac{|AR|}{|NT|} = \frac{|AP|}{|CT|} \quad \text{sowie} \quad \frac{|AP|}{|CT|} = \frac{|AC|}{|DT|} = \frac{|CP|}{|CD|}\,. \tag{$*$}$$

Alle hier auftretenden Verhältnisse sind also gleich, so dass insbesondere gilt

$$\frac{|PR|}{|CN|} = \frac{|AC|}{|DT|}\,.$$

Nun wissen wir aber auch (beachte $|BS| = |NT|$)

$$\frac{|PR|}{|CN|} = \frac{|PQ| - |QR|}{|AS|}, \quad \frac{|AC|}{|DT|} = \frac{|NS|}{|DN| - |BS|}\,, \tag{$**$}$$

und ein Vergleich beider Identitäten liefert

$$|PR| = \frac{|CN| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|} = \frac{|AS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|}$$

bzw.

$$|PQ| = |PR| + |QR| = \frac{|AS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|} + |AS|.$$

Einsetzen der bekannten Größen ergibt $|PQ| = 1731{,}9$ Meter.

Beweis
Aus der Gleichheit der sechs Verhältnisse aus $(*)$ lesen wir aber auch ab

$$\frac{|AR|}{|NT|} = \frac{|AC|}{|DT|}\,.$$

Wir müssen hierin nur noch das links stehende Verhältnis umschreiben in

$$\frac{|AR|}{|NT|} = \frac{|QS|}{|BS|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|QS|}{|BS|} = \frac{|AC|}{|DT|}\,,$$

und unter Beachtung der Darstellung $(**)$ für $|AC| \cdot |DT|^{-1}$ folgt nach Umstellen

$$|QS| = \frac{|BS| \cdot |AC|}{|DT|} = \frac{|BS| \cdot |NS|}{|DN| - |BS|}\,.$$

Einsetzen der bekannten Größen ergibt $|QS| = 42435$ Meter.
Auch diese Aufgabe lässt sich unter Benutzung von Proposition I.43 der Elemente Euklids lösen. Wie würdest Du vorgehen?

Zusammenfassung

Thales verwendete zur Höhenbestimmung der Pyramiden einen Gnomon. Die Bestimmung der Berghöhe aus der obigen Aufgabe aus den Neun Büchern verwendet ebenfalls einen Gnomon (in Form eines Pfahles). Beide Vermessungsobjekte sind vom Vermesser erreichbar.
Zur Vermessung der unerreichbaren Insel sind wenigstens zwei Gnomone bekannten Abstands nötig (hier wieder in Form zweier Pfähle). Der Gipfel der Insel wird zweimal angepeilt, weshalb dieses Messverfahren auch den Namen Methode der doppelten Differenzen (chong cha) trägt.
Sämtliche Aufgaben Liu Huis, die in ihren Schwierigkeitsgraden sukzessive aufeinander aufbauen, verwenden dieses oder ein ähnliches Messverfahren. Zur Illustration wollen wir die zweite und die dritte Aufgabe der Sammlung Liu Huis vorstellen und laden dazu ein, eigene Lösungswege zu erarbeiten.[4]
In der zweiten Aufgabe ist die Höhe eines Kiefernbaumes zu bestimmen. Die zusätzliche Schwierigkeit: Der Baum steht auf einem unerreichbaren Hügel unbekannter Höhe:

> Jetzt wollen wir die Höhe eines Kiefernbaumes vermessen, der auf einem Hügel von ebenfalls unbekannter Höhe wächst. Wir errichten zwei Pfähle der gleichen Höhe 4,6 Meter auf dem Boden im gegenseitigen Abstand von 69 Meter. Wir nehmen an, dass der Baum, der vordere Pfahl und der hintere Pfahl in einer Linie ausgerichtet sind. Entferne dich nun 10,58 Meter vom vorderen Pfahl und beobachte den Gipfel des Kiefernbaumes von der Bodenoberfläche aus; es zeigt sich, dass dann die Spitze des vorderen Pfahles mit dem Gipfel des Baumes übereinstimmt. Betrachte aus dieser Position auch den Fuß des Baumes, der bez. des Pfahles 0,64 Meter unterhalb dessen Spitze zu liegen kommt. Entferne dich nun 12,19 Meter vom hinteren Pfahl und beobachte den Gipfel des Baumes von der Bodenoberfläche aus; es zeigt sich, dass dann die Spitze des Pfahles mit dem Gipfel des Baumes übereinstimmt. Frage: Wie hoch ist der Baum, und wie weit ist er vom vorderen Pfahl entfernt?

Schließlich geht es um die Bestimmung der Größe einer unerreichbaren Stadt:

> Jetzt wollen wir die Breite einer südlich gelegenen quadratischen Stadtmauer vermessen. Errichte zwei Pfähle, 13,8 Meter voneinander in Ostrichtung entfernt, die beide auf Augenhöhe stehen und durch eine Schnur verbunden sind. Der östliche Pfahl befinde sich mit der südöstlichen

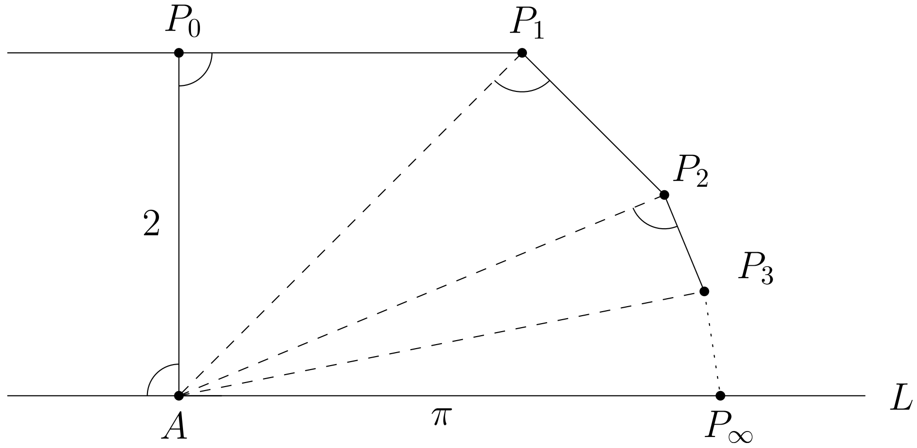
[4] Übersetzt aus F.J. Sweetz.

und der nordöstlichen Ecke der Stadtmauer auf einer Linie. Entferne dich nun 6,9 Meter nordwärts vom östlichen Pfahl und betrachte die nordwestliche Ecke der Stadtmauer; die Sichtlinie schneidet die Schnur, die die Pfähle verbindet, 5,21 Meter von seinem östlichen Ende aus gesehen. Entferne dich nun 18,4 Meter nordwärts vom östlichen Pfahl und betrachte die nordwestliche Ecke der Stadtmauer; es zeigt sich, dass dann diese Ecke und der westliche Pfahl auf der Beobachtungslinie liegen. Frage: Was ist die Seitenlänge der quadratischen Stadtmauer, und wie weit ist die Stadt vom östlichen Pfahl entfernt?

Auf der im Entstehen begriffenen Internetseite www.geometrie-und-logik.de werden diese Aufgaben und ausführliche Lösungen zu finden sein.

Eine geometrische Konstruktion von π
Teil 1: Das Polygon von Euler
von Duco van Straten

Bekanntlich ist das Verhältnis π zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises eine *krumme Zahl*. Das Abrollen eines Rads auf einem geraden Weg liefert eine Möglichkeit, dem Kreisumfang näherungsweise beizukommen. Aber genau ist das nicht, und mit Mathematik hat es gar wenig zu tun.
Ist es möglich, auf rein geometrische Weise, nur mit Zirkel und Lineal, eine Strecke der Länge π zu konstruieren? In endlich vielen Schritten wird dies wohl nicht möglich sein, käme doch so ein Verfahren der *Quadratur des Kreises* gleich. Dennoch gab Leonhard Euler im Jahre 1763 folgende einfache geometrische Konstruktion an.



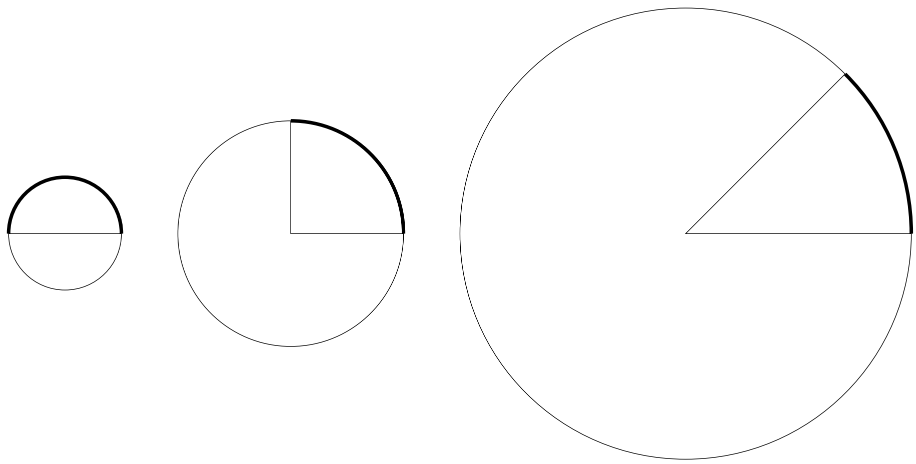
Wir gehen von einer Gerade L und einem Punkt A auf dieser Gerade aus. Wir bilden die Senkrechte zu L durch A und konstruieren auf ihr einen Punkt P_0 mit Abstand $= 2$ zu A. Wir ziehen eine Strecke durch P_0, senkrecht zu AP_0, bis wir die rechte Winkelhalbierende von P_0AL in P_1 treffen. Dann ziehen wir eine Strecke P_1P_2 senkrecht zu P_1A bis zur Winkelhalbierenden von P_1AL. So gehen wir weiter und erhalten eine Folge $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ von Punkten; den so enstehenden Polygonzug wollen wir hier Euler-Polygon nennen. Die Punkte $P_0, P_1, P_2, \ldots$ kommen der Gerade L immer näher und den Grenzpunkt bezeichnen wir mit P_∞. Die verblüffende Tatsache nun ist:

Der Abstand zwischen A und P_∞ ist genau π:

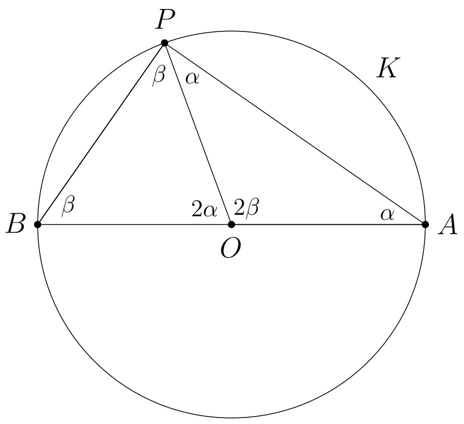
$$\pi = |AP_\infty| \quad .$$

Bemerke, dass die Konstruktion der Senkrechten und die Winkelhalbierungen mit Zirkel und Lineal durchführbar sind. Man könnte dieses Verfahren auf Beamtendeutsch auch als *Restwinkelhalbierungsverfahren zur Ermittlung des Halbkreisumfangs* bezeichnen.

Die interessante Frage ist natürlich: *Was steckt hinter diesem mysteriösen Verfahren? Warum funktioniert die Konstruktion überhaupt?*
Um das zu verstehen, stellen wir einige allgemeine Überlegungen voran. Ein Halbkreis mit Radius $= 1$, ein Viertelkreis mit Radius $= 2$, ein Achtelkreis mit Radius $= 4$, ... haben alle die gleiche Länge, nämlich π.

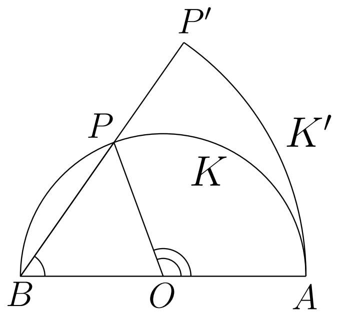


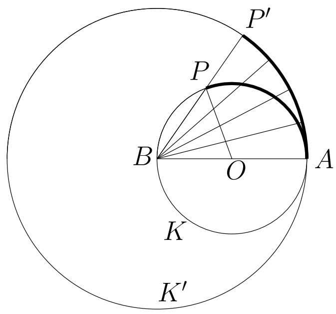
Das liegt daran, dass wenn eine Figur um einen gewissen Faktor gestreckt wird, auch die Länge entsprechender Abschnitte mit demselben Faktor gestreckt wird.
Es gibt eine einfache geometrische Konstruktion um, ausgehend von einem beliebigen Kreisbogen, einen gleich langen Kreisbogen auf einem doppelt so großen Kreis zu konstruieren.



Die Thales-Figur.

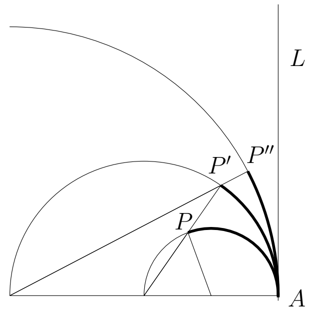
Wir betrachten erst einen Kreis *K* mit Mittelpunkt *O* und Durchmesser *AOB*. Ist *P* ein Punkt von *K*, so sind die Winkel *OAP* und *OPA* gleich groß, sagen wir α. Da die Winkel in einem Dreieck zusammen immer zwei rechte Winkel ergeben, ist der Winkel *BOP* gleich 2α. Ganz ähnlich sind die Winkel *OBP* und *OPB* gleich groß, β, und der Winkel *AOP* ist 2β. Auch sieht man hieraus, dass die Winkel *APO* und *BPO* zusammen, $\alpha + \beta$, einen rechten Winkel ergeben: der Satz von Thales.

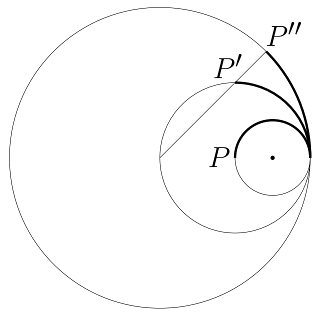




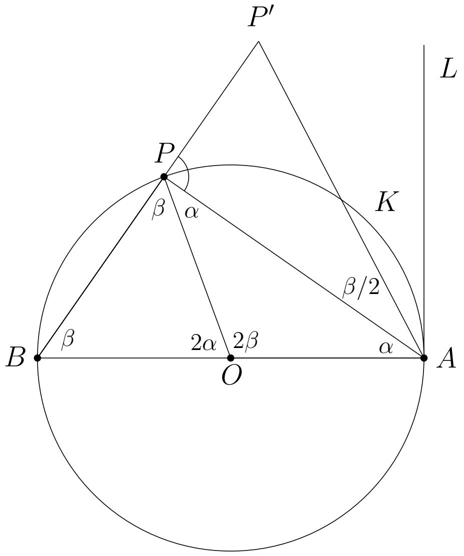
Der Kreis *K′* mit Mittelpunkt *B* und durch den Punkt *A* hat einen doppelt so großen Radius wie der Kreis *K*. Die Gerade durch *B* und *P* schneidet *K′* in einem entsprechenden Punkt *P′*. Da der Winkel *AOP* zwei mal so groß ist wie der Winkel *ABP′*, ist folglich der Bogen *PA* von *K* gleich lang wie der Bogen *P′A* von *K′*.

Diese Konstruktion kann beliebig oft wiederholt werden; es entsteht eine Folge von gleich langen Bögen *PA*, *P′A*, *P″A*, die immer flacher werden und sich immer dichter an die Tangente *L* von *K* in *A* anschmiegen.

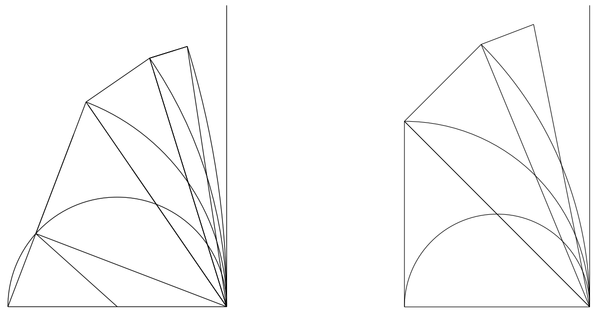




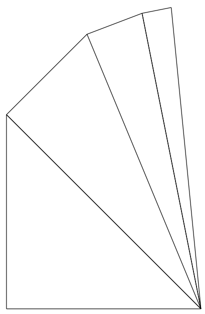
Dabei kann der Polygonzug $PP'P''P'''$ ... auch direkt und platzsparend, ohne Zuhilfenahme des Kreisesystems, konstruiert werden:



Wir erweitern die Thales-Figur um die Strecke BP'. Nach dem Satz von Thales ist der Winkel APP' ein rechter. Sind die Strecken BA und BP' gleich lang, so sind die Winkel BAP' und $BP'A$ einander gleich und betragen auf Grund der Winkelsumme im Dreieck ABP' beide $\alpha + \frac{1}{2}\beta$. Da $\alpha + \beta$ ein rechter Winkel ist, wird der Winkel zwischen L und AP durch AP' also genau halbiert.



Wenden wir dieses Verfahren auf den Halbkreis an, so ist $P = B$ und wenn wir noch $P_0 := P$, $P_{n+1} = (P_n)'$ setzen, so erhalten wir genau das (um 90^o gedrehte) Restwinkelhalbierungsverfahren von Euler!



Die Aufgabe für den Computer-Fan

Skytale-Chiffre

Auf der MONOID-Homepage findest Du unter „Aktuelles Heft“ (www.mathematik.uni-mainz.de/monoid/aktHeft.php) in der Datei „Chiffre Computerfans M123.txt“ einen Chriffretext. Dieser enthält genau 1040 Buchstaben und wurde mit der normalen Skytale-Methode der alten Griechen verschlüsselt; es entfällt also ein Spaltentausch. Schreibe ein Programm, welches dir erlaubt, den ursprünglichen Text zu ermitteln. (WG)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2015 einschicken; denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern, die bei der Vergabe des Forscherpreises eingehen. Ein eigenes Programm solltet Ihr als Textdatei und die EXE-Datei am besten „gezippt“ als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de einsenden.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus MONOID 121

Würfelschlange

Wir beschreiben zunächst die Erzeugung der Schlange und anschließend welche Aktionen zu einer Überraschung führen können.

Würfelschlange erzeugen: Aus N idealen Würfel W_1, W_2 ,..., W_N mit $N \geq 7$, die jeweils Zufallszahlen Z_1, Z_2 , ..., Z_N zwischen 1 und 6 zeigen, wird eine Schlange gebildet: $Z_1\, Z_2\, ...\, Z_N$. Das weitere Vorgehen (Durchlauf) wird an Hand der Skizze einer 50er-Würfelschlange demonstriert. Dabei gibt die Zeile A die Würfelnummern (zwischen 1 und $N = 50$) an, die Zeile B gibt die Zufallszahl (zwischen 1 und 6) des entsprechenden Würfels an und die Zeile C kennzeichnet die betroffenen Würfel mit $*$.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B	5	3	4	1	1	2	3	4	6	1	6	1	2	5	3	2	4
C	$*$					$*$		$*$				$*$	$*$		$*$		
A	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
B	5	3	5	5	3	4	1	3	2	6	1	6	6	3	5	2	1
C	$*$					$*$				$*$						$*$	
A	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
B	4	4	2	5	3	2	4	1	5	3	1	2	5	6	4	3	
C	$*$				$*$			$*$	$*$					$*$			

Vom ersten Würfel W_1 mit der Zahl $Z_1 = 5$ aus geht man 5 Schritte weiter zum Würfel W_6, der $Z_6 = 2$ zeigt. Von diesem aus nun 2 Schritte weiter zu W_8 mit $Z_8 = 4$, dann zu W_{12} mit $Z_{12} = 1$ und so fort. Man gelangt zu W_{48} mit $Z_{48} = 6$, was nicht mehr ausgeführt werden kann. Nun werden W_{49} und W_{50} weggelegt, sodass 48 Würfel in der Schlange bleiben.
Aktion (ein mathematischer Zaubertrick): Nun wird der erste Würfel zufallsmäßig verändert (zum Beispiel nochmals mit ihm gewürfelt). Würde er nun eine 1 zeigen, so käme man erneut am letzten Platz, auf W_{48} an. Dies ist bei 2, 3, 4 und 6 auch so; der Durchlauf geht also immer auf! Surprise! Wirklich immer? Dies soll von Dir nun mit einem Programm, welches diese Situation simuliert, getestet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Überraschung der Aktion bei $N = 70$ Würfeln gelingt? (WG)

Ergebnisse

Dass es überhaupt zu einer Überraschung kommen kann, liegt daran, dass man bei der Aktion trotz verändertem Anfang W_1 wieder auf einen Würfel eines vorhergehenden Duchgangs treffen kann, womit dann der weitere Durchlauf bis zum Ende derselbe ist. Dies ist umso wahrscheinlicher, je größer N ist.
Das Simulationsprogramm erzeugt mittels eines Zufallsgenerators M mal eine Würfelschlange der Länge $N = 70$. Bei jeder der M Simulationen wird die Schlange so verkürzt, dass man den letzten Würfel vom ersten aus erreicht. Nun wird die Ziffer Z_1 des ersten Würfels nacheinander auf die fünf anderen W_1-Werte gesetzt. Erreicht man dabei jedesmal wieder das Ende, so ist die Überraschung gelungen und ihre Anzahl wird um 1 erhöht. Nachdem mit M solcher Zufallsschlangen diese Aktion durchgeführt wurde, bildet man die relative Häufigkeit „Anzahl Überraschungen geteilt durch M". Diese ist für großes M ein guter Näherungswert für die gesuchte theoretische Wahrscheinlichkeit.
Die durchschnittliche Schrittweite bei der Aktion ist 3,5. Eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit einer Überraschung bei N Würfeln ist daher $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{N}{3,5}}$. Für $N = 70$ erhält man $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \approx 0{,}9739159467$. Mit dem Tipp auf eine „Surprise" irrt man sich also nur in höchstens 2,6% aller Fälle, d.h. wenn man das Spiel mit einer 70-er Schlange in einer Zuschauergruppe 40 Mal spielt, so kann man erwarten, dass es nur einmal misslingt. Die Theorie einer Übergangsmatrix und deren Spektralradius liefert ein genaues Ergebnis: $1 - 1{,}29432759077267 \cdot 0{,}908357842^N$. Für 50 Würfel des Beispiels in der Aufgabenstellung ergibt sich so die Wahrscheinlichkeit 99,1% für das Gelingen des Tricks und für die geforderten 70 dann 99,86%.

Dies haben auch die Schüler Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster, Maximilian Hauck vom Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey und Marcel Wittmann vom Karolinen-Gymnasium in Frankenthal herausgefunden. Maximilian hat zusätzlich die Vermutung, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit der

Aktion mit steigendem N monoton ansteigt, durch ein Excel-Diagramm untermauert und auch einen Begründungsversuch unternommen. Marcel hat den Kern des Tricks, der zur Überraschung führt, richtig erklärt und sogar in seinem Python-Programm benutzt, um den Rechenaufwand erheblich zu verkürzen.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Andreas Quatember: „Statistischer Unsinn“

Der Untertitel des Buches „Statistischer Unsinn“ lautet „wenn Medien an der Prozenthürde scheitern“. Andreas Quatember, Statistiker und außerordentlicher Professor an der Johannes Kepler Universität Linz, untersucht demzufolge in neun Kapiteln den oftmals problematischen Umgang von Medien mit Statistiken.

Im Vorwort konstatiert der Autor die offensichtliche Diskrepanz zwischen der Bedeutung der Statistik in unserer modernen Informationsgesellschaft und dem Ruf des Faches in der Bevölkerung. Als Ursache dafür macht er vor allem in den Medien häufig auftretende Fehlinterpretationen grundsätzlich richtiger Datensammlungen aus. Quatember beleuchtet dazu eine Vielzahl von Zeitungsartikeln oder Online-Veröffentlichungen aus Österreich und Deutschland und analysiert anschaulich und verständlich, welche Fehler bei der Deutung statistischer Daten begangen wurden.

Die einzelnen Kapitel fassen verschiedene Beobachtungen zusammen: Auswirkungen falscher Interpretationen von Statistiken, Prozentrechnung, grafische Darstellungen, Mittelwerte, „Beweise“ durch Statistiken, Repräsentativität, Wahrscheinlichkeiten, Vorhersagen zur Fußball-WM 2014 und Fehler bei der Deutung der PISA-Ergebnisse.

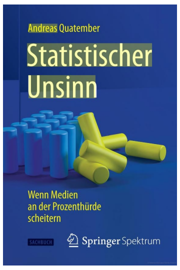
So wird zum Beispiel bei der PISA-Studie nur eine relativ kleine Stichprobe von Schülerinnen und Schülern untersucht und nicht der ganze Jahrgang. Obwohl dies statistisch wenig Sinn macht, wird dann in den Medien immer wieder die Stichprobe der Nachfolgeuntersuchung mit der Stichprobe des letzten Prüfdurchgangs verglichen und daraus angebliche Verbesserungen des ganzen Jahrganges herbeigeschrieben.

Ergänzt werden die insgesamt sehr kurzweilig aufbereiteten Beispielanalysen durch eingerahmte Boxen, in denen kurz und verständlich der mathematisch-statistische Hintergrund erklärt wird.

Fazit: Quatember ist es gelungen anhand von vielen Beispielen für einen verantwortlichen Umgang mit statistischen Daten zu sensibilisieren. Man schwankt beim Lesen zwischen einem Schmunzeln über die – bei kurzem Nachdenken – offensichtlichen Fehler und Erschrecken bei der Erkenntnis, dass die vorgestellten Fehlinterpretationen Handeln von politischen Entscheidungsträgern implizieren.

Auswirkungen davon werden nicht nur bei der PISA-Studie für uns alle deutlich.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺



Angaben zum Buch:

Quatember, Andreas: Statistischer Unsinn, Springer Spektrum, 2015, ISBN 9783-662-45334-6, Taschenbuch 223 Seiten, 14,99 €

Art des Buches:	Mathematisches Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 15 Jahren

Die Paradoxie vom Balken

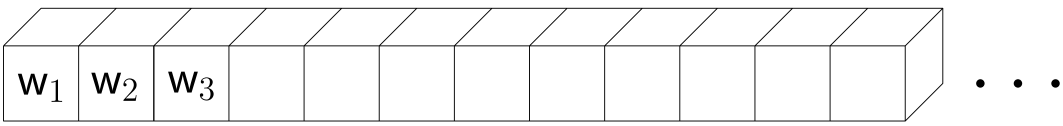
von Hartwig Fuchs

Albrecht von Rickmersdorf (um 1316–1390), der Sohn eines Bauern, macht eine im Mittelalter ungewöhnlich erfolgreiche Karriere:
Nach seinem Studium wurde er Professor an der Sorbonne (1351–1362), zeitweise war er Rektor der Universitäten in Paris (1353) und Wien (1365) und schließlich – als Nicht-Theologe! – sogar Bischof von Halberstadt (1366–1390).
Mit seinen Schriften erwarb er großes Ansehen als Mathematiker, Naturphilosoph und vor allem als einer der bedeutendsten Logiker seiner Zeit.

In seinem wichtigsten und einflußreichsten Werk „Sophismata" – einem Buch über die Logik – untersuchte er insbesondere logische Paradoxien[1] und Probleme des Unendlichen, zwei Themen, die ineinander verwoben sind in seiner

Paradoxie vom Balken

In einer leicht abgewandelten und dem heutigen Sprachgebrauch angepassten Version:
Man denke sich einen einseitig unendlich langen Balken, dessen Querschnitt ein Quadrat der Seitenlänge 1 ist. Dieser Balken sei in lauter Würfel der Kantenlänge 1 zerlegt.



Man nehme nun einen dieser Würfel – er sei W_1 genannt – und lege 26 weitere Würfel des Balkens so um ihn herum, dass ein Würfel W_3 der Kantenlänge 3 und dem inneren Kern W_1 entsteht. Ganz entsprechend konstruiere man einen Würfel W_5 der Kantenlänge 5 mit dem inneren Kern W_3.

[1] Von Albrecht stammt zum Beispiel die bekannte logische Paradoxie:
„Der nachfolgende Satz ist wahr.
Der vorangehende Satz ist falsch."

So immer weiter konstruierend erhält man eine Folge W_1, W_3, W_5, W_7 ... von ineinander verschachtelten Würfeln. Diese Folge bricht nicht ab: Denn wie groß auch immer man n wählt, stets werden bei der Konstruktion des Würfels W_{2n+1} nur $(2n+1)^3$ – also endlich viele – Würfel des Balkens „verbraucht", während zur Fortsetzung der Würfelkonstruktion über W_{2n+1} hinaus immer noch ein unendlicher Vorrat an Würfeln des Restbalkens vorhanden ist.

Es sei nun $|W_i|$ der Rauminhalt des Würfels W_i.
Dann gilt: Die Zahlen der Folge $|W_1| = 1^3$, $|W_3| = 3^3$, $|W_5| = 5^3$, ... wachsen mit wachsendem n unbeschränkt an. Daraus ergibt sich letztlich:

(1) Die Würfel des Balken füllen den gesamten dreidimensionalen Raum, obgleich doch der Balken nur ein Teilstück dieses Raumes ist – Albrechts Paradoxie.

Erst mit der von Georg Cantor (1845–1918) gegen Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten Theorie des Unendlichen ergab sich die Möglichkeit, die Balken-Paradoxie als ein mathematisches Problem zu betrachten und als solches dann zu lösen.
Eine unendliche Menge heißt abzählbar, wenn man ihre Elemente mit den natürlichen Zahlen nummerieren kann.

(2) Für abzählbare Mengen $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ und $Y = \{y_1, y_2, y_3, ...\}$ gilt: Sie haben – anschaulich formuliert – „gleich viele" Elemente.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & \dots \end{array}$$

(2) trifft insbesondere auch dann zu, wenn X eine echte unendliche Teilmenge von Y ist. Und genau auf diese Situation lässt sich Albrechts Paradoxie zurückführen.

Die Menge $Q(B)$ der Würfel des Balken ist abzählbar – vergleiche die erste Figur oben. Wir schreiben daher $Q(B) = \{w_1, w_2, w_3, ...\}$.
Nun sei der dreidimensionale Raum vollständig in Würfel der Kantenlänge 1 zerlegt. Die Menge $Q(R)$ dieser Würfel ist ebenfalls abzählbar. Denn ausgehend vom Würfel $W_1 = w_1$ konstruiere man wie oben den Würfel W_3 mit 26 weiteren nun nummerierten Würfeln $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{27}$ aus $Q(B)$, sodann W_5 mit den Würfeln $w_{28}, w_{29}, \dots, w_{125}$ aus $Q(B)$ und so weiter. Damit erhält man nach und nach auch eine Abzählung der Würfel von $Q(R)$.
Wegen (2) sind daher der Balken und der gesamte Raum beide vollständig in „gleich viele" Würfel der Kantenlänge 1 zerlegt. Vom mathematischen Standpunkt aus ist daher die Aussage (1) nicht paradox und Albrechts Balkenproblem ist gelöst.

Allerdings stellt die Aussage (1) eine nicht zu bewältigende Überforderung unseres Anschauungsvermögen dar – und so bleibt Albrechts Paradoxie erhalten als ein anschaulich-geometrisch unlösbares Problem.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 122

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Summen 2014 und 2015

Bestimme alle Paare von ganzen Zahlen a, b mit $a < b$ und $b - a$ gerade, für welche die Summe aller zwischen a und b liegenden ganzen Zahlen

a) gleich 2014 ist,

b) gleich 2015 ist.

c) Gibt es auch Lösungen mit ungerader Differenz $b - a$? (WJB)

Lösung:

Zwischen a und b gibt es $n = b - a - 1$ ganze Zahlen. Ist $b - a$ gerade, so ist n ungerade. Es gibt dann eine mittlere Zahl c und die Summe der n Zahlen ist $n \cdot c$ und $a = c - \frac{n+1}{2}$, $b = c + \frac{n+1}{2}$.

a) Wir betrachten die Zerlegung von 2014 in Faktoren: $2014 = 1 \cdot 2014 = 1007 \cdot 2 = 19 \cdot 106 = 53 \cdot 38 = n \cdot c$ und erhalten somit die Lösungen:

n	c	a	b
1	2014	2013	2015
1007	2	-502	506
19	106	96	116
53	38	11	65

b) $2015 = 1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 = 1 \cdot 2015 = 5 \cdot 403 = 13 \cdot 155 = 31 \cdot 65 = 65 \cdot 31 = 155 \cdot 13 = 403 \cdot 5 = 2015 \cdot 1$. Die Lösungen sind also:

n	c	a	b
1	2015	2014	2016
5	403	400	406
13	155	148	162
31	65	49	81
65	31	-2	64
155	13	-65	91
403	5	-197	207
2015	1	-1007	1009

c) In den obigen Beispielen mit $a < 0$ ändert sich die Summe nicht, wenn man die Null und alle negativen Summanden und die betragsgleichen positiven Summanden weglässt. Dies bedeutet Ersetzen von a durch $a' = |a + 1|$.
Beispiele:

$$2014 = (-501 + (-500) + ... + 500 + 501) + 502 + 503 + 504 + 505.$$

$$2015 = (-1 + 0 + 1) + 2 + 3 + ... + 63.$$

Die Summe in den Klammern sind jeweils 0 und können daher weggelassen werden.

II. Seite 2015

Christian schlägt ein dickes Buch auf Seite 39 auf. Er überlegt sich folgenden Schritt: Entweder schlägt er die Seite auf, die er erhält, wenn er von seiner aktuellen Seite die Quersumme der um eins kleineren Seite abzieht, oder wenn er zu seiner aktuellen Seite die Quersumme der um eins größeren Seite addiert.

Beispiel: Von 39 kann er die Seiten $39-Q(38) = 39-11 = 28$ oder $39+Q(40) = 39+4 = 43$ erreichen.

Kann er nach mehrfacher Anwendung exakt die Seite 2015 erreichen? (Also nicht 2014 und dabei 2015 aufschlagen.) (Markus und Heiko Kötzsche, Gymnasium Oberursel)

Lösung:

Zur Lösung dieser Aufgabe betrachtet man die Seiten modulo 9, also welchen Rest die Seitenzahlen lassen, wenn man sie durch 9 teilt. Dabei gilt für jede Zahl x, dass $x = Q(x) \mod 9$. Man erhält folgende Tabelle modulo 9:

$x - Q(x-1)$	x	$x + Q(x+1)$
1	0	1
1	1	3
1	2	5
1	3	7
1	4	0
1	5	2
1	6	4
1	7	6
1	8	8

Christian beginnt bei $39 = 3 \mod 9$. 2015 lässt den Rest 8. Rechnet er $x - Q(x-1)$ so kommt er immer auf den Rest 1. Rechnet er $x + Q(x+1)$, so kann er folgende Reste erhalten: $1 \to 3 \to 7 \to 6 \to 4 \to 0 \to 1 \to 3 \to 7 \to ....$ In diesem Zyklus ist der Rest 8 nicht erhalten. Folglich kann Christian nie exakt die Seite 2015 erreichen.

III. Sieben auf einen Streich

Vergleiche die Mathespielerei „Das tapfere Schneiderlein“ aus dem Monoid-Heft 121.

Wir betrachten jetzt ein kugelförmiges Brot und einen Tuchlappen, der als Kappe ein Viertel der Kugeloberfläche bedeckt. Zeige, dass auch in dieser Situation sich 25 Fliegen nicht so auf dem Brot verteilen können, dass es dem Schneiderlein unmöglich wäre, Sieben auf einen Streich zu erwischen. (WJB)

Hinweis: Die Lösungsmethode für die Spielerei lässt sich nicht für diesen Fall modifizieren. Betrachte stattdessen die Wahrscheinlichkeit, eine Fliege zu erwischen.

Lösung:

Für jede der 25 Fliegen ist bei zufälliger Lage des Tuchlappens die Wahrscheinlichkeit, von diesem erwischt zu werden, gleich $\frac{1}{4}$. Der Erwartungswert der Anzahl der erwischten Fliegen ist also $\frac{25}{4} > 6$. Es muss also möglich sein, mehr als sechs Fliegen auf einen Streich zu erwischen.

IV. Im Zoo

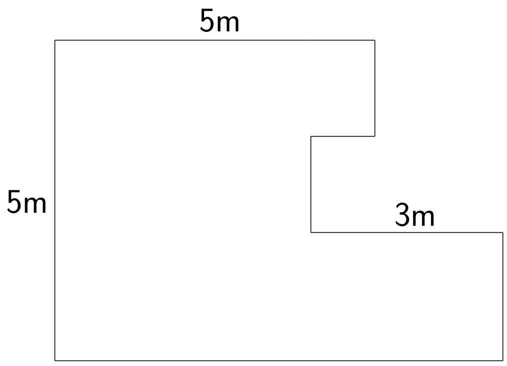
In einer Erdmännchen-Kolonie mit 17 Tieren werden 88 Nüsse verteilt. Kann man die Verteilung so vornehmen, dass jedes Erdmännchen eine ungerade Anzahl von Nüssen erhält? (H.F.)

Lösung:

Da die Summe von 17 ungeraden Zahlen ungerade ist, also nicht 88 sein kann, ist diese Aufteilung nicht möglich.

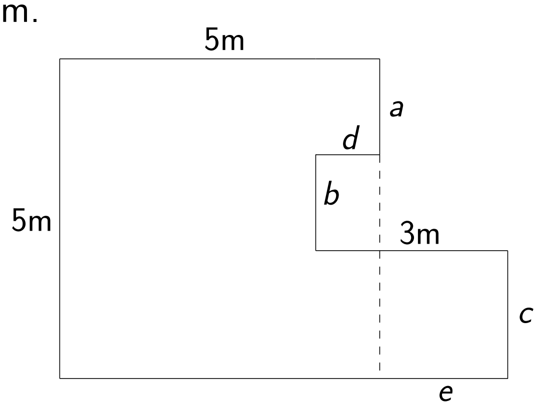
V. Umfangsberechnung mit wenig Angaben

Von der unten abgebildeten Figur sind alle bekannten Maße eingezeichnet. Dabei sind die Winkel an allen Eckpunkten rechte Winkel. Berechne den Umfang der Figur. (Silas Rathke)



Lösung:

Zeichnet man die gestrichelte Linie in der Skizze ein, so unterteilt man die untere Strecke in zwei Strecken der Längen 5m und e. Also gilt für den Umfanng U: $U = 5\text{m} + 5\text{m} + a + d + b + 3\text{m} + c + e + 5\text{m} = 18\text{m} + (a + b + c) + (d + e) = 18\text{m} + 5\text{m} + 3\text{m} = 26\text{m}$.



VI. Durchschnittsgeschwindigkeiten

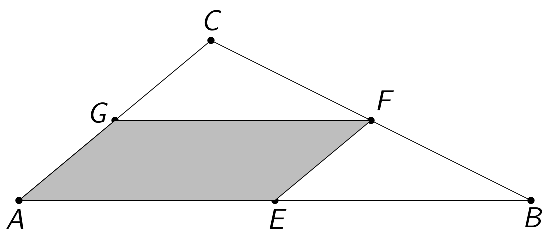
Zwei Läufer haben eine Wette abgeschlossen. Der eine sagt zum anderen, dass er niemals zwei Runden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ laufen könnte. Eine Runde hat eine Länge von 1km. In der ersten Runde kommt der Läufer nur auf eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wie schnell müsste er also die zweite Runde mindestens laufen, damit er seine Wette gewinnt? (Kevin Mours, Karolinen Gymnasium Frankenthal)

Lösung:

Die Wette besagt, dass er durchschnittlich $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ laufen soll. Er darf also insgesamt für die 2km nur 400s brauchen. Für den ersten Kilometer hat er nun schon 250s gebraucht, er darf also nur noch 150s für die zweite Runde brauchen. Daraus erfolgt eine benötigt Geschwindigkeit von $\frac{1000\text{m}}{150\text{s}} \approx 6{,}67\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

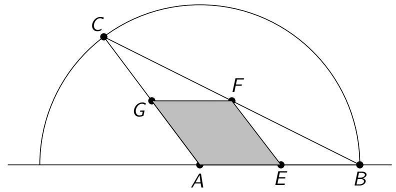
VII. Mittendreieck erzeugt Raute

Im Dreieck $\triangle ABC$ seien E, F, G die jeweiligen Seitenmitten. Dann ist $AEFG$ ein Parallelogramm. Wo muss der Punkt C in Relation zu A und B liegen, damit $AEFG$ sogar eine Raute ist? (WG)



Lösung:

Da $AEFG$ eine Raute ist, folgt mit dem Strahlensatz $|AC| = 2\cdot|AG| = 2\cdot|AE| = |AB|$. Also liegt C auf dem Halbkreis um A mit dem Radius $|AB| = |AC|$.



Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–8

I. Raben-Zählung

Auf den zwölf Ästen eines Baumes sitzen insgesamt 121 Raben.
Begründe, dass auf mindestens einem Ast mehr als zehn Raben sitzen. (H.F.)

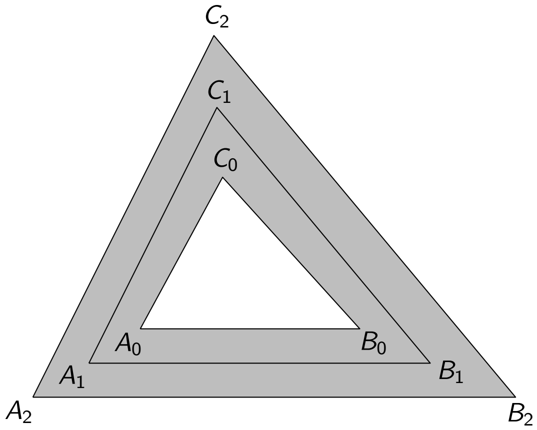
II. Alles Käse

Camembert setzt sich aus einer Trockenmasse und Wasser zusammen.

Neulich kaufte ich einen französischen Camembert mit den Angaben: „45% Fett i.T. = 20% Fett absolut“.
Wie hoch ist in diesem Camembert der Wasseranteil an der gesamten Käsemasse?(WJB)

III. Dreiecke im Abstand 1

Das Dreieck $D_1 = \triangle A_1B_1C_1$ hat die Seitenlängen $a_1 = 11$cm, $b_1 = 9$cm, $c_1 = 10$cm. Die Seiten des inneren Dreiecks $D_0 = \triangle A_0B_0C_0$ und des äußeren Dreiecks $D_2 = \triangle A_2B_2C_2$ haben jeweils einen Abstand von 1cm zum mittleren Dreieck D_1. Wie groß ist die schattierte Fläche zwischen D_0 und D_2? (WG)



IV. Auf dem Campingplatz

Auf dem Campingplatz soll Sara vom Brunnen vier Liter Wasser holen. Dazu gibt ihre Mutter ihr einen Fünf-Liter-Eimer und einen Drei-Liter-Eimer mit. Sara kommt tatsächlich mit vier Litern Wasser zurück. Wie konnte sie das schaffen?(gefunden: WJB)

V. Wahrscheinlichkeit

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Menge $\{1, 2, \dots, 2015\}$ entnommene Zahl

a) ein Vielfaches von 3 und von 4, nicht aber von 5 ist?

b) ein Vielfaches von 3 oder von 4, nicht aber von 5 ist? (H.F.)

VI. Teileranzahl

Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $n = 174\,636\,000$? (H.F.)

VII. Einerziffer einer Quadratzahlensumme

Bestimme die Einerziffer der Summe der Quadratzahlen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2015^2$. (H.F.)

Neue Aufgaben

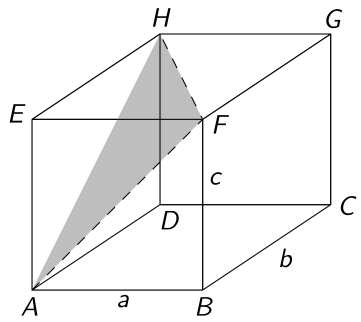
Klassen 9–13

Aufgabe 1134: Verdünnter Essig

Für die Reinigung eines Geräts soll ein Teil Essig mit drei Teilen Wasser gemischt werden. Frau Klein nimmt an, dass mit Essig eine Mischung mit 5% Essigsäure gemeint ist, hat aber nur Essigessenz mit 25% Essigsäure bei der Hand. Wie viele Teile Wasser muss sie mit einem Teil Essigessenz mischen? (WJB)

Aufgabe 1135: Winkel im Würfel

Wie groß ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle HFA$ im Würfel $ABCDEFGH$ ($a = b = c$)? (WG)



Aufgabe 1136: Frosch-Sprünge

In einer Ebene, die mit einem x,y-Koordinaten-System versehen ist, sitzt ein Frosch, der sein Sprungtraining nach mathematischen Regeln betreibt.

a) Sein erstes Trainingsprogramm besteht aus Sprüngen längs der x-Achse, wobei er weder vom Punkt $(0, 0)$ noch vom Punkt $(1, 0)$ aus startet. Seine Sprungregel lautet: Springe vom Punkt $(x, 0)$ zum Punkt $(\frac{1}{1-x}, 0)$. Die nach dieser Regel möglichen Sprungfolgen findet er allesamt langweilig. Warum wohl?

b) Sein nächstes Übungsprogramm läuft nach der folgenden Regel ab: Springe vom Punkt (x, y) zum nächsten Punkt $(y, y - x)$. Auch bei so möglichen Springfolgen ist der Frosch bald gelangweilt. Weshalb diesmal?

c) Nun ist die Springregel: Springe von einem Punkt (x, y), der auf keiner Koordinatenachse liegt, zum nächsten Punkt $(\frac{y}{x}, \frac{1}{y})$. Warum kann er dann nicht beliebig viele Sprünge machen, falls die y-Koordinate seines Startpunktes $\neq 1$ ist? (H.F.)

Aufgabe 1137: Drei mal drei macht... – Teil 2 von 3

Stelle die Zahlen 5 bis 8 mit genau drei Dreien dar.

Du darfst dazu alle beliebigen aus der Schulmathematik bekannten Rechenoperationen verwenden, aber keine weiteren Zahlen.

Beispiel: $0 = (3 - 3) \cdot 3$ (MG)

Aufgabe 1138: Was ist wahr, was ist falsch?

Von den folgenden vier Aussagen über positive ganze Zahlen x und y sind genau drei wahr.

(1) $x = 2y - 1$.

(2) $x + y$ ist ein Vielfaches von 3.

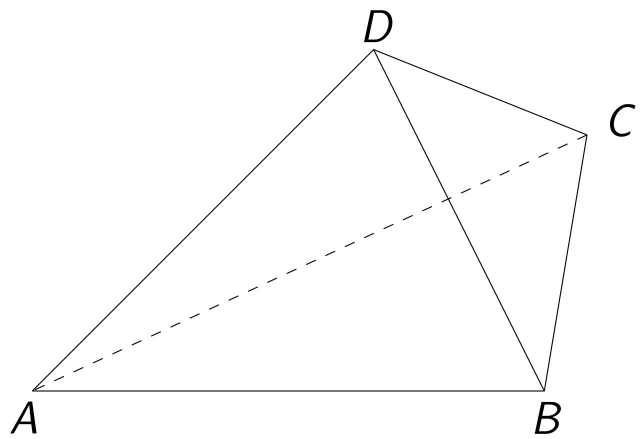
(3) $x + 13$ hat den Teiler y.

(4) $x + 4y$ ist eine Primzahl > 50.

Welche Werte können x und y dann haben? (H.F.)

Aufgabe 1139: Amelies Ameisen

Amelie hat Ameisen. Sie setzt eine davon auf die Ecke A eines Tetraeders.



Die Ameise wandert entlang der Kanten des Tetraeders. Erreicht sie eine Ecke, so wählt sie zufällig eine der beiden Kanten, auf denen sie nicht zu der Ecke gekommen war.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 dafür, dass sie die Ecke B nach 1 beziehungsweise 2 Schritten erreicht.

b) Bestimme die weiteren Wahrscheinlichkeiten p_n, $n \geq 3$ dafür, dass die Ameise die Ecke B nach n Schritten zum ersten Mal erreicht. (WJB)

Aufgabe 1140: Größter Teiler

Bestimme die größte ganze Zahl n, sodass $n+11$ ein Teiler von n^3+2015 ist.(H.F.)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 122

Klassen 9–13

Aufgabe 1127: Ausgewürfelte Zahl – Fortsetzung

In der Neuen Aufgabe 1119 (siehe Heft 120) konntet Ihr lesen, wie David mithilfe eines üblichen Spielwürfels eine vierstellige Zufallszahl, die er als PIN verwenden kann, erzeugt. Dazu wirft er den Würfel viermal nacheinander. Ist dabei aber die

Augenzahl eines Wurfes gleich der Augenzahl des vorherigen Wurfes, so wiederholt David den Wurf und verwendet das Ergebnis der Wiederholung – unabhängig davon, ob dies wieder die gleiche Augenzahl ist oder nicht. Hier noch ein paar weitere Fragestellungen dazu:

a) David überlegt: „Es ist klar, dass ich mindestens viermal würfeln muss, um eine PIN zu erhalten. Aber zum Glück gibt es auch eine Maximalzahl, nämlich..." Gib die maximale Anzahl N an Würfen an, die David benötigt um eine PIN zu erzeugen.

   Hinweis: Sollte in der erwürfelten Zahl bereits eine Zahlendopplung vorhanden sein, so gilt für die nächste Stelle wieder die Wiederholungsregel: Ist die Augenzahl für diesen Wurf gleich der Augenzahl des vorherigen Wurfes, also die bereits zweimal geworfene Zahl, so wiederholt David den Wurf und verwendet das Ergebnis der Wiederholung – unabhängig davon, ob dies wieder die gleiche Augenzahl ist oder nicht.

b) Wie oft hat David werfen müssen, wenn er die PIN 1234, 2555 beziehungsweise 6666 erhält?

c) Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass David vier, fünf, ..., N Würfe benötigt, um die PIN zu bestimmen.

d) Berechne wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass David eine PIN erhält, die aus viermal derselben Ziffer besteht.

e) David hat seine PIN ausgewürfelt und stellt fest: „Ich hatte echt Pech und habe tatsächlich die Höchstzahl an Würfen benötigt." – Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine PIN ermittelt hat, die aus viermal derselben Ziffer besteht. (MG)

Lösung:

a) Die Höchstzahl ergibt sich, wenn David (ab dem zweiten) jeden Wurf wiederholen muss. Allerdings wird jeder Wurf höchstens einmal wiederholt, sodass sich die Höchstzahl von $N = 1 + 2 + 2 + 2 = 7$ Würfen ergibt.

b) Bei der PIN 1234 ist es nicht möglich zu sagen, wie viele Würfe David benötigt hat, da er diese Zahl auf Anhieb geworfen haben kann, aber auch Wiederholungen nötig gewesen sein können. Möglich sind also vier, fünf, sechs oder sieben Würfe.

   Auch bei der PIN 2555 lässt sich die Wurfzahl nicht am Ergebnis eindeutig rekonstruieren. Für die dritte und vierte Stelle war auf jeden Fall eine Wiederholung nötig, ob dies auch bei der zweiten Stelle schon so war, ist nicht eindeutig entscheidbar. David hat also sechs oder sieben Würfe benötigt.

   Die PIN 6666 kann er aber nur erhalten haben, wenn er jeweils einen Wiederholungswurf machen musste und jeweils in der Wiederholung erneut die 6 geworfen hat. Er muss also sieben Würfe durchführen.

c) Mit vier Würfen kommt David aus, wenn er in keinem Wurf die vorherige

Augenzahl erneut würfelt. Die Wahrscheinlichkeit ist jeweils $\frac{5}{6}$. Also ist

$$P(X=4) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}.$$

Wenn David fünf Würfe benötigt, so muss er einmal einen Wurf wiederholen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beispielsweise der zweite Wurf wiederholt werden muss, ist $\frac{1}{6}$, wobei das Ergebnis des Wiederholungswurfes keinen Einfluss auf die Anzahl der Würfe hat. Es gibt drei mögliche Kanidaten für solche Wiederholungen, daher gilt

$$P(X=5) = \left(1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot 3 = \frac{25}{72}.$$

Für sechs Würfe müssen zwei Wiederholungen nötig sein, also ist außer dem ersten Wurf nur ein einiger direkt gültig. Auch hier gibt es drei Möglichkeiten und es ist

$$P(X=6) = \left(1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot 3 = \frac{5}{72}.$$

Der ungünstigste Fall mit drei Wiederholungen hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(X=7) = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}.$$

d) Die Wahrscheinlichkeit ist $P(\text{„vier selbe Ziffern“}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}$.

e) Die mit sieben Würfen geworfene Zahl hat viermal dieselbe Ziffer, wenn jeder Wiederholungswurf die allererste Augenzahl anzeigt, also ist $P(xxxx) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$.
Bemerkung: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich auch mithilfe des Satzes von Bayes berechnen. Es sei S das Ereignis „sieben Würfe nötig“ und V das Ereignis „vier gleiche Ziffern“:

$$P_S(V) = \frac{P(S \cap V)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{46656}}{\frac{1}{216}} = \frac{216}{46656} = \frac{1}{216}.$$

Aufgabe 1128: Wie viele Puzzle-Teile?

Bernd puzzelt in seiner Freizeit gerne. Heute hat er ein gewöhnliches rechteckiges Puzzle mit 2015 Teilen begonnen. Bevor er angefangen hat, zählt er, wie viele Teile es mit 4, 3, 2a, 2b, 1 oder 0 Ausbuchtungen gibt. (2a bezeichne die Teile mit zwei Ausbuchtungen, bei denen die Ausbuchtungen nebeneinander liegen. Bei 2b liegen sie gegenüber.) Es gibt 395 Teile mit 3, 532 Teile mit 2a und 194 Teile mit 0 Ausbuchtungen. Die restlichen drei Anzahlen hat er vergessen. Er erinnert sich jedoch, dass es $\frac{8}{5}$ Mal so viele Teile mit 2b Ausbuchtungen wie mit 1 Ausbuchtung gibt.

Nachdem er mit dem Rand mit weniger als 200 Teilen fertig geworden ist, meint er, die drei fehlenden Anzahlen wieder bestimmen zu können. Wie lauten die drei fehlenden Anzahlen?

(Markus und Heiko Kötzsche, Gymnasium Oberursel)

Lösung:

Die jeweiligen Anzahlen seien mit A_4, A_3, A_{2a}, A_{2b}, A_1 und A_0 bezeichnet. Dann gilt: $A_3 = 395$, $A_{2a} = 532$, $A_0 = 194$, $A_4 + A_3 + A_{2a} + A_{2b} + A_1 + A_0 = 2015$, $A_{2b} : A_1 = 8 : 5$.

Da das Puzzle rechteckig ist, ergibt das Produkt aus der Anzahl der Teile am Rand von Länge und Breite 2015. Dadurch kann das Puzzle folgende Maße haben: 1×2015, 5×403, 13×155, 31×65. Nur bei 31×65 besteht der Rand aus weniger als 200 Teilen, nämlich aus $2 \cdot 31 + 2 \cdot 65 - 4 = 188$. Zwischen zwei Puzzle-Teilen muss es immer eine Ausbuchtung geben. Bei Maßen von 31×65 sind dies $((2015 - 188) \cdot 4 + 184 \cdot 3 + 4 \cdot 2) : 2 = 3934$ Ausbuchtungen. (Der erste Summand setzt sich dabei aus $2015 - 188$ inneren Puzzle-Teilen, die mit jeweils 4 anderen Teilen verbunden sind, zusammen. Der zweiten Summand beschreibt die 184 Rand-Teile, die keine Ecken sind, also an jeweils 3 andere Teile angrenzen. Der letzte Summand zählt die jeweils 2 Ausbuchtungen der 4 Eck-Teile. Da man nun jede Ausbuchtung doppelt gezählt hat, müssen wir noch durch 2 teilen.) Damit erhält man: $4A_4 + 3A_3 + 2A_{2a} + 2A_{2b} + A_1 = 3934$.

Aus den sechs Gleichungen folgt: $A_4 = 101$, $A_{2b} = 488$ und $A_1 = 305$.

Aufgabe 1129: Wie viele rechte Winkel?

Es liegen vier Punkte A, B, C und D im Raum. Von wie vielen der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ und $\sphericalangle DAB$ musst du nachweisen, dass sie 90° groß sind, damit $ABCD$ ein Rechteck ist? (Markus und Heiko Kötzsche, Gymnasium Oberursel)

Lösung:

Man muss zu allen vier Winkeln zeigen, dass sie rechte Winkel sind. Um dies zu zeigen, zeigen wir, dass drei rechte Winkel nicht ausreichen.

Betrachten wir die Ebene E, die drei Punkte enthält, bei denen ein rechter Winkel liegt. In E gibt es dann nur einen Punkt P, der die drei Punkte zu einem Rechteck erweitert, da P auf zwei Schenkel liegen muss und zwei Geraden sich nur in einem Punkt schneiden können (wenn sie sich schneiden).

Jedoch gilt für alle Punkte auf der Geraden, welche senkrecht auf E steht und durch P geht, dass sie die Winkel bei den restlichen drei Punkten nicht verändern, da sie in der „Draufsicht bezüglich E“ auf P fallen. Dabei ist jedoch nur der Winkel bei P 90° groß, ansonsten ist der Winkel spitzwinklig.

Drei rechte Winkel reichen also nicht aus. Bei vier rechten Winkeln reduziert sich die Gerade auf P, sodass dieser Fall eindeutig ein Rechteck ist.

Aufgabe 1130: Drei mal drei macht... – Teil 1 von 3

Stelle die Zahlen 1 bis 4 mit genau drei Dreien dar.

Du darfst dazu alle beliebigen aus der Schulmathematik bekannten Rechenoperationen verwenden, aber keine weiteren Zahlen.

Beispiel: $0 = (3 - 3) \cdot 3$ (MG)

Lösung:

a) $1 = 3^{3-3} = \frac{\sqrt{3 \cdot 3}}{3} = \binom{3}{3-3}$

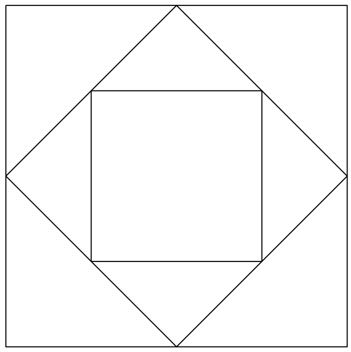
b) $2 = 3 - \frac{3}{3} = \log_3(3 \cdot 3)$

c) $3 = 3 + 3 - 3 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3}{3} = \binom{3}{\frac{3}{3}}$

d) $4 = 3 + \frac{3}{3} = \frac{3! + 3!}{3}$

Aufgabe 1131: Quadratische Tischdecke

Auf einer Tischdecke sind wie in der nebenstehenden Abbildung Quadrate abgebildet. Auf der Mitte der Seiten der Tischdecke sind die Ecken des einen Quadrates – und auf der Mitte der Seiten dieses Quadrates sind wiederum die Ecken eines weiteren Quadrates.

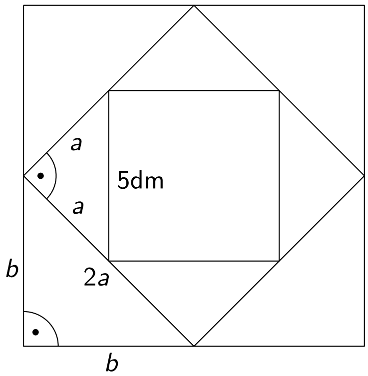


Die Fläche des inneren Quadrates beträgt $25\,\mathrm{dm}^2$. Wie groß ist die Tischdecke insgesamt?

(Daniel Fink, 12. Klasse, Rhein-Wied-Gymnasium, Neuwied)

Lösung:

Die Seitenlänge (in dm) des inneren Quadrats ist $\sqrt{25} = 5$.



Für die halbe Seitenlänge a des mittleren Quadrates gilt nun mit dem Satz des Pythagoras: $a^2 + a^2 = 5^2$, also $2a^2 = 25$.

Genauso gilt für die halbe Seitenlänge b des äußeren Quadrates $b^2 + b^2 = (2a)^2 = 4a^2 = 50$, also $b^2 = 25$, das heißt $b = 5$. Die Seitenlänge des äußeren Quadrates ist also $2 \cdot 5 = 10$ und der Flächeninhalt (in dm^2) damit $10 \cdot 10 = 100$, also $1\mathrm{m}^2$.

Aufgabe 1132: Ganzzahlige Lösungen

Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0$$

mit einer ungeraden ganzen Zahl b.

Solche Gleichungen lassen sich, beispielsweise mit quadratischer Ergänzung, nach x auflösen.

Gib nun alle ganzen Zahlen c (in Abhängigkeit von b) an, für welche diese Lösungen der Gleichung ebenfalls ganzzahlig sind. (nach H.F.)

Lösung:

Aus $x^2+bx+c=0$ folgt $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Damit x ganzzahlig ist, muss b^2-4c eine Quadratzahl sein, die zudem ungerade ist. Man setze daher $b^2-4c=(2n+1)^2$ mit $n=0, \pm1, \pm2, ...$. Dann ist

$$\begin{aligned} b^2-4c &= 4n^2+4n+1 \\ 4c &= -4n^2-4n+b^2-1 \\ c &= -n^2-n+\frac{1}{4}(b^2-1). \end{aligned}$$

Da b ungerade ist, folgt $b^2-1=(b+1)(b-1)$ ist ein Vielfaches von 4 und somit ist $\frac{1}{4}(b^2-1)$ ganzzahlig. Also gilt: $c=-n(n+1)+\frac{1}{4}(b^2-1)$ für alle $n=0, \pm1, \pm2, ...$.

Aufgabe 1133: Ziffern einer Primzahl

Für jede Primzahl $p>3$ gilt: Wenn p^n für ein $n>1$ in der Dezimaldarstellung 100 Stellen (beziehungsweise $10\cdot x$ Stellen mit $x\geq1$) besitzt, dann kommt in dieser Dezimaldarstellung eine Ziffer mehr als 10-mal (beziehungsweise x-mal) vor. Zeige dies. (H.F.)

Lösung:

Annahme: Keine Ziffer kommt mehr als 10-mal (beziehungsweise x-mal) vor.

Da es im Dezimalsystem genau zehn verschiedene Ziffern gibt, muss jede Ziffer genau 10-mal (beziehungsweise x-mal) vorkommen. Daraus folgt für die Quersumme Q von p^n:

$Q=10\cdot(0+1+2+...+9)=450$ (beziehungsweise $Q=x\cdot(0+1+2+...+9)=x\cdot45$.)

Q ist also jeweils ein Vielfaches von 3 und damit auch p^n. Dann aber muss für die Primzahl p gelten: $p=3$.

Widerspruch zur Annahme. Es gilt die Behauptung.

Aus den Archiven der Mathematik
Omars geometrische Konstruktion einer Lösung einer kubischen Gleichung

von Hartwig Fuchs

Omar al Khayyām (um 1048–1131) aus Nischapur im Iran gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker und Astronomen seiner Zeit. Aber sein Ruf als großer Mathematiker wird überstrahlt von seinem Ruhm als Dichter – heute noch bewundern seine Lyrik nicht nur die Iraner.

In der Mathematik waren die kubischen Gleichungen sein bevorzugtes Forschungsgebiet. Er untersuchte die uralte Frage, die schon in der griechischen Antike gestellt wurde: Kann man die Lösungen einer kubischen Gleichung mit geometrischen Konstruktionen bestimmen?

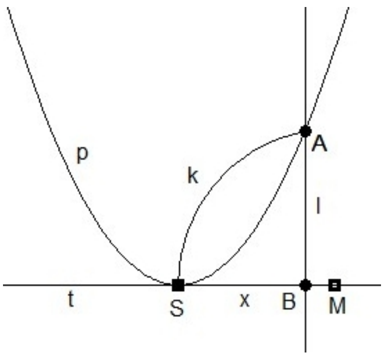
Dabei hat er wohl als Erster erkannt: Es ist nicht möglich, die Lösungen einer kubischen Gleichung durch eine euklidische Konstruktion – also allein mit Zirkel und Lineal – geometrisch zu bestimmen. Aber er konnte zeigen: Mit Hilfe von Kegelschnitten sind Gleichungen dritten Grades konstruktiv lösbar.

Als Beispiel für Khayyāms Methode sei eine Lösung der Gleichung

(1) $x^3 + a^2x = b$, $b \neq 0$,

mit Hilfe einer Parabel konstruktiv bestimmt (die Beschreibung der Konstruktion und ihre algebraische Begründung in heutiger mathematischer Sprache).

Konstruktion einer Lösung



Zeichne die Parabel p: $ay = x^2$ mit dem Scheitel S. Zeichne dann die Tangente t an p durch S sowie den Punkt M auf t im Abstand $\frac{b}{2a^2}$ von S. Der Kreis k um M mit dem Radius $\frac{b}{2a^2}$ schneidet die Parabel p in S sowie in einem Punkt A. Das Lot l aus A auf t schneidet t in einem Punkt B. Dann ist die Länge x der Strecke SB eine Lösung von (1).

Begründung der Konstruktion

In einem Koordinatensystem ist $ay = x^2$ die Gleichung der Parabel p und $(x - \frac{b}{2a^2})^2 + y^2 = (\frac{b}{2a^2})^2$ ist die Gleichung des Kreises k. Aus der Parabelgleichung folgt:

(2) $a^2y^2 = x^4$.

Aus der Kreisgleichung folgt $y^2 = -x^2 + \frac{b}{a^2}x$, sodass:

(3) $a^2y^2 = -a^2x^2 + bx$.

Da der Schnittpunkt A von p und k sowohl die Parabelgleichung als auch die Kreisgleichung erfüllt, muss er auch die Gleichungen (2) und (3) erfüllen. Daraus folgt, dass für die x-Koordinate von A gilt:

(4) $x^4 = -a^2x^2 + bx$.

Die Lösung $x = 0$ der Gleichung (4) interessiert uns nicht. Es sei daher $x \neq 0$ vorausgesetzt. Dann folgt aus (4) die Gleichung:

(5) $x^3 + a^2x = b$

und (5) bedeutet: Die x-Koordinate des Punktes A erfüllt die Gleichung (1) – sie ist also eine Lösung von (1).

Die Jagd nach dem kleinsten Verbrecher

von Hartwig Fuchs

Fermats Irrtum

Pierre de Fermat (1601–1665) war ein vielbeschäftigter erfolgreicher Jurist am Obersten Gerichtshof in Toulouse. Er war aber auch noch erfolgreicher in der Mathematik, in der er wichtige Entdeckungen machte, obwohl er sich mit ihr nur nebenher in seiner Freizeit befasste.

Eine Aussage – bei der ihm kein Beweis gelingen wollte – teilte er 1640 dem Mathematiker und Astronom Bernard Frénicle (um 1605–1675) in einem heute noch erhaltenen Brief mit:

(1) Jede Zahl $F_n = 2^{2^n} + 1$ ist für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ eine Primzahl.

Fermat war wohl überzeugt, dass sein „Gesetz“ (1) keine Ausnahme kennt. Aber dies ist der einzige Fall, bei dem er sich irrte. Es gibt nämlich „kriminelle“ Elemente, die sich keineswegs „gesetzeskonform“ verhalten: Leonhard Euler (1707–1783) machte den **kleinsten** dieser mathematischen „Verbrecher“ dingfest – es ist die zehnstellige Zahl $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ und damit gilt Fermats „Gesetz“ nicht für F_5.[1]

§1 Die Bestimmung eines kleinsten Verbrechers als Beweisprinzip

Die Situation, in der sich Fermat mit seiner Aussage (1) befand, trifft man häufiger in der Mathematik an. Man hat eine Behauptung des Typs:

(2) Für die endlich oder unendlich vielen nichtnegativen ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3, … mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ gelten die Aussagen $A(n_1)$, $A(n_2)$, $A(n_3)$, …, wobei die $A(n_i)$ Aussagen über die ganzen Zahlen n_i seien.

[1] Heute (2015) weiß man: (1) gilt für $n = 0, 1, 2, 3$ und 4, aber für $5 \leq n \leq 32$ und für mehrere Zahlen > 32 ist (1) falsch.

Wenn sich nun einfach kein Beweis für (2) finden lässt, dann könnte das daran liegen, dass es in der Menge $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ Zahlen gibt – sie seien mit v_1, v_2, v_3, ... bezeichnet – für welche die Aussagen $A(v_i)$, $i = 1, 2, 3, ...$ nicht wahr sind. Man sollte deshalb die Möglichkeit einer eventuellen Widerlegbarkeit von (2) durch die Bestimmung solcher Zahlen v_i nicht aus den Augen verlieren. Jedoch ist diese Aufgabe so zu weit gefasst. Es genügt ja, die Suche auf eine einzige Zahl v, die kleinste der Zahlen v_i zu beschränken. Denn bereits durch die eine Aussage $A(v)$ ist dann (2) bereits widerlegt. Die Zahl v und manchmal auch die Aussage $A(v)$ werden als die **kleinsten Verbrecher** für (2) bezeichnet.

Die Existenz eines kleinsten Verbrechers ist stets dann gesichert, wenn es in einer Menge $\{g_1, g_2, g_3, ...\}$ aus ganzen Zahlen ≥ 0 überhaupt Verbrecher gibt. Denn es gilt die Regel:

(R_n) Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen $n \geq 0$ enthält ein kleinstes Element.

Die einfachste und doch in nicht wenigen Fällen erfolgreiche Methode um einen kleinsten Verbrecher aufzuspüren, ist der direkte Zugriff. Dabei überprüft man rechnerisch – am effektivsten mit einem Computer – oder mit mathematischen Argumenten eine Reihe von Aussagen $A(n_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ einer Behauptung (2) mit dem Ziel, eventuell so auf den kleinsten Verbrecher $A(v)$ zu treffen, der (2) widerlegt.

Jagd mit einem Computer

Manchmal führt die Computersuche nach einem kleinsten Verbrecher schnell (vergleiche B1), manchmal aber auch nur mit erheblichem Aufwand (vergleiche B2) zu einem Ergebnis.

(B1) **Abschätzung einer Teilsumme**

Es sei $\sigma(n)$ die Summe aller echten Teiler einer natürlichen Zahl n. Gilt dann:

(3) Für jede ungerade Zahl n ist $\sigma(n) \leq n$?

Mit einem Computer ergibt sich rasch: (3) gilt für $n = 1, 3, 5, \ldots, 943$. Aber für $n = 945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ mit seinen 15 echten Teilern 1, 3, 5, 7, 3^2, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 7$, 3^3, $3^2 \cdot 5$, $3^2 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 7$, $3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ist $\sigma(945) = 975 > 945$, sodass $n = 945$ der kleinste Verbrecher ist, der (3) widerlegt.

(B2) **Eine Behauptung von Euler**

Leonhard Euler, der nicht nur ein überragender Mathematiker, sondern auch ein Rechengenie war, stellte eine Behauptung auf, die über 200 Jahre lang jedem Beweis – und jedem Widerlegungsversuch – widerstand:

(4) Für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist n^4 niemals eine Summe von drei vierten Potenzen.

Eulers Vermutung ist falsch. Der kleinste Verbrecher, der (4) widerlegt, ist die 23-stellige Zahl $n^4 = 422481^4 = 414560^4 + 217519^4 + 95800^4$. Sie wurde von

Roger Frye mit sehr hohem Computeraufwand um 1990 entdeckt.

Jagd mit mathematischer Herleitung

Ein kleinster Verbrecher kann auch schon mal mit mathematischer Argumentation gefasst werden.

(B3) **Eine naheliegende Vermutung**

Seit der Antike war bekannt, wie man regelmäßige Dreiecke und Fünfecke allein mit Zirkel und Lineal konstruieren konnte. Aber trotz aller Bemühungen von Mathematikern gelang es danach über 2000 Jahre lang nicht, regelmäßige p-Ecke, p eine Primzahl > 5, auf die gleiche Weise zu zeichnen. So drängte sich die Vermutung auf:

(5) Für die regelmäßigen p-Ecke, p eine Primzahl > 5, gibt es keine Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal.

Daher kam es einer wissenschaftlichen Sensation gleich, als am 30. März 1796 Carl Friedrich Gauß (1777-1855) entdeckte, dass es einen kleinsten Verbrecher gibt, der die Vermutung (5) widerlegt: das regelmäßige 17-Eck. Er konnte darüber hinaus sogar weitere bei (5) auftretende „Verbrecher“ beschreiben: Die regelmäßigen p-Ecke mit $p = 2^{2^n} + 1$, p und n prim.

Jagd unter falscher Voraussetzung[2]

Wenn man auf Grund eines Verdachts nach Verbrechern für eine Behauptung vom Typ (2) fahndet und es stellt sich dabei heraus, dass dieser Verdacht falsch ist, dann gibt es es folglich gar keine Verbrecher, die (2) widerlegen könnten.

(B4) **Ein endlicher Abstieg**

Es sei $Z(n) = 8_n7$ die $(n+1)$-stellige Zahl mit n Ziffern 8, gefolgt von der Ziffer 7. Für diese Zahlen $Z(n)$ gilt:

(6) Keine der Zahlen $Z(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist ein Vielfaches von 17.

Annahme: Es gibt Zahlen $Z(n)$, die Vielfache von 17 sind.
Es sei $Z(m)$ irgendeines dieser Vielfachen von 17. Dann ist auch $Z(m) - 17$ ein Vielfaches von 17. Nun ist $Z(m) - 17 = 8_m7 - 17 = 8_{m-1}87 - 17 = 8_{m-1}70 = 10 \cdot Z(m-1)$, sodass $Z(m-1)$ ein Vielfaches von 17 ist. Mit der gleichen Überlegung zeigt man, dass dann auch $Z(m-2)$, $Z(m-3)$, … und schließlich $Z(1) = 87$ Vielfache von 17 sind – ein Widerspruch, denn tatsächlich ist 87 kein Vielfaches von 17 – damit ist 87 der kleinste Verbrecher, der die Annahme widerlegt.
Die Annahme stellt also einen falschen Verdacht dar – folglich gilt (6).

§2 Nachweis der Existenz eines kleinsten Verbrechers als Beweismethode

Eine Behauptung ist mit der Angabe eines kleinsten Verbrechers unmittelbar widerlegt (direkte Methode).

[2] Eine „Verbrecherjagd“ unter falscher Voraussetzung ist ein sogenannter Widerspruchsbeweis.

Manche Probleme lassen sich mit Hilfe eines kleinsten Verbrechers sogar lösen, ohne dass man diesen konkret bestimmen muss – es genügt bereits zu wissen, dass es ihn gibt (indirekte Methode).

Auf der Spur des kleinsten Verbrechers

Selbst wenn man nur weiß, dass ein kleinstes Element existiert, kann man es in vielen Fällen mit Hilfe von bestimmten seiner Eigenschaften als einen kleinsten Verbrecher entlarven und so ein Problem lösen.

(B5) **Die unvermeidbare Primzahl**

(7) Wenn man aus der Zahlenmenge $M = \{2, 3, 4, \dots, 5000\}$ beliebige 20 teilerfremde[3] Zahlen entnimmt, dann befindet sich darunter stets eine Primzahl.

Eine direkte Bestätigung von (7) ist wegen der Vielzahl der möglichen 20-Tupel teilerfremder Zahlen wohl kaum zu erhalten. Dagegen lässt sich (7) indirekt mit Hilfe eines kleinsten Verbrechers leicht beweisen.
Annahme: Es gibt mindestens ein 20-Tupel aus teilerfremden Zahlen $n_i \in M$, $i = 1, 2, 3, \dots, 20$, von denen keine eine Primzahl ist.
Da die Zahlen n_i nicht prim sind, besitzt jede von ihnen einen kleinsten Primteiler $p_i < n_i$ und weil die n_i teilerfremd sind, sind die Primteiler p_i sämtlich verschieden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei daher $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{20}$ vorausgesetzt. Dann ist p_1 der kleinste Verbrecher – den man selbst nicht zu kennen braucht! – weil er eine Eigenschaft besitzt, mit deren Hilfe die Annahme widerlegbar ist.
Diese Eigenschaft ist $p_1 \geq 2$. Daraus folgt: $p_2 \geq 3$, $p_3 \geq 5$, $\dots$, $p_{20} \geq 71$ (in der Folge aller Primzahlen ist 71 das zwanzigste Element).
Damit gilt: $n_{20} \geq 71 \cdot 71 > 5000$ – im Widerspruch zu $n_{20} \in M$, also $n_{20} \leq 5000$.
Die Annahme ist daher falsch – es gilt die Behauptung (7).

Fahndung nach dem kleinsten Verbrecher mit der Regel ($\mathbf{R_n}$)

(B6) **Niemals eine Quadratzahl**

(8) Es gibt keine positiven ganzen Zahlen m und n, sodass $2(m^2 + mn + n^2)$ eine Quadratzahl ist.

Annahme: Es gibt eine Quadratzahl Q_0 mit $Q_0 = 2(m_0^2 + m_0 n_0 + n_0^2)$. Da Q_0 gerade ist, ist Q_0 ein Vielfaches von 4. Dann aber ist $m_0^2 + m_0 n_0 + n_0^2$ gerade und sogar ein Vielfaches von 4, weil m_0 und n_0 beide gerade sind.
Setzt man nun $m_0 = 2m_1$, $n_0 = 2n_1$, dann ist $Q_0 = 2 \cdot (4m_1^2 + 4m_1 n_1 + 4n_1^2) = (2(m_1^2 + m_1 n_1 + n_1^2)) \cdot 4$ und $Q_1 = 2 \cdot (m_1^2 + m_1 n_1 + n_1^2)$ ist eine Quadratzahl mit $Q_0 > Q_1$. Mit der gleichen von Q_1 ausgehenden Argumentation erhält man eine Quadratzahl $Q_2 = 2 \cdot (m_2^2 + m_2 n_2 + n_2^2)$ mit $Q_1 > Q_2$. So fortfahrend ergibt sich eine nicht abbrechende Folge Q_0, Q_1, Q_2, …von Quadratzahlen mit $Q_0 > Q_1 > Q_2 > \dots$. Das aber steht im Widerspruch zur Regel (R_n) – siehe oben

[3] Zwei natürliche Zahlen n und m sind teilerfremd, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler 1 ist.

– nach der die Folge Q_0, Q_1, Q_2, ... natürlicher Zahlen ein kleinstes Element Q_v besitzen muss. Durch die Existenz dieses kleinsten Verbrechers Q_v ist die Annahme widerlegt. Es gilt daher (8).

Fahndung nach dem kleinsten Verbrecher mit der Regel (R_r)

Eine Variante der Regel (R_n) erlaubt es auch im Bereich der nicht-negativen reellen Zahlen $r \geq 0$ auf „Verbrecherjagd" zu gehen.

(R_r) Jede nichtleere endliche Menge reeller Zahlen $r \geq 0$ enthält ein kleinstes Element.

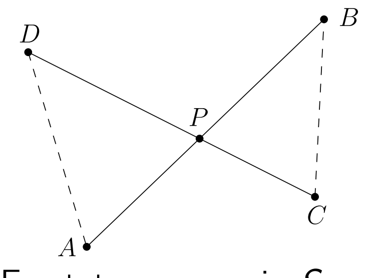
Mit der Regel (R_r) wird der Anwendungsbereich des „Beweisprinzip des kleinsten Verbrechers" erheblich vergrößert – etwa in die Geometrie hinein.

(B7) **Streckensysteme**

In der Ebene seien n rote und n blaue Punkte ($n \geq 1$) gegeben, wobei keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Verbindet man nun jeden der n roten Punkte jeweils mit genau einem blauen Punkt, dann erhält man ein System aus n Strecken. Da die Verbindung von roten und blauen Punkten nur auf endlich viele Arten möglich ist, gibt es endlich viele verschiedene solcher Streckensysteme – wir bezeichnen sie mit S_1, S_2, ..., S_k. Dann gilt:

(9) Es gibt stets ein Streckensystem S_i, $1 \leq i \leq k$, in dem sich keine zwei Strecken kreuzen.

Annahme: Es gibt kein kreuzungsfreies Streckensystem S_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Mit $|S_i|$ sei die Summe der Längen aller Strecken in S_i bezeichnet. Dann ist $\{|S_i| : i = 1, 2, \dots, k\}$ eine endliche Menge positiver reeller Zahlen, die nach der Regel (R_r) ein kleinstes Element – etwa $|S_m|$ – besitzt. $|S_m|$ ist der kleinste Verbrecher, der die Annahme widerlegt. Mit seiner Hilfe können wir nämlich zeigen, dass das zugehörige Streckensystem S_m kreuzungsfrei ist.



Das System S_m sei nicht kreuzungsfrei – es besitze zwei Strecken AB und CD, die sich im Punkt P schneiden. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann: $|AD| < |AP| + |PD|$ sowie $|BC| < |PB| + |CP|$, sodass $|AD| + |BC| < (|AP| + |PB|) + (|CP| + |PD|) = |AB| + |CD|$ ist.

Ersetzt man nun in S_m die Strecken AB und CD durch die Strecken AD und BC, dann gilt für das neue Streckensystem S_{m+1}: $|S_{m+1}| = |AD| + |BC| + (...) < |S_m| = |AB| + |CD| + (...)$, also $|S_{m+1}| < |S_m|$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von $|S_m|$. Also ist S_m kreuzungsfrei. Somit ist die Annahme falsch – es gilt daher (9).

§3 Eingrenzung eines Gebiets für die Verbrecherjagd

Es gibt insbesondere in der Zahlentheorie viele unbewiesene Vermutungen, deren Beweis oder Widerlegung man sich dadurch zu nähern sucht, dass man Gebiete

ausfindig macht, in denen sich mögliche Verbrecher, die die Vermutung widerlegen könnten, aufhalten müssen.
Ein typisches Beispiel für diese Vorgehensweise ist der Beweis der

(B8) **berühmten Vermutung des Christian Goldbach (1690–1764)**

(10) Jede ungerade natürliche Zahl n, $n \geq 7$, ist die Summe dreier Primzahlen.

Man machte die Annahme: Es gibt einen Verbrecher, der (10) widerlegt.
Die Suche nach einem solchen Verbrecher blieb jedoch viele Jahre aussichtlos – das Jagdgebiet $\{7, 9, 11, ...\}$ war einfach zu groß. Erst 1937 gelang ein entscheidender Durchbruch:
Ein möglicher Verbrecher kann sich nur in dem endlichen(!) Gebiet $\{7, 9, 11, ... , 3^{3^{15}} - 1\}$ aufhalten (J.M. Winogradow, K. Borozdin). Danach haben Y. Saouter 1998 diesen Bereich von unten und Liu-Ming-Chit 2002 von oben her verkleinert zu $\{10^{20} + 1, 10^{20} + 3, ... , m \text{mit } m < e^{3100}\}$. Durch weitere Einengung des Jagdgebiets konnte damm Harald Helfgott 2013 zeigen, dass die oben genannte Annahme falsch ist.
Da es keinen Verbrecher gibt, der (10) widerlegt, ist Goldbachs Vermutung bewiesen.

Die besondere Aufgabe
Das manipulierte Orakel
von Hartwig Fuchs

In einer fernen Vergangenheit gab es in einer abgelegenen Gegend ein Orakel, das die dort lebenden Menschen bei wichtigen Entscheidungen aufsuchten, um nach Rat zu fragen.
Als einmal der Ausbruch eines Krieges zwischen den benachbarten Stämmen der Xante und der Ybra drohte, ritt der Häuptling Xa von den Xante zum Orakel, um dort zu erfahren, wie die Aussichten seines Volkes bei einer solchen Auseinandersetzung seien. Was er nicht wusste: Häuptling Yb von den Ybra war schon vor ihm da gewesen und:

(1) Das Orakel hatte Yb den Sieg verheißen.

Als nun Xa den Orakelpriester um einen Spruch des Orakels bat, erklärte der ihm zunächst, wie man dazu vorgehen müsse:

- In dieser Schale befinden sich viele weiße und schwarze Kugeln. Nimm dir eine ungerade Anzahl von ihnen.

Xa wählte zwölf weiße und 17 schwarze Kugeln. Der Priester starrte die 29 Kugeln eine Weile beschwörend an. Dann sagte er:

- Lege nun zwei beliebige deiner Kugeln zurück in die Schale. Sind diese Kugeln von gleicher Farbe, so nimm dir eine weiße Kugel aus der Schale und lege sie zu deinen Kugeln. Sind sie verschiedenfarbig, so nimm dir eine schwarze Kugel und lege sie zu deinen Kugeln. Wiederhole diesen Vorgang so oft, bis du nur noch eine Kugel besitzt. Durch diese letzte Kugel wird das Orakel zu dir sprechen:

(2) Ist die letzte Kugel weiß, so gewinnst du den Krieg. Ist sie schwarz, so verlierst du ihn.

Xa verfährt nach den Anweisungen des Priesters: Seine letzte Kugel ist schwarz – er wird den Krieg verlieren. Zufall? Oder hat der Priester im Blick auf (1) das Ergebnis manipuliert?

Als der Orakelpriester zu Beginn die von Xa gewählten Kugeln einige Zeit anschaute, hat er dabei gezählt, wie viele weiße und wie viele schwarze Kugeln Xa besaß. Nun kannte er die Regel:

(3) Hat Xa anfangs eine ungerade Anzahl schwarzer Kugeln, dann ist seine letzte Kugel ebenfalls schwarz.

Wegen (3) und (1) legt der Priester in (2) der letzten schwarzen Kugel die Bedeutung „Niederlage“ bei.

Warum gilt (3)?
Mit (w, s) sei die Anzahl der weißen sowie der schwarzen Kugeln bezeichnet, die Xa besitzt. Wenn er dann zwei seiner Kugeln in die Schale zurücklegt und dann eine Kugel aus der Schale nimmt, dann hat er danach entweder $(w-1, s)$ oder $(w+1, s-2)$ Kugeln – siehe Tabelle:

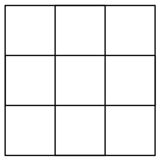
Anzahl von Xa's Kugeln vorher	(w, s)	(w, s)	(w, s)
Zurücklegen in die Schale	$-(2, 0)$	$-(0, 2)$	$-(1, 1)$
Entnahme aus der Schale	$+(1, 0)$	$+(1, 0)$	$+(0, 1)$
Anzahl von Xa's Kugeln nachher	$(w-1, s)$	$(w+1, s-2)$	$(w-1, s)$

Somit ändert sich die Anzahl von Xa's schwarzen Kugeln nicht oder sie vermindert sich um zwei, wenn Xa zwei Kugeln in die Schale zurücklegt und ihr danach eine Kugeln entnimmt.
Wenn also Xa alle Kugeln bis auf eine in die Schale zurückgelegt hat, dann hat er insgesamt eine gerade Anzahl schwarzer Kugeln in die Schale gelegt. Daraus folgt, dass die Aussage (3) zutrifft.

Weil die anfängliche Anzahl von Xa's schwarzen Kugeln ungerade war, musste seine letzte Kugel auch schwarz sein.
Das wusste der Priester von vornherein wegen (3). Daher hat er mit seiner Festlegung (2) den Orakelspruch ganz klar manipuliert – die Prognose des Orakels stand von Anfang an fest.

Mathematische Entdeckungen

Untersuche, in wieviele Quadrate ein gegebenes Quadrat zerlegt werden kann – wobei die Teilquadrate gleich oder verschieden groß sein dürfen.



Beispiel: Das nebenstehende Quadrat ist in 9 Quadrate zerlegt. Deshalb kann es auch in 36 Quadrate zerlegt werden.

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2015 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 121

In Heft 121 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Spitze Innenwinkel eines konvexen m-Ecks

Ein m-Eck, $m \geq 3$, heißt konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringenden Ecken besitzt und keine drei benachbarten Ecken in einer Seite des m-Ecks liegen. Dann gilt für jeden seiner Innenwinkel α_i, $i = 1, 2, \dots, m$, dass $\alpha_i < 180°$ ist und umgekehrt. Einen Winkel, der $< 90°$ ist, nennt man spitz.

Es gibt Dreiecke mit lauter spitzen Winkeln. Dagegen kann ein konvexes 4-Eck keine vier spitzen Innenwinkel α_i haben: Wäre alle α_i spitz, so wäre $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 4 \cdot 90°$; tatsächlich aber gilt im konvexen 4-Eck: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360°$.

Untersuche daher die Fragen:

a) Wie viele spitze Winkel kann ein beliebiges konvexes m-Eck, $m \geq 3$ höchstens haben?

b) Gibt es zu jedem m, $m = 3, 4, 5, \dots$ ein konvexes m-Eck, das die höchstmögliche Anzahl spitzer Winkel besitzt? (H.F.)

Ergebnisse

Mit dieser Aufgaben haben sich Maximilian Göbel und Heiko Kötzsche vom Gymnasium Oberursel sowie Silas Rathke von der Alexander-von-Humboldt-Schule in Neumünster beschäftigt.

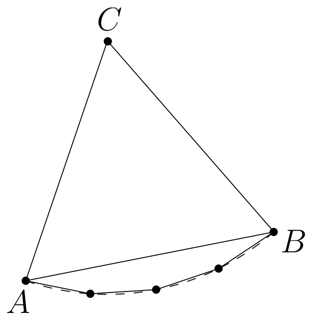
Alle drei bewiesen die folgenden beiden Behauptungen:

a) Ein konvexes m-Eck besitzt höchstens drei spitze Winkel.
Beweis: Bekanntlich beträgt die Summe der Innenwinkel im konvexen m-Eck

$(m-2) \cdot 180°$. Ist n die Anzahl spitzer Winkel so gilt:

$$\begin{aligned} (m-2) \cdot 180° &< n \cdot 90° + (m-n) \cdot 180° \\ -360° &< -n \cdot 90° \\ 4 &> n \end{aligned}$$

b) Zu jedem $m \geq 3$ gibt es ein konvexes m-Eck mit drei spitzen Winkeln.
Beweis (nach Kötzsche): Betrachte ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ und schlage den Kreisbogen um C durch A und B. Unterteile den Kreisbogen äquidistant durch $m-1$ Punkte (inklusive A und B).
Verbinde dann benachbarte Punkte durch eine Strecke. Dann sind die Innenwinkel des entstandenen m-Ecks bei A, B, C weiterhin spitz, da erst die Tangente an den Kreisbogen bei A beziehungsweise B einen rechten Winkel mit den Dreiecksseiten schließt.



Beispiel für $m = 6$

Was uns so über den Weg gelaufen ist

Eine bemerkenswerte Darstellung der natürlichen Zahlen

von Hartwig Fuchs

Leonhard Euler (1707–1783), einer der ganz großen Mathematiker, hat die wohl berühmteste und schönste Formel der Mathematik entdeckt und bewiesen – in ihr sind die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik vereinigt:

$$1 + e^{\pi i} = 0.$$

$(e \approx 2{,}7182818\ldots,\ \pi \approx 3{,}1415926\ldots,\ i = \sqrt{-1})$

Aus $e^{\pi i} = -1$ folgt $e^{2\pi i} = (e^{\pi i})^2 = 1$ sowie $e^{n \cdot 2\pi i} = 1$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mit den letzten Gleichungen erhält man eine ziemlich ungewöhnliche Darstellung der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 1 &= e^{2\pi i} \\ 2 &= e^{2\pi i} + e^{4\pi i} \\ 3 &= e^{2\pi i} + e^{4\pi i} + e^{6\pi i} \\ 4 &= e^{2\pi i} + e^{4\pi i} + e^{6\pi i} + e^{8\pi i} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(H.F.)

Nachtrag zu „169 und die Quadratzahlen“ aus MONOID122

von Hartwig Fuchs

In MONOID 122, Seite 6, wird unter der Überschrift „169 und die Quadratzahlen“ gefragt: Stimmt es, dass die Zahl 169 für $n = 1, 2, 3, \dots, 155$ als eine Summe von n Quadratzahlen geschrieben werden kann?

Die Antwort lautet ja!
Nur für die Zahlen $n = 156, 159, 162, 164, 165, 167$ und 168 ist eine solche Darstellung von 169 nicht möglich.

Mitteilung

Derzeit ist die mathematische Mitmach-Ausstellung „Eine Reise durch Raum und Zahl“ im Stadt- und Industriemuseum Rüsselsheim zu sehen. Die Ausstellung des Instituts für Mathematik Universität Mainz lädt ein zum Mitmachen, Staunen, Entdecken und Weiterdenken. Sie ist noch bis zum 20. Dezember 2015 zu sehen, also bis kurz vor Weihnachten. Weitere Informationen unter

`www.museum-ruesselsheim.de/103-0-Eine-Reise-durch-Raum-und-Zahl.html`

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 121

Aachen, Inda-Gymnasium: Kl. 8: Luca Bühler 24.

Ahrweiler, Gymnasium Calvarienberg: Kl. 10: Frauke Stoll 23.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (Betr. Lehrerin: Frau Lüning)**:**
Kl. 5: Hannah Acker 12, Lukas Born 25, Lea Daum 20, Emilia Dreyer 1, Sophie Huber 5, Alina Jeuck 12, Amelie Mahler 30, Lorena May 33, Jonas Schneider 20, Victoria Strunck 12;
Kl. 7: Torben Bürger 50, Virginia Fox 59, Maximilian Hauck 122, Sarah Kästner 57, Eileen Kirchner 6, Mareen Ohrt 23, Pia Richter 9, Manuel Wolf 15, Rabea Zimmermann 33;
Kl. 9: Melanie Werner 16;
Kl. 10: Victoria Fox 20;
Kl. 11: Katharina Rößler 34.

Bad Ems, Goethe-Gymnasium: Kl. 12: Miriam Gerharz 42.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Are-Gymnasium:
Kl. 5: Imer Ademi 3, Kaltrina Hasani 2, Caricia Janoschka 7, Lasse Neukirchen 2, Fannie Siebenhüner 3, Annik Theisen 1.

Bommersheim, Burgwiesenschule: Kl. 4: Sina Schneider 21.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 5: Darico Schade 10;
Kl. 12: Jamico Schade 43.

Frankenthal, Karolinen-Gymnasium (betr. Lehrerin: Frau Schneider)**:**
Kl. 5: Felix Kummermehr 7, Jasmin Nerenberg 4, Lilli Storck 3;
Kl. 6: Tim Rinhard 13;
Kl. 7: Annika Koch 30;
Kl. 10: Christoph Hemmer 22, Franz Matejcek 18;
Kl. 11: Kevin Mours 49, Adriana Stenger 30, Marcel Wittmann 16.

Frankenthal, Robert-Schuman-Schule: Kl. 9: Patrick Riebe 45.

Friedberg, Augustinerschule:
Kl. 5: Aleksandra Herbst 47;
Kl. 7: Tobias Jedich 109;
Kl. 9: Simon Gröger 17, Ben Mayer 23.

Friedrichsdorf, Rhein-Main-International-Montessori-School (Betreuende Lehrerin: Frau Elze)**: Kl. 2:** Jule Beinker 13;
Kl. 3: Lena Decker 4, Mateo Alexander Dorsch 6, Ana Flores 13, Marina Knoblauch 17, Sofia Somma 6, Vivienne Van't Hof 15, Sunny Sue Zwermann 15;
Kl. 4: Adrien Burgmann 15, Nea Gerlach 12, Mia Großkreutz 6, Olivia Kern 17, Elisabeth Korzilius 15, Arthur Krewinkel 17;
Kl. 12: Luca Gladiator 16.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuender Lehrer: Herr Grasse):
Kl. 5: Sbeastian Braun 12, Kai-Dominik Hoppe 2, Emre Sadic 9,
Kl. 6: Tobias Streichhardt 13, Noah Tritschler 8;
Kl. 7: Burak Sadic 12;
Kl. 8: Melanie Schuy 64;
Kl. 9: David Storzer 92, Lorenz Wagner 11;
Kl. 10: Marvin Weisbender 9.

Höhr-Grenzhausen, Gymnasium im Kannenbäckerland:
Kl. 12: Farah Breiden 6.

Kelkheim, Eichendorffschule:
Kl. 5: Dilara Kösger 3;
Kl. 6: Jens Hein 4;

Kl. 7: Denis Mayle 38.

Kelkheim, Gesamtschule Fischbach:
Kl. 5: Linus Rabeneck 8;
Kl. 6: Beatrice Popescu 25;
Kl. 7: Malte Rehm 23.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 8: Laura Baumir 2;
Kl. 9: Jana Eichhorn 10;
Kl. 10: Melanie Weibrich 19;
Kl. 12: Theresa Schöche 30.

Marienstatt, Privates Gymnasium Marienstatt:
Kl. 8: Florian Enders 7, Janik Seiler 5, Nils Siefert 5;
Kl. 12: Robin Thiel 37, Anna-Lena Schneider 17.

Neumünster, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
Kl. 10: Silas Rathke 62.

Neuwied, Rhein-Wied-Gymnasium (Betreuender Lehrer: Herr Gruner)**:**
Kl. 5: Nils Müller 8, Elicia Rotarius 13;
Kl. 6: Marius Ahlfeld 14, Fiona Ruschke 17;
Kl. 7: Jannis Thron 12
Kl. 9: Jonas Ahlfeld 45, Darleen Baum 35, Moira Gier 14, Myrta Knauf 7, Sophie Schellhaas 7, Anja Wingender 16;
Kl. 10: Daniela Bergen 26, Matthias Bergen 47, Jasmin Hallyburton 35, Denise Kadri 9, Vinh-An Pham 20, Verena Rüsing 35;
Kl. 11: Rebecca Dattko 21;
Kl. 12: Mirjam Bourgett 9, Daniel Fink 41, Alexander Göbel 10, Sandra Wingender 11;

Kl. 13: Janina Vogl 23.

Neuwied, Wemer-Heisenberg-Gymnasium:
Kl. 7: Sonja Kowallek 58.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrerin: Frau Beitlich)**:**
Kl. 5: Josefine Kaßner 36, Oliver Stork 18;
Kl. 6: Sönke Schneider 93;
Kl. 7: Jonas Blumenroth 15, Jonas Glückmann 32, Philipp Karn 64, Fabian Liepach 76, Sibylla Ribka 15;
Kl. 8: Saskia Aierstock 22, Maximilian Göbel 108, Julian Ingrisch 9, Maximilian Kraffzick 11, Jara Müller-Kästner 59, Helen Richter 46, Kristin Teichert 36;
Kl. 10: Julia Theis 19;
Kl. 11: Katharina Kiefer 18;
Kl. 12: Jan-Philipp Bullenkamp 62, Heiko Kötzsche 66, Markus Kötzsche 66.

Regensburg, Albertus Magnus Gymnasium:
Kl. 6: Johannes Plößl 4.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
Kl. 5: Niko Gersthahn 6, Justin Haubrichs 6, Greta Kluge 14, Joshua Knöpfel 7, Jordan Plümper 9;
Kl. 6: Kira Giebels 3 Carina Heinemann 5, Jacqueline Hermann 8, Marie Jaeschock 5, Nico Kamp 3, Lena Kreienberg 5 Ruben Rohn 8, Julia Schrieck 8, Johanna Schwarz 7, Naomi Smeets 11, Madita Spies 7, Tim Springer 7, Felix Stoffel 5, Lotte Tillmann 7, Antonio Ziesche 5;
Kl. 9: Friedrich Holtorf 3;
Kl. 10: Fabian Paul 3;
Kl. 11: Malte Bayer 3;
Kl. 12: Janine Röper 11.

Sankt Augustin, Albert-Einstein-Gymnasium:
Kl. 5: Benedikt Erdsach 10, Vincent Keppel 14, Leonie Tannebaum 7.

Schwäbisch Gmünd, Landesgymnasium für Hochbegabung:
Kl. 8: Clara Deifel 18.

Tangermünde, Diesterweggymanisum:
Kl. 5: Miriam Büttner 54.

Villingen-Schwenningen Kl. 6: Felix Zechner 6.

Wiesbaden, Leibnizschule:
Kl. 9: Andreas Dernier 11;

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium:
Kl. 5: Raphael Gaedtke 15.

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni (V.i.S.d.P.), Marcel Gruner
Mitglieder: Angelika Beitlich, Laura Biroth, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Prof. Dr. Steffen Fröhlich, Dr. Hartwig Fuchs, Willy Gemmer, Dr. Klaus Gornik, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Lüning, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Prof. Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Maximilian Preisinger
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Bettina Wiebe
Betreuung der Abonnements und Versand: Anita Peffer-Kohl

Jahrgang 35 | Heft 123 | September 2015

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Für ein Jahresabo erheben wir einen Kostenbeitrag von 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „Monoid", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz, vertreten durch den Präsidenten Herrn Prof. Dr. Georg Krausch.
Monoid wird untersützt durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Impressum

Anschrift: Institut für Mathematik, Monoid-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid