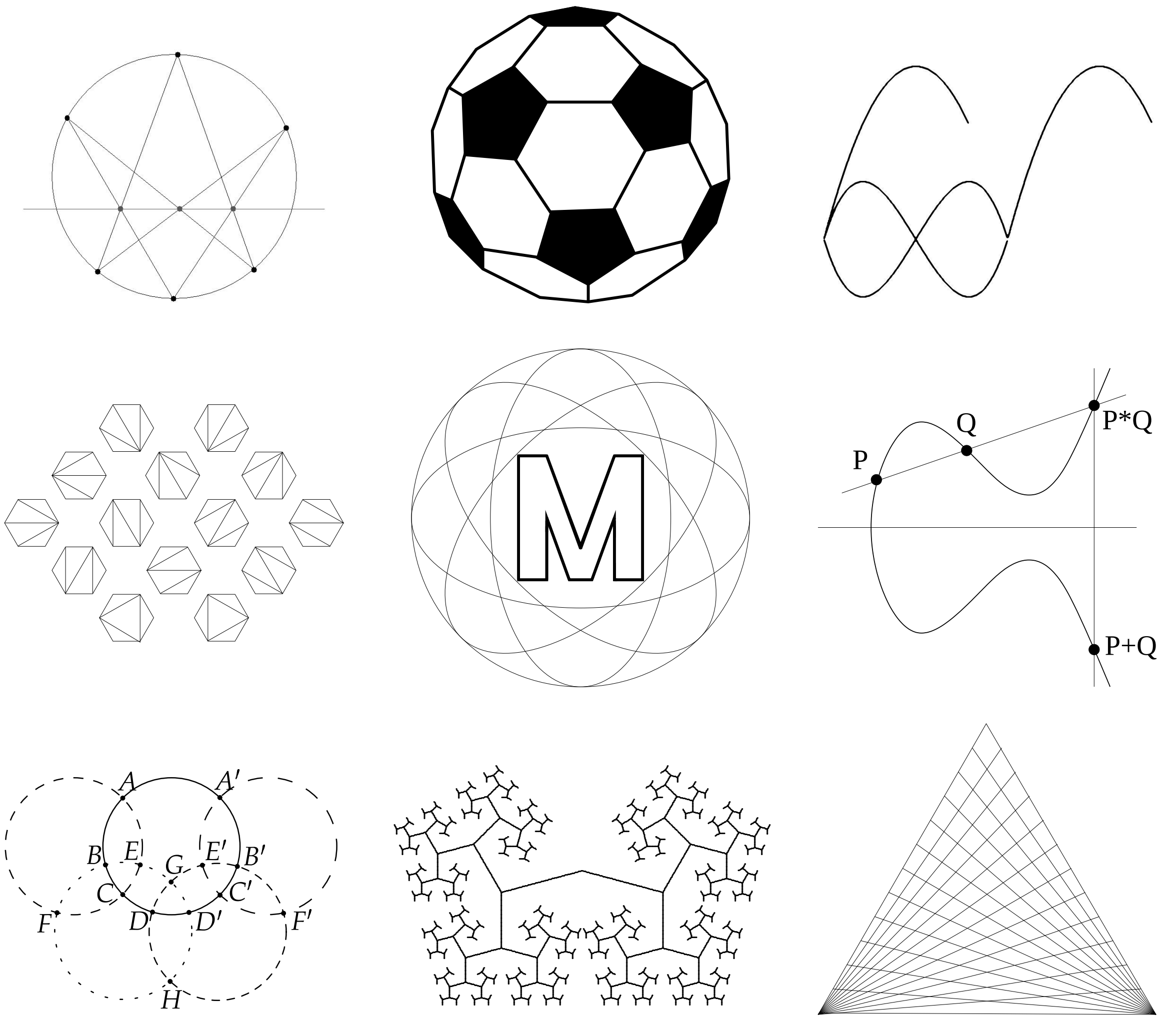
Jahrgang 25 Sonderheft November 2005

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

1980 begründet von Martin Mettler;

gegenwärtig herausgegeben vom

Institut für Mathematik an der

Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Zum Fünfundzwanzigjährigen

Gemäß den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz sollen die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht unter Anderem

> *„... in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.“*

In vielen Berufen werden Mathematiker wegen ihrer Fähigkeit, auch harte Probleme zu knacken, geschätzt.

Problemlösefähigkeit setzt logische und analytische Denkfähigkeit, fachliches Können in inhaltlicher und methodischer Hinsicht sowie die Beherrschung gewisser Techniken, aber auch Durchhaltevermögen voraus.

Wo und wie kann *Problemlösefähigkeit* erworben werden?

Zunächst wird ein Angebot benötigt, das zum Knobeln und Tüfteln verlockt und das in gewisser Regelmäßigkeit wiederkehrt. Der Mathematikunterricht bietet zwar reichlich Aufgaben, diese wirken aber – weil Pflicht – nicht immer besonders anziehend.

Es war das Verdienst von **Martin Mettler**, dem dieses Bändchen gewidmet sei, mit der mathematischen, an Schülerinnen und Schüler ab dem fünften Schuljahr gerichteten Zeitschrift MONOID, dem *Mathematikblatt für Mitdenker*, ein vielfältiges Forum von Knobel- und Problemlöseaufgaben geschaffen zu haben. Seit 25 Jahren regt sie jetzt schon Schülergenerationen an, sich dem Denksport hinzugeben.

Es verführt auch dazu, immer wieder neue Logeleien, Knobeleien, Zahlen- und Figurenakrobatik sowie Rechenkunststücke zu ersinnen, was schon fast süchtig machen kann. Den Kollegen Professor **Wolfgang J. Bühler** und Dr. **Hartwig Fuchs** sei an dieser Stelle herzlich gedankt: Aus ihrem reichhaltigen, variationsreichen Fundus sind diese Aufgaben zusammen gestellt.

Wie man an Probleme heran gehen kann, zeigt der Beitrag von **Horst Sewerin** über heuristische Methoden für das Problemlösen. Als Trainer der deutschen Mannschaft für die Mathematik-Olympiade hat er reichlich Gelegenheit, Strategien zu entwickeln und zu vermitteln. Auch ihm Dank für die Überlassung des Artikels!

Im Rahmen ihrer fachdidaktischen Ausbildung hat eine studentische Arbeitsgruppe an der Universität Mainz, bestehend aus **Catherine Jacobi**, **Grietje Gelück** und **Malte Stumpf**, sich mit Problemlöseaufgaben und ihren vielerlei Lösungswegen auseinander gesetzt. Am Beispiel der *Mathespielerei* eines „Heuschreckensprungs“ zeigen sie, wie die MONOIDaner sich damit auseinander gesetzt haben; sie vergleichen dabei die Häufigkeiten der eingesetzten Methoden. Für ihre Darlegung sei auch ihnen gedankt.

Schließlich richtet sich der Dank an **Jens Mandavid**, der in gekonnter Weise dieses Bändchen geLaTeXt und – mit einem ansprechenden Layout – druckfertig gemacht hat.

Mainz im November 2005 — Ekkehard Kroll

Heuristische Methoden für das Problemlösen

von Horst Sewerin, Hofheim am Taunus

Es gibt Probleme, da stellt sich gleich eine Idee ein, wie man diese anpacken könnte; es gibt aber auch solche Probleme, bei denen einem partout garnichts einfällt. Da ist es dann von Vorteil, wenigstens einige Methoden zu kennen, wie man einem Problem zu Leibe rücken kann. Im Folgenden werden einige solcher heuristischen Methoden vorgestellt und an passenden Beispielen verdeutlicht.

Umzentrieren, Zielanalyse, Aufspalten in Teilprobleme

Es ist zu beweisen, dass der Term

$$n^2\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 360 teilbar ist.

Wenn man eine Aufgabe erfährt, so erzeugt sie in der Vorstellung eine ganz bestimmte Gestalt, die bei jedem Menschen anders ist. Diese Gestalt hängt von Erfahrungen mit ähnlichen Problemen, vom Vorwissen, aber auch von Stimmungen und Gefühlen ab. Ein guter Problemlöser ist in der Lage, verschiedene Aspekte dieser Gestalt ins Zentrum seiner Erwägungen zu rücken, um dann einen besonders Erfolg versprechenden Aspekt weiter zu verfolgen. Diesen Vorgang bezeichnen wir mit **Umzentrieren**. Gelingt dies nicht, so bleibt man starr an einem Schema hängen, und die Aufgabe wird wegen dieser zu starken Fixierung oft unlösbar erscheinen.

Der oben genannte Term hat verschiedene Aspekte. Einerseits kann man in ihm ein noch nicht ganz ausmultipliziertes Polynom 6. Grades sehen, andererseits aber auch die noch nicht beendete Faktorenzerlegung fortführen wollen. In diesem Fall entsteht durch Umformung der Term

$$n^2\,(n+1)\,(n-1)\,(n+2)\,(n-2)\,.$$

Wieder taucht ein neuer Aspekt auf, den wir ins Zentrum holen wollen: Unter den Faktoren kommen aufeinander folgende Zahlen vor! Wir erzeugen eine möglichst lange Reihe:

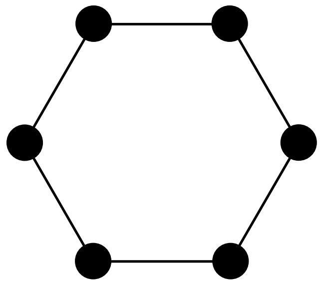
$$(n-2)\,(n-1)\,n^2\,(n+1)\,(n+2)\,.$$

Wenn wir uns nun daran erinnern, dass die Teilbarkeit durch 360 nachgewiesen werden soll, betreiben wir **Zielanalyse**. Die Aufgabe wäre erfüllt, wenn wir – eingedenk der Primfaktorzerlegung $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ – die Teilbarkeit durch 8, 9 und 5 nachgewiesen hätten. Damit haben wir das Problem in **Teilprobleme aufgespalten**.

In der Tat ist unter 5 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets eine durch 5 teilbar. Außerdem erkennt man, warum der Term auch zwei durch 3 teilbare Faktoren enthalten muss, und unter Beachtung der Tatsache, dass von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen eine durch 4 teilbar ist, hat man in jedem Fall die Teilbarkeit des Termes durch 8 gesichert.

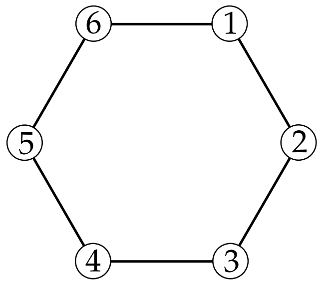
Das Invarianzprinzip

Auf jeder der sechs Ecken eines regulären Sechsecks liegt eine Münze. Bei einem Zug darf man zwei Münzen gleichzeitig in entgegen gesetzter Richtung um dieselbe Anzahl von Feldern bewegen. Kann man durch mehrere dieser Züge alle Münzen in ein Feld bringen?



Situationen wie diese sind von Unübersichtlichkeit gekennzeichnet, da man sämtliche möglichen Spielzüge und Veränderungen nicht auf einmal überblicken kann. Hier ist es hilfreich, nach einer Eigenschaft zu suchen, die bei allen Variationsmöglichkeiten unverändert bleibt. Eine solche invariante Eigenschaft führt oft direkt ins Zentrum des Problems und ist eine mächtige Hilfe bei der Lösung. Dieses Vorgehen bezeichnet man als **Invarianzprinzip**.

Hier fällt auf, dass bei der Gegenläufigkeit der gemeinsamen Züge beider Münzen die Summe der orientierten Drehwinkel stets 0 ist. Daher bleibt bei der Nummerierung wie im nebenstehenden Bild die Summe der von den Münzen bedeckten Augenzahlen modulo 6 invariant. (Mehrfach bedeckte Augenzahlen müssen natürlich auch mehrfach gezählt werden.) Diese Summe beträgt zu Beginn



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \equiv 3 \mod 6.$$

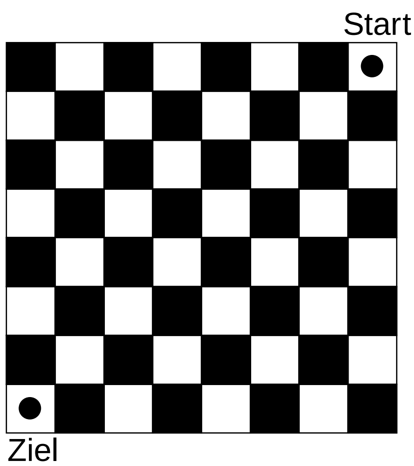
Falls alle Münzen in einem Feld liegen, hat die Summe jedoch den Wert

$$\text{(Feldnummer)} \cdot 6 \equiv 0 \mod 6.$$

Daher kann nach dem Invarianzprinzip dieser Zustand nicht erreicht werden, weil der Rest $3 \bmod 6$ nie verlassen wird.

Paritätsausnutzung

Kann ein Springer von einer Ecke zur Gegenecke eines 8×8-Schachbrettes ziehen und dabei jedes Feld genau einmal berühren?

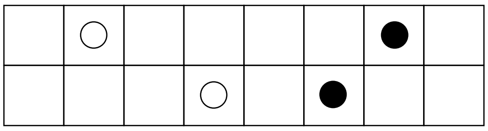


Die Färbung des Schachbrettes legt die Unterscheidung nach geraden und ungeraden Zugnummern nahe. Dies führt wegen der Farbwechsel beim Springerzug zur Einsicht in die Unmöglichkeit der verlangten Zugfolge.

Die Färbung ist jedoch eine zusätzlich in das Problem eingeführte Struktur, die in der Aufgabenstellung selbst noch keine Rolle spielt. Solche zusätzlichen Strukturen schaffen mehr Voraussetzungen und erleichtern die Lösung oft bei Existenzbeweisen. Hier hatte die zusätzliche Struktur die Form einer einfachen Parität (schwarz/weiß, gerade/ungerade, $+/-$, $1/0$, Erfolg/Fehlschlag, ja/nein). Andere Paritäten sind möglich.

Das Symmetrieprinzip

> In jeder der beiden Reihen eines $2 \times n$-Brettes befindet sich ein weißer Stein links von einem schwarzen. Zwei Spieler ziehen abwechselnd nach dem Setzen irgendeinen ihrer beiden Steine beliebig viele Felder vor- oder rückwärts, wobei die weißen Steine immer links von den schwarzen bleiben müssen. Sieger ist, wer seinen Gegner blockieren kann. Wer hat wann eine Gewinnstrategie?



In der obigen Figur kann Schwarz am Zug den Gewinn erzwingen, wenn er seinen oberen Stein um 3 Felder nach links bewegt. Dann ist die Spielsituation hinsichtlich des Abstandes der Steine in beiden Reihen symmetrisch, und Weiß muss diese Symmetrie zerstören. Schwarz kann sie dann auf jeden Fall durch einen Zug auf den Gegner zu wieder herstellen; er besitzt also stets noch einen Antwortzug und wird daher gewinnen.

In der Heuristik wird der Begriff „Symmetrie“ allgemeiner als in der Geometrie verwendet: denken wir etwa an Polynome, die symmetrisch in ihren Variablen sind. Auch hier wird man die Symmetrie ausnutzen.

Symmetriezerstörung

> Man beweise, dass in jedem Dreieck die Mittelsenkrechten durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen.

Der klassische Beweis verwendet **Symmetriezerstörung**: Zunächst ist die Behauptung symmetrisch bezüglich der drei Senkrechten. Man zerstört die Symmetrie, indem man zwei Achsen herausgreift, eine Aussage über ihren Schnittpunkt findet und dann zeigt, dass diese Aussage auf alle Punkte der dritten Achse zutreffen muss. Daher muss sie durch den Schnittpunkt der beiden anderen Geraden laufen.

Symmetriezerstörung wird auch betrieben, wenn man ohne Beschränkung der Allgemeinheit Variablen der Größe nach ordnet, welche vorher gleichberechtigt waren, oder unter gleichartigen Situationen eine ganz bestimmte auszeichnet. Stets gewinnt man zusätzliche Voraussetzungen, mit denen der Lösungsweg stärker vorgeprägt werden kann.

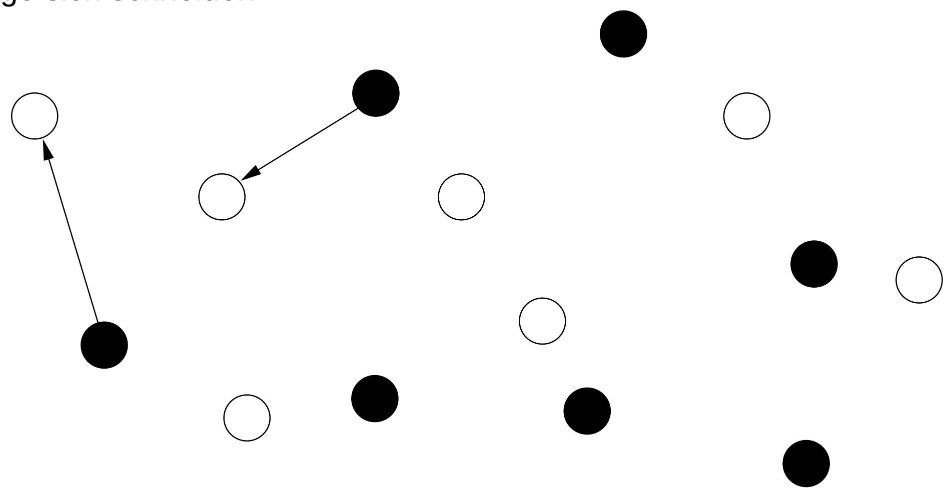
Rückwärtsarbeiten

> Auf einem Haufen liegen n Streichhölzer. Jeder von zwei Spielern darf zwischen 1 und k Hölzer abwechselnd entfernen. Sieger (Verlierer) ist, wer das letzte Holz entfernt.

Diese bekannte Aufgabe ist für den Anfänger recht schwierig zu durchschauen. Man kann sich den Überblick über die Gewinnstellungen mit der Strategie des Rückwärtsarbeitens so verschaffen:
Falls das Nehmen des letzten Holzes zu Verlust führt, so bedeutet ein Holz eine Verluststellung; alle Anzahlen zwischen 2 und $k+1$ Hölzern sind Gewinnstellungen; $k+2$ Hölzer entsprechen einer Verluststellung; alle Anzahlen zwischen $k+3$ und $2k+2$ Hölzern sind wieder Gewinnstellungen, und so fortfahrend kann man die Zahlen bis n von unten her klassifizieren.

Das Extremalprinzip

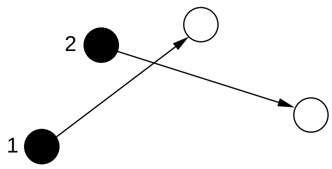
> In der Ebene sind $2n$ Punkte gegeben, von denen keine drei kollinear sind; n dieser Punkte sind Bauernhöfe, die übrigen n Brunnen. Von jedem Hof soll ein gerader Weg zu einem Brunnen gebaut werden. Man zeige, dass die Brunnen so den Höfen zugeordnet werden können, dass keine dieser Wege sich schneiden.

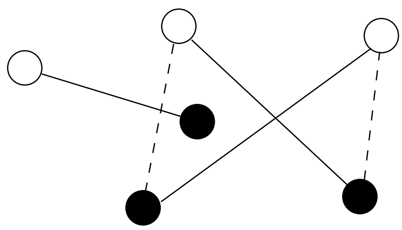


Diese Aufgabe ist für jedes konkret vorgegebene Muster aus Brunnen und Höfen sehr leicht lösbar, wenn man sich in einer Richtung durcharbeitet. Diese Strategie lässt sich jedoch nicht direkt verallgemeinern, da etwa bei dem Algorithmus:

1. Suche den am weitesten links gelegenen freien Hof.
2. Verbinde ihn mit einem nächstliegenden Brunnen.
3. Gehe nach 1., so lange es noch freie Höfe gibt.

Kreuzungen auftreten können (siehe Figur rechts). Man kann zwar jede Kreuzung durch eine kreuzungsfreie Verbindung der beteiligten Punkte ersetzen, doch dabei können neue Kreuzungen entstehen (nächste Figur), und so ist der schließliche Abbruch eines entsprechenden Kreuzungs-Beseitigungs-Algorithmus nicht garantiert.





Hier hilft nun das **Extremalprinzip**: Das Beseitigen einer Kreuzung hat noch einen weiteren Aspekt. Die Gesamtlänge der direkten Verbindungsstrecken ist stets kleiner als die Länge der kreuzenden Verbindungen. (Dies folgt direkt aus der Dreiecksungleichung.) Es gibt aber nur endlich viele verschiedene Wegsysteme zwischen Brunnen und Höfen. Wir wählen unter den $n!$ verschiedenen Wegsystemen eines mit minimaler Streckenlänge aus. Die Existenz eines solchen extremalen Elements ist uns in einer endlichen Menge gewiss. Dieses Wegsystem kann nun keine Kreuzungen haben: Hätte es welche, so ließen sie sich unter Verkürzung der Gesamtstreckenlänge beseitigen, und wir hätten einen Widerspruch zur Minimalität.

Die Methode des unendlichen Abstiegs, Spezialfallanalyse

Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen von

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2.$$

Bei Aufgaben mit vielen Variablen oder Situationen, die von vielen Faktoren abhängen, ist es oft hilfreich, zunächst einige **Spezialfälle zu untersuchen**: Aus $a = 0$ folgt direkt $b = c = 0$, und dies liefert die triviale Lösung $(0, 0, 0)$. Da man im Folgenden $a \neq 0 \neq b$ annehmen kann, hat die Spezialfallanalyse auch für den allgemeinen Fall Nutzen gebracht: Division durch a^2 oder b^2 ist nun unbeschränkt möglich.

Sucht man nach weiteren Lösungstripeln, um etwa einer Rekursion auf die Spur zu kommen, so hat man keinen Erfolg. Dies führt zur Vermutung, dass es keine nichttriviale Lösung dieser Gleichung gibt. Um diese Vermutung zu beweisen, reicht es, die Kongruenz

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv a^2 b^2 \mod n$$

für irgendeinen Modul n zu widerlegen. Wegen der Summe und der Verteilung der quadratischen Reste ist 4 ein aussichtsreicher Modul.

Es sind nur die Fälle $a^2 \equiv 0 \bmod 4$ oder $a^2 \equiv 1 \bmod 4$ möglich.

Falls $a^2 \equiv 1 \bmod 4$, so ist für $b^2 \equiv 0 \bmod 4$ das Produkt $a^2 b^2 \equiv 0 \bmod 4$, und für $b^2 \equiv 1 \bmod 4$ gilt $a^2 b^2 \equiv 1 \bmod 4$ – beides im Widerspruch zum Wert der Summe $a^2 + b^2 + c^2$. Also muss $a^2 \equiv 0 \bmod 4$ sein.

Dann ist mit $a^2 b^2 \equiv 0 \bmod 4$ auch die linke Seite $\equiv 0 \bmod 4$, und dies ist nur möglich, wenn auch $b^2 \equiv 0$ und $c^2 \equiv 0 \bmod 4$ gilt. Daher gibt es ganze Zahlen a_1, b_1, c_1 mit $a^2 = 4a_1^2$, $b^2 = 4b_1^2$, $c^2 = 4c_1^2$. Setzt man dies in die Ausgangsgleichung ein, so erhält man

$$4a_1^2 + 4b_1^2 + 4c_1^2 = 16 a_1^2 b_1^2.$$

Daraus folgt nach Division durch 4

$$(1) \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \equiv 0 \mod 4.$$

Dies ist wiederum nur möglich, wenn alle Summanden der linken Seite $\equiv 0 \bmod 4$ sind. Daher gibt es ganze Zahlen a_2, b_2, c_2 mit $a_1^2 = 4a_2^2$, $b_1^2 = 4b_2^2$, $c_1 = 4c_2^2$. Der gleiche Schritt wie oben führt auf

$$(2) \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \equiv 0 \mod 4.$$

Die Kongruenzen (1) und (2) sind bis auf den Index gleich, und die Schlussweise von (1) nach (2) lässt sich für jeden neuen Index wieder anwenden. Mit Hilfe dieses **unendlichen Abstiegs** erhält man

$$a^2 = 4a_1^2 = 4\left(4a_2^2\right) = 4\left(4\left(4a_3^2\right)\right) = \ldots, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Es muss daher a durch jede Zweierpotenz teilbar sein, d.h. $a = 0$. Damit ist gezeigt, dass es nur die triviale Lösung gibt.

Systematisches Probieren

> Welches sind die natürlichen Zahlen, die sich nicht als Summe mehrerer aufeinander folgender natürlicher Zahlen schreiben lassen?

Die Konzeptblätter der Wettbewerbsteilnehmer zeigen, dass beim Problemlösen unter Zeitdruck zielgerichtete Aktivitäten mit Probierphasen abwechseln, wobei das Ende einer Probierphase in der Regel durch die Entdeckung einer verheißungsvollen Spur für systematische Arbeit markiert wird. Oft werden Probleme durch Probieren angegangen; wer jedoch planlos stochert, wird nur durch Zufall Erfolg haben. **Systematisches Probieren** bedeutet planvolle Aktivität: Die Resultate jedes Probiervorganges werden zur Vorbereitung des nächsten Versuchs benutzt. So lassen sich konkurrierende Hypothesen rasch widerlegen oder untermauern.

Bei der obigen Aufgabe wird man besser nicht mit der Summenformel für die arithmetische Reihe beginnen, denn wenn man für eine Summe mit dem Anfangsglied a und der Anzahl d der Summanden ($d \geq 2$)

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+d-1) = a \cdot d + \frac{d(d-1)}{2}$$

schreibt, so verrät der rechte Term keineswegs, welche natürlichen Zahlen eine solche Darstellung zulassen und welche nicht. Man wird daher besser durch systematisches Probieren bei den ersten natürlichen Zahlen nachforschen:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & - & \\
2 & - & \\
3 & + & (1+2) \\
4 & - & \\
5 & + & (2+3) \\
6 & + & (1+2+3) \\
7 & + & (3+4) \\
8 & - & \\
9 & + & (4+5) \\
10 & + & (1+2+3+4)
\end{array}$$

Die Tabelle zeigt ein Muster: Systematisches Untersuchen wird nun die Zahl 16 ins Visier nehmen, und in der Tat erlaubt sie keine solche Darstellung. Daher ist die Aufgabe nun konkretisiert: Die Unmöglichkeit von

$$a \cdot d + \frac{d(d-1)}{2} = 2^k \qquad \text{für } k \geq 0$$

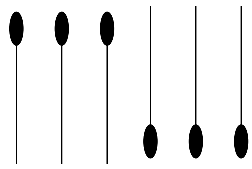
soll nachgewiesen werden. Umformen ergibt

$$2^k = d\,(2a + d - 1) \qquad \text{mit } k \geq 1.$$

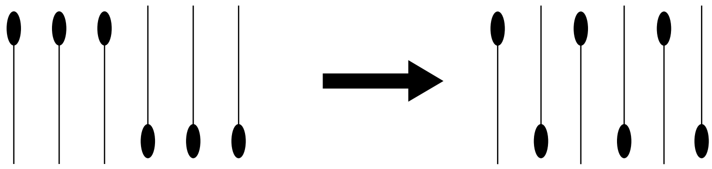
Die rechte Seite stellt die Faktorenzerlegung einer Zweierpotenz dar, und wegen $d \geq 2$ ist d gerade. Dann ist aber der Wert der Klammer ungerade und größer als 2, Widerspruch!

Genauso leicht findet man noch für alle Nicht-Zweierpotenzen eine jeweils mögliche Darstellung der verlangten Art. Ohne den Hinweis durch das Probieren hat die Aufgabe keinen elementaren Zugang.

Zustandsbewertung



Drei Streichhölzer liegen Kopf nach oben nebeneinander links von drei weiteren Streichhölzern, deren Köpfe nach unten zeigen. Durch möglichst wenige gleichzeitige Vertauschungen der Orientierung zweier benachbarter Hölzer ist eine Anordnung herzustellen, bei der die Köpfe abwechselnd nach oben und unten zeigen:

4  6

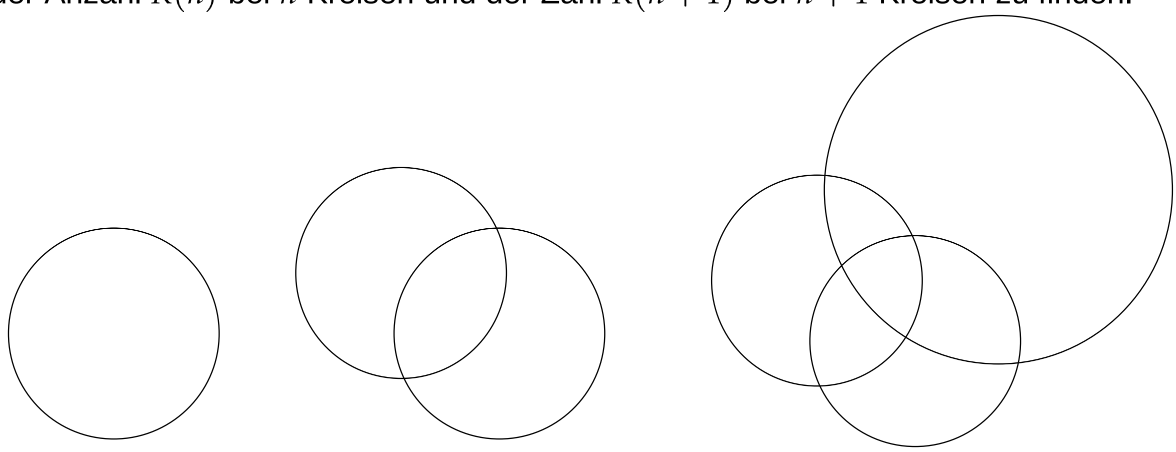
Jeder der erreichbaren Zustände kann mit der Anzahl derjenigen Hölzer bewertet werden, die schon mit dem Endzustand übereinstimmen. So erhält der Ausgangszustand die Bewertung 4, der Endzustand die Bewertung 6. Wenn man alle Nachbarzustände des Ausgangszustands (d.h. alle Zustände, die man von ihm aus durch einen Zug erreichen kann) aufschreibt und mit ihren Bewertungen versieht, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder ist darunter der Zustand mit Bewertung 6, und man ist fertig. Oder man wählt einen Zustand mit möglichst hoher Bewertung aus und notiert nun dessen Nachbarzustände usw. Wenn die Aufgabe lösbar ist, kommt man mit diesem Verfahren nach endlich vielen Schritten zum Ziel.

Die **Zustandsbewertung** eignet sich gut für die Simulation „intelligenter“ Systeme auf Computern. Die gängigen Schachprogramme basieren auf dieser Strategie.

Rekursion

In wie viele Teile wird die Ebene durch n Kreislinien zerlegt, welche sich paarweise schneiden, von denen jedoch keine drei durch einen Punkt gehen?

Das Studium der Fälle $n = 1, 2, 3$ liefert die Anzahlen $2, 4, 8$. Für $n = 4$ ist allerdings die Anzahl 16 offensichtlich zu groß. Daher versuchen wir, eine **Rekursion** zwischen der Anzahl $K(n)$ bei n Kreisen und der Zahl $K(n+1)$ bei $n+1$ Kreisen zu finden.



2 4 8

Wir starten mit $K(1) = 2$ und notieren rekursiv: $K(2) = K(1) + 2$.
Der Summand 2 lässt sich so deuten: Der zweite Kreisbogen hat 2 Schnittpunkte mit dem vorher vorhandenen Kreisbogen. Die 2 Schnittpunkte zerlegen ihn in 2 Kreisbogenstücke, und jedes Kreisbogenstück zerlegt ein vorher vorhandenes Flächenstück in 2 Flächenstücke.

Dieses Argument lässt sich verallgemeinern: Zeichnet man zu $n-1$ bereits vorhandenen Kreislinien eine n-te Kreislinie, so liegen auf ihr $2(n-1)$ Schnittpunkte. Diese zerlegen die neue Kreislinie in $2(n-1)$ Bogenstücke, und jedes Bogenstück zerlegt ein vorher vorhandenes Flächenstück in zwei Flächenstücke. Daher können wir notieren:

$$\begin{aligned}
\underline{K(1)} &= 2 \\
\underline{K(2)} &= \underline{K(1)} + 2 \\
\underline{K(3)} &= \underline{K(2)} + 4 \\
&\vdots \\
K(n) &= \underline{K(n-1)} + 2(n-1)
\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Rekursion nach dem Reißverschlussverfahren auflösen: Die linken Seiten und die rechten Seiten werden addiert, und anschließend werden die gemeinsamen Summanden (oben unterstrichen) auf beiden Seiten subtrahiert. Übrig bleibt:

$$K(n) = 2 + 2 + 4 + \ldots + 2(n-1) = 2 + n(n-1)$$

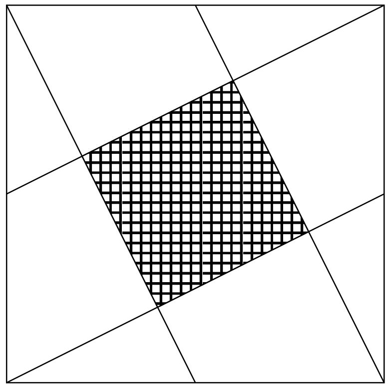
In der Tat ist $K(4) = 14$; die ursprüngliche Vermutung war falsch!

Die folgende Übersicht zeigt in einer Zusammenstellung die illustrierten und noch weitere heuristische Methoden. Auch hinter scheinbar mathematischen Überschriften, wie etwa vollständige Induktion oder Schubfachprinzip, verbergen sich bei entsprechenden Aufgaben in der Anwendung oft massive heuristische Schwierigkeiten.

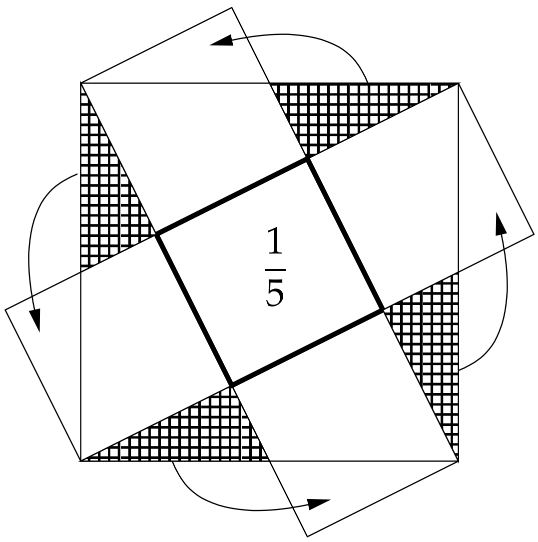
Heuristische Methoden

Untersuchen von Spezialfällen
Voraussetzungsexplikation
Verallgemeinerung (auch von Ideen)
Situationsanalyse
Methode des unendlichen Abstiegs
Umzentrieren
Zielanalyse
Paritätsausnutzung
Invarianzprinzip
Symmetrieprinzip
Symmetriezerstörung
Rückwärtsarbeiten
systematisches Probieren
synthetische Methode
Schubfachprinzip
Extremalprinzip
Rekursion
Superposition
Schema zweier geometrischer Örter
Descartessches Schema
(vollständige) Induktion
Aufspalten in Teilprobleme
Zustandsbewertung

Abschließend ein kleiner Test, mit dem Ihr feststellen könnt, ob Ihr schon die Kunst des Problemlösens beherrscht:

> In einem Quadrat wird eine Ecke mit dem Mittelpunkt einer der nicht durch diese Ecke gehenden Seiten verbunden. Dieses Verfahren wird in der gleichen Drehrichtung bei den anderen drei Ecken fortgesetzt, und es entsteht die folgende Figur:
>
> 
>
> Welchen Anteil an der Fläche des äußeren Quadrats besitzt die Fläche des inneren, schraffiert gezeichneten Quadrats?

Im Geiste sehe ich schon Einige, denen gleich der Satz des Pythagoras eingefallen ist, nach dem Rechenstift greifen. Die nächste Figur zeigt jedoch etwas von der Kunst des Problemlösens. Sie erklärt sich selbst und zeigt, was Kreativität beim Problemlösen bedeutet:



♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Und nun ran ans Problemlösen! Denn wie sagte **Konfuzius** (chinesischer Philosoph, ca. 551 – ca. 479 v. Chr.):

> Sage es mir – Ich werde es vergessen!
>
> Erkläre es mir – Ich werde mich erinnern!
>
> Lass es mich selber tun – Ich werde verstehen!

Aufgaben

Für die Knobler

Aufgabe 1. Kreuzzahlenrätsel

■	1		■	2
3		■	4	
	■	5		■
■	6		■	7
8		■	9	

waagerecht
$w_1 = 14.$ Primzahl
$w_3 = 2 \cdot w_1$
$w_4 =$ größtmögliche Zahl
$w_5 = w_3 - 1$
$w_6 =$ kleinstmögliche Primzahl
$w_8 =$ Quadratzahl
$w_9 = w_4 - w_3 + 1$

senkrecht
$s_1 = s_2 - 3$
$s_2 =$ Quadratzahl
$s_3 = w_3 + 1$
$s_4 = 2 \cdot s_2 - 3$
$s_5 =$ eine $4.$ Potenz
$s_6 = w_9 + 1$
$s_7 = s_2 + w_8$ (H.F.)

Aufgabe 2. Knobelei

Setze in jedes leere Feld der Figur eine Ziffer ein, so dass sich drei richtige Subtraktionen und drei richtige Additionen ergeben. (H.F.)

4	☐	☐	-	☐	7	=	☐	☐	8
		+			+				+
☐	☐	2	-		☐	=		☐	☐
		=			=				=
☐	☐	☐	-	☐ ☐	1	=	☐	6	☐

Aufgabe 3. Rekonstruktion einer Aufgabe
Mathis findet in einem alten Rechenbuch im Kapitel über die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ein offensichtlich ausgerechnetes Beispiel, bei dem allerdings die Mäuse ein Mittelstück herausgeknabbert haben, so dass von der Aufgabe nur ein Fragment übrig geblieben ist:

$$635978 \cdot 4 \qquad 4314$$

Mathis gelingt es, die Multiplikation für den kleinst möglichen weggeknabberten zweiten Faktor zu rekonstruieren. Kannst du das auch? (H.F.)

Aufgabe 4. Macht Lotto reich?
Ersetze in der Frage

$$MACHT + LOTTO = REICH \text{ ?}$$

die Buchstaben durch Ziffern derart, dass eine richtige Gleichung entsteht. (WJB)

Logeleien

Aufgabe 5. Zwillings-Logelei
Zwei Kinder sind am gleichen Tag und am gleichen Ort geboren und haben auch denselben Vater und dieselbe Mutter. Dennoch sind sie keine Zwillinge. Wie ist das möglich? (gefunden: H.F.)

Aufgabe 6. Lauter Lügner

Alf, Bob und Chris kicken auf einer Wiese herum, als einer der drei eine Brieftasche mit einer Menge Geld im Grase findet. Der Verlierer der Brieftasche kommt vorbei: „Habt ihr eine Brieftasche gefunden?“ fragt er. Fast gleichzeitig behauptet jeder der drei Jungen: „Ich habe sie gefunden.“

Darauf Alf: „Bob lügt.“ Bob sagt: „Chris lügt.“ Chris behauptet: „Alf und Bob lügen.“

Wer erhält zu Recht den Finderlohn? (H.F.)

Aufgabe 7. Eine Smullyan-Logelei

Der Mathematiker und Logiker Raymond Smullyan (geb. 1919) ist weithin bekannt als außerordentlich produktiver Konstrukteur von logischen Rästeln. In seinem Buch „The Lady or the Tiger?“ (deutsch: „Dame oder Tiger?“, Fischer-Taschenbuch-Verlag 1987) hat er ein Dutzend schöner und zum Teil recht schwieriger Logeleien mitgeteilt, in denen ein König und sein Gefangener, eine Dame und ein Tiger die Hauptrollen spielen. Wir geben hier eine Kostprobe von Smullyans wunderbaren logischen Rätseln (Text etwas geändert).

> Ein König hat einen Gefangenen. Er bietet ihm eine Chance für die Freiheit. Der Gefangene erfährt nämlich wahrheitsgemäß: In jedem von drei verschlossenen nebeneinander liegenden Räumen befindet sich entweder eine Dame oder ein Tiger. An den Türen dieser drei Räume befinden sich Schilder:
>
> | I | II | III |
> |---|---|---|
> | In diesem Raum ist ein Tiger. | In diesem Raum ist eine Dame. | In Raum II ist ein Tiger. |
>
> Dem Gefangenen wird die Freiheit versprochen, wenn er eine Tür öffnet und dahinter keinen Tiger vorfindet. Er fragt: „Stimmt der Text auf den Schildern?“ Der König antwortet wahrheitsgemäß: „Höchstens eines der drei Schilder ist richtig.“
>
> Welche Tür muss der Gefangene öffnen? (gefunden: H.F.)

Auf dem Prüfstand

Aufgabe 8. Vielfache von 11 ?

Mathis behauptet:

Für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $5^n + 6^n$ ist ein Vielfaches von 11.

Ist das wahr? (H.F.)

Aufgabe 9. Wahr oder falsch?

Es sei p eine beliebige Primzahl ≥ 5. Dann gilt stets:

$p^2 + 23$ ist ein Vielfaches von 24. (H.F.)

Aufgabe 10. Noch einmal: Wahr oder falsch?
$33^{32} - 1$ ist ein Vielfaches von 64. (H.F.)

Aufgabe 11. Zum dritten: Wahr oder falsch?

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (E.K.)

Aufgabe 12. Zum vierten: Wahr oder falsch?
Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$3^n + 1$ ist ein Vielfaches von 2;

$4^n + 2$ ist ein Vielfaches von 3;

$5^n + 3$ ist ein Vielfaches von 4;

$6^n + 4$ ist ein Vielfaches von 5;

$7^n + 5$ ist ein Vielfaches von 6 – und nach dem gleichen Muster beliebig weiter. (H.F.)

Aufgabe 13. Ein letztes Mal: Wahr oder falsch?
Die Differenz $3^{4m} - 2^{4n}$ ergibt niemals eine Primzahl – egal, wie die natürlichen Zahlen n und m gewählt werden. (WJB)

Zahlenakrobatik

Aufgabe 14. Das Lexikon und Mathis' Alter
Mathis liest in einem vielbändigen Lexikon mit insgesamt 13815 fortlaufend nummerierten Seiten den dreiseitigen Artikel über Algebra.

Er bemerkt: Wenn man zum Produkt der drei Seitenzahlen des Algebra-Artikels die ganzzahlige Anzahl seiner Lebensjahre addiert, dann ergibt sich genau die Gesamt-Seitenzahl des Lexikons.

Wie alt ist Mathis? (H.F.)

Aufgabe 15. Besondere Zahlen
Wähle aus den Zahlen 76, 176, 276, 376, $\ldots$ eine beliebige Zahl aus.

Diese Zahl sei z genannt.

Begründe, dass $z^2 - z$ bei jeder Wahl von z ein Vielfaches von 100 ist. (H.F.)

Aufgabe 16. Primzahl-Zwillinge
Primzahlzwillinge sind Primzahlpaare p, q, bei denen p und q den Abstand 2 haben; Beispiel: $p = 11$, $q = 13$.

Untersuche, ob für Primzahlzwillinge p, q mit $5 \leq p < q$ gilt:

a) Der (arithmetische) Mittelwert von p und q ist ein Vielfaches von 6.

b) $p \cdot q + 1$ ist ein Vielfaches von 36. (H.F.)

Aufgabe 17. Ungewöhnliche Vielfache von 63
Gibt es Vielfache von 63, deren Ziffern sämtlich gleich sind? (H.F.)

Aufgabe 18. Acht Zahlen

Zwischen den acht natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, f, g, h, alle ≥ 1, bestehen die Gleichungen $ad = bc$, $cf = ed$, $eh = gf$. Zeige, dass dann auch gilt: $ah = bg$. (H.F.)

Aufgabe 19. Ein bemerkenswertes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 \\ 7^3 &= 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 \\ 7^4 &= 337 + 339 + 341 + 343 + 345 + 347 + 349 \end{aligned}$$

a) Kann man dieses Gleichungssystem entsprechend fortsetzen mit 7^5, 7^6, ... und wenn ja, wir und warum?

b) Kann man nach dem obigen Muster auch Gleichungssysteme für jede Potenz m^n, $m > 1$, $n > 1$ angeben und beliebig weit fortsetzen? (H.F.)

Aufgabe 20. Vier gerade Zahlen

Die Summe der dritten Potenzen von vier aufeinander folgenden geraden Zahlen ist 120^2.

a) Was ist die Summe der vier Zahlen?

b) Was ist die Summe ihrer Quadrate? (WJB nach Arthur Köpps)

Aufgabe 21. Geldgeschenke

a) Onkel Willy schenkt seinen Neffen Nico, Leon, Emil und Anton 1000 €. Nico, der Älteste, soll 10 % mehr davon bekommen als der Zweitälteste, Leon, dieser wieder 10 % mehr als Emil und Emil 10 % mehr als Anton, der Jüngste. Wie viel bekommt jeder?

b) Tante Inge schenkt ebenfalls 1000 €. Sie bestimmt, dass Leon 10 % weniger bekommen soll als Nico, Emil 10 % weniger als Leon und schließlich Anton 10 % weniger als Leon. Wie wird dieses Geschenk verteilt? (WJB)

Aufgabe 22. Der Schulausflug

Die vier achten Klassen mit 27, 26, 24 und 28 Schülern machen gemeinsam mit den vier neunten Klassen mit 27, 26, 24 und 25 Schülern und den drei zehnten Klassen mit 22, 22 und 24 Schülern einen Ausflug in die Bundeshauptstadt. Einem der betreuenden Lehrer fällt auf, dass die fünf Busse unterschiedlich gefüllt sind. Er gibt deshalb nacheinander fogenden Anweisungen:

Aus dem ersten Bus steigen 8 Schüler um in den dritten und 2 in den zweiten, aus dem zweiten Bus steigen 2 in den ersten und 2 in den vierten, aus dem dritten Bus 3 in den fünften und 3 in den zweiten, aus dem vierten Bus 2 in den fünften und 2 in den ersten und schließlich aus dem fünften Bus 3 in den dritten und 4 in den vierten.

Obwohl der Lehrer kein Mathematiker ist, hat er damit sein Ziel erreicht: Die Busse sind jetzt gleich stark besetzt.
Wie viele Schüler waren anfangs in jedem der Busse? (WJB)

Aufgabe 23. Wahlergebnisse

Bei der letzten Bundestagswahl erhielt in der Gemeinde Obermelchingen die FDP 12 Stimmen mehr als die Linke, die Grünen doppelt so viele Stimmen wie die beiden zusammen und CDU und SPD zusammen viermal so viel wie die Grünen, davon die SPD $\frac{3}{8}$.

Die Quersumme der Quersumme der Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen ist 7.

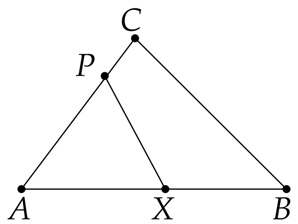
Die Wahlbeteiligung lag zwischen 60 und 70 %.

a) Wie hoch war die Wahlbeteiligung, wenn 1023 Bürger wahlberechtigt waren?

b) Was ist die Verteilung der Stimmen auf die Parteien? (WJB)

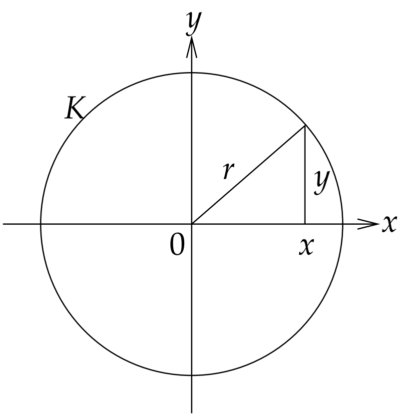
Im Reich der Geometrie

Aufgabe 24. Dreieckshalbierung



Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf einer seiner Seiten. Konstruiere den Punkt X auf der P gegenüber liegenden Seite so, dass das PX die Fläche des Dreiecks ABC halbiert. (H.F.)

Aufgabe 25. Besondere Kreise

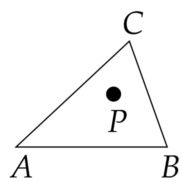


Ein Punkt mit den Koordinaten x, y liegt auf einem Kreis K um 0 mit dem Radius r, wenn gilt: $x^2 + y^2 = r^2$ (Satz von Pythagoras).
Umgekehrt stellt die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ die Gesamtheit aller Punkte auf dem Kreis K dar.
Begründe: Auf einem Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = z$, $z > 0$ ganzzahlig, liegen niemals Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, wenn gilt: $z \in \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$. (H.F.)

Aufgabe 26. Würfelherstellung

Aus dem Material zweier Würfel soll ein neuer Würfel vom Volumen 1 hergestellt werden.
Bei welchen Kantenlängen der beiden Würfel ist das möglich? (H.F.)

Aufgabe 27. Eine Aufgabe aus alter Zeit



Es sei P ein beliebiger Punkt im Innern eines beliebigen Dreiecks ABC.
Gibt es dann eine zwei Seiten von ABC verbindende Strecke durch P so, dass P der Mittelpunkt dieser Strecke ist? (H.F.)

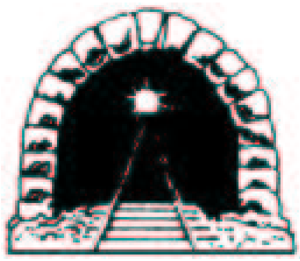
Aufgabe 28. Rechteckszerlegung

Zeige durch Nachrechnen und mit Hilfe einer Zeichnung: Im Rechteck ist das Quadrat des Umfangs U größer als das Achtfache der Fläche F. (WJB)

Zu guter Letzt

Aufgabe 29. Der Güterzug im Tunnel

Ein Lokführer fährt einen 200 m langen Güterzug. Das ist ein mitunter ziemlich langweiliger Job. Als er vor sich mal wieder den 100 m langen Tunnel sieht, überlegt er sich, wie lange es eigentlich dauert, bis er mit dem Zug **in voller Länge** den Tunnel durchfahren hat, wenn er seine Geschwindigkeit von 36 km/h beibehält.



Aufgabe 30. Polynome

Wie muss man b wählen, damit die Polynome

$$f(x) = x^2 - x - 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x^3 - (2+b)x^2 + (b-4)x + 2b$$

die gleichen Nullstellen haben? (WJB)

Aufgabe 31. Das DIN-A-System

Das DIN-A-System für Papier ist folgendermaßen aufgebaut: DIN-A0 ist $1\,\mathrm{m}^2$, das Verhältnis der Seiten ist $\sqrt{2} : 1$. Hieraus entsteht DIN-A1 durch Halbieren der längeren Seite. Diese Verfahren wird wiederholt; halbiert man nun die längere Seite von DIN-A1, so ergibt sich DIN-A2 usw.

a) Zeige, dass das Verhältnis „längere Seite : kürzere Seite“ für jedes DIN-A-Format gleich $\sqrt{2} : 1$ ist.

b) Wie oft muss man halbieren, bis die Fläche kleiner ist als $1\,\mathrm{cm}^2$ ($1\,\mathrm{mm}^2$); d.h. welches DIN-A-Format ist das?

c) Ein Stapel von 500 Blatt Papier ist $4\,\mathrm{cm}$ dick.

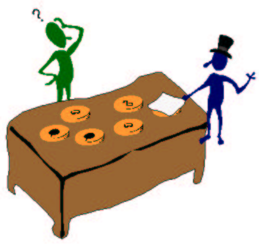
   Wie dick wird ein Stapel, wenn man ein DIN-A0-Blatt in DIN-A4 zerlegt und die Einzelstücke dann aufeinander legt? Wie dick wird er in den Fällen des Teils b)?

   Hierbei darfst Du die Näherung $2^{10} \approx 1000$ verwenden.

d) Wie oft muss man mindestens schneiden, um ein DIN-A0-Blatt in DIN-A4-Blätter zu zerlegen, wenn man zwar nie Blätter aufeinander legen und gleichzeitig durchschneiden, dafür aber um die Ecke schneiden darf, allerdings kreuzungsfrei? (WJB)

Aufgabe 32. Spielerei

Ricarda und Manuel haben sehr viele Münzen gesammelt. Ricarda schlägt vor: „Wir legen immer abwechselnd eine Münze auf den Tisch. Wer zuerst keine mehr legen kann, hat verloren.“ Manuel sagt großzügig: „Fang’ Du an!“ Hat er damit die Möglichkeit aus der Hand gegeben, sicher zu gewinnen? (WJB)



(Vorausgesetzt sei, dass der Tisch rechteckig ist, die Münzen *ganz* auf dem Tisch liegen müssen und keine Münze ganz oder teilweise auf andere Münzen gelegt wird.)

Lösungen der Aufgaben

Für die Knobler

Aufgabe 1. Kreuzzahlenrätsel

Waagerecht: $w_1 = 43$, $w_3 = 86$, $w_4 = 99$, $w_5 = 85$, $w_6 = 11$, $w_8 = 25$, $w_9 = 14$
Senkrecht: $s_1 = 46$, $s_2 = 49$, $s_3 = 87$, $s_4 = 95$, $s_5 = 81$, $s_6 = 15$, $s_7 = 74$

Aufgabe 2. Knobelei

4	A	B	-		C	7	=	D	E	8
		+				+				+
F	G	2	-			H	=		J	K
		=				=				=
L	M	N	-	P	Q	1	=	S	6	T

Wir setzen zunächst Buchstaben in die leeren Felder.

2. Spalte:
$C7 + H = PQ1 \Rightarrow H = 4$, $C = 9$, also 2. Spalte: $97 + 4 = 101$

2. Zeile: $FG2 - 4 = JK \Rightarrow K = 8$, $J = 9$, also 2. Zeile: $102 - 4 = 98$
1. Spalte $\Rightarrow L = 5$; 3. Spalte $\Rightarrow T = 6$
3. Zeile: $5MN - 101 = S66 \Rightarrow S = 4$, also 3. Zeile: $567 - 101 = 466$
1. Spalte: $465 + 102 = 567$, 1. Zeile: $465 - 97 = 368$, 3. Spalte: $368 + 98 = 466$

Aufgabe 3. Rekonstruktion einer Aufgabe

Die ursprüngliche Gleichung sei $F \cdot G = H$ mit $F = 635978$, $H = \cdots 4314$.

1. G kann nicht einziffrig sein.
   Denn sonst wäre $G = 4$ und $F \cdot 4$ müsste die Einerziffer 2 haben.
2. Sei G zweiziffrig, $G = 4z$ und z eine Ziffer.
   Wegen $F \cdot 4z = \cdots 4$ kann z nur $= 3$ oder $= 8$ sein.
   Aus $F \cdot 43 = \cdots 78 \cdot 43 = \cdots 54$ folgt $F \cdot 43 \neq H$; aus $F \cdot 48 = \cdots 78 \cdot 48 = \cdots 44$ folgt ebenfalls $F \cdot 43 \neq H$. Also ist G nicht zweiziffrig.
3. Sei nun G dreiziffrig, $G = 4yz$ mit Ziffern y, z und $z = 3$ oder $z = 8$ wegen 2.
   Für $z = 3$ ist mit $H = \cdots 14 = \cdots + 10 + 4$:
   $F \cdot 4y3 = (\cdots 78) \cdot (\cdots y3) = \cdots + (\cdots + 700y + 80y) + (\cdots 210 + 24) = \cdots + 80y + 34 = \cdots + 10 + 4 \Rightarrow 8y + 3 = \cdots 1 \Rightarrow y = 1$ oder $y = 6$.
   Aber $F \cdot 413 = \cdots 914 \neq H$ und $F \cdot 463 = \cdots 814 \neq H \Rightarrow z \neq 3$.
   Für $z = 8$ ist mit $H = \cdots + 10 + 4$
   $F \cdot 4y8 = (\cdots 78) \cdot (\cdots y8) = \cdots + (\cdots + 700y + 80y) + (\cdots 560 + 64) = \cdots + 80y + 24 = \cdots + 10 + 4 \Rightarrow 8y + 2 = \cdots 1$, was unmöglich ist.
   Insgesamt folgt: G kann nicht dreiziffrig sein.
   Aber 3. hat auch gezeigt, dass $z = 3$ und $y = 1$ oder $y = 6$ sein muss.
4. Nun sei G vierziffrig, $G = 4xy3$.
   Falls $y = 1$ ist, ergibt sich für $x = 7$ eine Lösung, nämlich
   $$\underline{635978 \cdot 4713 = 2997364314}.$$
   Falls $y = 6$ ist, ergibt sich für kein $x, x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ eine Lösung. Daher muss jede weitere Zahl $G, G \neq 4713$, die zu einer Lösung der Aufgabe führt, mindestens fünfziffrig sein. Also ist die angegebene Lösung für $G = 4713$ die kleinst mögliche.

Aufgabe 4. Macht Lotto reich?
Die Text-Gleichung hat folgende Lösungen:

$$09761 + 25115 = 34876, \quad 09541 + 73113 = 82654, \quad 51082 + 46226 = 97308,$$
$$76302 + 18228 = 94530, \quad 62935 + 08558 = 71493, \quad 57486 + 32662 = 90148,$$
$$70596 + 13663 = 84259, \quad 54137 + 26776 = 80913, \quad 40357 + 28778 = 69135,$$
$$43908 + 12882 = 56790.$$

Logeleien

Aufgabe 5. Zwillings-Logelei
1. Lösung:
Es handelt sich um zwei Kinder eines Drillings.
2. Lösung:
Der Begriff „gleicher Tag“ muss nicht „derselbe Tag“ bedeuten. So können die beiden Kinder am gleichen Tag, z.B. an einem Dienstag geboren sein; aber der erste Dienstag war im Januar oder Februar während der zweite Dienstag z.B. im Dezember war.

Aufgabe 6. Lauter Lügner?
1. Möglichkeit: Alf sagt die Wahrheit $\Rightarrow$ Bob lügt $\Rightarrow$ Chris sagt die Wahrheit.
Aber Chris’ Aussage „Alf und Bob lügen.“ muss falsch sein, da vorausgesetzt ist, dass Alf die Wahrheit sagt.
Die 1. Möglichkeit scheidet also aus.

2. Möglichkeit: Alf lügt $\Rightarrow$ Bob sagt die Wahrheit $\Rightarrow$ Chris lügt und somit ist seine Aussage, dass Alf und Bob beide lügen, offensichtlich falsch; d.h. Alf oder Bob sagt die Wahrheit. Alf lügt aber nach Voraussetzung. Folglich sagt Bob als einziger die Wahrheit – er erhält den Finderlohn.

Aufgabe 7. Eine Smullyan-Logelei
II und III widersprechen sich; das heißt: Entweder ist II wahr und dann ist III falsch oder aber II ist falsch und dann ist III wahr – immerhin ist eine der Aussagen auf II und III wahr. Da nach des Königs Feststellung höchstens ein Schild richtig ist, kommen dafür nur II oder III in Frage, keines wegs aber I. Somit ist I falsch – und im Raum I befindet sich kein Tiger. Der Gefangene sollte also die Tür I wählen.

Auf dem Prüfstand

Aufgabe 8. Vielfache von 11 ?
Es gilt $\quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^1b^{n-2} + b^{n-1}).$
Mit dieser Formel erhält man für $a = 5$, $b = 6$ und ungerades n:

$$5^n + 6^n = 5^n - (-6)^n = \big(5 - (-6)\big)(5^{n-1} - \ldots) = 11 \cdot (5^{n-1} - \ldots)$$

und daher gilt die Behauptung.

Aufgabe 9. Wahr oder falsch?
Schreibe $p^2 + 23 = p^2 - 1 + 24 = (p-1)(p+1) + 24$.

Da zwischen $p-1$ und $p+1$ die ungerade Zahl p liegt, müssen $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen sein; mehr noch: Eine der Zahlen $p-1$ und $p+1$ ist ein Vielfaches von 2, die andere ein Vielfaches von 4.

Von den drei aufeinander folgenden Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ist eine ein Vielfaches von 3. Da es p nicht sein kann, weil p eine Primzahl ≥ 5 ist, muss $p-1$ oder $p+1$ ein Vielfaches von 3 sein.

Somit gilt: $(p-1)(p+1)$ ist ein Vielfaches von $2 \cdot 4$ und von 3, also von 24.
Daher folgt aus der 1. Zeile, dass die Behauptung wahr ist.

Aufgabe 10. Noch einmal: Wahr oder falsch?
$33^{32} - 1 = (33-1)(33^{31} + 33^{30} + \ldots + 33^1 + 33^0)$ mit $33^0 = 1$.

$33^{32} - 1$ ist zunächst ein Vielfaches von $33 - 1 = 32$. Die Summe $33^{31} + \ldots + 33^0$ besteht aus 32 ungeraden Summanden; sie ist also gerade und daher ein Vielfaches von 2. Daraus folgt, dass $33^{32} - 1$ ein Vielfaches von 64 ist.

Aufgabe 11. Zum dritten: Wahr oder falsch?
Es gilt:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich obige Gleichung, die also richtig ist, auch wenn es auf den ersten Blick nach falscher Rechnung aussieht.

Aufgabe 12. Zum vierten: Wahr oder falsch?
Es gilt – wenn man die Klammer nach der verallgemeinerten Binomialformel ausrechnet und $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ die Binomialkoeffizienten $b_k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$, $k = 1, \ldots, n-1$, sind

$$(a+1)^n = a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \ldots + b_{n-1} a^1 + 1 = (\text{Vielfaches von } a) + 1.$$

Dies angewendet auf $7^n + 5$ ergibt:

Für $n = 0$ ist $7^0 + 5 = 6$; für $n > 0$ ist $7^n + 5 = (6+1)^n + 5 = (\text{Vielfaches von } 6) + 1 + 5$.
Also ist $7^n + 5$ ein Vielfaches von 6 für $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ganz entsprechend zeigt man, dass auch alle anderen Behauptungen zutreffend sind.

Aufgabe 13. Ein letztes Mal: Wahr oder falsch?
Es gilt für alle natürlichen Zahlen m, n:

$$3^{4m} - 2^{4n} = \left(\left(3^2\right)^m\right)^2 - \left(\left(2^2\right)^n\right)^2 = \left(9^m\right)^2 - \left(4^n\right)^2 = \left(9^m - 4^n\right)\left(9^m + 4^n\right)$$

Dabei ist $9^m + 4^n \geq 13$ und $9^m - 4^n \neq \pm 1$; denn aus $9^m - 4^n = 1$ folgte $9^m = 4^n + 1$. Die letzte Ziffer von 9^m ist aber 9 oder 1, und die letzte Ziffer von 4^n ist 4 oder 6, also die von $4^n + 1$ eine 5 oder 7, Widerspruch. Entsprechend widerlegt man $9^m - 4^n = -1$. Somit ist $3^{4m} - 2^{4n}$ echt zerlegbar, also keine Primzahl.

Aufgabe 14. Das Lexikon und Mathis' Alter
Die Seitenzahlen des Algebra-Artikels seien s, $s+1$, $s+2$; Mathis Alter in ganzen Jahren sei m. Dann gilt:

$$s(s+1)(s+2)+m=13815.$$

Daraus ergibt sich eine grobe Abschätzung für s:

Zunächst ist $s^3 < 13815$; somit muss $s < 24$ sein.

Wäre nun $s \leq 20$, so wäre $s(s+1)(s+2)+m \leq 9240+m$ und $m \geq 4575$!

Somit muss $s \geq 21$ sein.

Nun ist für $s=21$: $21 \cdot 22 \cdot 23 = 10626 \Rightarrow m \geq 3189$; also ist $s \neq 21$;
für $s=22$: $22 \cdot 23 \cdot 24 = 12144$ wäre $m \geq 1671 \Rightarrow s \neq 22$;
für $s=23$: $23 \cdot 24 \cdot 25 = 13800$, woraus $m=15$ folgt.

Mathis ist 15 Jahre alt.

Aufgabe 15. Besondere Zahlen
Jede der Zahlen 76^2, 176^2, 276^2, ... hat die beiden letzten Ziffern 76.
Wir können nämlich $z = x \cdot 100 + 76$ schreiben und dann endet

$$z^2 = (x \cdot 100 + 76)^2 = x^2 \cdot 10000 + 2 \cdot x \cdot 76 \cdot 100 + 5776$$

tatsächlich mit den letzten beiden Ziffern 76.

Folglich endet $z^2 - z$ stets mit den Ziffern 00, sodass $z^2 - z$ ein Vielfaches von 100 ist.

Aufgabe 16. Primzahl-Zwillinge
Es sei $p < q$. Wir setzen $p = n-1$ und $q = n+1$.

a) Der Mittelwert von p und q ist $\frac{1}{2}(p+q) = n$. Von den drei Zahlen $n-1$, n, $n+1$ ist eine ein Vielfaches von 2 und eine ist ein Vielfaches von 3. Da $n-1$ und $n+1$ Primzahlen > 3 sind, muss die Zahl n Vielfaches von 2 und zugleich von 3, also von 6 sein.

b) Mit den Bezeichnungen aus a) ist $p \cdot q + 1 = (n-1)(n+1) + 1 = n^2$. Nach a) ist n ein Vielfaches von 6, sodass n^2 ein Vielfaches von $6^2 = 36$ ist.

Aufgabe 17. Ungewöhnliche Vielfache von 63
Es sei $1_n = 111 \cdots 1$ mit n Ziffern 1.

Wenn 63 eine Zahl 1_n teilt, dann muss wegen $63 = 7 \cdot 9$ auch 7 die Zahl 1_n teilen.

Mit einem Taschenrechner findet man schnell, dass erstmals 1_6 wegen $1_6 = 111111 = 15873 \cdot 7$ den Teiler 7 hat. Dann sind auch 1_{12}, 1_{18}, 1_{24}, ... durch 7 teilbar und $9 \cdot 1_6$, $9 \cdot 1_{12}$, $9 \cdot 1_{18}$, $9 \cdot 1_{24}$, ... sind sämtlich durch $7 \cdot 9$, also 63 teilbar.

Zugleich bestehen die Zahlen $9 \cdot 1_6$, $9 \cdot 1_{12}$, $9 \cdot 1_{18}$, ... nur aus Ziffern 9.

Aufgabe 18. Acht Zahlen
Aus $ad = bc$ folgt: (1) $ad \cdot cfeh = bc \cdot cfeh = cf \cdot bceh$;

aus $cf = ed$ folgt: (2) $cf \cdot bceh = ed \cdot bceh = eh \cdot bced$;

aus $eh = gf$ folgt: (3) $eh \cdot bced = gf \cdot bced = gb \cdot fced$.

Aus (1), (2), (3) ergibt sich $ad \cdot cfeh = gb \cdot fced$.

Die letzte Gleichung kann man beidseitig mit c, d, e und f kürzen; es bleibt danach $ah = bg$.

Alternativ können wir $ad = bc$ und $eh = gf$ zu $a = \frac{bc}{d}$ und $h = \frac{gf}{e}$ auflösen. Damit folgt

$$ah = \frac{bc \cdot gf}{d \cdot e} = \frac{bg \cdot cf}{de} = \frac{bg \cdot ed}{ed} = bg.$$

Aufgabe 19. Ein bemerkenswertes Gleichungssystem
Wir beantworten gleich b) – damit ist dann auch a) entschieden.

Angenommen, es gibt die behauptete Summendarstellung für m^n. Dann legt das obige Beispiel nahe, dass der mittlere Summand m^{n-1} sein könnte. Ferner legt das Beispiel nahe, dass die Summe eventuell aus m ungeradzahligen Summanden besteht.

Setzen wir daher den ersten Summanden $= m^{n-1} - x$, dann ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned} m^n &= \left(m^{n-1} - x\right) + \left(m^{n-1} - x + 2\right) + \ldots + \left(m^{n-1} - x + (m-1) \cdot 2\right) \\ &= m \cdot m^{n-1} - mx + 2\left(1 + 2 + \ldots + m - 1\right) \\ &= m^n - mx + (m-1)m; \text{ man beachte, dass } 1 + 2 + \ldots + m = \frac{1}{2}(m-1)m \text{ ist.} \end{aligned}$$

Also muss $-mx + (m-1)m = 0$ sein, woraus $x = m - 1$ folgt. Damit gilt:

$$(*) \quad m^n = \left(m^{n-1} + 1 - m\right) + \left(m^{n-1} + 3 - m\right) + \ldots + \left(m^{n-1} + m - 3\right) + \left(m^{n-1} + m - 1\right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass alle Summanden der letzten Gleichung ungerade sind. Ist m gerade $\Rightarrow m^{n-1}$ ist gerade und $1 - m$, $3 - m$, $\ldots$, $m - 1$ sind ungerade, so dass alle Summanden in $(*)$ ungerade sind.

Ist m ungerade $\Rightarrow m^{n-1}$ ist ungerade, aber $1 - m$, $3 - m$, $\ldots$, $m - 1$ sind gerade, so dass auch jetzt alle Summanden in $(*)$ ungerade sind.

Aufgabe 20. Vier gerade Zahlen
Die Zahlen seien $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$. Teilen wir sie durch 2 (ihre dritten Potenzen also durch 8), so muss gelten

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = \frac{120^2}{8} = 1800,$$

also müssen n^3, $(n+1)^3$, $(n+2)^3$, $(n+3)^3$ im Mittel gleich $\frac{1800}{4} = 450$ sein.

Wegen $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ versuchen wir es mit $n = 6$ und erhalten tatsächlich

$$6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 216 + 343 + 512 + 729 = 1800.$$

a) Die Summe ist $2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 60$.

b) Die Quadratsumme ist $4 \cdot 36 + 4 \cdot 49 + 4 \cdot 64 + 4 \cdot 81 = 920$.

Aufgabe 21. Geldgeschenke

a) Die Beträge seien $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 = x$. Dann gilt:

$$x_4 = x, \quad x_3 = 1{,}1x, \quad x_2 = 1{,}1x_3 = 1{,}21x \quad \text{und} \quad x_1 = 1{,}1x_2 = 1{,}331x.$$

Also ist $1000\,€ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,641x$ und deshalb

$$x_4 = x = \frac{1000}{4,641}\,€ = 215,47\,€, \qquad x_3 = 1,1x_4 = 237,02\,€$$
$$x_2 = 1,1x_3 = 260,72\,€, \qquad x_1 = 1,1x_2 = 286,79\,€.$$

b) Die Beträge seien jetzt y_1, y_2, y_3, y_4. Mit $y = y_1$ gilt dann

$$y_1 = y, \quad y_2 = 0,9y, \quad y_3 = 0,9y_2 = 0,81y, \quad y_4 = 0,9y_3 = 0,729y,$$

also $1000\,€ = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3,439y$. Dies ergibt:

$$y_1 = y = \frac{1000}{3,439}\,€ = 290,78\,€, \qquad y_2 = 0,9y_1 = 261,70\,€$$
$$y_3 = 0,9y_2 = 235,53\,€, \qquad y_4 = 0,9y_3 = 211,98\,€$$

(mit einem Rundungsfehler von $0,01\,€$).

Aufgabe 22. Der Schulausflug
$27 + 26 + 24 + 28 + 27 + 26 + 24 + 25 + 22 + 22 + 24 = 275$ Schüler ergibt 55 Schüler pro Bus. Das heißt als jeweils
ursprüngliche Anzahl $= 55 +$ Anzahl Aussteiger – Anzahl Einsteiger
und deshalb der Reihe nach: $55 + 10 - 4 = 61$, $55 + 4 - 5 = 54$, $55 + 6 - 11 = 50$, $55 + 4 - 6 = 53$, $55 + 7 - 5 = 57$.

Aufgabe 23. Wahlergebnisse
Die Stimmenzahlen für die Parteien seien ℓ, f, g, c, s. Dann gilt:

$$f = \ell + 12, \qquad g = 2(f + \ell), \qquad c + s = 4g, \qquad s = \frac{3}{8}(c + s)$$

und für die Gesamtstimmenzahl $z = f + \ell + g + c + s = 11(f + \ell)$. z muss also durch 11 teilbar sein und außerdem zwischen 60 und 70 % von 1023 liegen. Dies ergibt die Möglichkeiten 616, 627, 638, 649, 660, 671, 682, 693, 704 und 715. Davon erfüllt nur 682 die Bedingung über die Quersummen.

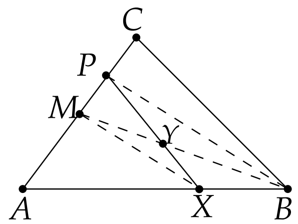
a) Die Wahlbeteiligung ist also 682 Stimmen bzw. $66,\overline{6}$ %.

b) $f + \ell = \frac{z}{11} = 62$, wegen $f = \ell + 12$ also $\ell = 25$, $f = 37$; $g = 2(f + \ell) = 124$, $c + s = 4g = 496$, $s = \frac{3}{8} \cdot 496 = 186$ und $c = 496 - 186 = 310$.

Im Reich der Geometrie

Aufgabe 24. Dreieckshalbierung

Konstruiere der Reihe nach
1. die Strecke PB,
2. den Mittelpunkt M von AC,
3. die Strecke MX parallel zur Strecke PB.
Mit dem so konstruierten Punkt X ist die Aufgabe gelöst.



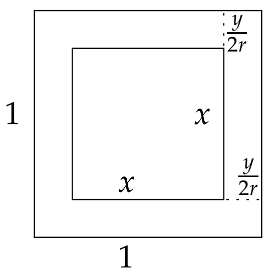
Begründung:
Die Dreiecke MXB und MXP haben die gleiche Basis MX und die gleiche Höhe, nämlich den Abstand der Parallelen PB und MX. Daraus folgt
(1) $|MXB| = |MXP|$,
wo $|MXB|$ die Fläche von $\triangle MXB$ angibt, usw. Aus (1) ergibt sich: $|MXY| + |YXB| = |MXY| + |MYP|$, woraus folgt
(2) $|YXB| = |MYP|$.
Nach Definition von M gilt
(3) $|MAB| = |MBC|$.
Damit ist $|MAB| - |YXB| + |MYP| = |PAX|$ oder mit (2)
(4) $|MAB| = |PAX|$.
Ferner gilt $|MBC| - |MYP| + |YXB| = |CPXB|$ oder mit (2) und (3)
(5) $|MAB| = |CPXB|$.
Aus (4) und (5) ergibt sich, dass die Strecke PX die Halbierungsaufgabe löst.

Aufgabe 25. Besondere Kreise
Jede ganze Zahl $g > 0$ ist von der Form $g = 4n$ oder $g = 4n + 1$ oder $g = 4n + 2$ oder $g = 4n + 3$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Wir zeigen: g^2 ist von der Form $g^2 = 4m$ oder $g^2 = 4m + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$
Sei $g = 4n \Rightarrow g^2 = 4(4n^2) = 4m$ mit $m = 4n^2$;
sei $g = 4n + 1 \Rightarrow g^2 = 4(4n^2 + 2) + 1 = 4m + 1$ mit $m = 4n^2 + 2$;
sei $g = 4n + 2 \Rightarrow g^2 = 4(4n^2 + 4n + 1) = 4m$ mit $m = 4n^2 + 4n + 1$;
sei $g = 4n + 3 \Rightarrow g^2 = 4(4n^2 + 6n + 2) + 1 = 4m + 1$ mit $m = 4n^2 + 6n + 2$.
Daraus folgt für zwei ganze Zahlen x, y: $x^2 + y^2$ ist von einer der Formen $4m + 4m'$ oder $4m + (4m' + 1)$ oder $(4m + 1) + 4m'$ oder $(4m + 1) + (4m' + 1)$, also von einer der Formen $4k$, $4k + 1$ oder $4k + 2$ mit $k = m + m'$.
Falls nun die Gleichung $x^2 + y^2 = z$ für ganze Zahlen gelten soll, dann kann z nicht die Form $4k + 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ besitzen. Daraus folgt die Behauptung.

Übrigens: Wenn $z \notin \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$ ist, dann können auf einem Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = z$ manchmal ganzzahlige Punkte liegen, manchmal aber auch nicht.
Beispiel: Auf dem Kreis mit $x^2 + y^2 = 1$ liegen die vier ganzzahligen Punkte $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$, während auf dem Kreis mit $x^2 + y^2 = 6$ keine ganzzahligen Punkte vorkommen.

Aufgabe 26. Würfelherstellung
Die Kantenlängen der kleinen Würfel seien x und y. Dann gilt:

$$(1) \quad x^3 + y^3 = 1, \quad x < 1,\ y < 1.$$



Wir denken uns das Material des Würfels mit der Seitenlänge y so um den Würfel der Seitenlänge x „herum gebaut“, dass der Würfel vom Volumen 1 entsteht. Dann haben wir um den x-Würfel eine Schicht der Dicke $\frac{y}{2r}$, wobei r eine positive Zahl > 1 ist (vgl. Figur). x und y müssen dann die folgende Bedingung erfüllen:

$$(2) \quad x + \frac{y}{r} = 1 \qquad \text{oder} \qquad x = 1 - \frac{y}{r}.$$

Setzt man diesen y-Wert in (1) ein, so folgt:

$$\left(1-\frac{y}{r}\right)^3+y^3=1 \;\Rightarrow\; y^3\left(1-\frac{1}{r^3}\right)+3\frac{y^2}{r^2}-3\frac{y}{r}=0$$

Mit $y \neq 0$ folgt:

$$y^2(r^3-1)+3ry-3r^2=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{-3r\pm r\sqrt{12r^3-3}}{2(r^3-1)}.$$

Wegen $y>0$ und $r>1$ kommt als Lösung nur in Frage:

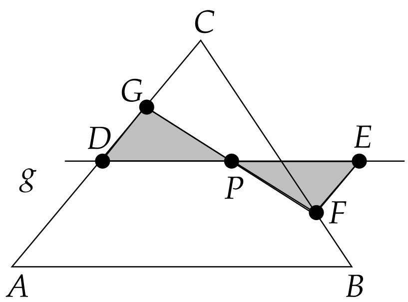
$$y=\frac{-3r+r\sqrt{12r^3-3}}{2(r^3-1)} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1+2r^3-\sqrt{12r^3-3}}{2(r^3-1)}$$

Diese y- und x-Werte geben die möglichen Kantenlängen der beiden kleinen Würfel (in Abhängigkeit von $r>1$) an.

Aufgabe 27. Eine Aufgabe aus alter Zeit
Zeichne eine Gerade g beliebig durch P. D sei der Schnittpunkt von g mit der Seite CA und E sei auf g so festgelegt, dass $|DP|=|PE|$ ist. Zeichne die Strecke $EF \parallel CA$.

FG ist die gesuchte Strecke!

Begründung: Die Dreiecke DPG und EPF sind kongruent, also gilt $|GP|=|PF|$.

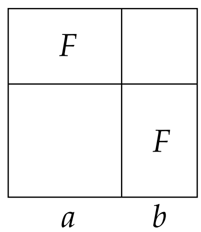


Es gibt drei Lösungen, die man mit der gleichen Konstruktion erhält und zwar die Strecken, die die Seitenpaare (CA, CB), (AC, AB) und (BA, BC) verbinden.

Aufgabe 28. Rechteckszerlegung
Die Seiten des Rechtecks seien a und b.

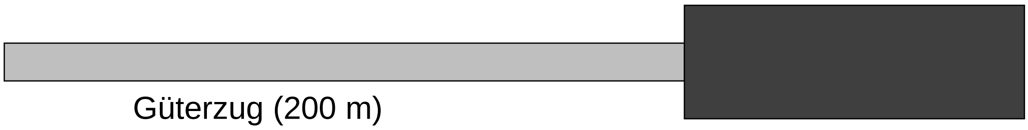
Durch Nachrechnen: $U^2=(2a+2b)^2=4(a+b)^2=4a^2+8ab+4b^2>8ab=8F$.

Mit einer Zeichnung: Im Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{U}{2}=a+b$ finden wir zwei Rechtecke mit Fläche F. Also ist $\left(\frac{U}{2}\right)^2>2F \Rightarrow U^2>8F$.



Zu guter Letzt

Aufgabe 29. Der Güterzug im Tunnel
Die *Spitze* des Güterzugs muss von der Durchfahrt am Tunnel*eingang* bis zum Verlassen des Zug*endes* am Tunnel*ende* einen Weg von $200\text{m}+100\text{m}=300\text{m}$ zurücklegen.



Die Geschwindigkeit 36 km/h bedeutet, dass in 1 Stunde (also in 60 Minuten) 36 km, in 1 Minute 36 km : 60 = 0,6 km = 600 m zurückgelegt werden. Wenn der Zug aber in 1 Minute 600 m zurücklegt, so braucht er für die 300 m, also die Hälfte davon, die Hälfte dieser Zeit, also $\frac{1}{2}$ Minute oder **30 Sekunden**.

Aufgabe 30. Polynome
Polynomdivison ergibt $g(x) \div f(x) = 2x - b$ mit Nullstelle $x_0 = \frac{b}{2}$.
Die Nullstellen von f sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.
g und f haben gleiche Nullstellen, wenn $x_0 = x_1$, also $b = -2$ oder $x_0 = x_2$, also $b = 4$.

Aufgabe 31. Das DIN-A-System

a) Ist die längere Seite $\sqrt{2} \cdot a$, die kürzere a, so ist nach der Teilung die längere Seite a, die kürzere $\frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

b) DIN-An ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{10000}{2^{n+1}}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{1000000}{2^{n+1}}\,\mathrm{mm}^2.$$

Da 2^{10} knapp über 1000 liegt, ist $2^{13} = 8 \cdot 2^{10} < 10000$ und $2^{14} = 16 \cdot 2^{10} > 10000$.

Für $n = 13$ wird also $1\,\mathrm{cm}^2$ unterschritten.

$2^{20} = (2^{10})^2$ ist knapp über 1000000, d.h. DIN-A19 ist gerade noch kleiner als $1\,\mathrm{mm}^2$.

c) Der DIN-A4-Stapel enthält $2^4 = 16$ Blatt und ist daher $\frac{16 \cdot 4}{500}\,\mathrm{cm} = 0{,}128\,\mathrm{cm}$ dick.

Der DIN-A13-Stapel enthält $2^{13} \approx 8 \cdot 1000$ Blatt und ist ca. $\frac{4 \cdot 8000}{500}\,\mathrm{cm} = 64\,\mathrm{cm}$ dick.

Der DIN-A19-Stapel enthält $2^{19} = \frac{1}{2} \cdot 2^{20} \approx \frac{1}{2} \cdot 1000000 = 500000$ Blatt und ist deshalb $\frac{4 \cdot 500000}{500}\,\mathrm{cm} = 4000\,\mathrm{cm} = 40\,\mathrm{m}$ dick.

d) Bei jedem Schnitt erhöht sich die Anzahl der Teile um 1, man braucht also 15 Schnitte, bis man 16 Teile hat.

Aufgabe 32. Spielerei
Ja, wer beginnt, gewinnt, wenn er so spielt: Die erste Münze legt er genau in die Mitte des Tischs. Danach legt er immer eine gleichartige Münze, wie sie sein Gegenspieler gelegt hat, und zwar genau symmetrisch zu dieser.

Problemlöseaufgaben – Aufgaben mit vielen Lösungswegen

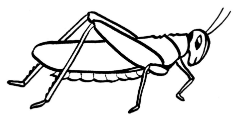
von Catherine Jacobi, Grietje Gelück und Malte Stumpf

Zuerst stellt ihr euch sicher die Frage: „Problemlöseaufgaben, was ist denn das?“, und diese Frage ist sehr berechtigt, da es keine allgemeine Definition dieser Art von Aufgaben gibt. Eigentlich sind alle Aufgaben, die Schüler zum Lösen von Problemen oder Rätseln auffordern, Problemlöseaufgaben. Die bekannteste Form dürften für euch die Textaufgaben sein. Sicherich habt ihr alle schon einmal eine Problemlöseaufgabe gelöst, ohne zu wissen, dass es sich um eine solche handelt! Nun fangen wir aber mal an: Viele Problemlöseaufgaben können auf ganz verschiedene Weisen gelöst werden. Seid ihr imstande, ein und dieselbe Aufgabe auf verschiedenen Wegen zu lösen, so ist das ein Hinweis darauf, dass ihr beweglich im Denken seid. Aber keine Angst, diese Beweglichkeit im Denken könnt ihr auch trainieren! Dazu benötigt ihr jedoch das passende Werkzeug: Diese „Werkzeuge“ nennt man heuristische Hilfsmittel. Heuristisch kommt von dem Wort „Heuristik“, was für „Erfindungskunst“ steht.

Genug der Vorrede, jetzt zu unserem Beispiel:

Beispielaufgabe: Heuschreckensprung

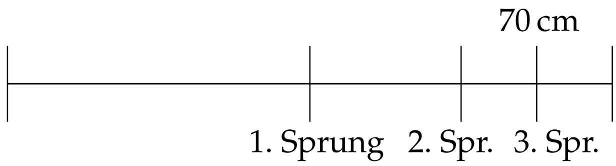
Eine Heuschrecke springt an einem Stab entlang. Sie startet an dessen einem Ende. Bei jedem Sprung schafft sie die Hälfte der übrig gebliebenen Strecke. Nach drei Sprüngen ist sie 70 cm weit gekommen. Wie lang ist der Stab?



Vielleicht kennt ihr diese Aufgabe schon aus dem MONOID 81. Dort war sie Teil der *Mathespielereien*. Jetzt wollen wir sehen, wie wir bzw. *ihr (!)* die Aufgabe lösen könnt oder auch schon gelöst habt! Hier nun die verschiedenen Lösungswege:

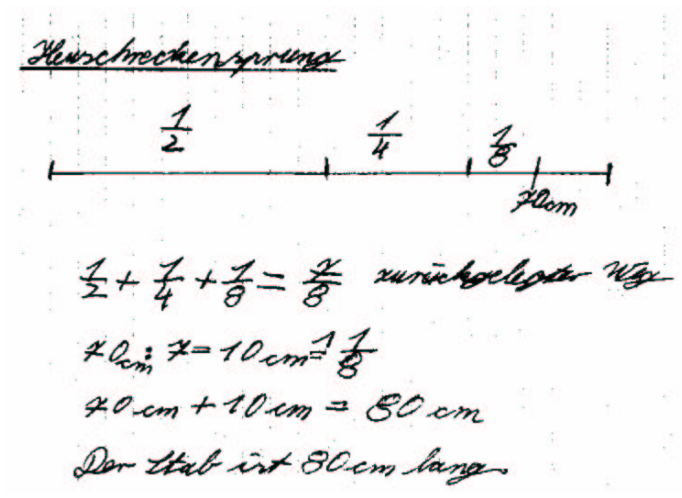
1) Informative Figur

Man gibt einen beliebig langen Strich vor. Für den ersten Heuschreckensprung teilt man die Länge der Strecke zur Hälfte. Dieses Verfahren führt man noch zwei Mal für den jeweils rechten Teil durch.



Aus der informativen Figur kann nun abgelesen werden, dass es sich bei der Gesamtlänge des Stabes um 80 cm handeln muss. Der Stab lässt sich in acht gleich große Abschnitte aufteilen, die alle so groß sind wie der letzte Sprung. Sieben dieser Abschnitte haben insgesamt eine Länge von 70 cm, also beträgt die Länge eines einzelnen Abschnitts 10 cm.

Mit dieser Zeichnung und einer erläuternden Rechnung hat z.B. Philipp Mayer aus der Klasse 6b des Elisabeth-Langgässer-Gymnasiums in Alzey die Aufgabe gelöst:



2) Gleichung

Diese Aufgabe kann auch durch Aufstellen einer Gleichung gelöst werden. Dabei bezeichnet x die Gesamtlänge des Stabes:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot x &= 70\,\mathrm{cm},\\ \frac{7}{8}x &= 70\,\mathrm{cm},\\ x &= 80\,\mathrm{cm}.\end{aligned}$$

3) Ausprobieren mit Hilfe einer Tabelle

Die Lösung einer Aufgabe kann man auch durch Ausprobieren finden. Besonders übersichtlich kann man dies mit Hilfe einer Tabelle gestalten:

	1. Versuch	**2. Versuch**	**3. Versuch**
Angenommene Stablänge	60 cm	100 cm	80 cm
1. Sprung	30 cm	50 cm	40 cm
2. Sprung	15 cm	25 cm	20 cm
3. Sprung	7,5 cm	12,5 cm	10 cm
Gesamt?	52,5 cm	87,5 cm	70 cm
Stimmt's?	Zu wenig!	Zu viel!	**STIMMT!**

Nun habt ihr drei heuristische Hilfsmittel kennen gelernt, mit deren Hilfe ihr Problemlöseaufgaben auf verschiedenen Wegen lösen könnt. Bestimmt findet ihr noch weitere Hilfsmittel, die hier nicht aufgeführt sind, die euch aber auch zur Lösung führen. Eurer Kreativität sind keine Grenzen gesetzt! Mit Sicherheit könnt ihr jetzt auch eure eigene Lösung der Beispielaufgabe in die drei Kategorien einordnen. Versucht es doch mal, denn genau dies haben wir bei der Auswertung eurer Ergebnisse auch getan!

Weitere Aufgaben von uns waren die „defekte Waschmaschine", die „Rennmäuse" und die „Knobelaufgabe" im gleichen Heft. Für alle von euch, die diese Aufgaben im MONOID 81 gelöst und ihre Aufgaben direkt an die Redaktion geschickt haben, haben wir hier eine kleine Auswertung vorgenommen, in der ihr sehen könnt, wie ihr und eure „Mitdenker" die Aufgaben gelöst haben!

Auswertung der verwendeten Hilfsmittel

Wir beschäftigten uns in unserer Projektgruppe „Problemlöseaufgaben“ an der Uni Mainz näher mit den verschiedenen heuristischen Hilfsmitteln, die wir euch oben vorgestellt haben. Die oben genannten Aufgaben waren auch Teil unserer Untersuchungen bei Schülern und Studenten im Februar 2005. Uns interessierte dabei, welche Hilfsmittel bei den verschiedenen Aufgaben verwendet werden und ob es eventuell Unterschiede zwischen Schülern der verschiedenen Jahrgänge und Studenten gibt.

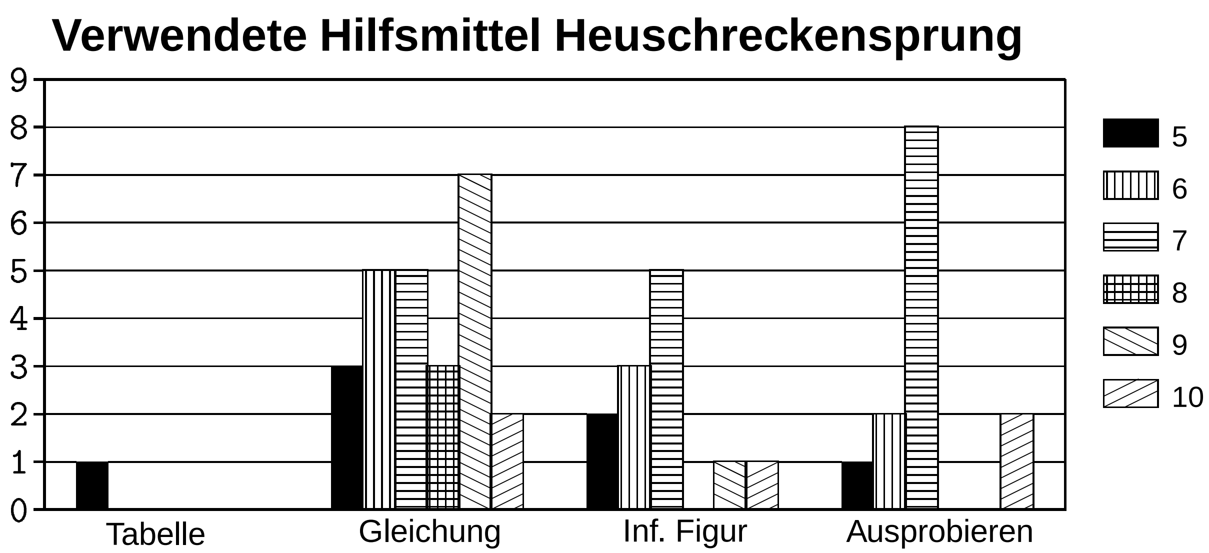
Wir haben uns nun auch die Lösungen von euch – den Monoid-Lesern – in Bezug auf die verwendeten heuristischen Hilfsmittel einmal näher angeschaut. Die Herangehensweise und die Auswertung der Ergebnisse der Monoid-Leser sollen hier kurz vorgestellt werden:

Zur Auswertung:

Wir betrachteten die Lösungen und notierten, welches Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe verwendet wurde. Es war auch möglich, dass für die Lösung zwei Hilfsmittel verwendet wurden. Diese wurden dann beide gezählt. Ebenso wurde notiert, ob die Aufgabe insgesamt erfolgreich gelöst wurde. Dies alles wurde in einer Tabelle zusammengetragen. Als Beispiel präsentieren wir euch auch hier die Aufgabe „Heuschreckensprung“:

Klassenstufe	Tabelle	Gleichung	Informative Figur	Ausprobieren	Richtig	Falsch	Anzahl gesamt	Richtig in %
5	1	3	2	1	5	1	6	83,33%
6		5	3	2	8	1	9	88,88%
7		5	5	8	14	1	15	93,33%
8		3			3		3	100,00%
9		7	1		7		7	100,00%
10		2	1	2	3	1	4	75,00%
5 – 10	1	25	12	13	40	4	44	90,90%

In Form einer Graphik erscheinen die Zahlen etwas übersichtlicher. Die Schraffur der Balken gibt die jeweiligen Klassenstufen 5 – 10 wieder.



Bei der Aufgabe Heuschreckensprung wurde das Hilfsmittel Gleichung am häufigsten gewählt. An zweiter Stelle wurden die Informative Figur und das Ausprobieren gleichermaßen verwendet. Die Tabelle schien für die Monoid-Leser ein ungeeignetes Lösungsmittel zu sein. Auffällig ist die fast ausschließliche Verwendung der Gleichung in Klasse 9. Vermutlich hängt dies mit der Behandlung von Gleichungssystemen in dieser Klassenstufe zusammen. Überraschend ist in diesem Zusammenhang die Verwendung dieses Lösungswegs in niedrigen Klassen, wahrscheinlich lässt sich dies mit dem großen mathematischen Interesse der jüngeren Monoid-Leser erklären.

Ergebnisse:

Obwohl alle Aufgaben mit jedem Hilfsmittel zu lösen waren, wurden bei den einzelnen Aufgaben meistens nur ein oder zwei Hilfsmittel häufig angewandt. Dies zeigt, dass die Hilfsmittel für verschiedene Aufgaben unterschiedlich gut geeignet sind.
Wenn man erkennt, mit welchem Hilfsmittel eine Aufgabe besonders einfach zu lösen ist, kann man sich als geschickter Mathematiker viel Zeit sparen! Deshalb sollte man den Umgang mit den verschiedenen heuristischen Hilfsmitteln an unterschiedlichen Aufgaben üben, um ein „Auge“ für das am besten geeignete Hilfsmittel zu bekommen.
Außerdem fiel noch auf, dass ihr – die MONOID-Leser – fast 100% der Aufgaben richtig gelöst habt. Bei den im Februar 2005 untersuchten Lösungen der Schüler und Studenten war dies leider nicht der Fall. . .

Zum Abschluss wollen wir euch noch eine Lösung zeigen, die keinem der heuristischen Hilfsmittel zuzuordnen ist, jedoch auf sehr originelle Weise zum Erfolg führt. Sie stammt von Lisa Simon, Klasse 7a ebenfalls des Elisabeth-Langgässer-Gymnasiums Alzey.

Nr. 2 Seite 21 Heuschreckensprung

Da die Heuschrecke nach dem 3. Sprung bei 70cm ankommt, und immer die Hälfte der Restlichen Strecke springt, springt sie nacheinander Sprünge mit folgenden Längen:

	40	cm	
+	20	cm	
+	10	cm	→ 70cm (nach 3. Sprung)
+	5	cm	
+	2,5	cm	
+	1,25	cm	
+	0,6 25	cm	
+	0,3125	cm	
+	0,15625	cm	
+	0,078125	cm	
+	0,0390625	cm	
+	0,01953125	cm	
	79,98046875	cm	

$79{,}98046875\ \text{cm} \sim 80\ \text{cm}$

Zusammen ergeben die Länge der Sprünge eine Gesamtlänge von ca. 80cm. Der Stab ist also ca. 80cm lang.

Lisa lässt ihre Heuschrecke immer weiter am Stab entlang hüpfen. Wenn sie nur lang genug springt, muss sie irgendwann am Ende des Stabes ankommen. Dafür müssen aber nicht unendlich viele Sprünge addiert werden, nach ungefähr zwölf Sprüngen kann Lisa sehen, wie lang der Stab am Ende ungefähr sein muss.

Sudoku

数独

Die Zahlen 1 bis 9 sind so in die Grafik einzutragen, dass jeder der neun Neunerblöcke (3×3-Quadrate), jede der neun Zeilen und jede der neun Spalten sämtliche Zahlen enthält.

7	5			6				4
2	9		5			3		
8		4			2			
			6		8		7	3
		7	3		1	5		
6	8		7		5			
								9
		5			6		4	1
3				8			6	

Mehr zum Thema *Sudoku* findet ihr im MONOID 85, welches im März 2006 erscheinen wird. Bis dann habt ihr Zeit, die (eindeutige) Lösung selbst zu finden, denn dort werden wir das Rätsel auflösen.

MONOID Jahrgang 25 Sonderheft November 2005

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe
Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Johannes Merz, Manuel Ross und Rebecca Zimmer
Zusammenstellung und Layout: Jens Mandavid **Internet:** Oliver Labs

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', zu überweisen; **Adresse nicht vergessen**.

Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
D-55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-24389

e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`