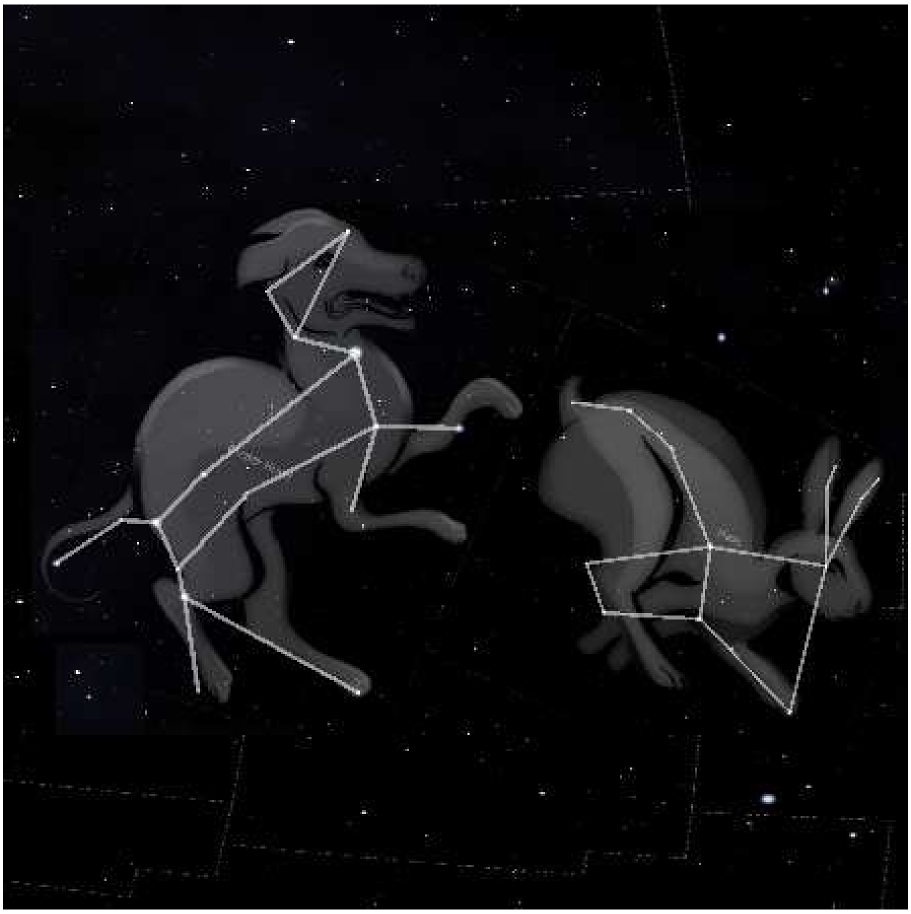
Jahrgang 30 Heft 104 Dezember 2010

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.02.2011.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Herrn Kraft, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der „Rubrik der Löser“ und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Ordnung im Chaos

von Hartwig Fuchs

Überall ist Ordnung

In dem Film „A Beautiful Mind“[1] über das Leben des John Nash[2] gibt es eine Szene, die manchem Zuschauer rätselhaft erscheinen muss. Nash und seine spätere Ehefrau betrachten den nächtlichen Sternenhimmel, als er die ungewöhnliche Bitte äußert, seine Begleiterin möge ihm doch irgend einen Begriff nennen, der ihr spontan einfalle. Sie sagt verwundert „Regenschirm“, und er zeigt ihr nach kurzem Suchen am Himmel eine Sternenkonstellation, die punktweise den Umriss eines „Regenschirms“ besitzt. Was bedeutet diese Episode?

Es gibt einen berühmten Satz der Logik von Ramsey[3] der sinngemäß aussagt:

(1) Totale Unordnung ist nicht möglich. Jede hinreichend große Struktur – sei es nun eine Ansammlung von Menschen, ein Haufen Sandkörner, die sichtbaren Sterne am Firmament oder eine Menge mathematischer Objekte wie Zahlen oder Punkte – enthält zwangsläufig eine geordnete Teilstruktur.

Der Mathematikier Nash kannte wohl den Satz von Ramsey oder aber seine unten folgende geometrische Version (3) – und am Beispiel des „Regenschirms“ hat er seiner Begleitung die Erkenntnis Ramseys über Ordnung im Chaos näher bringen wollen (was immer er damit bezweckte!).

Das Happy Ending-Theorem

Der Satz von Ramsey ist von sehr abstrakter Natur. Einer kleinen Studentengruppe aus Budapest – Pál Erdös, Georges Szekeres und Edith Klein[4] – fand für ihn jedoch zwischen 1933 und 1934 eine anschaulich-geometrische Version.
Klein entdeckte zunächst ein neues geometrisches Problem und auch seine Lösung:

(2) Unter fünf Punkten beliebiger Position in der Ebene, von denen aber keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, gibt es stets vier Punkte, die ein konvexes Viereck[5] bilden.

Alle denkbaren Fälle des Kleinschen Problems sind zurückführbar auf eine der Situationen in der nachfolgenden Abbildung, in denen die Punkte A, B, C, D jeweils ein konvexes Viereck bilden:

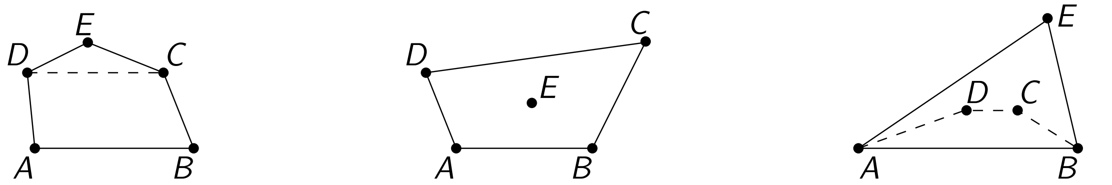
[1] Deutscher Titel: „A Beautiful Mind – Genie und Wahnsinn“ (2001)

[2] John Nash (geboren 1928), amerikanischer Mathematiker, Gewinner des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften 1994.

[3] Der Satz von Frank Plumpton Ramsey (1903–1930, englischer Logiker und Mathematiker) ist enthalten in dem Artikel: „On a problem of formal logic“; Proc. London Math Soc. 30 (1930).

[4] Pál Erdös (1913–1996), einer der Pioniere der Ramsey-Theorie;
Georges Szekeres (1911–2005) und Edith Klein(1910–2005), ungarisches Mathematiker-Ehepaar.

[5] Ein k-Eck heißt konvex, wenn es keine in sein Innengebiet einspringende Ecke besitzt.



Es gelang Erdös und Szekeres bald, eine naheliegende Verallgemeinerung der Aussage (2) zu beweisen:

(3) In einer hinreichend großen Menge von Punkten der Ebene (= die Ramsey-Struktur), von denen keine drei auf einer Geraden liegen, gibt es stets k Punkte, die man zu einem konvexen k-Eck (= die Teilstruktur) verbinden kann.

Erdös nannte (3) das Happy-Ending-Theorem, weil kurz nach seiner Veröffentlichung[6] George Szekeres und Edith Klein heirateten.

Das Party-Problem

Der Satz von Ramsey und seine geometrische Variante (3) sind reine Existenzbeweise: Sie sagen zwar aus, dass jede genügend große Struktur die geforderte geordnete Teilstruktur stets enthält, aber sie machen keine Angaben darüber, wie denn eine solche zu finden sei.

Ein erster Schritt zur Lösung dieses Problems könnte die Bestimmung der Minimalzahl n von Elementen sein, die eine Struktur haben muss, damit sie die gesuchte Teilstruktur überhaupt besitzen kann.

Und genau dieser Frage ist die Budapester Stundentengruppe für die Punktsysteme des Happy-Ending-Theorems (3) nachgegangen. Aber abgesehen von Einzelfällen sind sie – und alle späteren Mathematiker bis heute – nicht wesentlich über die sogenannte Erdös-Vermutung: $n = 2^{k-2} + 1$ hinausgekommen.

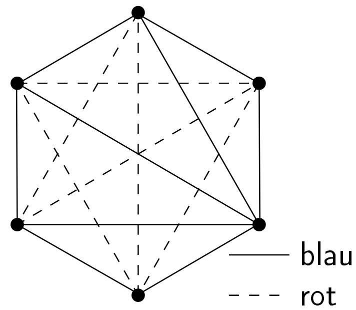
Bei seinen Versuchen, sich einem Beweis dieser Vermutung wenigstens anzunähern, stieß Erdös auf ein neues Ramsey-Problem, das in eingekleideter Form seinen ersten öffentlichen Auftritt 1947 in dem mathematischen Wettbewerb Kürschak Competition hatte und seither in vielen Varianten als das Party-Problem zum Repertoire anspruchsvoller Wettbewerbe gehört. In seiner schlichtesten Form lautet es so:

(4) In einem Raum befinden sich sechs Personen.
Trifft es stets zu, dass sich mindesten drei von ihnen kennen oder dass sich mindestens drei von ihnen fremd sind?
Hinweis: A kennt B beziehungsweise A kennt B nicht soll auch bedeuten: B kennt A beziehungsweise B kennt A nicht.

Das mathematische Modell für das Party-Problem stammt von Erdös: Er ordnet jeder Person genau einen Punkt in der Ebene so zu, dass keine drei Punkte in einer

6 Erdös und Szekeres: A combinatorical problem in geometry – Compositio Math. 2 (1935).

Geraden liegen. Dann verbindet er zwei Punkte durch eine blaue Strecke, falls sich die zugehörigen Personen kennen und durch eine rote Strecke, falls sie sich fremd sind.
Die resultierende Figur G_6, in der jeder Punkt (Ecke) mit jedem anderen Punkt durch genau eine farbige Strecke (Kante) verbunden ist, heißt ein vollständiger farbiger Graph.
Einem Trio miteinander bekannten beziehungsweise einander fremden Personen entspricht im zugehörigen Graph G_6 ein Dreieck mit lauter blauen beziehungsweise lauter roten Seiten – vergleiche die nebenstehende Abbildung. Daher lässt sich die Frage (4) in ein Problem des Graphen G_6 und damit in das von Erdös entdeckte Ramsey-Problem bei vollständigen farbigen Graphen transformieren:



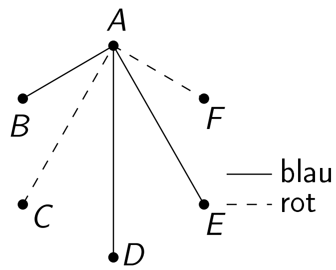
(5) In einem vollständigen Graphen G_6 mit sechs Ecken, von denen keine drei in einer Geraden liegen, seien die Kanten beliebig blau oder rot gefärbt. Gibt es dann in G_6 stets ein blaues oder ein rotes Dreieck?

Die Schwierigkeit des Problems (5) liegt im Wort „stets“.
Der Graph G_6 besitzt 15 Kanten – siehe obige Abbildung. Bei jeder Kante hat man zwei Färbemöglichkeiten. Mithin gibt es $2^{15} = 32768$ verschieden gefärbte Exemplare des Graphen G_6 – und jedes von ihnen ist dann hinsichtlich (5) zu überprüfen.
Man kann sich jedoch die Untersuchung jedes einzelnen dieser 2^{15} Exemplare durch die folgende einfache Überlegung sparen:

A sei eine beliebige Ecke von G_6. Von A gehen fünf Kanten aus – nach dem Schubfachprinzip sind davon mindestens drei blau oder mindestens drei rot. Es seien daher in der nachfolgenden Abbildung die Kanten AB, AD und AE blau (sind sie rot, dann vertausche man im Folgenden die Farben blau und rot).
1. Fall: Mindestens eine der Kanten BD, BE, DE ist blau. Dann enthält G_6 das blaue Dreieck $\triangle ABD$ oder $\triangle ABE$ oder $\triangle ADE$.

2. Fall: Die Kanten BD, BE und DE sind rot. Dann ist das Dreieck $\triangle BDE$ rot.

Damit ist gezeigt, dass die Frage (5) und deshalb auch die Frage (4) zu bejahen sind. Auf diese Weise ist das Party-Problem (4) elegant gelöst.



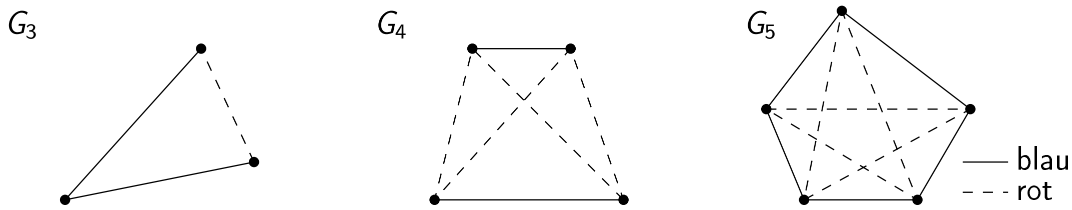
Ramsey-Zahlen

Erdös hat die Frage (5) auch allgemeiner gestellt:

(6) In einem vollständigen Graphen G_n mit n Ecken seien die Kanten beliebig

blau oder rot gefärbt. Wie groß muss dann n mindestens sein, damit G_n einen vollständigen einfarbigen Graphen G_k mit k Ecken oder einen vollständigen andersfarbigen Graphen G_m mit m Ecken enthält?

Die kleinste Zahl n, für die ein vollständiger farbiger Graph G_n die Bedingungen von (6) erfüllt, heißt die Ramsey-Zahl $R(k, m)$. Die Lösung des Falles (4) zeigt, dass $R(3, 3) \geq 6$ ist. Tatsächlich gilt $R(3, 3) = 6$, wie die vollständigen farbigen Graphen G_3, G_4, G_5 in der nachfolgenden Abbildung zeigen, von denen keiner ein einfarbiges Dreieck enthält.



Die Ramsey-Zahlen $R(2, m)$ mit $m = 2, 3, 4, \ldots$ lassen sich leicht angeben, wenn ein vollständiger Graph G_2 mit zwei Ecken als eine Kante mit ihren zwei Endpunkten definiert wird:

Ein vollständiger farbiger Graph G_m mit m Ecken, mit $m \geq 2$, enthält mindestens eine blaue (rote) Kante oder aber G_m ist einfarbig blau (rot). Mithin gilt:

(7) $R(k, m) = m$ für $k = 2$ und $m = 2, 3, 4, \ldots$

Sobald man aber versucht, Ramsey-Zahlen $R(k, m)$ mit $k \geq 3$ zu bestimmen, gerät man in eines der schwierigsten Gebiete der Mathematik. Seit dem Bekanntwerden des Problems (6) ist es ganzen Legionen von Mathematikern nicht gelungen, mehr als neun Ramsey-Zahlen $R(m, k)$ mit $k \geq 3, m \geq 3$ zu bestimmen – nur die folgenden Ramsey-Zahlen sind bekannt (Stand 2004):

m	3	4	5	6	7	8	9
$R(3, m)$	6	9	14	18	23	28	36
$R(4, m)$		18	25				

Daneben hat man noch einige Dutzend Abschätzungen für Ramsey-Zahlen gefunden – wie zum Beispiel diese: $798 \leq R(10, 10 \leq 23\,556)$.

An solchen Ungleichungen lässt sich gut verdeutlichen, welche gigantisch großen Mengen von Graphen bei der Bestimmung von Ramsey-Zahlen ins Spiel kommen und welche Probleme dadurch zwangsläufig auftreten.

Im Fall $R(10, 10)$ sei etwa M_{798} die Menge aller vollständig verschiedenfarbigen Graphen G_{798} mit 798 Ecken. Jeder dieser Graphen besitzt $\frac{1}{2} \cdot 798 \cdot 797 = 318003$ Kanten, die entweder blau oder rot gefärbt sind.

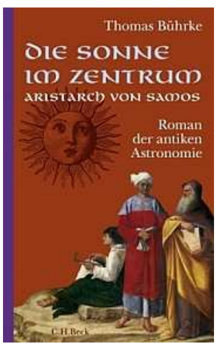
M_{798} besitzt mithin $2^{318003} \approx 2,77 \cdot 10^{95728}$ Elemente. Und weitaus größer sind die Mengen M_l mit $798 < l \leq 23556$.

Noch besser aber lässt sich das – auch für Computer – fast undurchdringliche Dickicht an Schwierigkeiten bei der Bestimmung von $R(m, k)$ durch die Tatsache illustrieren, dass allein Erdös 31 Probleme in direktem Zusammenhang mit Ramsey-Zahlen angegeben hat.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Thomas Bührke: „Die Sonne im Zentrum. Aristarch von Samos“
Aristarch von Samos war ein genialer Astronom und Mathematiker der Antike, der in Alexandria und Athen studiert hatte. Von seinen Werken ist leider nur „Von der Größe und Entfernungen der Sonne und des Mondes“ überliefert. Er war ein Vertreter des heliozentrischen Weltbildes und wurde später als „Kopernikus der Antike“ bezeichnet. Thomas Bührke macht die historische Persönlichkeit des Aristarch zur Hauptfigur seines mathematisch-historischen Romans. Obwohl der Autor kaum auf Originalquellen zurückgreifen konnte, entsteht eine sehr plastische und historisch getreue Darstellung vom Leben in einer antiken Großstadt wie Alexandria. Ebenfalls sehr lebendig und gelungen erscheint die Darstellung des Alltags der Philosophen und Wissenschaftler in der berühmten Bibliothek von Alexandria. Die Haupthandlung des Romans beginnt mit dem Eintreffen des jungen Aristarch in Alexandria am 2. Juli 289 vor Christus. Er erhält Unterricht von den Mathematikern Straton und dem großen Euklid sowie dem Astronomen Timocharis und entdeckt und entwickelt dort sowohl mathematische Ideen als auch astronomische Geräte wie die sphärische Sonnenuhr. Der Höhepunkt des Buches ist jedoch ein wissenschaftlicher Disput zwischen Aristarch und Kleanthes über das heliozentrische Weltbild, der in seiner Gereiztheit an den Jahrhunderte später stattfindenden Disput Galileo Galileis erinnert.

Fazit: Mit seinem Roman „Die Sonne im Zentrum“ hat Thomas Bührke die richtige Mischung aus Abenteuerroman, historischem Jugendbuch und mathematikhistorischen Hintergründen zusammengestellt. Es ist ihm ein äußerst spannendes Buch gelungen, welches man – hat man erst einmal angefangen – nicht mehr aus der Hand legen wird. *Gesamtbeurteilung:* sehr gut ☺☺☺



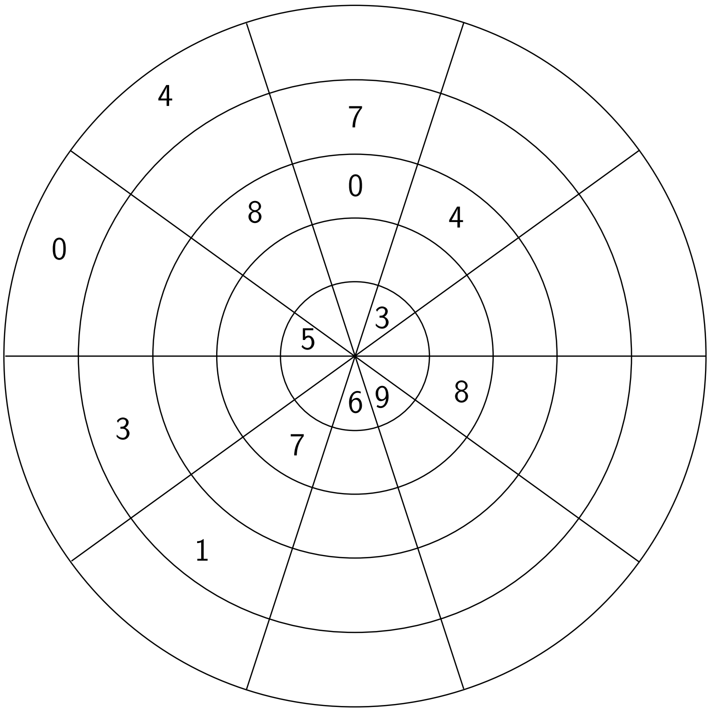
Angaben zum Buch:
Bührke, Thomas: Die Sonne im Zentrum. Aristarch von Samos. C. H. Beck 2009, ISBN 978-3406582493, gebunden 276 Seiten, 16,90 €.

Art des Buches:	Historischer Jugendroman
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Aufgaben zum neuen Jahr

von Hartwig Fuchs

Kreis-Sudoku



In der Figur, bestehend aus 50 Feldern, die von fünf Kreisringen und zehn Sektoren gebildet sind, sollen die ganzen Zahlen 0, 1, ..., 9 so auf die Felder verteilt werden, dass gilt:

1. Jeder Kreisring enthält jede der Zahlen 0, 1, ..., 9 genau ein Mal;
2. Jeweils zwei benachbarte Sektoren enthalten zusammen jede der Zahlen genau ein Mal.

Nachdem alle Felder mit Zahlen belegt sind, sei jeder Sektor mit derjenigen seiner fünf Zahlen nummeriert, die dem Kreismittelpunkt am nächsten liegt. Anschließend werden die fünf Zahlen eines jeden Sektors von innen nach außen durch fünf Buchstaben ersetzt und zwar nach der Vorschrift:

Sektor 1:	ENUNS	Sektor 6:	EICHE
Sektor 2:	ENSCH	Sektor 7:	ESERN
Sektor 3:	ERENL	Sektor 8:	SJAHR
Sektor 4:	EINER	Sektor 9:	FOLGR
Sektor 5:	WIRWU	Sektor 0:	SNEUE

Die Buchstaben-Sektoren ergeben in der richtigen Reihenfolge, jewels vom Zentrum nach außen gelesen, einen Wunsch der Redaktion.

Jahreszahl-Spielerei

Es sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Folge der nach wachsender Größe geordneten Primzahlen – beispielsweise ist $p_{170} = 1013$ und $p_{300} = 1987$.

a) Wie groß ist p_{305}?

b) Es sei $p := p_{305} - p_n$ mit $n < 305$. Bestimme dann n so, dass gilt:

$$\mathbf{2} \cdot p + \mathbf{0} \cdot p_2 + \mathbf{1} \cdot p_3 + \mathbf{1} \cdot p_1 = 2011$$

Teilbarkeit durch 2011?

Behauptung: Für jedes n, $n = 1$, mit 2, 3, ..., ist jede der Zahlen $2012^n - 1^n$, $2013^n - 2^n$, $2014^n - 3^n$, ... durch 2011 teilbar.

Stimmt die Behauptung?

Summendarstellung von 2011

Ist 2011 die Summe von zwölf unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen?

Ein besonderer Funktionswert

Es sei $f(x) := \frac{x-1}{x+1}$ und $f^2(x) := f(f(x))$ sowie $f^n(x) := f(f^{n-1}(x))$ für $n > 2$. Berechne $f^{2011}(2011)$.

Quersumme 2011

Bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die gilt:
Die Summe aus der Zahl n und ihrer Quersumme $Q(n)$ ist 2011.

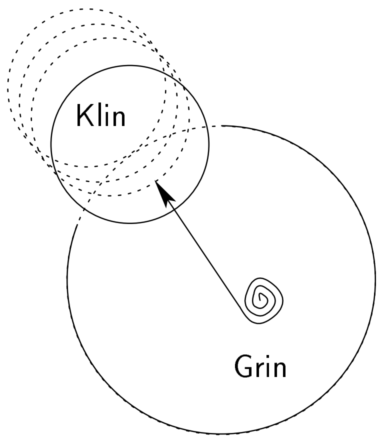
Eine quadratische Gleichung

Finde die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $14x^2 - 13x - 2xy + 3y = 2011$, falls es welche gibt.

Die Lösungen zu den Aufgaben findet ihr in diesem Heft ab Seite **??**

Die besondere Aufgabe
Überleben im Flächenland
von Hartwig Fuchs

Edwin A. Abbott* hat in seinem 1884 erschienen Buch „Flatland“ (Flächenland) eine Welt beschrieben, in der alle Dinge und Lebewesen höchstens zweidimensional sind: Punkte, Linien, geometrische Figuren, ... in einer Ebene. In neuerer Zeit haben sich in Flächenland Insekten von kreisförmiger Figur mit einem Durchmesser d entwickelt, wobei d in einem Intervall $0 < d \leq 2R$, R eine feste Zahl, variiert.

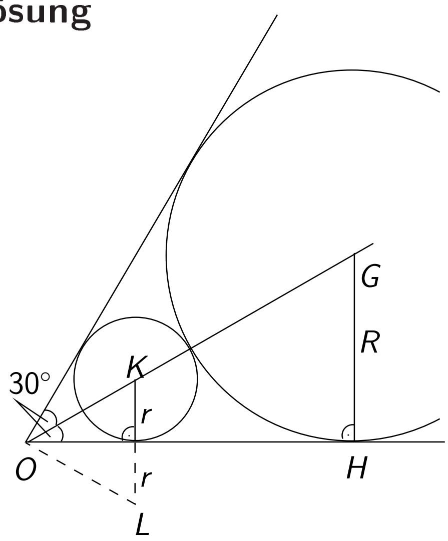


Nur die großen Insekten (Grins genannt) mit dem Durchmesser $2R$ fressen kleine Insekten (Klins genannt), deren Durchmesser $< 2R$ ist.

* Edwin A. Abbott (1838-1926), Londoner Schuldirektor und Literat

Dies geschieht stets dann, wenn ein Grins einen Klins berührt. Durch diesen Reiz öffnet sich eine Lücke in der Kreisperipherie des Grins, durch die das Klins in das Innengebiet des Grins hineingezogen wird. Es gelingt den Grins jedoch nicht, nach und nach alle Klins zu verschlingen, denn in Flächenland liegen überall aus zwei Strecken der Länge $\geq 4R$ gebildete gleichschenklige Winkel mit Öffnungen von 60° und 90° herum. In die Spitze dieser Winkel können die Klins flüchten. Und wenn ihre Durchmesser nur klein genug sind, dann können die Grins sie dort nicht erreichen. Welche Klins haben daher mit Sicherheit eine Überlebenschance?(H.F.)

Lösung



Figur 1

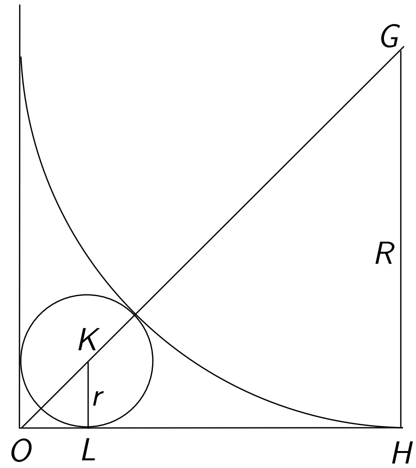
In Figur 1 und Figur 2 berührt ein Grin jeweils ein Klin.

In Figur 1 ist das Dreieck OLK gleichseitig, so dass $|OK| = 2r$ ist. Aus Symmetriegründen ist $KL \parallel GH$.
Dann gilt:

$$\frac{r}{R} = \frac{|OK|}{|OK| + r + R} = \frac{2r}{3r + R} \Longrightarrow r = \frac{R}{3}.$$

Wenn daher das Klins einen Radius $r < \frac{R}{3}$ hat, dann kann es das Grins im 60°-Winkel nicht erreichen.

Im gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreieck OLK gilt wegen $|OL| = r$, dass $|OK|^2 = r^2 + r^2$ und somit $|OK| = r\sqrt{2}$. Da die Gerade OG Symmetrieachse ist $KL \parallel GH$. Dann aber ist



$$\frac{r}{R} = \frac{|OK|}{|OK| + r + R} = \frac{r\sqrt{2}}{r\sqrt{2} + r + R}$$

daraus folgt

$$r\sqrt{2} + r + R = R\sqrt{2}$$

und

$$r(\sqrt{2} + 1) = R(\sqrt{2} - 1),$$

also

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} R = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} = (\sqrt{2} - 1)^2 R.$$

Mit einem Radius $r < (\sqrt{2} - 1)^2 R$ ist das Klin im 90°-Winkel unerreichbar für ein Grin.

Weil $(\sqrt{2} - 1)^2 < \frac{1}{3}$ gilt, ist ein Klin mit einem Radius $r < (\sqrt{2} - 1)^2 R$ sowohl in einem 60°-Winkel als auch in einem 90°-Winkel unerreichbar für ein Grin – eine sichere Überlebenschance für ein Klin.

Wer forscht mit?

Ein bekanntes Kinderspiel heißt „Obstgarten“. Auf den sechs Seiten eines Würfels sind vier verschiedene Obstsorten aufgedruckt, ein Joker und ein Rabe. Auf einem Spielfeld sind von jeder der vier Obstsorten je $n = 10$ Exemplare vorhanden. Nun wird gewürfelt: Erscheint eine Obstsorte, so kann eine der entsprechenden Früchte vom Spielfeld entfernt werden. Ist die Obstsorte nicht mehr vorhanden, passiert nichts. Erscheint der Joker, können zwei beliebige (eventuell gleiche) Früchte vom Spielfeld entfernt werden. Erscheint der Rabe, bekommt der Rabe einen Punkt. Die Spieler haben gewonnen, falls sie alle Früchte vom Spielfeld entfernt haben, bevor der Rabe $m = 9$ Punkte hat. Ansonsten haben die Spieler verloren.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spieler gewinnen, wenn die Spieler bei einem Joker zufällig zwei Früchte aussuchen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spieler gewinnen, wenn die Spieler bei einem Joker immer Früchte von der oder den Obstsorten nehmen, von der oder denen noch am meisten vorhanden ist?

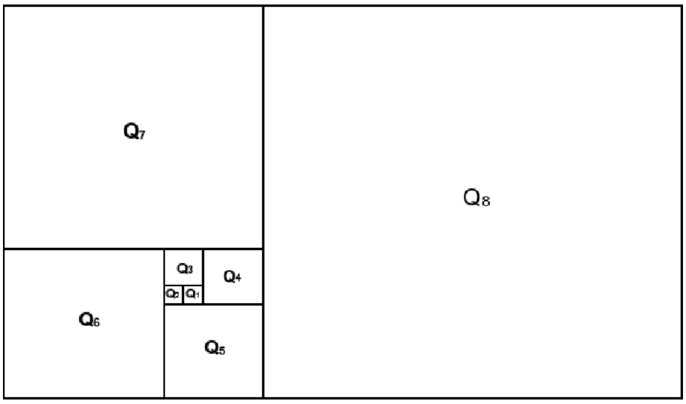
c) Beantworte dieselben Fragen für andere Parameter m und n.

d) Beantworte dieselben Fragen für beliebige Parameter m und n. (V. Blomer)

Hinweis: Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 28. Februar 2011 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils zwei Hefte später veröffentlicht.

In Heft 102 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Eine Folge von Quadraten



Untersuche die aus beliebig vielen Quadraten Q_1, Q_2, Q_3, …, Q_8, … gemäß dem nebenstehenden Bild erkennbaren Muster aufgebaute geometrische Figur. In ihr seien die Seitenlängen von Q_1 und Q_2 jeweils 1, die von Q_3 sei 2 und so weiter. Ferner sei $R_1 = Q_1$, $R_2 = Q_1 \cup Q_2$, $R_3 = R_2 \cup Q_3$, … die Folge der Rechtecke in dieser Figur. Interessant könnten sein:

- Das Bildungsgesetz der Seitenlängen der Quadrate $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, sowie der Seitenlängen und der Flächeninhalte der Rechtecke $R_1, R_2, R_3, \ldots$;

- die Folge der Vergrößerungsfaktoren $q_1, q_2, q_3, \dots$ der Seitenlängen von Q_1, Q_2, Q_3, ... sowie die Eigenschaften dieser Folge;
- Abänderungsmöglichkeiten beim Bildungsgesetz der Quadratfolge;
- Verallgemeinerungsmöglichkeiten (auch räumlicher Art).

(H. F.)

Ergebnisse

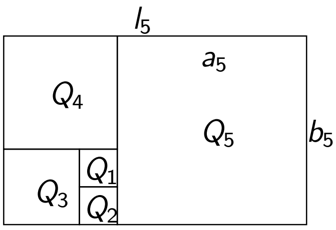
Ihre Untersuchungsergebnisse haben uns zugeschickt: Stella Brytanchuck (Willstätter-Gymnasium, Nürnberg), Philipp Delhougne (Otto-Hahn-Schule, Hanau), Alia'a Ahmed Doma und Shaima'a Ahmed Doma (beide Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo), Illja Fodorov (Ludwig-Frank-Gymnasium, Mannheim), Robin Fritsch (Gymnasium Lehrte), Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf), sowie Markus Voelckel (Gymnasium Casimirianum, Coburg).

Alle haben den Zusammenhang der Folge der Quadratseitenlängen mit der Fibonacci-Folge erkannt. Auch Zahlenangaben und – noch besser – Formeln für die Seitenlängen der Rechtecke und deren Flächeninhalte sowie für die Vergrößerungsfaktoren wurden hergeleitet. Besonders gründlich in die Materie eingestiegen sind Robin Fritsch, Florian Schweiger und Illja Fodorov, dessen detaillierte Ausarbeitung schon eine kleine Seminararbeit darstellt; wegen ihres Umfangs (neun Seiten) können wir sie hier nicht abdrucken und greifen daher auf die komprimierte Fassung von Florian Schweiger zurück. Siehe hierzu den gleichnamigen Artikel.

Lösung der Forscheraufgabe: Eine Folge von Quadraten

von Florian Schweiger

Ich betrachte zunächst die ursprüngliche Quadratfolge und dann zwei mathematisch sehr interessante Verallgemeinerungen.



Es seien a_1, a_2, a_3, ... die Seitenlängen der Qudrate, l_1, l_2, l_3, ... und b_1, b_2, b_3, ... die Seitenlängen der Rechtecke.

Offenbar gilt $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Damit sind die Seitenlängen gerade die Fibonaccizahlen, es ist $a_n = F_n$. Außerdem gilt, wie man aus der Skizze erkennen kann, $l_n = a_{n+1}$ und $b_n = a_n$. Das Rechteck R_n hat also die Seiten F_n und F_{n+1} und damit den Flächeninhalt $A_n = F_n F_{n+1}$. Mit der Binet'schen Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right),$$

mit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, die man in Aufgabe 998 herleiten soll, kann man noch explizite Ausdrücke für die Seitenlängen und Flächeninhalte gewinnen, wobei sich die Formeln für A_n wegen $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$ noch vereinfachen:

$$a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)$$

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right)$$

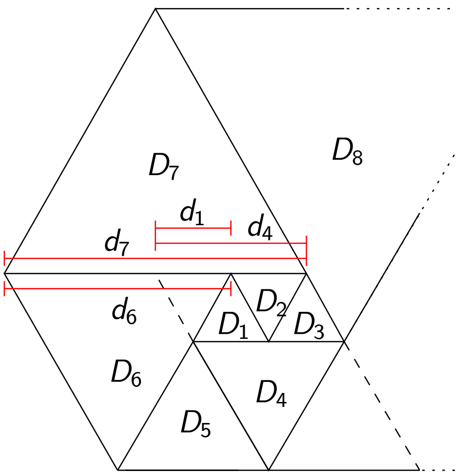
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{5}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)\left(\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n+1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1} + (-1)^{n+1}\left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n+1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1} + (-1)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Der Vergrößerungsfaktor q_n der Seitenlängen von Q_n zu Q_{n+1} ist dann offenbar $q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Da F_n, mit gegen 0 gehendem Fehler, durch $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ approximiert wird, ist

$$q_n \approx \frac{\frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}} = \varphi$$

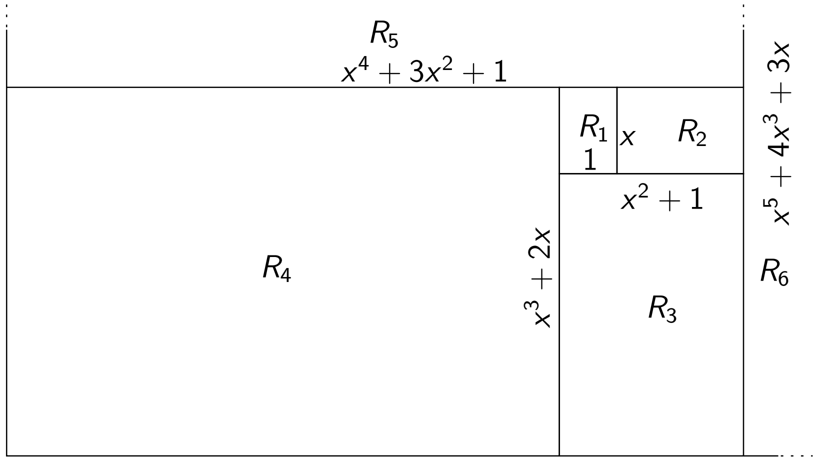
für große n (vergleiche Verallgemeinerung 2, dort wird ein strenger Beweis der Konvergenz geführt). Die Folge $(q_i)_{i=1}^n$, die mit $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ beginnt, konvergiert also gegen $\varphi \approx 1{,}618$.

Verallgemeinerung 1: Dreiecke



Mit dem aus der Skizze ersichtlichen Prinzip kann man eine Folge D_1, D_2, D_3,... von gleichseitigen Dreiecken definieren. Es seien d_1, d_2, d_3, ... deren Seitenlängen. Die Seitenlängen erfüllen nun offenbar die Rekursion $d_{n+1} = d_n + d_{n-4}$ für $n \geq 5$, mit $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $d_4 = d_5 = 2$. Jedoch gibt es noch eine weitere Rekursion, nämlich $d_{n+1} = d_{n-1} + d_{n-2}$, für $n \geq 4$. Warum dies gilt, lässt sich aus der Skizze ablesen. Diese zweite Rekursion ist einfacher als die erste und wird daher im Folgenden untersucht. Die charakteristische Gleichung dieser Rekursion, $\lambda^3 = \lambda + 1$, hat Lösungen $\lambda_1 \approx 1{,}325$, $\lambda_{2,3} \approx -0{,}662 \pm 0{,}562i$, also gilt mit geeigneten Konstanten $d_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n$. Es gilt $|\lambda_1| > 1$ und $|\lambda_{2,3}| < 1$. Da die Dreiecksseiten aber offensichtlich beliebig groß werden, muss $c_1 \neq 0$ gelten. Da λ_1 unter den λ_i, mit $i = 1, 2, 3$, den größten Betrag hat, ist es also der am stärksten wachsende Term. Somit konvergiert, analog zu oben, $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ gegen $\lambda_1 \approx 1{,}325$.

Verallgemeinerung 2: Rechtecke



Wie aus der Skizze ersichtlich ist, beginnt man mit einem Rechteck der Seitenlängen 1 und $x \geq 1$ und fügt dann weitere Rechtecke an. Es seien $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, ... die Längen der kürzeren Seite dieser Rechtecke. Diese Folge beginnt mit 1, x, $x^2 + 1$, $x^3 + 2x$, $x^4 + 3x^2 + 1$, $x^5 + 4x^3 + 3x$, $x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$, $x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$ und sie erfüllt, wie aus der Skizze ersichtlich, die Rekursion $p_n(x) = x \cdot p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x)$ für $n \geq 3$. Beim Betrachten der Koeffizienten der Polynome dieser Folge fällt auf, dass sie alle im Pascalschen Dreieck vorkommen. So gelangt man zur Vermutung

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}.$$

Dass diese Vermutung zutrifft, kann man durch Einsetzen in die Rekursionsgleichung mit vollständiger Induktion nachweisen.

Es sei nun $g = \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}$ eine Lösung von $y = x + \frac{1}{y}$. Formt man die Rekursionsgleichung um und setzt $g_n = \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)}$, so erhält man $g_n = x + \frac{1}{g_{n-1}}$. Subtrahiert man davon $g = x + \frac{1}{g}$, erhält man $g_n - g = \frac{1}{g_{n-1}} - \frac{1}{g} = \frac{g - g_{n-1}}{g_{n-1}g}$. Da offenbar sowohl $g > 1$ als auch $g_{n-1} \geq 1$ gilt, folgt

$$|g_n - g| = \frac{1}{g_{n-1}g}|g_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g}|g_{n-1} - g| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{g}\right)^{n-1} |g_1 - g|.$$

Daher muss der Grenzwert 0 sein.
Die Vergrößerungsfaktoren g_n haben also den Grenzwert $g = \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}$.
Wenn man $x = 1$ setzt, so wird die Rechtecksfolge zur Quadratfolge und der Grenzwert zu $g = \frac{\sqrt{1^2+4}+1}{2} = \varphi$.
Da $a_n = p_n(1)$ gilt, erhält man auch noch die interessante Identität

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots .$$

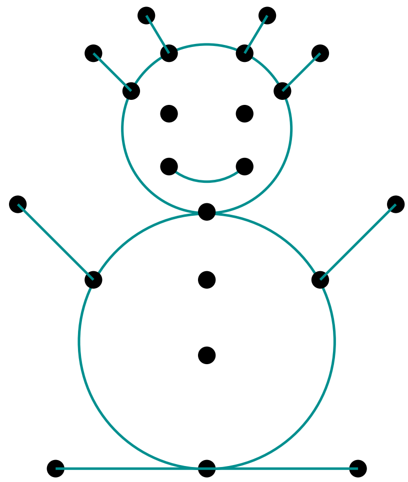
Diese Identität wurde hier ganz nebenbei bewiesen.

Ein Schneemann und die Mathematik

von Hartwig Fuchs

Der Mathematiker Professor Slyfox ist ein begeisterter Anhänger seines Faches – was sich unter anderem auch darin zeigt, dass er jede seiner Vorlesungen mit dem lauten Ausruf einleitet:

„Mathematik ist überall!“



Eines Morgens nun, als er in einer Anfänger-Vorlesung wieder einmal seine Zuhörer mit seiner Lieblingsthese begrüßt hatte, stand der Student Talentino auf, ging wortlos zur Tafel und zeichnete darauf eine Figur, die in etwa so aussah wie die nebenstehende Abbildung. Mit leichtem Spott fragte er: „Wo bitte schön ist hier die Mathematik?“

Professor Slyfox war stets bereit, seine These zu verteidigen. So kam ihm Talentinos Aktion gerade recht, bot sie ihm doch die günstige Gelegenheit, die Gültigkeit seiner These selbst an des Studenten kindlichen Figur eines „Schneemanns“ demonstrieren zu können. Er sagte daher: „Um auf Talentinos Frage einzugehen, erlaube ich mir eine etwas längere Abweichung von meinem Vorlesungsstoff.“ Und er legte los.

Ein Mathematiker kann in der Figur eines „Schneemanns“ einen Graphen sehen – wobei Graphen nichts mit Graphiken (zum Beispiel Diagrammen oder Kurven) zu tun haben, mit denen man Datenmengen veranschaulicht. Vielmehr:

> Ein Graph ist eine endliche Menge von Punkten (= Ecken) beliebiger Position in einer Ebene sowie von Linien (= Kanten) beliebiger Form in der gleichen Ebene, wobei jede Linie genau zwei verschiedene Punkte als Endpunkte besitzt und keine zwei Linien die gleichen Endpunkte haben.*

Graphen weisen viele bemerkenswerte Eigenschaften auf, die in dicken Lehrbüchern der Graphentheorie hergeleitet werden.

Um Talentinos Zweifel an seiner These zu entkräften, sollen hier zunächst nur zwei mathematische Eigenschaften von Graphen beschrieben werden, die dann natürlich auch der Schneemann besitzt. Ein Graph G besitze e Ecken, $e \geq 1$.

* Professor Slyfox beschränkt sich damit auf endliche ebene Graphen ohne Mehrfachkanten (= mehrere Kanten mit denselben zwei Endpunkten) und ohne Schlingen (= Kanten mit nur einem Endpunkt).

Es sei e_i die Anzahl der Ecken von G, von denen genau i Kanten ausgehen, dabei sind $i = 0, 1, 2, \dots, h$ und h die größte Anzahl Kanten, die von einer einzelnen Ecke ausgehen.
Für den „Schneemann“ ist zum Beispiel $e = 22$, $e_0 = 4$, $e_1 = 10$, $e_2 = 0$, $e_3 = 6$, $e_4 = 2$.
Es gilt nun für G: $e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_h$. Damit lässt sich die Anzahl k der Kanten von G berechnen. Zählt man eine Ecke i-fach, wenn von ihr i Kanten ausgehen, dann erhält man:

(1) $2k = 0 \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + 4 \cdot e_4 + 5 \cdot e_5 + \dots + h \cdot e_h$,

wobei sich der Faktor 2 bei k dadurch ergibt, dass jede Kante von G wegen ihrer zwei Endecken doppelt gezählt wird.

Es sei $S := 2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3 + 4 \cdot e_4 + 6 \cdot e_5 + \dots + h \cdot e_h$, falls h gerade ist, und $S := 2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3 + 4 \cdot e_4 + 6 \cdot e_5 + \dots + (h+1) \cdot e_h$, falls h ungerade ist. Subtrahiert man nun von der geraden Zahl S die ebenfalls gerade Zahl $0 \cdot e_0 + 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + 4 \cdot e_4 + 5 \cdot e_5 + \dots + h \cdot e_h$ aus (1), so resultiert die gerade Zahl

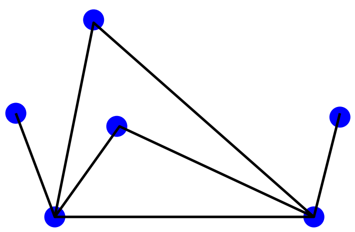
(2) $e_1 + e_3 + e_5 + \dots + e_{h-1}$ für gerades h und
$e_1 + e_3 + e_5 + \dots + e_h$ für ungerades h.

Diese Zahlen aus (2) geben jeweils an, wie viele Ecken der Graph G besitzt, von denen ungeradzahlig viele Kanten ausgehen.

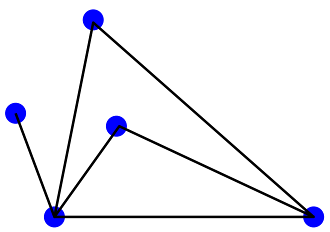
Für Talentino fasst Professor Slyfox zusammen:

(3) Jeder Graph G (im Sinne von Fußnote $*$) hat insgesamt geradzahlig** viele Ecken, von denen eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht.

Diese unerwartete Eigenschaft eines jeden Graphen G wird noch bemerkenswerter dadurch, dass die Anzahl der Ecken von G, von denen geradzahlig viele Kanten ausgehen, sowohl gerade als auch ungerade sein kann! Die untenstehenden Abbildungen zeigen dies:



$$\begin{aligned} &e_0 = 0, && e_1 = 2, \\ &e_2 = 2, && e_3 = 0, \\ &e_4 = 2, && \\ \Longrightarrow\ &e_0 + e_2 + e_4 = 4 && \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &e_0 = 0, && e_1 = 1, \\ &e_2 = 2, && e_3 = 1, \\ &e_4 = 1, && \\ \Longrightarrow\ &e_0 + e_2 + e_4 = 3 && \end{aligned}$$

** Die Zahl 0 wird als gerade betrachtet.

Professor Slyfox ist in der ganzen Universität bekannt dafür, dass er nur schwer ein Ende findet, wenn er bei seinem Lieblingsthema „Mathematik ist überall" gelandet ist. So auch dieses Mal.
Es genügt ihm nicht, dass er Talentinos Frage beantwortet hat, indem er ein wenig vom mathematischen Gehalt des „Schneemanns" und der Schar seiner Verwandten, den Graphen, sichtbar gemacht hat. Er will seinen Studenten zeigen, dass in ihnen noch mehr Mathematik steckt – etwa die Möglichkeit, sie als mathematische Modelle zur Beschreibung auch scheinbar mathematik-freier Situationen zu verwenden. Dazu wählt er als Beispiel ein scheinbar mathematik-freies, unlösbar scheinendes Problem, dessen Darstellung als Graph den mathematischen Schlüssel zu seiner Lösung liefert.

Das „unlösbare" Problem des Professor Slyfox

Für viele Menschen ist das Händeschütteln, etwa zur Begrüßung, eine traditionell geübte Geste.
Diejenigen Menschen, die einer ungeraden Anzahl vom Mitmenschen schon mindestens einmal die Hand gegeben haben, seien vom Typ 1 genannt; diejenigen, die das bei einer geraden Anzahl von Personen oder bei niemandem getan haben, sollen vom Typ 2 heißen.

Professor Slyfox fragt nun:

(4) Gibt es in einer Gruppe von beliebig vielen Personen insgesamt geradzahlig oder ungeradzahlig viele Personen vom Typ 1?

Diese Frage, so scheint es, kann man ohne zusätzliche Informationen nicht beantworten und zwar allein schon deshalb, weil man die Anzahl der Personen in der Gruppe nicht kennt.
Aber die (4) zu Grunde liegende Situation lässt sich als ein Graph G darstellen; so wird (4) dann zu einem Problem von Graphen und dafür lässt sich eine Lösung angeben!

Man ordne jedem Menschen einen beliebigen Punkt in der Ebene zu, wobei keinen zwei Menschen der gleiche Punkt zugeordnet wird. Wenn dann eine Person P einer Person Q schon mindestens einmal die Hand geschüttelt hat, dann verbinden wir die Punkte P und Q durch eine Linie beliebiger Form. Hat aber die Person P noch nie jemandem die Hand gegeben, dann wird der P zugehörige Punkt mit keinem anderen Punkt verbunden.

Auf diese Weise entspricht jeder Gruppe von n Personen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, jeweils ein Graph G mit n Ecken; und einer Person vom Typ 1 (vom Typ 2) aus der Gruppe ist eine Ecke von G zugeordnet, von der eine ungerade Anzahl von Kanten (eine gerade Anzahl von Kanten oder keine Kante) ausgeht.

Zum Beispiel darf man dann Talentinos „Schneemann" als ein graphentheoretisches

Modell für eine Gruppe von 22 Personen betrachten, von denen 16 Personen vom Typ 1 und 6 Personen vom Typ 2 sind.

Der eben definierte Graph G mit n Ecken weist die merkwürdige Eigenschaft (3) auf; er besitzt also insgesamt geradzahlig viele Ecken, von denen eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht.
Daraus folgt unmittelbar die (unerwartete!) Lösung des Problems (4), wenn man vom Graph G zurückgeht zu der G entsprechenden Personengruppe, nämlich:

(5) In jeder Gruppe von n Personen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, befinden sich insgesamt geradzahlig viele Personen vom Typ 1.

Mit der Bemerkung, dass damit die mathematischen Eigenschaften von Talentinos „Schneemann" bei weitem noch nicht alle genannt seien, beendete Professor Slyfox seine weitläufige Abschweifung vom Thema seiner Vorlesung.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Loch im Kuchen

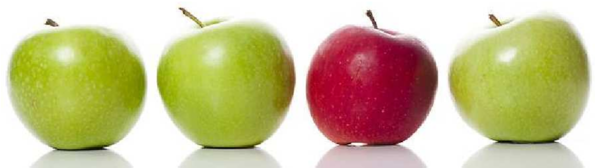
Frau Freundlich hat für ihre beiden Enkelkinder einen großen rechteckigen Blechkuchen gebacken und stellt ihn zum Abkühlen auf die Terrasse. Ein vorwitziges Nachbarskind sieht das und schneidet aus dem Kuchen ein rechteckiges Stück heraus - aber nicht genau aus der Mitte und die Seiten dieses Stückes sind nicht parallel zu den Seiten des Blechkuchens.
Kann Frau Freundlich den restlichen Blechkuchen in zwei genau gleich große Stücke für ihre Enkelkinder schneiden? (CE)

Ein besonderes Vielfaches

Bestimme ohne Taschenrechner und ohne Computer das kleinste Vielfache von 88, dessen Dezimaldarstellung nur aus den Ziffern 6 und 7 besteht – sofern es ein solches Vielfaches überhaupt gibt. (H.F.)

Pias Äpfel

Pia kauft ein Kilo mittelgroße Äpfel und legt sie in eine Reihe. Zwei davon sind besonders rotbackig. Der eine ist der Sechste von links, der andere der Achte von rechts. Zwischen den beiden Äpfeln liegen drei weitere. Kannst du feststellen, wie viele Äpfel Pia hat? (WJB)



Winkel im Dreieck

Zeige: In einem Dreieck ist stets mindestens ein Innenwinkel $\geq 60°$. (H.F.)

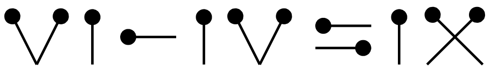
Teilerfremde Zahlen

Finde mindestens ein Beispiel für vier Zahlen mit folgender Eigenschaft: es gibt keine natürliche Zahl > 1, die alle vier Zahlen teilt; wählt man aber drei beliebige aus den vier Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl > 1, die diese drei Zahlen teilt. (Valentin Blomer)

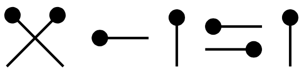
Streichholzgleichungen

Betrachte die Streichholzgleichungen als Darstellung einer Gleichung in römischen Ziffern. Versuche durch Verschieben von möglichst wenigen Streichhölzern die Ausdrücke zu korrigieren. Dabei dürfen moderne Rechenzeichen ($+, -, \times$ (für $\cdot$), $/$ (für $:$)) benutzt werden.

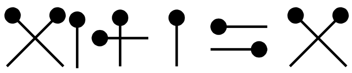
a)



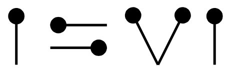
b)



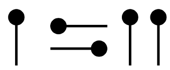
c)



d)

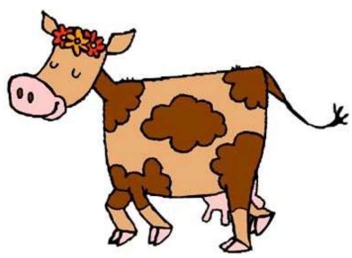


e)



(CE)

Einhundert Kühe



Einhundert Kühe auf einer Weide, jede schwarz, weiß oder braun, fressen einhundert Ballen Heu. Jede schwarze Kuh frißt fünf, jede weiße drei aber es braucht drei braune Kühe um einen Ballen zu fressen.

Wieviele Kühe von jeder Farbe stehen auf der Weide, wenn man davon ausgeht, dass alle einhundert Ballen gefressen werden und jede Farbe von mindestens einer Kuh vertreten ist? (gefunden von CE)

EIN GUTES NEUES JAHR!
Das wünscht die Redaktion allen Lesern für

2011.

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 1008: Wahr oder falsch?

Es seien x, y, z und a beliebige reelle Zahlen. Aus $x + y + z = a$ folgt, dass $xy + yz + xz \leq \frac{1}{2}a^2$ ist. Trifft das zu? (H.F)

Aufgabe 1009: Folge der arithmetischen Mittel

Am Schluss der Aufgabe „Mittelwertfolgen" der Mathespielereien aus Heft 96 wurde kurz die Folge der arithmetischen Mittel erwähnt. Diese soll nun näher behandelt werden. Sie ist rekursiv gegeben durch $a_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot (a_{n+1} + a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei mit zwei Gliedern a_1 und a_2 begonnen wird, für die $0 < a_1 < a_2$ angenommen wird.

a) Zeige zunächst, dass $a_{n+2} - a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot (a_2 - a_1)$.

b) Folgere aus Teil a), dass $a_{n+2} - a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_2 - a_1}{2^n}$ und begründe damit, dass die Teilfolge mit ungeraden Indizes streng monoton wächst und die Teilfolge mit geraden Indizes streng monoton fällt.

c) Leite aus Teil a) ferner die explizite Formel her:

$$a_n = a_2 - (a_2 - a_1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

d) Folgere aus Teil c), dass die Folge den Grenzwert $a = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$ besitzt und erläutere, warum man dieses Ergebnis aufgrund der rekursiven Konstruktion vermuten konnte.

Bemerkung: Für die im Heft 96 angegebenen Anfangsglieder $a_1 = 1$ und $a_2 = 5$ erhält man den Grenzwert $a = \frac{11}{3} = 3{,}\overline{6}$, der dort bereits erwähnt wurde.

(S.W.)

Aufgabe 1010: Halbierungen durch Diagonale

In einem Viereck $ABCD$ sei X der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Zeige: Wenn nun X die Diagonale $\overline{AC}$ halbiert, dann wird die Fläche des Vierecks $ABCD$ von $\overline{BD}$ ebenfalls halbiert. (H.F.)

Aufgabe 1011: Karlas Kartenspiel

Karla hat $n = 150$ Spielkarten mit weißen Rückseiten. Davon ist ein Bruchteil p einseitig rot gefärbt und die restlichen sind auf beiden Seiten weiß. Die Karten liegen nebeneinander auf dem Tisch. $N = 30$ sind auf ihrer Oberseite rot. Karla schließt daraus

a) p muss ungefähr $\frac{N}{n} = \frac{30}{150} = 0,2$ sein

b) Ungefähr np, also ungefähr $n \cdot (\frac{N}{n}) = N = 30$ Karten werden auf der Unterseite rot sein. Sind diese Schlüsse gerechtfertigt?

(WJB)

Aufgabe 1012: Rekonstruktion einer Division

```
   * * * * * * : * * * = * * * * , * * * *
 − * * *
 -------
       * * *
     − * * *
     -------
         * * *
       − * * *
       -------
           * * *
         − * * *
         -------
               * * * *
             − * * * *
             ---------
                     0
```

Ersetze die Symbole $*$ durch Ziffern, sodass eine korrekt ausgeführte Division entsteht. Der erste und der letzte Stern der 1. Zeile sind $\neq 0$. (H.F.)

Aufgabe 1013: Tripel von Primzahlen

Es seien p_1, p_2 und p_3 drei Primzahlen mit $p_1 < p_2 < p_3$, für die gelte

(1) $1 + p_1 \cdot p_2 = p_3$

(2) $p_2 \cdot p_3 < 255$

Finde alle Tripel (p_1, p_2, p_3) von Primzahlen, die diese Bedingungen erfüllen.

(Robin Fritsch, Lehrte)

Aufgabe 1014: Primzahlen als arithmetische Mittel

Im Mathematikunterricht sollte Kim (und ihre gesamte Klasse) folgende Aufgabe lösen:

> Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem arithmetischen Mittel 17, von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere?

Schnell kommt Kim zu dem Schluss, dass diese Frage zu verneinen ist.

a) Zeige, wie auch Kim es gemacht hat, dass es solche natürlichen Zahlen nicht gibt.

b) Kim möchte die Aussage aus der Aufgabe ändern, so dass sie lösbar ist. Also beginnt sie mit ihren Forschungen. Zunächst untersucht sie die Frage: „Gibt es zwei natürliche Zahlen mit dem arithmetischen Mittel 17, von denen die eine k-mal so groß ist wie die andere?“ Tatsächlich findet sie nach kurzer Zeit solche Zahlen. Bestimme auch Du alle solche Zahlen und bewerte Deine Ergebnisse.

c) Als nächstes verallgemeinert Kim die Aufgabe, indem sie als arithmetisches Mittel andere Zahlen als 17 zulässt. Sie entdeckt, dass es unter allen natürlichen

Zahlen nur zwei gibt, deren arithmetisches Mittel eine Primzahl ist, und von denen die eine doppelt so groß ist wie die andere. Welche Zahlen sind das?

d) Als krönenden Abschluss möchte Kim die Frage klären, für welche Werte es zwei natürliche Zahlen mit dem arithmetischen Mittel p gibt, von denen die eine k-mal so groß ist wie die andere. (MG)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 103

Klassen 8–13

Aufgabe 1001: Wahr oder falsch?

Alle Zahlen $2010^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ sind durch 2009 ohne Rest teilbar. Stimmt das? (H.F.)

Lösung:

Ich benutze folgende Formel:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} \cdot b^0 + \dots + a^0 b^{n-1})$$

und setze $a = 2010$ und für $b = 1$ ein.

Ich erhalte:

$$2010^n - 1 = (2010 - 1)(2010^{n-1} + 2010^{n-2} + \dots + 2010 + 1).$$

Der erste Faktor ist immer 2009, denn $a - b$, also $2010 - 1$, ist immer 2009 und dieser Faktor ist von n unabhängig. Da ein Faktor 2009 ist, ist das Produkt durch 2009 teilbar.

(Christopher Patzanovsky, Klasse 7, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium, Burglengenfeld)

Aufgabe 1002: Teilbarkeit durch 7

Frank übt schnelles Kopfrechnen: Er berechnet verschiedene Zweierpotenzen und addiert 5 hinzu: $5 + 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dabei beobachtet er, dass genau diejenigen Resultate durch 7 teilbar sind, bei denen n von der Form $n = 3k + 1$ ist mit $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Trifft die Beobachtung von Frank zu? (nach WJB)

Lösung:

Bei Division durch 3 lassen alle natürlichen Zahlen n den Rest 0, 1 oder 2, sind also von der Form $3k$, $3k + 1$ oder $3k + 2$ mit $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Da $2^3 = 8$ bei der Division durch 7 den Rest 1 lässt, haben alle Zahlen der Form $5 + 2^{3k} = 5 + (2^3)^k$ bei der Division durch 7 den Rest $5 + 1 = 6$, alle Zahlen der Form $5 + 2^{3k+1} = 5 + 2 \cdot 2^{3k}$ den Rest $5 + 2 \cdot 1 = 7$ also 0 und alle Zahlen der Form $5 + 2^{3k+2} = 5 + 2^2 \cdot 2^{3k}$ den Rest $5 + 4 + 1 = 9$ also 2.

Franks Beobachtung trifft also zu.

Aufgabe 1003: Würfelfotografie

Theresa geht am See spazieren. Unterwegs sieht sie viel Interessantes: Sie beobachtet Angler, besteigt Hügel, sieht einen alten Förderturm – und ein großes Kantenmodell eines Würfels. Der Würfel ist 3 m groß und Theresa fotografiert ihn in Zentralperspektive (siehe Abbildung).
Aus welcher Entfernung hat Theresa das Foto gemacht? (MG)

Lösung:

Es sei d die gesuchte Entfernung.
Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{\frac{1}{2}}{d} = \frac{\frac{3}{2}}{d+3},$$

beziehungsweise nach Multiplikation mit $2d(d+3)$ folgt $d+3 = 3d$, also ist $d = \frac{3}{2}$.

Theresa hat das Foto also aus einer Entfernung von 1,5 m aufgenommen.

Aufgabe 1004: Dreiecke im Halbkreis

Gegeben sei ein Halbkreis vom Durchmesser AB der Länge $2r$. C sei ein Punkt, den man beliebig auf dem Kreisbogen wählen darf, $C \neq A$ und $C \neq B$. Dann gilt:

a) Unter allen Dreiecken $\triangle ABC$ gibt es eines, das die größte Fläche besitzt;
b) Aber es gibt kein Dreieck $\triangle ABC$ mit einer kleinsten Fläche.

Du siehst es! Kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Lösung:

Die Fläche des Dreiecks beträgt $\frac{|AB| \cdot h}{2}$.

a) Die Dreiecksfläche ist genau dann maximal, wenn h maximal ist. Wenn die Höhe durch den Mittelpunkt von $|AB|$ geht, ist sie maximal. Die Fläche beträgt dann: $\frac{2r \cdot r}{2} = r^2$.
b) Je näher der Punkt C an A oder B rückt, desto kleiner wird h. h kann jede positive reelle Zahl annehmen, die zwischen 0 und r liegt. Zu jedem Dreieck ABC gibt es ein Dreieck ABC', dessen Fächeninhalt halb so groß ist. Daher gibt es kein Dreieck mit minimalen Flächeninhalt.

(Frank Schindler, Klasse 10, Peter-Joerres-Gymnasium, Bad Neuenahr-Ahrweiler)

Aufgabe 1005: Gleisarbeit

Johanna hat zu Weihnachten von ihren Großeltern eine Holzeisenbahn bekommen. Neben unzähligen Kisten von geraden Schienen und Kurven hat sie drei Brücken, vier Kreuzungen und sieben Weichen. Nun möchte sie unter Verwendung aller Schienen ein geschlossenes Schienennetz bauen und macht sich ans Werk. Was wird wohl passieren? (Valentin Blomer)

Lösung:

Die wesentliche Informationen der Aufgabenstellung sind die Anzahl der Brücken, Kreuzungen und Weichen. Brücken und Kreuzungen haben dieselbe „Wirkung“, sie erlauben das Überqueren einer anderen Strecke. Es gibt sieben Kreuzungen/Brücken und sieben Weichen. Da ein geschlossenes Schienennetz gebaut werden soll, muss für jede Weiche, die von der „Hauptstrecke“ wegführt auch wieder eine Weiche auf die „Hauptstrecke“ zurück führen. Man benötigt also eine gerade Anzahl an Weichen. Johanna möchte aber alle Bauteile verwenden, sodass es ihr unmöglich sein sollte, ein geschlossenes Schienennetz zu bauen.

(Philipp Delhougne, Klasse 12, Otto-Hahn-Schule, Hanau)

Aufgabe 1006: Nullstellen

a) Bestimme Zahlen b, c und d so, dass die beiden Funktionen $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ und $g(x) = x^2 - 4x + 3$ die gleichen Nullstellen besitzen.

b) Finde eine Funktion $h(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ derart, dass g und h die gleichen Nullstellen haben.

c) Gib alle solche Funktionen h an (a, b, c und d müssen dazu nicht berechnet werden). (WJB)

Lösung:

a) Es gilt $g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Also hat g die Nullstellen 1 und 3. Damit auch f nur diese beiden Nullstellen hat, muss

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-1) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

oder

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-3) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

sein. Das heißt, es gilt entweder $b = 7$, $c = 15$ und $d = -9$ oder $b = -5$, $c = 7$ und $d = -3$.

b) Damit h die Nullstellen 1 und 3 hat, könnte zum Beispiel

$$h(x) = (x-1)(x-3)(x-1)(x-1) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

gelten.

c) Damit h *nur* die Nullstellen 1 und 3 hat, gibt es folgende Möglichkeiten:

1. $h(x) = (x-1)^3(x-3)$,
2. $h(x) = (x-1)^2(x-3)^2$,
3. $h(x) = (x-1)(x-3)^3$ oder
4. $h(x) = (x-1)(x-3)(x^2 + ax + b)$, wobei $(x^2 + ax + b)$ keine reellen Nullstellen haben darf. Also muss die Diskriminante $D = a^2 - 4b < 0$ sein.

(Robin Fritsch, Klasse 9, Gymnasium Lehrte, Lehrte)