Jahrgang 26 Heft 85 März 2006

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

7	5	1	8	6	3	9	2	4
2	9	6	5	7	4	3	1	8
8	3	4	9	1	2	6	5	7
5	1	9	6	2	8	4	7	3
4	2	7	3	9	1	5	8	6
6	8	3	7	4	5	1	9	2
1	6	8	4	5	7	2	3	9
9	7	5	2	3	6	8	4	1
3	4	2	1	8	9	7	6	5

Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2006.**

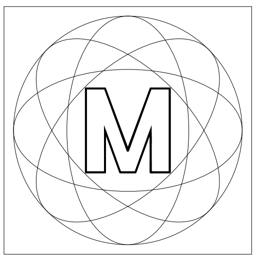
Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**



Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Ein japanisches Zahlenrätsel: Sudoku

Von Hartwig Fuchs

Isomura Yoshinori (gest. 1710) veröffentlichte 1661 ein Buch, dessen dritte Auflage 1684 unter dem Titel „Zoho Sanpo Ketsugi – sho“ als ein Klassiker der japanischen mathematischen Literatur gilt.

In diesem Buch befasste er sich u.a. ausführlich mit magischen Quadraten, darunter auch solchen, die Leonhard Euler (1707-1783) in seiner Schrift „De quadratis magicis“ als “Lateinische Quadrate“ bezeichnete und die sich in ihrer heutigen Ausprägung im Land der aufgehenden Sonne allgemeiner Beliebtheit erfreuen und als Zahlenrätsel “Su doku - die Zahl, die allein steht“ bekannt sind.

Seit 2004, als eine Londoner Zeitung erstmals ein Sudoku-Rätsel veröffentlichte, macht Sudoku auch in England Karriere. Focus, The Newsletter of the Mathematical Association of America, spricht in der Januar-Ausgabe 2006 von einer Sudoku-Epidemie, die inzwischen über die ganze Welt gefegt sei.

Was ist ein Sudoku?

An einem Modell wollen wir das Spielmaterial, die Spielregeln und das Ziel eines Sudoku beschreiben.

Gegeben ist ein Quadrat mit $n^2 \times n^2$ Feldern, $n^2 = 4, 9, 16, \ldots$, das in n^2 kleinere Quadrate mit jeweils $n \times n$ Feldern eingeteilt ist. In die Felder sind zerstreut einige natürliche Zahlen $\leq n^2$ eingetragen. Die Aufgabe besteht nun darin, jedes leere Feld so mit einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^2$ zu füllen, dass gilt:

(1) Jedes der $n \times n$-Quadrate enthält sämtliche Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^2$.

(2) Jede Zeile aus n^2 Feldern und jede Spalte aus n^2 Feldern des großen $n^2 \times n^2$-Quadrats enthält sämtliche Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^2$.

Das Rätsel ist gelöst, wenn jedes der ursprünglich leeren Felder gemäß den Bedingungen (1) und (2) mit einer Zahl besetzt ist.

Es darf also jede Zahl in jeder Zeile, jeder Spalte und jedem $n \times n$-Quadrat nur einmal vorkommen, „su doku“. Von einem *Lateinischen Quadrat* wird übrigens nur das Erfülltsein von Spielregel (2) verlangt. Insofern muss auch die Zeilen- und Spaltenzahl eines Lateinischen Quadrats nicht notwendiger Weise eine Quadratzahl sein.

Beispiel eines 4×4-Sudoku (die unterlegten Zahlen sind gegeben):

1			3
		2	
3			

Lösung:

Z_1 = Zeile 1; S_1 = Spalte 1 usw.; Z_1/S_2 = Position Zeile 1, Spalte 2 usw.

1	2	4	3
4	3	2	1
2	1	3	4
3	4	1	2

$2 \in S_3 \Rightarrow 2 \in Z_1/S_2$ wegen (1);
$1 \in Z_1 \Rightarrow 1 \in Z_2/S_4 \Rightarrow 4 \in Z_1/S_3$;
$3 \in S_1 \Rightarrow 3 \in Z_2/S_2 \Rightarrow 4 \in Z_2/S_1$ wegen (1);
$\Rightarrow 2 \in Z_3/S_1$ wegen (2);
$2 \in Z_3$ und $2 \in S_3 \Rightarrow 2 \in Z_4/S_4$ wegen (2);
$\Rightarrow 4 \in Z_3/S_4$ wegen (2);
$3 \in Z_4 \Rightarrow 3 \in Z_3/S_3 \Rightarrow 1 \in Z_4/S_3$ wegen (1)
$\Rightarrow 4 \in Z_4/S_2$ wegen (2); $\Rightarrow 1 \in Z_3/S_2$.

Und nun versuch' es selbst:

	2	1	
1			3

Hinweis:

Die Lösung findest Du in diesem Heft; diejenige des Sudoku aus dem Sonderheft auf der Titelseite. Ein Sudoku mit ein paar kniffligen Zusatzbedingungen findest Du bei den Neuen Aufgaben.

(Warum) musste Sti(e)fel sterben?

Von Wolfgang J. Bühler

Zu meiner Studentenzeit (vermutlich ist das heute noch so?) haben Studenten oft abends beim Bier gesungen:

> Stiefel muss sterben, ist noch so jung, jung, jung;
> Stiefel muss sterben, ist noch so jung.
> Wenn das der Absatz wüsst, dass Stiefel sterben müsst;
> Stiefel muss sterben, ist noch so jung.

Auch ich habe damals mitgesungen, ohne zu wissen, dass es sich dabei um ein Spottlied handelte über eine wirklich existierende Person, die sich mit Mathematik beschäftigt hatte: um Michael Stifel, der 1487 (?) in Esslingen geboren wurde. Die erste Hälfte des Lieds ist anscheinend entstanden, nachdem Stifel („noch so jung") für den 3. Oktober 1533 nicht nur *seinen* Tod, sondern sogar den Untergang der ganzen Welt berechnet hatte. Er war damals Pfarrer im sächsischen Lochau, eine Pfarrstelle, die ihm Martin Luther vermittelt hatte. Seine Gemeinde – überwiegend Bauern, von denen viele in Erwartung des Endes ihre Arbeit verlassen und ihr Vermögen weggegeben oder durchgebracht hatten (mindestens zwei hatten ihre Häuser niedergebrannt, um als Arme ins Himmelreich einzugehen) – warteten mit ihm vergebens auf das Ende und schafften ihn, als dies nicht eintrat, gefesselt nach Wittenberg, um gegen ihn Klage zu führen. Stifel musste aber nicht damals und nicht deshalb sterben. Die Spottverse bezogen sich wohl eher auf seine Prophezeihung.

Aber wie hatte Stifel das Datum errechnet? Genau lässt sich dies nicht mehr feststellen. Es ist aber bekannt, dass sich Stifel damals mit der sogenannten Wortrechnung beschäftigte. Dabei hat er Buchstaben Dreieckszahlen zugeordnet oder auch in geeigneten Bibeltexten diejenigen Buchstaben, die als römische Zahlen verwendet werden, durch diese Zahlen ersetzt (also I durch 1, V durch 5, X durch 10, L durch 50, C durch 100, D durch 500 und M durch 1000) und dann (z.B.) addiert; dabei hat er U und V (und Y?) nicht unterschieden, wie damals noch üblich. „**LI**ES **M**ONO**ID**“ wird so zu $50 + 1 + 1000 + 1 + 500 = 1552$. Der lateinische Satz „**VID**EB**Y**NT **I**N Q**U**E**M** TRANS-F**IX**ER**U**NT“ (Sie werden ihn sehen, den sie durchstochen haben) könnte so zur Jahreszahl 1533 geführt haben.

Der durchschlagende Misserfolg mit der Wortrechnung hat Stifel nicht davon abgebracht, sich weiterhin mit Mathematik zu beschäftigen. Zu seinen mathematischen Spielereien gehört die Entdeckung der Stifelschen magischen Quadrate, 5×5-magische Quadrate, deren zentrales 3×3-Quadrat wieder magisch ist, wie in diesem Beispiel:

2	3	20	21	24
23	13	18	11	5
22	12	14	16	6
19	17	10	15	9
4	25	8	7	26

Neben seiner Pfarrtätigkeit in Holzdorf (diese Stelle hatte er etwa ein Jahr nach seinem Weltuntergang durch Fürsprache von Luther und Melanchthon erhalten) schrieb er sein Hauptwerk, die „Arithmetica integra“, die wesentlicher Grund für seine Anerkennung durch die Nachwelt werden sollte. Der Mathematikhistoriker Moritz Cantor nannte Stifel einen der ersten deutschen Zahlentheoretiker. Stifel war einer der Wegbereiter für die Anerkennung der negativen Zahlen und der Null als echte Zahl, insbesondere auch in ihrer Verwendung als Hochzahlen. Auch die Vereinbarung $a^0 = 1$ verdanken wir wohl ihm. So legte er einerseits die Grundlage für das Rechnen mit Logarithmen, andererseits gelang es ihm damit, die Theorie der quadratischen Gleichungen gegenüber vorher deutlich zu vereinfachen (allerdings noch nicht, sie in die heutige Form zu bringen).

Nach der Niederlage des evangelischen Schmalkaldischen Bundes gegen den katholischen Kaiser Karl V. 1547 in der Schlacht auf der Lochauer Heide nahm Stifel wechselnde Pfarrstellen in Preußen an, bevor er als bald 70-Jähriger nach Sachsen zurückkehrte, wo er an der Universität in Jena Vorlesungen über Mathematik hielt.

In Jena starb Stifel am 19.4.1567 – also keineswegs „noch so jung“.

Hessische Schülerakademie

Im kommenden Sommer findet zum zweiten Mal eine Hessische Schülerakademie statt und zwar vom

13. August 2006, 18.30 bis 25. August 2006, 11.00 Uhr.

Außer der Dokumentation der Akademie 2004 steht der komplette Ausschreibungstext für 2006 im Internet unter `www.hsaka.de`

Die Akademie richtet sich an interessierte Schüler/innen der Klassen 10-13 und Lehramtskandidat(inn)en der ersten und zweiten Ausbildungsphase. Die Kursgebühr für SchülerInnen beträgt 550 Euro (für Härtefälle bestehen Zuschussmöglichkeiten.) Unsere diesjährigen Sponsoren sind das Hessische Kultusministerium, die Universität Frankfurt, das Amt für Lehrerbildung und Burg Fürsteneck.

Angeboten werden diesmal die Kurse:

- Mathematik an der Nahtstelle von Schule und Hochschule (Dr. C. Hog-Angeloni, Prof. Dr. W. Metzler),
- Ähnlichkeiten in der Physik (Prof. Dr. W. Aßmus),
- Was ist Demokratie und wie funktioniert sie? (Prof. Dr. J. Esser, Dipl. Pol. S. Weiß),
- Geschichte wozu, Geschichtswissenschaft wozu? (Prof. Dr. C. Berger Waldenegg).

Jeder Kurs trifft sich zu zwei Arbeitseinheiten pro Tag. Außerdem wird die Teilnahme an einem

- kursübergreifenden musisch-kulturellen Programm, u.a. in Musik, Theater, Fotografie,... (Dirk Schneider, Ingrid und Wolfgang Metzler)

erwartet. Morgens findet ein etwa halbstündiges Akademieplenum statt.

Außer von den genannten Kursleitern werden die Kurse von Lehramtsstudierenden betreut. Bei der Anmeldung gib bitte den von Dir bevorzugten Kurstyp an sowie eine zweite Wahl. Du erhältst eine Antwortnachricht, ob Du bei der Schülerakademie teilnehmen kannst. In diesem Fall schicken wir Dir Materialien und Informationen zu, die Du bitte bereits vor der Akademie durcharbeitest. Vor und während der Akademie entstehen Berichte der Schüler(inn)en und Lehramtskandidat(inn)en, welche zusammen eine Akademiedokumentation ergeben.

Während der zwei Wochen findet ein halbtägiger Ausflug statt. Am Ende steht eine (öffentliche) Präsentation der Ergebnisse.

Über die Teilnahme an der Akademie erhältst Du eine Bestätigung. Einen Prospekt zur Schülerakademie 2006 übersendet Frau Knoth, Postfach 20, 36130 Eiterfeld, Tel 06672 92020, email `bildung@burg-fuersteneck.de`, gerne auf Anfrage.

Cynthia Hog-Angeloni und Wolfgang Metzler

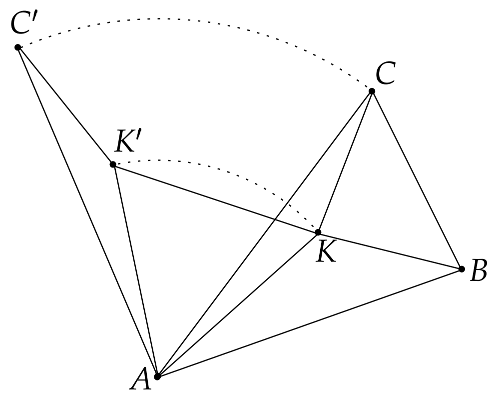
Wo soll die Kläranlage gebaut werden? Der FERMAT-Punkt eines Dreiecks

Von Ekkehard Kroll

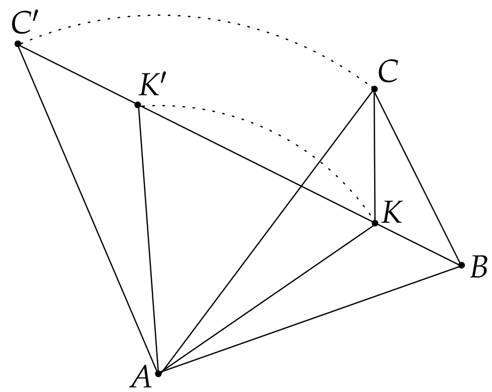
Die Gemeindevertreter von Adorf, Beheim und Celingen treffen sich zu einer informativen Runde beim Lindenwirt in Adorf, um darüber zu beraten, wo die gemeinsame Kläranlage gebaut werden soll. „Also da klar ist, dass wir aus Kostengründen eine gemeinsame Anlage wollen, muss sie so günstig liegen, dass sie von unseren drei Orten gleich weit entfernt ist“ meint der Bürgermeister von Adorf. „Das wäre – wenn wir unsere Orte als die Ecken eines Dreiecks ansehen – also der Umkreismittelpunkt“ überlegt Studienrat Müller; er ist nicht nur Gemeindevertreter von Beheim, sondern unterrichtet am Gymnasium in der Kreisstadt Mathe und kennt sich in Geometrie aus.

„Warum soll die Kläranlage von unseren Ortschaften gleich weit entfernt sein? Außer dem Wartungspersonal braucht doch da niemand hin! Wäre es nicht – um noch weitere Kosten zu sparen, zum Beispiel bei der Verlegung der Rohre – viel günstiger, für die Kläranlage eine Stelle zu nehmen, so dass von dort die Abstände zu unseren drei Orten *zusammen* genommen möglichst klein ist?!“ fragt Frau Becker; sie ist Gemeindesekretärin von Celingen und auch sonst recht praktisch veranlagt. Herr Müller greift den Vorschlag gleich auf; schon hat er auf seinem Konzeptpapier ein Dreieck mit den Ecken A, B, C entworfen, und die Anderen schauen ihm über die Schulter. „Gibt es denn so einen Punkt überhaupt?“ fragt Bauer Martin skeptisch und zieht nachdenklich an seiner Pfeife. „Mmmh“ macht Müller gedehnt, „könnte schon sein.“ – „Dann vertagen wir erst mal die Kläranlage, bis unser guter Müller die optimale Lage herausgefunden hat“, schlägt der Bürgermeister von Adorf vor, und die Gemeinderäte wenden sich anderen Problemen zu.

Studienrat Müller hat zu Hause eine stattliche Bibliothek, und in einem Buch über Minimalprobleme wird er bald fündig. In das Innere des Dreiecks ABC, dessen spitzwinklige Form der Lage der drei Ortschaften ungefähr entspricht, zeichnet er einen Punkt K ein; er verbindet ihn mit den Eckpunkten. Dann dreht er das Dreieck AKC um $60°$ in die Lage $AK'C'$ (Figur 1).



Figur 1



Figur 2

Das Dreieck AKK' ist nach Konstruktion gleichschenklig, woraus $\angle AKK' = \angle AK'K$ folgt, so dass wegen $\angle KAK' = 60°$ alle Winkel gleich $60°$ sind, das Dreieck AKK' somit sogar gleichseitig ist.

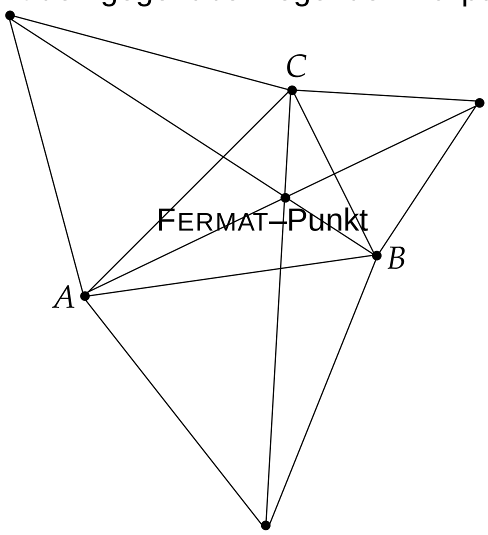
Damit die Summe der Entfernungen $|AK| + |BK| + |CK| = |KK'| + |BK| + |C'K'|$ minimal wird, muss der Streckenzug $C'K'KB$ ohne „Knicke“ verlaufen, das heißt, die Punkte K und K' müssen auf der Geraden durch B und C' liegen (Figur 2). Dann aber gilt $\angle AKC = \angle AK'C' = 180° - \angle AK'K = 180° - 60° = 120°$ und $\angle AKB = 180° - \angle AKK' = 180° - 60° = 120°$, folglich auch $\angle BKC = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$.

Damit hat sich eine Eigenschaft für den gesuchten Minimalpunkt K, der nach dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat als **FERMAT**-Punkt des Dreiecks ABC bezeichnet wird, ergeben, die ihn auch weitgehend charakterisiert. Es lässt sich nämlich elementar, wenn auch mit etwas „technischem“ Aufwand zeigen:

> *Sind alle Winkel eines gegebenen Dreiecks kleiner als* $120°$*, so ist der* FERMAT*-Punkt dieses Dreiecks der eindeutig bestimmte Punkt im Innern des Dreiecks, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter dem Winkel von* $120°$ *erscheinen.*
>
> *Ist jedoch der Winkel an einer Dreiecksecke mindestens* $120°$*, so ist dieser Eckpunkt der* FERMAT*-Punkt des Dreiecks.*

Wer hierüber mehr erfahren möchte, sei auf das schöne Buch *„Kugel, Kreis und Seifenblasen - Optimale Formen in Geometrie und Natur“* von Stefan Hildebrandt und Anthony Tromba aus dem Birkhäuser Verlag verwiesen.

Aus dieser Winkelcharakterisierung ergibt sich eine einfache Konstruktion des FERMAT-Punktes zu einem gegebenen Dreieck ABC; denn mit den selben Argumenten wie beim Dreieck AKK' erkennen wir, dass auch das Dreieck ACC' gleichseitig ist. Errichten wir also über den Seiten des Dreiecks ABC gleichseitige Dreiecke, so ist der FERMAT-Punkt von ABC der gemeinsame Schnittpunkt der Verbindungsstrecken der Spitzen dieser Dreiecke mit den gegenüber liegenden Eckpunkten des Dreiecks ABC:



Als Studienrat Müller sein Resultat bei der nächsten Zusammenkunft der Gemeindevertreter von Adorf, Beheim und Celingen vorstellt, zeigen sich diese zwar von der geometrischen Argumentation beeindruckt, meinen aber, dass doch noch einige weitere Fragen untersucht werden müssen: Erlaubt das Gelände an der Stelle K auch die bauliche Errichtung der Kläranlage, gibt es auf den Verbindungsstrecken zu den Ortschaften auch keine geologischen Probleme, müssen Gefällstrecken berücksichtigt werden, sind ökologische Besonderheiten (seltene Pflanzen, Tiere) zu beachten, wie sind – wegen eventueller Geruchsbelästigung – die Windverhältnisse in der betroffenen Gegend? Wie an diesem Beispiel zu sehen ist, können sich von der mathematischen Lösung eines Problems bis zur Realisierung noch viele Schwierigkeiten auftürmen. Aber immerhin ist mit dem Auffinden von K schon mal ein Anfang gemacht.

Eine Maschine zur Erzeugung von Folgen, Teil II

Von Stephan Rosebrock

Im letzten Monoid-Heft wurden Folgenmaschinen vorgestellt (siehe [2]). Zur Erinnerung betrachten wir ein Beispiel, die Folgenmaschine $FM_n(5n-7,\ n/2)$. Wir wählen eine Startzahl. Ist sie ungerade, multiplizieren wir sie mit 5 und ziehen 7 ab. Ist sie gerade, halbieren wir sie. Mit der erhaltenen Zahl machen wir dasselbe und zwar so lange, bis wir bei der 1 landen oder in einen Zyklus kommen oder wir stoppen gar nicht. Zum Beispiel landen wir bei der Startzahl 91 in einem Zyklus:

$$91, 448, 224, 112, 56, 28, 14, 7, 28$$

Der Zyklus hat die Länge 3, weil die drei Zahlen $28, 14, 7$ immer wieder vorkommen.

Teiler und kurze Zyklen

Knobelaufgabe 1
Untersuche die Folgenmaschine $FM_n(3n+5,\ n/2)$. Probiere also ein paar Startzahlen aus (auf jeden Fall auch die 5 und die 9) und male ein Baumdiagramm durch Rückwärtsiteration. Findest du auch Zyklen?

Wenn ihr genügend viele Zahlen probiert habt, werdet ihr feststellen, dass keine Fünferzahl (also eine durch 5 teilbare Zahl) jemals bei der 1 endet. Woran liegt das? Startet man mit einer Fünferzahl n und ist n ungerade, so rechnen wir $3n+5$. Das ist aber wieder eine Fünferzahl. Probiere es aus: Z.B. wird aus der 15 die 50 oder aus der 30 die 95 usw. Aber auch wenn diese Fünferzahl n gerade war und wir $n/2$ rechnen müssen, kommt wieder eine Fünferzahl heraus: Z.B. wird aus der 20 die 10 oder aus der 70 die 35. Hat man also eine Fünferzahl als Startzahl, so sind alle weiteren Zahlen der entstehenden Folge wieder Fünferzahlen. Weil die 1 keine Fünferzahl ist, kann die entstehende Folge nie bei der 1 landen.

Knobelaufgabe 2
Was passiert mit Dreierzahlen, also mit durch drei teilbaren Zahlen, bei der Folgenmaschine $FM_n(2n+3,\ n/2)$ und bei $FM_n(2n+9,\ n/2)$? Welcher der drei Fälle trifft hier nicht zu?

Knobelaufgabe 3
Finde eine Folgenmaschine, bei der alle durch 7 teilbaren Startzahlen niemals bei der 1 enden.

Wir betrachten die Folgenmaschine $FM_n(3n-18,\ n/2)$ mit der Startzahl 36:

$$36, 18, 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$$

Wir haben einen Zyklus der Länge 1 bei der 9. Das hätten wir auch berechnen können: Wenn wir die ungerade Zahl n in $3n-18$ einsetzen muss wieder n herauskommen, also: $n = 3n - 18$. Das führt nach Auflösen zu $n = 9$.

Knobelaufgabe 4
Bisher haben wir fast nur Folgenmaschinen mit $n/2$ in dem „n gerade“ Kästchen betrachtet. Dafür gibt es keinen Grund. Wir betrachten die Folgenmaschine $FM_n((n+3)/2, 4n-12)$. Welche Zyklen der Länge 1 hat diese?

Wir können auch versuchen zu verstehen, wann Folgenmaschinen Zyklen der Länge 2 haben. Dazu betrachten wir die Folgenmaschine $FM_n(4n-6, n/2)$. Wir starten mit einer ungeraden Zahl n. Im ersten Schritt wird sie zu $4n-6$. Das ist auf jeden Fall eine gerade Zahl (weil "gerade mal ungerade" immer gerade ist). Sie muss also im nächsten Schritt halbiert werden und wird damit zu $2n-3$. Wenn wir in einem Zyklus der Länge 2 sein wollen, muss sie wieder gleich der Ausgangszahl sein, also $2n-3=n$ und damit $n=3$. In der Tat gibt es den Zyklus der Länge 2: $3, 6, 3, \ldots$.

Knobelaufgabe 5
Finde einen Zyklus der Länge 2 bei der Folgenmaschine
$FM_n((n+1)/2, 3n-5)$.

Knobelaufgabe 6
Finde Folgenmaschinen mit Zyklen der Länge 1 und finde solche mit Zyklen der Länge 2.

Analysen mit dem Computer

Kompliziertere Folgenmaschinen haben manchmal lange Zyklen. Die Folgenmaschine $FM_n(3n+107, (n+50)/2)$ hat Zyklen der Länge 1, 3, 7 und 69. Den Zyklus der Länge 1 findest du selbst. Den Zyklus der Länge 69 kann man gut mit dem Computer finden. Überhaupt eignet sich der Computer gut zum Forschen mit der Folgenmaschine. Man kann nämlich den Computer bei einer Folgenmaschine viele Startzahlen durchprobieren lassen und dabei Gesetzmäßigkeiten beobachten.
Das folgende MATHEMATICA-Programm zeigt zu einer gegebenen Folgenmaschine und Startzahl `n0` die durch Iteration entstehende Zahlenfolge bis ein Zyklus auftritt oder die Folge bei 1 endet. Nach 200 Iterationsschritten nimmt das Programm an, dass die Iteration gegen unendlich läuft. Mit dieser Annahme muss man vorsichtig umgehen. Bei großen Zahlen werden leicht mehr als 200 Schritte benötigt, um in einem Zyklus oder bei der 1 zu landen.

```
FM\_n[f1_, f2_][n0_] := Module[{f},
          f[1]=1; f[n_?OddQ]:=f1; f[n_?EvenQ]:=f2;
          NestWhileList[f, n0, UnsameQ, All, 200]]
```

Wir betrachten die Folgenmaschine $FM_n((n+3)/2, 5n+3)$. Durch Rückwärtsiteration (siehe [2]) sehen wir gleich, dass keine Startzahl zur 1 führt. Es gibt einen Zyklus der Länge 1 (findet ihr den?). Betrachtet man die Ausgabe des Programms für ein paar Zahlen, so kann man sehen, dass Startzahlen, die bei der Division durch 5 den Rest 3 lassen, zu Folgen führen, bei denen alle Zahlen bei der Division durch 5 den Rest 3 lassen (Könnt ihr das beweisen?).

Startzahl 33

```
 FM\_n[(n + 3)/2, 5 n + 3][33]
{33, 18, 93, 48, 243, 123, 63, 33}
```

und Startzahl 78

```
 FM\_n[(n + 3)/2, 5 n + 3][78]
{78, 393, 198, 993, 498, 2493, 1248, 6243, 3123, 1563, 783, 393}
```

führen beide in einen Zyklus und man sieht, dass in beiden Folgen alle Zahlen auf der Ziffer 3 oder 8 enden. Ohne Computerhilfe sind solche Rechnungen mühsam.

Folgenmaschinen ersetzen

Knobelaufgabe 7

Zeige, dass die Folgenmaschine $FM_n((n+1)/2, n/2)$ für jede Startzahl zur 1 geht.

Es ist schwieriger zu sehen, dass die Folgenmaschine $FM_n(2n+2, n/2)$ für jede Startzahl zur 1 geht. Dazu fangen wir mit einer ungeraden Startzahl m an. Eingesetzt in $FM_n(2n+2, n/2)$ ergibt sich $2m+2$. Das ist gerade (2 mal eine ungerade Zahl ist immer gerade) und die nächste Zahl ist $m+1$. Auch das ist gerade und die nächste Zahl ist $(m+1)/2$. Es wird also immer eine ungerade Startzahl m in 3 Schritten durch $(m+1)/2$ ersetzt. Interessiert uns nur, ob zu einer Startzahl von $FM_n(2n+2, n/2)$ die Folge in einen Zyklus, zur 1 oder gegen unendlich läuft und nicht, wie viele Schritte sie braucht, so können wir also $FM_n(2n+2, n/2)$ durch $FM_n((n+1)/2, n/2)$ ersetzen. In Knobelaufgabe 7 haben wir gesehen, dass die letzte Folgenmaschine für jede Startzahl zur 1 geht.

Ähnliches passiert bei der Folgenmaschine $FM_n(4n+2, n/2)$. Sie geht, außer für Zweierpotenzen, immer gegen unendlich. Das sieht man so: Eine ungerade Startzahl m geht in einem Schritt zu $4m+2$, was gerade ist, und wir müssen also im nächsten Schritt halbieren. Wir erhalten $2m+1$, was ungerade ist. Wir können also, wie eben, die Folgenmaschine $FM_n(4n+2, n/2)$ durch $FM_n(2n+1, n/2)$ ersetzen. Die hat aber für eine ungerade Startzahl immer nur ungerade Folgenglieder (eine ungerade Zahl in $2n+1$ eingesetzt ist wieder ungerade) und, weil $2n+1$ Zahlen immer größer macht, geht also die Folge für jede ungerade Startzahl gegen unendlich. Was passiert bei geraden Zahlen? Jede gerade Zahl außer Zweierpotenzen trifft durch $n/2$ irgendwann auf eine ungerade Zahl und geht dann auch nach unendlich.

Die Lösungen der Knobelaufgaben findet Ihr weiter hinten in diesem Heft.

Literatur

[1] S. Rosebrock: *Die Folgenmaschine,* MNU 55 (7), (2002), S. 403-407

[2] S. Rosebrock: *Eine Maschine zur Erzeugung von Folgen,* MONOID 84 (2005), S. 6-9.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Lösung des Sudoku von Seite 4:

4	1	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
1	4	2	3

Lösungsweg (Z_1 = Zeile 1; S_1 = Spalte 1 usw.)

$2 \in S_2 \Rightarrow 2 \in Z_3/S_1$;
$3 \in Z_4 \Rightarrow 3 \in Z_3/S_2 \Rightarrow 4 \in Z_4/S_2$;
$2 \in Z_3 \Rightarrow 2 \in Z_4/S_3$;
$1 \in Z_4$ und $1 \in S_3 \Rightarrow 1 \in Z_3/S_4 \Rightarrow 4 \in Z_3/S_3$;
$\Rightarrow 3 \in Z_1/S_3 \Rightarrow 3 \in Z_2/S_1$;
$\Rightarrow 1 \in Z_1/S_2 \Rightarrow 4 \in Z_1/S_1$;
$\Rightarrow 4 \in Z_2/S_4 \Rightarrow 2 \in Z_1/S_4$.

Ein Blick hinter die Kulissen: Die verschwiegene Ziffer

Von Hartwig Fuchs

Bei einer Zauberschau führt ein „Gedankenleser“ (Herr G) seine Kunststücke vor. Eines davon ist dieses:

Ein Zuschauer (Herr Z) wird aufgefordert, aus den 10 Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ eine vierstellige und zwei dreistellige Zahlen zu bilden, so dass keine Ziffer übrig bleibt. Diese drei Zahlen möge er addieren und aus dem Ergebnis eine beliebige Ziffer streichen. Die verbliebenen Ziffern soll er schließlich in irgendeiner Reihenfolge Herrn G nennen. Herr G behauptet: „Ich kann danach stets die gestrichene Ziffer aus den Gedanken des Herrn Z herauslesen.“ Wie aber bestimmt er die gestrichene Ziffer tatsächlich?

Die drei Zahlen, die Herr Z aus den Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ gebildet hat, seien z_1, z_2, z_3 mit der Summe $z_1 + z_2 + z_3$, in Ziffernschreibweise:

$$\begin{array}{rr} z_1 = & a_0a_1a_2a_3 \\ z_2 = & b_1b_2b_3 \\ z_3 = & c_1c_2c_3 \\ \hline z_1 + z_2 + z_3 = & dd_0d_1d_2d_3 \end{array}$$

Wenn man die Ziffern von z_1, z_2 und z_3 addiert, dann erhält man: $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) + (c_1 + c_2 + c_3) = 45$, also ein Vielfaches von 9. Dann aber ist auch die Ziffernsumme $d + d_0 + d_1 + d_2 + d_3$ von $z_1 + z_2 + z_3$ ebenfalls ein Vielfaches von 9, weil gilt:

$d_3 = a_3 + b_3 + c_3 - n_3 \cdot 10$ mit $n_3 \cdot 10$ als eventuellem Additionsübertrag, $n_3 \geq 0$;
$d_2 = a_2 + b_2 + c_2 + n_3 - n_2 \cdot 10,\ n_2 \cdot 10$ eventueller Additionsübertrag, $n_2 \geq 0$;
$d_1 = a_1 + b_1 + c_1 + n_2 - n_1 \cdot 10,\ n_1 \cdot 10$ eventueller Additionsübertrag, $n_1 \geq 0$;
$d_0 = a_0 + n_1 - n_0 \cdot 10,\ n_0 \cdot 10$ eventueller Additionsübertrag, $n_0 \geq 0$;
$d = n_0$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d + d_0 + d_1 + d_2 + d_3 &= 45 - n_3 \cdot 10 + n_3 - n_2 \cdot 10 + n_2 - n_1 \cdot 10 + n_1 - n_0 \cdot 10 + n_0 \\ &= 45 - n_3 \cdot 9 - n_2 \cdot 9 - n_1 \cdot 9 - n_0 \cdot 9 \\ &= (5 - n_3 - n_2 - n_1 - n_0) \cdot 9 \end{aligned}$$

und somit ist $d + d_0 + d_1 + d_2 + d_3$ ein Vielfaches von 9.

Dies nutzt Herr G so aus:

Während Herr Z ihm die nicht gestrichenen Ziffern seines Additionsergebnisses, z. B. d_0, d_2, d_3 nennt, summiert Herr G diese drei Zahlen. Da er weiß, dass $d_0 + d_1 + d_2 + d_3$ das kleinste Vielfache von 9 oberhalb von $d_0 + d_2 + d_3$ sein muss, kann er die nicht genannte Ziffer d_1 sofort berechnen.

Beispiel 1:

Herr Z wählt:

$$\begin{array}{rr} & 9375 \\ + & 108 \\ + & 264 \\ \hline & 9747 \end{array}$$

Er addiert die drei Zahlen und streicht die Ziffer 4 im Ergebnis – er nennt somit die Ziffern $7, 7, 9$.

Herr G könnte die gestrichene Ziffer mit x bezeichnen. Er weiß dann, dass $7+7+9+x = v \cdot 9$, $\quad v$ kleinst möglich – also $7+7+9+x = 27$ ist. Folglich ist 4 die gestrichene Ziffer.

Beispiel 2:

Herr Z wählt:
$$\begin{array}{rr} & 9630 \\ + & 741 \\ + & 852 \\ \hline & 11223 \end{array}$$
Herr Z streicht eine 2 und nennt $1, 3, 2, 1$.

Herr G rechnet $1+3+2+1+x = 7+x = v \cdot 9$, v minimal, also $v = 1$ und $x = 2$.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Petit, Jean-Pierre: „Das Geometrikon."

Ein Comic und Mathematik? Passt das denn zusammen? Wer diese Fragen klären möchte, kommt an Jean-Pierre Petit nicht vorbei. Anselm Wüßtegern, der gezeichnete Protagonist des ersten Bandes der Reihe „Die Abenteuer des Anselm Wüßtegern", zweifelt an den Produkten der Gesellschaft „Euklid & Co", die seit 300 v. Chr. alle Mathematiker zufrieden stellten. So experimentiert er mit Geraden auf einer Kugeloberfläche. Dabei stellt er fest, dass auf dieser Fläche die Summe der Winkel in einem Dreieck größer als $180°$ ist... Bei der weiteren Untersuchung verschiedener Kurven, Flächen und Räume steht Anselm neben zwei gelehrten Vögeln noch Sophie, die nach eigenen Worten auf „Kurven und was dazugehört" spezialisiert ist, hilfreich zur Seite. Gemeinsam werden neben dem Möbius-Band auch dreidimensionale nicht-orientierbare Räume entdeckt und untersucht.

Eine Schülerin der 9-ten Klasse beurteilte „Das Geometrikon" folgendermaßen: „Ich bewerte dieses Buch mit sehr gut, da die Mathematik durch die Bilder verständlich gemacht wird. Es ist durch die verschiedenen Personen abwechslungsreich und nicht so eintönig wie zum Beispiel ein mathematisches Schulbuch. Die Begriffe werden beim ersten Erwähnen durch Bilder und Sprache verständlich erklärt und erst dann verwendet."

Fazit: „Das Geometrikon" bietet einen amüsanten und gelungenen Einstieg in viele Fragen und Problemstellungen der Geometrie oberhalb von nur zwei Dimensionen. Durch die liebevolle Darstellung, nicht nur der Protagonisten, und die humorvoll umgesetzten Ideen lässt man sich gerne auf die nicht-Euklidische Geometrie ein und wird neugierig auf mehr.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Petit, Jean-Pierre: Das Geometrikon. Vieweg 1995, ISBN 3-528-06673-3, PB 63 Seiten, 13,90 €.

Art des Buches:	Wissenschafts-Comic
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Martin Mattheis

Euklid, der König und der Schüler

Von Hartwig Fuchs

Euklid war einer der bedeutendsten Mathematiker der griechischen Antike. Durch sein Buch „Elemente“, in dem er in meisterhafter Weise die Grundlagen der Mathematik, insbesondere der Geometrie seiner Zeit behandelte, wurde er darüber hinaus zum einflussreichsten Mathematiker, der je gelebt hat: nicht nur die Griechen, auch die Römer, nach ihnen die Araber und schließlich die Abendländer – diese vom Mittelalter bis weit in die Neuzeit hinein – benutzten die „Elemente“ als das maßgebende in die Mathematik und ihre Methoden einführende Lehrbuch.

Von Euklids Leben ist fast nicht bekannt – nur in einem späten Kommentar zu den „Elementen“ erwähnt PROKLOS (412–485 n. Chr.), dass Euklid zur Zeit des Pharao lebte, der von 323 bis 285 v. Chr. in Ägypten herrschte. Wahrscheinlich war Euklid irgendwann zwischen 320 und 260 v. Chr. auf Einladung des Pharao am „Museum“ in Alexandria – das einem heutigen wissenschaftlichen Forschungsinstitut entsprach – tätig. Viel mehr weiß man nicht über ihn. Aber seit alters sind uns zwei Anekdoten überliefert, die – sollten sie auf einer wahren Begebenheit beruhen – uns einen Eindruck von Euklids Einstellung zur Matheatik vermitteln.

Euklid und der König

PTOLOMÄOS I, der ein Förderer der Wissenschaften war (er gründete das „Museum“ dessen angegliederte alexandrinische Bibliothek später weltberühmt wurde), befasste sich wohl auch mit Mathematik und mit Euklids „Elementen“. Er musste Euklids Werk als schwierig empfunden haben. Denn eines Tages fragte der König den in der Bibliothek tätigen Mathematiker, ob es denn keinen kürzeren und leichteren Zugang zur Geometrie gebe als die „Elemente“. Darauf soll Euklid geantwortet haben:
„Es gibt keinen Königsweg in die Geometrie!“.

Euklid und der Schüler

Ein Jüngling mit recht materiellen Interesen bat Euklid, dass er ihn als seinen Schüler in der Geometrie unterrichte. Euklid willigte ein. Nachdem nun der Schüler den ersten geometrischen Satz gelernt hatte, fragte er seinen Lehrer, was er wohl mit seinen geometrischen Kenntnissen werde verdienen können. Euklid wandte sich um und befahl seinem in der Nähe weilenden Haussklaven: „Gib ihm drei Münzen, damit er schon mit seinem ersten erlernten mathematischen Satz etwas verdient hat!“.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

René Descartes (franz. Philosoph, Mathematiker und Naturforscher, 1596–1650):

Von allen, die bis jetzt nach der Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein muss.

Alles, was bloß wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch.

Die „besondere“ Aufgabe

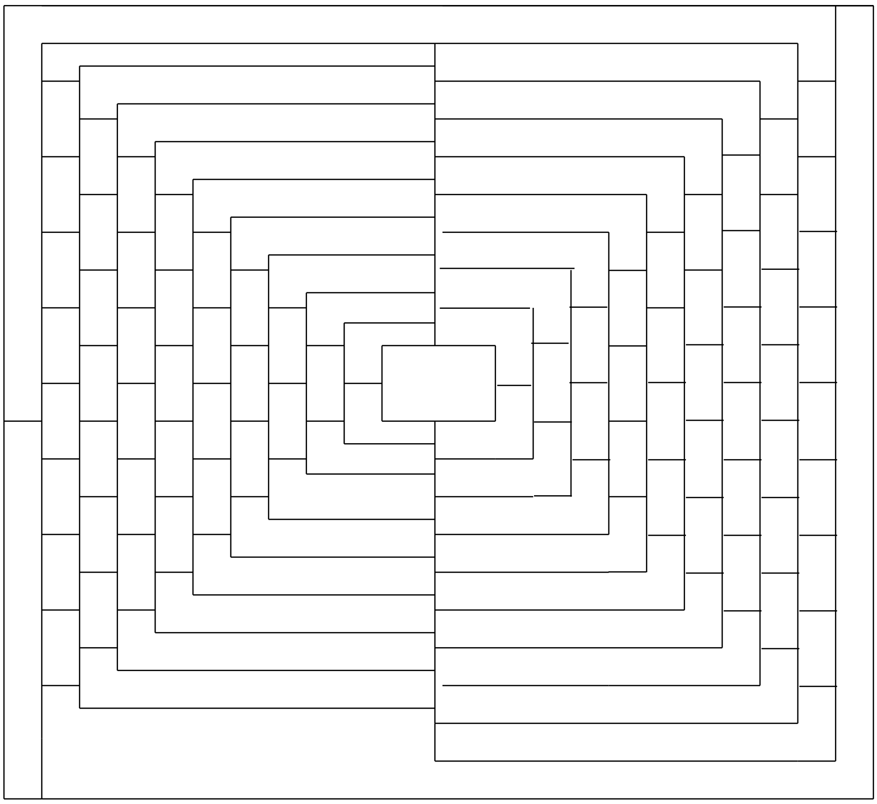
Von Hartwig Fuchs

Das Vierfarbenproblem wurde zum ersten Mal 1852 aufgeworfen, als der Student Francis Guthrie bemerkte, dass er die Länder einer Landkarte stets so einfärben konnte, dass keine zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenze die gleiche Farbe aufwiesen – und dass er dabei niemals mehr als **vier Farben** benötigte.

So wurde die *Vierfarbenvermutung* in die mathematische Welt gesetzt: Man braucht bei keiner Landkarte mehr als vier Farben.

Ein Beweis oder eine Widerlegung der Vierfarbenvermutung stellte sich bald als so schwierig heraus, dass sie zu einer der größten mathematischen Herausforderungen der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts bis weit ins 20. Jahrhundert hinein wurde.

Im Jahr 1975 veröffentlichte dann der Graphentheoretiker W. McGregor eine aus 110 Ländern bestehende Landkarte – vgl. Bild – von der er behauptete, zu ihrer Färbung benötige man mindestens *fünf Farben*, und damit sei die Vierfarbenvermutung widerlegt.



McGregor irrte – seit 1977 weiß man sogar durch die Arbeiten von K. Appel und W. Haken, dass die Vierfarbenvermutung zutreffend ist!

Kannst Du nun W. McGregor widerlegen, indem Du eine Kolorierung seiner Landkarte mit nur vier Farben herstellst? Mit Appel und Haken kannst Du sicher sein – es geht.

(Einen Lösungsvorschlag von Dietmar Hermann (München) aus dem Jahre 1975 findest Du an anderer Stelle dieses Heftes. Wenn Du noch eine andere Lösung findest, kannst Du sie uns zusenden.)

Die Seite für den Computer-Fan

Repro-Zahlen

Es sei $n = z_1 z_2 \dots z_t$ eine natürliche Zahl in Ziffernschreibweise. Wenn die Quadratzahl n^2 mit dem Ziffernblock $n = z_1 z_2 \dots z_t$ endet, dann heißt n eine Repro-Zahl.
Bestimme alle Repro-Zahlen $n < 10^7$. (H.F.)

Wahr oder falsch?

Es gibt keine einzige einfache Formel, welche – wenn man in sie natürliche Zahlen „eingibt" – nur Primzahlen „auswirft". Oder vielleicht doch diese?
Behauptung: $p_n = n^2 - 79n + 1601$ ergibt für $n = 0, 1, 2, \dots$ stets eine Primzahl p_n. (gefunden H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 83

Ein Ziffernquadrat mit unglaublichen Primzahleigenschaften

Wenn man die Ziffern in nebenstehendem Quadrat

9	1	3	3
1	5	8	3
7	5	2	9
3	9	1	1

horizontal von links nach rechts,
vertikal von oben nach unten,
diagonal von links oben nach rechts unten sowie
von rechts oben nach links unten

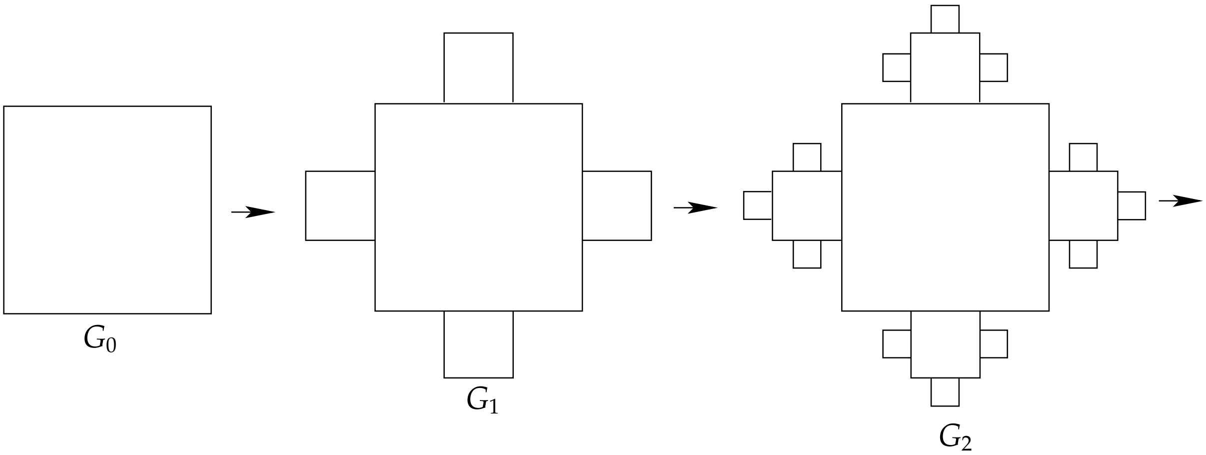
als vierziffrige Zahlen liest, dann sind diese 10 Zahlen **sämtlich Primzahlen**.
Überprüfe dies mit deinem Computer!
Wenn man nun die vier Leserichtungen umkehrt, also von rechts nach links, von unten nach oben, diagonal von unten nach oben liest, sind dann die neuen 10 Zahlen ebenfalls sämtlich Primzahlen? (gefunden H.F.)

Lösungen:

Alle zwanzig vierziffrigen Zahlen, die man nach der gegebenen Vorschrift aus dem Ziffernquadrat herausliest, sind tatsächlich Primzahlen. Der bequemste Weg geht über die *Derive*-Funktion PRIME?(n), die für Primzahlen n den Wert *true* ausgibt, sonst *false*. Ansonsten kann überprüft werden, ob es Primzahlen $\leq\sqrt{n}$ gibt, die n teilen. Der Bereich der Primzahlen, mit denen hier zu testen ist, erstreckt sich von 2 bis 97. Dies haben Christian Behrens und Martin Alexander Lange vom Gymnasium am Römerkastell Alzey sowie Laura Biroth von der Humboldtschule Bad Homburg mit *Excel* durchgeführt; Pascal Cremer vom Gymnasium Korschenbroich hat sich ein *Visual Basic*-Programm geschrieben, Alexander Rettkowski vom Winckelmann-Gymnasium Stendal ein C++–Programm und Bernhard Saumweber vom Gisela-Gymnasium München ein *Delphi*-Programm.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Mathis machen mathematische Entdeckungen



Mache Dir zunächst klar, wie man von der Figur G_0 zur Figur G_1 gelangt, wie man von G_1 zu G_2 kommt und wie dann wohl $G_3, G_4, \ldots$ usw. gebildet sind. Die Seitenlängen von G_0 seien 1.

Und nun denke Dir einige interessante Fragen aus, die Du dann auch selbst untersuchst und beantwortest. (H.F.)

Eure Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. September 2006 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im MONOID-Heft 88 werden wir Eure Ergebnisse veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Lösungen der Knobelaufgaben zur Folgenmaschine

1 Wir testen die Startzahl 5:

$$5, 20, 10, 5$$

Ein Zyklus der Länge 3.
Die Startzahl 9 führt zu:

$$9, 32, 16, 8, 4, 2, 1$$

Es gehen also nicht nur Zweierpotenzen auf die 1.

2 Dreierzahlen gehen nie zur 1. Eine Dreierzahl als Startzahl in einer der beiden Folgenmaschinen führt zu einer Folge mit nur Dreierzahlen.

3 Zum Beispiel $FM_n(3n + 7,\ n/2)$.

4 Es gibt 2 Zyklen der Länge 1. Der eine besteht aus der Zahl 3 und der andere aus der 4.

5 Der Zyklus der Länge 2 ist $4, 7$.

6 Zum Beispiel hat die unter der Übungsaufgabe stehende Folgenmaschine $FM_n(3n + 107,\ (n + 50)/2)$ einen Zyklus der Länge 1 bestehend aus der Zahl 50. Die Folgenmaschine $FM_n(5n - 9,\ n/2)$ hat einen Zyklus der Länge 2: $3, 6$.

7 Bei jeder Startzahl werden die Folgenglieder immer kleiner.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 84

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Winkel im Dreieck

In einem Dreieck verhalten sich zwei Winkel wie $2:3$. Der dritte Winkel ist so groß wie die beiden zusammen. Kannst Du ein solches Dreieck zeichnen? Wie groß sind die Winkel? (Idee von Céline Mötteli)

Lösung:

Wir nennen die beiden ersten Winkel α und β, den dritten γ. Dann ist $\alpha : \beta = 2 : 3$, d. h. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, also $\alpha = \frac{2}{3}\beta$. Ferner ist $\gamma = \alpha + \beta = \frac{2}{3}\beta + \beta = \frac{5}{3}\beta$.

Mit der Winkelsumme im Dreieck $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ folgt $180° = \frac{2}{3}\beta + \beta + \frac{5}{3}\beta = \frac{10}{3}\beta$.

Damit ergibt sich $\beta = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$, $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 54° = 36°$ und $\gamma = \frac{5}{3} \cdot 54° = 90°$.

Auf dem Viehmarkt

Die Bauern Hensel, Lehmann und Huber gehen mit je 822 € auf den Viehmarkt. Es gibt Kühe für 170 €, Schafe für 82 €, Hähne für 12 € und Hennen für 9 €.

a) Bauer Hensel kauft 3 Kühe und 2 Schafe. Er möchte 6-mal so viele Hennen wie Hähne kaufen. Wie viele Hühner und Hähne kann er höchstens noch kaufen und wie viel Geld bleibt übrig?

b) Bauer Lehmann kauft 4 Hähne und 26 Hennen. Vom restlichen Geld will er Schafe kaufen, aber er möchte zum Schluss noch mindestens 75 € übrig haben. Wie viele Schafe kann er höchstens kaufen und wie viel Geld hat er dann noch?

c) Bauer Huber möchte nur Schafe und Kühe kaufen, und zwar 1 Schaf mehr als doppelt so viele Schafe wie Kühe. Wie viele Schafe und Kühe kauft er höchstens und wie viel Geld hat er dann noch übrig? (Malte Meyn, Freie Waldorfschule Otterberg)

Lösung (nach Malte Meyn):

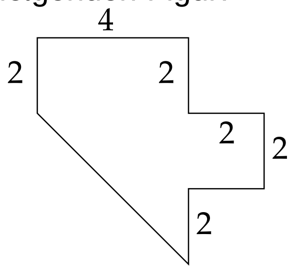
a) Für 3 Kühe und 2 Schafe muss Bauer Hensel $3 \cdot 170\,€ + 2 \cdot 82\,€ = 674\,€$ bezahlen; es verbleiben ihm also noch $822\,€ - 674\,€ = 148\,€$. 6 Hühner und 1 Hahn würden zusammen $6 \cdot 9\,€ + 1 \cdot 12\,€ = 66\,€$ kosten. Wegen $148 = 2 \cdot 66 + 16$ kann er 12 Hühner sowie 2 Hähne kaufen und hat noch 16 € übrig.

b) 4 Hähne und 26 Hennen kosten insgesamt $4 \cdot 12\,€ + 26 \cdot 9\,€ = 282\,€$. Da Bauer Lehmann am Ende mindestens 75 € übrig haben will, stehen ihm noch $822\,€ - 282\,€ - 75\,€ = 465\,€$ zur Verfügung. Wegen $465 = 5 \cdot 82 + 55$ kann er 5 Schafe kaufen und hat noch $75\,€ + 55\,€ = 130\,€$ übrig.

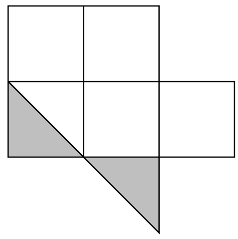
c) 2 Schafe und 1 Kuh kosten zusammen $2 \cdot 82\,€ + 1 \cdot 170\,€ = 334\,€$. Da Bauer Huber 1 Schaf „extra“ haben will, kann er noch für $822\,€ - 82\,€ = 740\,€$ einkaufen. Wegen $740 = 2 \cdot 334 + 72$ bekommt er zweimal 2 Schafe und 1 Kuh, geht also mir 2 Kühen und 5 Schafen davon und hat noch 72 € übrig.

Flächenberechnung

Berechne den Flächeninhalt der folgenden Figur:



Lösung:



Verlängern wir wie in der Zeichnung rechts die waagrechten und senkrechten Linien, so entsteht eine zur Ausgangsfigur kongruente Figur (Die beiden markierten Dreiecke sind offensichtlich rechtwinklig-gleichschenklig mit identischen Schenkellängen, nämlich 2 cm, und somit auch kongruent). Die entstandenen 5 Rechtecke sind nach den Angaben offensichtlich alles Quadrate mit dem jeweiligen Flächeninhalt $A_Q = 2\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$. Damit gilt für den Flächeninhalt $A = 5 \cdot 4\text{cm}^2 = 20\text{cm}^2$.

Der Stundenplan

Thomas erhält in der Schule einen neuen Stundenplan. Er weiß nur:
1. In den ersten 4 Tagen der Woche habe ich nur Mathematik, Deutsch, Englisch, Französisch und Biologie.
2. An jedem Tag habe ich 4 verschiedene Fächer, und zwar nur einmal, und an keinem Tag ist ihre Reihenfolge gleich jener von einem anderen Tag.
3. Niemals habe ich Englisch und Mathematik am gleichen Tag.
4. Habe ich Englischunterricht, so schließt sich unmittelbar Biologie an.
5. Ist an einem Tag aber kein Englischunterricht, so endet der Unterrichtstag stets mit Deutsch.
6. Überdies beginnt jeder Tag mit Französisch, falls ich Deutschunterricht habe.
7. Die ersten drei Unterrichtstage enden mit demselben Fach.
Welchen Stundenplan hat Thomas am Donnerstag ermittelt?

Lösung:

Es gibt für die **erste** Stunde am Donnerstag folgende Möglichkeiten:

MATHEMATIK: Wegen 3. hätte er dann kein Englisch, für die anderen Stunden bleiben nur Biologie, Französisch und Deutsch übrig und nach 2. hat Thomas an jedem Tag genau 4 verschiedene Fächer. Nach 6. beginnt jeder Tag mit Französisch, falls Thomas Deutsch hat. WIDERSPRUCH zur Annahme Mathematik als 1. Stunde!

DEUTSCH: Nach 6. würde für die erste Stunde Französisch folgen. Also ein WIDERSPRUCH zur Annahme Deutsch als 1. Stunde!

ENGLISCH: 3. Kein Mathe, weiter analog zur ersten Erklärung, WIDERSPRUCH!

BIOLOGIE: Da Thomas nach 2. nur verschiedene Fächer hat und nach 4. dem Englischunterricht Biologie folgt, gibt es keinen Englischunterricht mehr, weiter analog zur ersten Erklärung. WIDERSPRUCH !

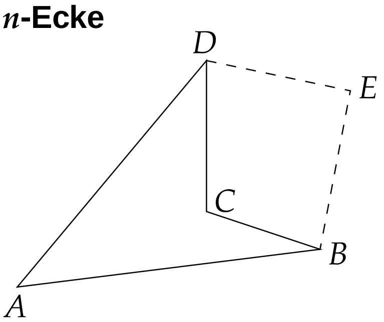
FRANZÖSISCH: **Letzte Möglichkeit**

Nun gibt es nur noch wenige Möglichkeiten für die Stundenpläne (alle Möglichkeiten ohne Englisch bzw. mit Mathe, aber ohne abschließendes Deutsch fallen nach 5. aus): $FEBD, FMBD, FBMD, FDEB$.
Nach 7. fallen auf die ersten drei Wochentage die ersten drei Möglichkeiten und die Lösung für Donnerstag ist:
FRANZÖSISCH - DEUTSCH - ENGLISCH - BIOLOGIE.

Im InterCity
Herr Müller und Frau Schmitz treffen sich im InterCity von Mainz nach Koblenz. Herr Müller sagt: „Ich fahre diese Strecke in diesem Jahr bereits zum 17. Mal.“ Frau Schmitz erwidert: „Ich sogar schon zum 22. Mal.“ Ermittle, wer in Mainz, und wer in Koblenz wohnt!

Lösung:
Da 17 eine ungerade Zahl ist, ist Herr Müller offensichtlich auf der Hinreise, wohnt also (wahrscheinlich) in Mainz. 22 dagegen ist eine gerade Zahl; also ist Frau Schmitz anscheinend auf der Rückreise und wohnt somit in Koblenz.

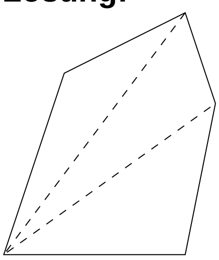
n-Ecke



Bei einem n-Eck ($n \geq 3$) müssen *ausspringende* und können *einspringende* Ecken vorkommen – das Viereck $ABCD$ hat 3 ausspringende Ecken und eine einspringende Ecke (vgl. Figur).
Ein n-Eck nur mit ausspringenden Ecken heißt **konvex** – das Viereck $ABED$ ist konvex (vgl. Figur).

In einem konvexen n-Eck sei der (arithmetische) Mittelwert der n Innenwinkel $165°$.
Wie viele Seiten hat das n-Eck? (H.F.)

Lösung:



Man denke sich von einem Eckpunkt aus das konvexe n-Eck durch diagonale Strecken in Dreiecke zerlegt: man erhält so $n-2$ Dreiecke.
Die Summe s der Innenwinkel des n-Ecks ist dann die Summe der Winkel aller $n-2$ Dreiecke. Somit gilt $s = (n-2) \cdot 180°$. Zugleich ist $s : n = 165°$. Also ist $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 165°$.
Die letzte Gleichung trifft nur zu für $n = 24$. Das konvexe n-Eck hat also 24 Seiten.

Summen
Setze die Berechnung der Summen

$$\begin{array}{lllllllll} 6^0 & + & 6^1 & & & & & = & 7 \\ 6^0 & + & 6^1 & + & 6^2 & & & = & 43 \\ 6^0 & + & 6^1 & + & 6^2 & + & 6^3 & = & 259 \\ \vdots \end{array}$$

fort.
Die Endziffern der 1., der 2., der 3. Summenzahl usw. sind $7, 3, 9$ usw. Wie heißt die Endziffer der 100. Summenzahl. Begründe deine Vermutung!
Bemerkung: $6^0 = 1$ und $6^1 = 6$. (H.F.)
Lösung:
In der Summe $6^0 + 6^1 + \cdots + 6^{100}$ haben die 100 Summanden 6^i alle die Enziffer 6, sobald $i \geq 1$ ist. Man erhält somit die Endziffer der Summenzahl aus $1 + 100 \cdot 6 = 601$. Also ist die gesuchte Endziffer 1.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Fußball - WM 2006

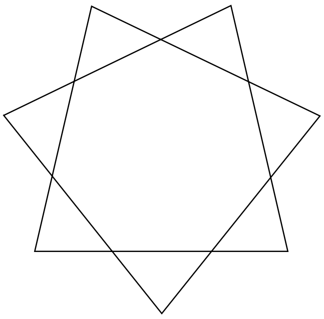
Bei der Fußballweltmeisterschaft 2006 werden 32 Mannschaften teilnehmen. Bis der Weltmeister ermittelt sein wird, werden insgesamt 64 Spiele ausgetragen werden. Wie viele Spiele müssten ausgetragen werden, wenn der Weltfußballverband FIFA die Regeln wie folgt abändern würde:

a) Die Mannschaften spielen jeweils nach dem K.-o.-System, das heißt, wer ein Spiel verliert, scheidet aus.

b) Jede Mannschaft spielt einmal gegen jede andere Mannschaft.

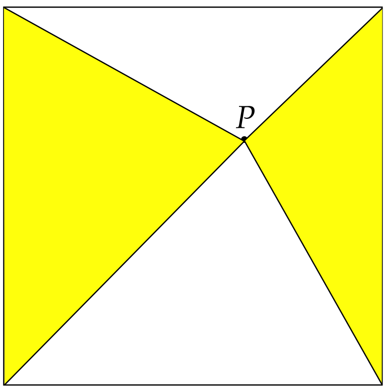
Wie viele Tage würde das WM-Turnier im Falle b) dauern, wenn jeden Tag wegen der Fernsehübertragungen zwei Spiele stattfinden würden? (WK)

Ein magischer Siebenstern



Verteile die 14 aufeinander folgenden Zahlen $495, 496, 497, \dots, 508$ so auf die Eckpunkte der Figur, dass die Summe der vier Zahlen längs jeder der sieben im Stern vorkommenden Strecken jeweils 2006 ist. (H.F.)

Wahr oder falsch?



Mathis behauptet:

a) Wie auch immer man den Punkt P im Innern eines Quadrats wählt, stets gilt: Die schraffierten Dreiecke sind zusammen so groß wie die nicht schraffierten Dreiecke zusammen.

b) Entsprechendes trifft für ein Rechteck zu.

Was hältst du von diesen Behauptungen? (H.F.)

Wortrechnung

Lies den Artikel über Stifel und überlege Dir, wie Du aus „N**UM**ER**U**S PR**IMU**S“ unter Verwendung der Zeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $($, $)$ eine Primzahl machen kannst. (WJB)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Einkauf

Susi kauft ein Päckchen mit zehn Bleistiften, einem Kugelschreiber und einem Füller und bezahlt mit einem 10 €–Schein. Das Rückgeld beträgt $3,46$ €. Der Kugelschreiber kostet $0,40$ € mehr als die zehn Bleistifte, der Füller doppelt so viel wie Beides zusammen. Wieviel kostet der Kugelschreiber? (WJB)

Wer sagt die Wahrheit?

In einem Raum befinden sich drei Männer, die entweder aus TrueCity oder aus LyersTown stammen. Man weiß, dass alle Bürger aus TrueCity immer die Wahrheit sagen, und dass alle Einwohner von LyersTown ständig lügen. Die 3 Männer erzählen nun, woher sie kommen. Dummerweise murmelt der erste Mann so undeutlich, dass er nicht zu verstehen ist. Der zweite sagt: „Der erste hat gesagt, er sei aus TrueCity. Das stimmt, und ich bin auch von dort.“ Der dritte sagt: „Ich komme aus TrueCity, aber die beiden anderen nicht.“

Ermittle, wer ein Wahrheitsliebender aus TrueCity ist und wer ein Lügner aus LyersTown ist!

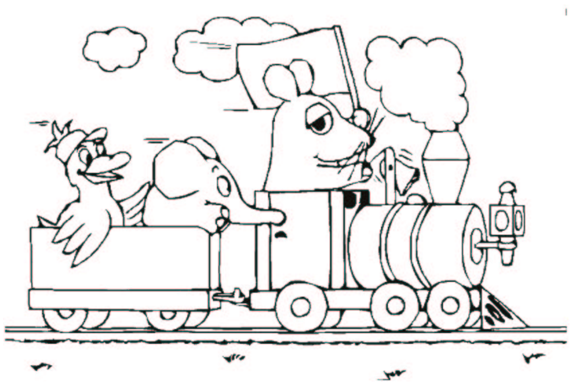
Parallelogramm im Dreieck

Füge einem Parallelogramm einige untereinander kongruente Dreiecke so hinzu, dass ein Dreieck entsteht. Dabei soll die hinzugefügte Fläche genauso groß sein wie die Fläche des Parallelogramms.

(Alia’a Ahmed Doma, 8A, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)

Wie weit sind denn diese Züge voneinander entfernt?

Der InterCity „Pythagoras“ fuhr am 11. Februar von München nach Frankfurt ohne Unterbrechung mit 145 km/h. Der ICE „Archimedes“ fuhr zur gleichen Zeit von Frankfurt nach München ohne Unterbrechung mit 165 km/h. Um 16:43 Uhr trafen sie sich. Welchen Abstand hatten die beiden Züge um 15:43 Uhr?



Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 875. „Magisches“ Sudoku

In folgendem Sudoku sollen *zusätzlich* als Bedingungen erfüllt sein:

(1) Jedes der 3×3-Quadrate ist ein magisches Quadrat, d.h. jede Zeile, Spalte und Diagonale hat die gleiche Summe.

(2) Die Hauptdiagonale des großen Quadrats enthält die Ziffern $1, 2, 3, \ldots 9$ in der richtigen Reihenfolge. Die Nebendiagonale des großen Quadrats enthält die Ziffern $1, 2, 3, \ldots 9$ in beliebiger Reihenfolge.

1								
	2							
		3						
			4					
				5				
					6			
						7		
							8	
								9

(WK)

Aufgabe 876. Die drei Kugeln

In einem total dunklen Raum liegen in einer Schublade 3 rote und 2 blaue Kugeln sowie 1 weiße Kugel. Wenn man 3 Kugeln nacheinander herausnimmt, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass es drei verschiedenfarbige sind?

Malte Meyn, 8. Klasse Waldorfschule Otterberg

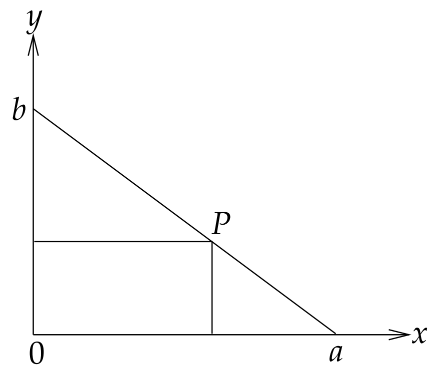
Aufgabe 877. Lauter Stammbrüche

Die Priester-Mathematiker des alten Ägypten trieben Bruchrechnung nur mit Stammbrüchen (einzige Ausnahme: die Bruchzahl $\frac{2}{3}$). Deshalb hätte ihnen die folgende Aufgabe sicher gefallen:

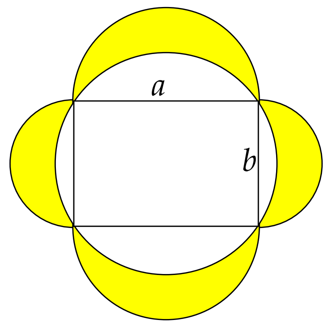
Kannst du zwei verschiedene Stammbrüche $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ angeben, deren (arithmetischer) Mittelwert $\frac{1}{13}$ ist? (H.F.)

Aufgabe 878. Wahr oder falsch?
Wir bezeichnen die Primzahlen nach wachsender Größe mit p_1, p_2, p_3, ... Dann ist das um 1 vermehrte Produkt aller Primzahlen $\leq p_n$, also $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, niemals eine Quadratzahl. (H.F.)

Aufgabe 879.
In ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten a und b sei ein Rechteck einbeschrieben wie abgebildet. Kann man den Punkt P so wählen, dass
a) die Fläche F des Rechtecks maximal wird?
b) der Umfang U des Rechtecks maximal wird?
c) Gib bei gegebener Fläche F den Umfang U an. (WJB)



Aufgabe 880.
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b sowie sein Umkreis. Über jeder Rechtecksseite sei (nach außen hin) ein Halbkreis konstruiert. Kannst Du die Gesamtfläche der vier schraffierten „Sicheln" berechnen? (H.F.)



Aufgabe 881. $\ast$
In der Mitte eines kreisrunden Sees sitzt Max in seinem Paddelboot. Am Ufer steht Fritz, der Max fangen will. Nun ist Fritz (extrem) wasserscheu und wird deshalb stets an Land bleiben. Fritz kann vier Mal schneller laufen als Max paddeln. Andererseits weiß Max auch, dass er an Land viel schneller ist als Fritz, d. h. er muss nur das Ufer an einer Stelle erreichen, an der Fritz noch nicht ist. Wie muss sich Max verhalten, um Fritz zu entkommen? (HJS)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 84

Kl. 8-13

Aufgabe 868. Der Schulweg
Anne benötigt ungefähr 24 Minuten für ihren Schulweg. Als sie sich um 14.15 Uhr auf den Nachhauseweg begibt, ist ihre Mutter bereits von zu Hause losgegangen, um rechtzeitig zum Elternsprechtag in Annes Schule zu erscheinen. Nach 20 Minuten ist sie um 14.25 Uhr und 15 Sekunden schließlich am Schulgebäude angelangt.

Anne und ihre Mutter haben jeweils den gleichen Weg gewählt und sind mit konstanter Geschwindigkeit gegangen. Auf dem Weg liegt ein Tunnel, den die beiden im gleichen Augenblick, jede auf ihrer Seite, erreicht haben. Anne hat den Tunnel $7{,}5$ Sekunden später als ihre Mutter verlassen.

Wann haben beide den Tunnel erreicht? Liegt der Tunnel näher am Schulgebäude oder am Haus der Beiden? (Miriam Menzel, Gymnasium Marienberg in Neuss)

Lösung:

Es gelten die folgenden Formeln zur Berechnung des Weges s, der Geschwindigkeit v und der Zeit t:

$$s = v \cdot t, \qquad v = \frac{s}{t}, \qquad t = \frac{s}{v}.$$

Anne geht mit Geschwindigkeit v_A und benötigt 24 Minuten, die Mutter mit v_M 20 Minuten. Für die Gesamtstrecke s gilt also:

$$s = v_A \cdot 24 = v_M \cdot 20 \iff v_A = \frac{5}{6} v_M$$

Hat Anne für die Wegstrecke s_1 die Zeit t gebraucht, so gilt $s_1 = v_A \cdot t$. Die Mutter ist 9 Minuten, 45 Sekunden vor Anne losgegangen. In der Zeit t hat sie demnach den Weg $s_2 = v_M \cdot (t + 9{,}75)$ zurückgelegt.

Für die Gesamtstrecke $s = s_1 + x + s_2$ folgt demnach: $s = v_A \cdot t + x + v_M \cdot (t + 9{,}75)$.

Zur Durchquerung des Tunnels benötigt die Mutter die Zeit $t_T = \frac{x}{v_M}$, also $x = t_T \cdot v_M$.

Da Anne den Tunnel $7{,}5$ Sekunden (also $0{,}125$ Minuten) nach ihrer Mutter verlässt, gilt: $t_T + 0{,}125 = \frac{x}{v_A}$, also $x = (t_T + 0{,}125) \cdot v_A$.

Gleichsetzen von x ergibt: $t_T \cdot v_M = (t_T + 0{,}125) \cdot v_A$. Mit $v_A = \frac{5}{6} v_M$ folgt:

$$\begin{aligned}
& t_T \cdot v_M = (t_T + 0{,}125) \cdot \frac{5}{6} v_M && \Big| : v_M \\
\Rightarrow \quad & t_T = \frac{5}{6} t_T + \frac{5}{6} \cdot 0{,}125 && \Big| - \frac{5}{6} t_T \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{6} t_T = \frac{5}{48} && \Big| : \frac{1}{6} \\
\Rightarrow \quad & t_T = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Die Mutter benötigt demnach zum Durchqueren des Tunnels $\frac{5}{8}$ Minuten ($37{,}5$ Sekunden) und Anne folglich $(37{,}5 + 7{,}5)$ Sekunden $= 45$ Sekunden.

Nun kann auch das x in der Gleichung für die Gesamtstrecke eingesetzt werden:

$$s = v_A \cdot t + \frac{5}{8} \cdot v_M + v_M \cdot (t + 9{,}75)$$

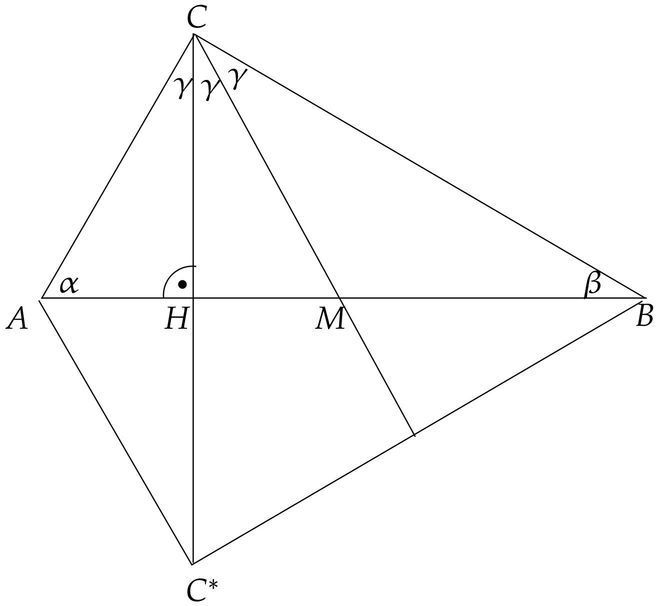
Mit $s = v_M \cdot 20$ und $v_A = \frac{5}{6} v_M$ folgt:

$$\begin{aligned}
& v_M \cdot 20 = \frac{5}{6} v_M \cdot t + \frac{5}{8} \cdot v_M + v_M \cdot (t + 9{,}75) && \Big| : v_M \\
\Rightarrow \quad & 20 = \frac{5}{6} t + \frac{5}{8} + t + 9{,}75 = \frac{11}{6} \cdot t + \frac{83}{8} && \Big| - \frac{83}{8} \\
\Rightarrow \quad & \frac{77}{8} = \frac{11}{6} \cdot t && \Big| : \frac{11}{6} \\
\Rightarrow \quad & t = \frac{21}{4} = 5{,}25
\end{aligned}$$

Anne hat demnach für die Wegstrecke s_1 5 Minuten und 15 Sekunden benötigt. Sie erreicht folglich den Tunneleingang um **14.20 Uhr und 15 Sekunden** – ebenso wie ihre Mutter auf der anderen Seite.
Anne läuft $5{,}25$ Minuten bis zum Eingang des Tunnels, die Mutter benötigt 15 Minuten (14.05 Uhr und 15 Sekunden bis 14.20 Uhr und 15 Sekunden). Demnach liegt der Tunnel (die Mutter läuft ja auch noch schneller als ihre Tochter) **näher am Schulgebäude** als am Haus. Man kann berechnen: $s_2 = \frac{24}{7} s_1$ (wie?)

Aufgabe 869. Winkelbestimmung
Im Dreieck ABC werde der Winkel bei C von der Seitenhalbierenden CM und der Höhe CH in drei gleich große Teilwinkel geteilt.
Bestimme die drei Winkel des Dreiecks ABC. (H.F.)

Lösung:
Das Dreieck AMC ist gleichschenklig, weil die Strecke CH Höhe und zugleich Winkelhalbierende im $\triangle AMC$ ist. Also ist $|AH| = |HM| = \frac{1}{4}|AB|$ wegen $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$.



Wir spiegeln C an AB in den Punkt C^*. Das Dreieck BCC^* ist gleichschenklig und M ist sein Schwerpunkt, da M die Strecke BH im Verhältnis $2:1$ von B aus teilt.
Also ist die Verlängerung von CM Seitenhalbierende im Dreieck BCC^*. Da CM gleichzeitig Winkelhalbierende in diesem Dreieck ist, ist $\triangle BCC^*$ gleichschenklig mit $|CC^*| = |CB|$. Wegen $|CB| = |C^*B|$ ist $\triangle BCC^*$ sogar gleichseitig. Damit gilt $2\beta = 60°$, so dass $\beta = 30°$ ist. Ferner ist $2\gamma = 60°$, also $3\gamma = 90°$, und schließlich ist $\alpha = 60°$.

Aufgabe 870. Gerechte Zinsen
Wiebke, Ingrid und Anna bewohnen eine WG (Wohngemeinschaft). Wiebke ist am 1. Oktober 2002 eingezogen, Ingrid am 1. September 2003 und Anna am 1. Januar 2004. Jede der drei Damen hat bei Einzug eine Kaution von 250 € auf ein Sparbuch des Vermieters gezahlt, dessen Zinsen zum 31. Dezember jeden Jahres gutgeschrieben werden. Als alle drei gleichzeitig am 30. Juni 2005 ausziehen und das Sparbuch aufgelöst wird, befinden sich auf dem Sparbuch $780{,}83$ €. Leider hat der ansonsten sehr nette Vermieter keine Ahnung, wie hoch der Zinssatz ist. „Macht nichts“, sagt Ingrid, „wenn wir annehmen, dass der Zinssatz konstant war, bekommt …“ Ja, wie viel bekommt Wiebke, wie viel Ingrid und wie viel Anna? (VB)
Hinweis: Falls Du für den Zinssatz eine Gleichung findest, für die Du kein Lösungsverfahren kennst, versuche die Lösung zu raten oder benutze ein Computeralgebrasystem.

Lösung:
Sei x der Zinssatz in Prozent. Dann ist Wiebkes Beitrag zum Sparbuch:

am 31.12.2002: $250 \cdot \left(1 + \frac{x}{100} \cdot \frac{3}{12}\right) = 250 \cdot \left(1 + \frac{x}{400}\right)$,

am 31.12.2003: $250 \cdot \left(1 + \frac{x}{400}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$,

am 31.12.2004: $250 \cdot \left(1 + \frac{x}{400}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$,

am 30.06.2005: $250 \cdot \left(1 + \frac{x}{400}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{200}\right)$.

Ingrids Beitrag zum Sparbuch beträgt $250 \cdot \left(1 + \frac{x}{300}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{200}\right)$,
und Annas Beitrag ist $250 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{200}\right)$.
Setzen wir $y = \frac{x}{100}$, erhalten wir nach Addition

$$250 \cdot (1 + y) \cdot \left(1 + \frac{y}{2}\right) \cdot \left(3 + \frac{19}{12}y + \frac{y^2}{4}\right) = 780,83.$$

Als einzige positive Lösung ergibt sich $y = 0,019999\ldots$, also war der Zinssatz 2 Prozent. (Wer das wirklich numerisch bestimmen will, tut sich natürlich schwer. Man kann entweder ein Computeralgebrasystem benutzen oder den Zinssatz raten und einsetzen.) Wiebke erhält $264,01$ €, Ingrid $259,27$ € und Anna $257,55$ €.

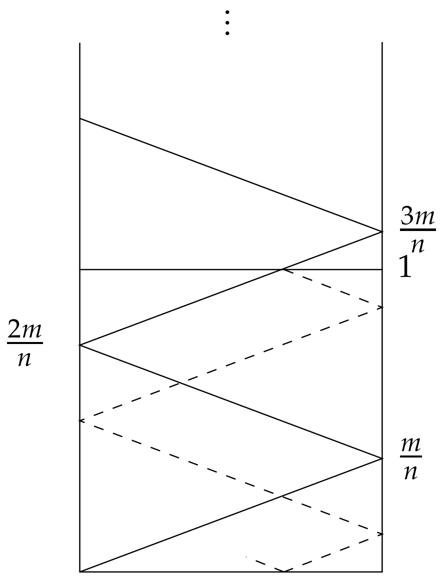
Aufgabe 871. Das Problem der Ziegenhirten
Die beiden Hirten A und B aus einer entlegenen Ecke Innerasiens verkaufen ihre Ziegenherde, die knapp unter 100 Tieren zählt. Für jede Ziege erhalten sie 7 Mal so viele Dirham wie Tiere in der Herde sind. Da A und B nicht dividieren können, lassen sie sich den Verkaufserlös in 100-Dirhamscheinen und den weniger als 100 Dirham betragenden Rest in 2-Dirhammünzen auszahlen, und dann verteilen sie das Geld so: A nimmt einen Schein, dann nimmt B einen Schein, usw. Den letzten Schein erhält A und B bekommt den Rest, der weniger als 20 Dirham beträgt. Wie viele Dirham erhält A, wie viele B? (H.F.)

Lösung: Die Anzahl der Ziegen sei z; es ist $z < 100$. Eine Ziege kostet $7z$ und die ganze Herde kostet $z \cdot 7z = 7z^2$. Es sei nun s die Anzahl der $100-$Dirhamscheine und m die Anzahl der 2-Dirhammünzen. Da A den letzten Schein nimmt, ist s ungerade. Außerdem muss $1 \leq m < 10$ gelten. Damit ist
$(*)\quad 7z^2 = 100s + 2m$.
Hieraus folgt: $7z^2$ ist gerade, also ist z^2 und daher auch z gerade; also ist z in der Menge $98, 96, 94, \ldots$ zu suchen. Für $z = 98$ ist $7z^2 = 67228$, also $s = 672$ und $m = 14$. Daher kommt $z = 98$ nicht als Lösung in Frage. Für $z = 96$ ist $7z^2 = 64512$, so dass $s = 645$ und $m = 6$ ist. Danach erhalten $A: \ 644 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 + 100 = 32300$ Dirham und $B: \ 644 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 + 12 = 32212$ Dirham.
Die z-Werte $94, 92, 90, 88$ erfüllen $(*)$ nicht; die $z-$Werte $86, 84, 82, \ldots, 2$ sind nicht als „knapp unter 100“ zu bezeichnen. Damit ist $z = 96$ die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 872. Reflexionen
Ein Lichtstrahl aus der linken unteren Ecke eines Quadrats (der Seitenlänge 1) treffe die rechte Seite in der Höhe $h = \frac{m}{n}$ (m, n teilerfremde natürliche Zahlen, $m < n$). Er wird an den Quadratseiten so lange reflektiert, bis er in einer der Ecken des Quadrats ankommt.

a) Zeige, dass der Lichtstrahl wirklich in einer Ecke ankommt.
b) Berechne die Zeit $T(m,n)$, die der Lichtstrahl dafür benötigt. (WJB)

Lösung:
a) Wir zeichnen zunächst den Weg des Lichtstrahls zwischen den (verlängerten) linken und rechten Seiten des Quadrats:



Nach n Schritten trifft er zum ersten Mal eine der Seiten auf ganzzahliger Höhe, nämlich $n\frac{m}{n} = m$. Diesen Lichtweg spiegeln wir jetzt jedes Mal, wenn er eine der waagrechten Quadratseiten trifft. Aus dem ganzzahligen Wert m wird dabei das Treffen einer Ecke.

b) Die Länge des Gesamtwegs ist das n-fache des ersten Wegabschnitts, also

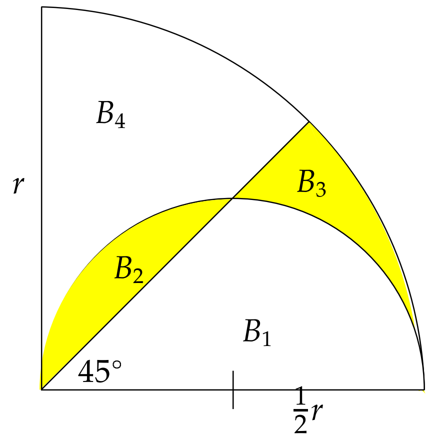
$$n\sqrt{1^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2} = \sqrt{m^2+n^2};$$

die dafür benötigte Zeit ist also

$$T(m,n) = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{c},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Sie hat im Vakuum einen Wert von $299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$, bzw. etwas mehr als eine Milliarde km/h ($1\,079\,252\,849\,\mathrm{km/h}$).

Aufgabe 873. Ist B_2 größer als B_3 ?
Im Viertelkreis vom Radius r sei ein Halbkreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$ und die Halbierende des Viertelkreises wie in nebenstehender Figur gezeichnet. Mit $B_1, \dots, B_4$ bezeichnen wir die entstehenden Teilflächen. Untersuche, welche der drei Aussagen richtig ist: $B_2 < B_3$, $B_2 = B_3$, $B_2 > B_3$. (H.F.)



Lösung:
Der Viertelkreis hat die Fläche $A_1 = \frac{1}{4}\pi r^2$; der Halbkreis hat die Fläche

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{1}{8}\pi r^2.$$

Es gilt also $A_2 = \frac{1}{2}A_1$. Daraus folgt wegen $B_1 + B_2 = A_2$ und $B_1 + B_3 = \frac{1}{2}A_1$, dass $B_2 = B_3$ ist.

Aufgabe 874. Niemals eine Quadratzahl
a) Wann sind zwei unmittelbar aufeinander folgende ganze Zahlen beide Quadratzahlen?
b) Zeige: Das Produkt aus vier unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist niemals eine Quadratzahl. (H.F.)

Lösung:

a) Sind n und $n+1$ mit $n \geq 0$ beide Quadratzahlen, so gibt es ganze Zahlen k und l mit $0 \leq k < l$ und $n = k^2$, $n+1 = l^2$. Es folgt: $1 = l^2 - k^2 = (l-k)(l+k)$. Also ist $l+k$ ein Teiler von 1, somit $l+k = 1$, mithin $k = 0$, $l = 1$. Also sind 0 und 1 die einzigen unmittelbar aufeinander folgenden Quadratzahlen.

b) Annahme: Das Produkt $P = n(n+1)(n+2)(n+3)$ sei eine Quadratzahl für eine natürliche Zahl n.

Zunächst ist $P = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$.

Nun ist aber $P + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$ auch eine Quadratzahl, also muss wegen a) $P = 0$ und dann auch $n = 0$ sein, Widerspruch!

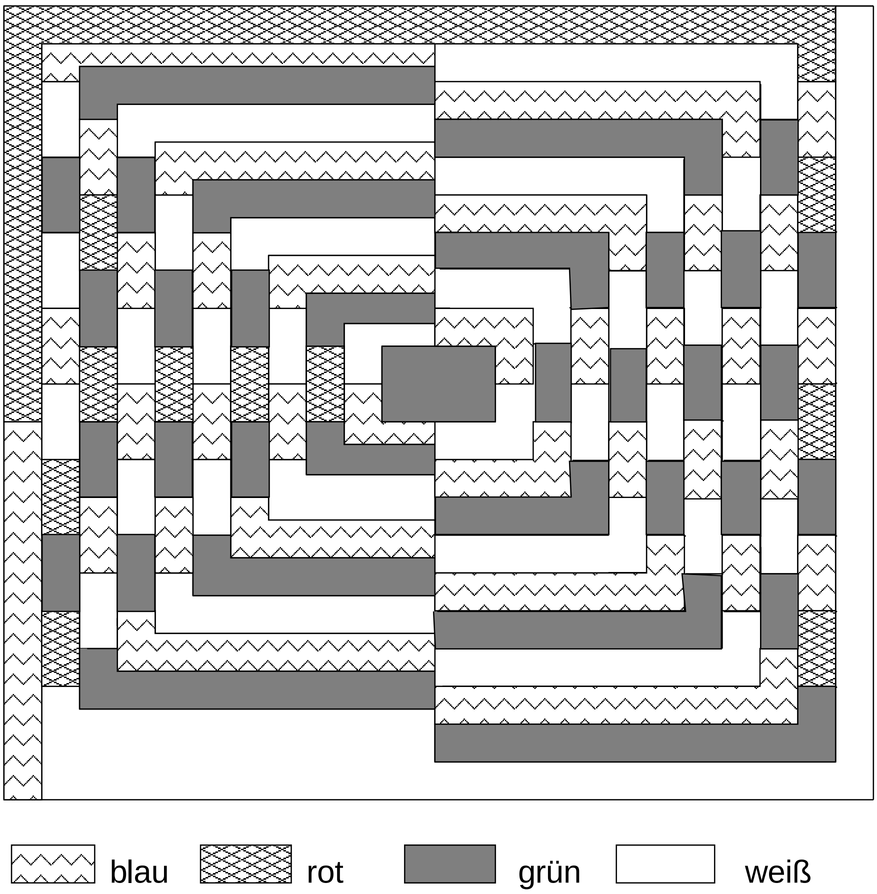
Wer forscht mit?

Untersuche, welche regelmäßigen n-Ecke, $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, so in ein ganzzahliges Gitter gelegt werden können, dass die Eckpunkte sämtlich Gitterpunkte sind. Hierbei ist ein *ganzzahliges Gitter* die Menge aller Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. (H.F.)

Eure Ergebnisse könnt Ihr bis zum 15. September 2006 an die MONOID-Redaktion einsenden. Im MONOID-Heft 88 werden wir diese veröffentlichen; außerdem werden sie bewertet.

* * * * * * *

Lösung der „besonderen“ Aufgabe



Zerlegung ganzzahliger Würfel in ganzzahlige Teilwürfel

Von Hartwig Fuchs

Die Aufspaltung eines ganzzahligen Würfels – das ist ein Würfel mit ganzzahligen Seitenlängen – in kleinere ganzzahlige Würfel ist eine so elementare und durchsichtige Aktion, dass man sich fragen wird: Wo liegt das Problem?

Tatsächlich sind auch die ersten Würfelzerlegungen, die wir beschreiben werden, ganz unproblematisch.

(1) Zerlegung eines Würfels in lauter gleich große Teilwürfel

Unter einem Würfel verstehen wir im folgenden stets einen ganzzahligen Würfel. Hat ein Würfel die ganzzahlige Seitenlänge n, dann nennen wir ihn einen n^3-*Würfel.*

Es ist anschaulich klar, dass gilt:

- Jeder n^3-Würfel mit $n > 1$ ist in n^3 1^3-Würfel zerlegbar. Natürlich ist ein 1^3-Würfel nicht in ganzzahlige Teilwürfel zerlegbar.

Die Aufspaltung eines n^3-Würfels, $n > 1$, in lauter gleich große m^3-Würfel mit $2 \leq m < n$ klappt dagegen nicht bei jeder beliebigen Kantenlänge n.

- Ist n eine Primzahl ≥ 3, dann kann ein n^3-Würfel nicht in lauter gleichgroße m^3-Würfel mit $2 \leq m < n$ zerlegt werden.

Jedoch ist für jede Nichtprimzahl $n \geq 4$ der n^3-Würfel stets zerlegbar.

- Es sei $n \geq 4$ und $n = s \cdot t$, s und t echte Teiler von n. Dann kann ein n^3-Würfel in s^3 gleich große t^3-Würfel zerlegt werden.

Beispiel:

Ein 36^3-Würfel soll in gleich große Teilwürfel zerlegt werden. Welche solcher Zerlegungen gibt es?

Kantenlänge eines Teilwürfels	1	2	3	4	6	9	12	18
Anzahl der Teilwürfel	36^3	18^3	12^3	9^3	6^3	4^3	3^3	2^3

(2) Zerlegung eines Würfels in Teilwürfel, die nicht alle gleich groß sind

Es gibt eine unüberschaubare Vielfalt von Möglichkeiten einer Würfelzerlegung (2). Wir verdeutlichen dies an zwei leicht abwandelbaren Beispielen.

- Jeder n^3-Würfel mit $n \geq 3$ ist in einen $(n-1)^3$-Würfel und in $n^3 - (n-1)^3$ 1^3-Würfel zerlegbar.
- Es sei $n \geq 3$ und k sei die größte Zahl, so dass $1 + 2 + 3 + \ldots + k \leq n$ ist. Dann ist ein n^3-Würfel in einen 1^3-Würfel, einen 2^3-Würfel, …, einen k^3-Würfel und der Restkörper z. B. in lauter 1^3-Würfel aufteilbar – vgl. Bild 1 mit $n = 11, k = 4$.

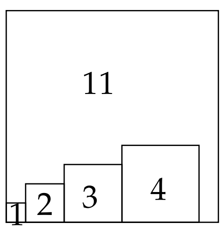


Bild 1

▼ Es ist uns nicht bekannt, ob bereits versucht wurde, einen systematischen Überblick über alle Zerlegungen vom Typ (2) eines n^3-Würfels, $n \geq 3$, zu gewinnen.

Der nachfolgende Aufteilungstyp (3) führt uns unmittelbar in ein Gebiet unbeantworteter Fragen und undurchführbarer Zerlegungen.

(3) Zerlegung eines Würfels derart, dass auf der Würfelbasis lauter verschieden große Teilwürfel aufsitzen

Es ist offenbar so: Nur wenn das Basisquadrat eines Würfels in paarweise verschieden große Teilquadrate zerschnitten werden kann, dann lässt sich für den Würfel selbst eine Zerlegung vom Typ (3) angeben. Es ist nicht leicht, Quadrate zu finden, die man in lauter verschieden große Teilquadrate zerschneiden kann. Erst seit 1935 weiß man, dass es solche Quadrate überhaupt gibt, und es dauerte dann noch 53 Jahre, bis man einige dieser Quadrate aufspürte.

Das kleinste dieser Quadrate hat die Seitenlänge 112, und es kann in 21 Teilquadrate mit den Seitenlängen $m = 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42$ und 50 zertrennt werden – vgl. MONOID 74.
Also gilt:

- Der kleinste Würfel, der eine Zerlegung vom Typ (3) gestattet, hat die Seitenlänge 112. Er ist aufteilbar in 21 m^3-Würfel, $m = 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42$ und 50 (s.o.) – die auf der Basis des 112^3 Würfels sitzen – und z.B. in $112^3 - (2^3 + 4^3 + 6^3 + 7^3 + \ldots + 50^3) = 974\,576 \quad 1^3$-Würfel.
- ▼ Man kennt kein Kriterium, mit dem man für ein $n > 112$ entscheiden kann, ob ein Quadrat der Seitenlänge n in lauter verschieden große Teilquadrate zerteilbar ist oder nicht.

  Dementsprechend ist auch die Entscheidung offen, für welche n^3-Würfel es eine Zerlegung (3) gibt und für welche nicht.

(4) Zerlegung eines Würfels in lauter verschieden große Teilwürfel

Das magere Ergebnis des vorangehenden Abschnitts könnte dazu verleiten, bei der Frage nach Würfelzerlegungen des Typs (4) mit einer ähnlich bruchstückhaften Antwort wie bei (3) zu rechnen.

Tatsächlich aber gelingt es, das hier vorliegende Zerteilungsproblem (4) vollständig zu lösen – allerdings mit einem bemerkenswerten Ergebnis:

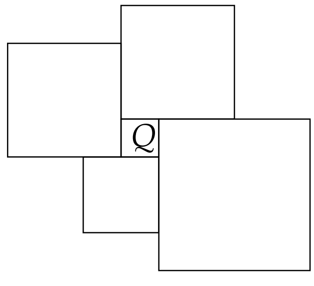
- Kein n^3-Würfel mit $n > 1$ kann in lauter verschieden große Teilwürfel zerlegt werden.

Nachweis:

Zunächst eine Bezeichnung: Eine Zerlegung eines Quadrats in lauter verschieden große Teilquadrate nennen wir *vollständig*, wenn sich unter den Teilquadraten keines mehr befindet, das selbst in lauter verschieden große Teilquadrate zerschnitten werden kann. Das Quadrat mit der Seitenlänge 112 ist das kleinste vollständig zerlegbare Quadrat.

(a) Wenn das Basisquadrat des n^3-Würfels keine vollständige Zerlegung zulässt, dann hat das Aufteilungsproblem (4) keine Lösungen.

(b) Nun sei das Basisquadrat des n^3-Würfels vollständig zerlegbar, und es sei Q das kleinste Quadrat bei dieser Zerlegung; die Seitenlänge von Q sei k. Dann sitzt der zu Q gehörige k^3-Würfel inmitten der Basisfläche des n^3-Würfels[1] und ist ringsum von größeren Würfeln umgeben. Diese Würfel bilden einen „Schacht" mit dem Quadrat Q als Boden.



[1]Finde selbst heraus, warum der k^3-Würfel nicht an einer Seite oder in einer Ecke des n^3-Würfels liegen kann – Antwort weiter hinten in diesem Heft.

In diesen Schacht passen entweder k^3-Würfel – die allerdings keine Lösung für (4) ergeben – oder noch kleinere Würfel mit Seitenlängen $< k$. Sind auch nur zwei dieser kleineren Würfel gleich groß, hat man wieder keine Lösung für (4). Wenn aber alle kleineren Würfel verschieden groß sind, dann sitzen auf dem Boden Q des Schachts lauter verscheiden große Würfel. Daraus folgt, dass Q in lauter verschieden große Quadrate zerlegbar sein müsste. Das aber steht im Widerspruch dazu, dass gerade dies für Q nicht der Fall ist.
Somit gilt: Der Schacht ist nicht mit lauter verschieden großen Würfeln zu füllen.
Das hat zusammen mit (a) die Konsequenz: Der Zerlegungsauftrag (4) ist nicht durchführbar; was zu zeigen war.

Punktspiegelungen

Von Edzard Salow

In einem beliebigen Viereck bilden die Mittelpunkte der Seiten ein Parallelogramm.

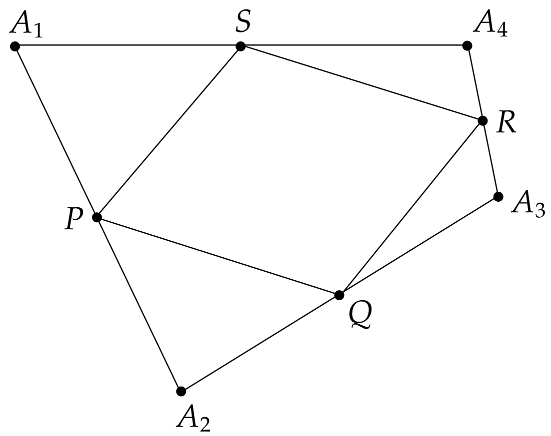


Abb. 1 Das Parallelogramm der Seitenmitten

Nach dem Strahlensatz sind nämlich die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{SR}$ parallel zur Diagonalen $\overline{A_1A_3}$ und halb so lang wie diese Diagonale.

Der Seitenmitten-Satz kann mit Hilfe von Punktspiegelungen neu interpretiert werden. Unter der Punktspiegelung an einem Punkt P der Zeichenebene verstehen wir eine Abbildung (d. h. eine Zuordnung), die in folgender Weise von einem beliebigen Punkt A_1 zu einem Punkt A_2 führt: *Man versetzt den Pfeil von A_1 nach P ohne Veränderung seiner Richtung so, dass der Anfangspunkt des Pfeils bei P liegt; dann gibt die neue Spitze den Bildpunkt A_2 an.*

Dieser Zusammenhang soll symbolisch durch $A_1 \underset{P}{\rightarrow} A_2$ ausgedrückt werden.

Das Zeichen $\underset{P}{\rightarrow}$ steht hier für die Punktspiegelung an P. Wenn man nach Anwendung der Punktspiegelung an P auf A_1 den Bildpunkt A_2 anschließend an Q spiegelt, ergibt sich A_3. Die Abbildung, die so von einem Punkt A_1 zu A_3 führt, wird als Verkettung der Spiegelungen an P und an Q bezeichnet. Ich verwende dafür das Symbol $\underset{P}{\rightarrow}\underset{Q}{\rightarrow}$. Ist nun B_3 ein Punkt, der durch Anwendung von $\underset{P}{\rightarrow}\underset{Q}{\rightarrow}$ auf irgendeinen anderen Punkt B_1 entsteht, dann ist der Pfeil von B_1 nach B_3 parallel zum Pfeil von A_1 nach A_3 und gleich lang; denn beide Pfeile sind parallel zum Pfeil von P nach Q und genau doppelt so lang. Die Abbildung $\underset{P}{\rightarrow}\underset{Q}{\rightarrow}$ heißt ‚Verschiebung' oder ‚Translation'. Im Fall $P = Q$ ergibt sich hier die Abbildung, die jeden Punkt auf sich selbst abbildet, die sogenannte ‚identische Abbildung'.

Wir schalten nun die drei Punktspiegelungen an P, Q und R hintereinander:

$$A_1 \underset{P}{\rightarrow}\underset{Q}{\rightarrow}\underset{R}{\rightarrow} A_4$$

Abb. 1 zeigt, dass man von A_1 nach A_4 in *einem* Schritt durch Anwendung der Punktspiegelung an S gelangt. Die Wirkung der Verkettung der drei Punktspiegelungen an P, Q und R ist also die gleiche wie die der Punktspiegelung an S allein, wobei S der vierte Parallelogramm-Punkt zu P, Q und R ist. In der Mathematik spricht man von Gleichheit zweier Abbildungen, wenn jedem Ausgangspunkt (Urbildpunkt) von beiden Abbildungen der gleiche Endpunkt (Bildpunkt) zugeordnet wird:

$$\underset{P}{\rightarrow}\underset{Q}{\rightarrow}\underset{R}{\rightarrow} \quad = \quad \underset{S}{\rightarrow}$$

Diese Gleichung wird als ‚Satz von den drei Spiegelungen' bezeichnet.

Im Folgenden soll dargestellt werden, dass dieser Satz auch in einem ganz anderen Zusammenhang auftritt. Wir bilden jetzt nicht beliebige Punkte der Zeichenebene ab, sondern beschränken uns auf die Punkte, die auf dem Graphen der Funktion $f : x \mapsto 0,1x^3 - 2x$ liegen. Wir wählen die Punkte P, Q, R und A_1 beliebig auf dem Graphen (s. Abb. 2). Unter der Spiegelung an dem Punkt P verstehen wir die Abbildung, die in folgender Weise vom Ausgangspunkt A_1 zum Bildpunkt A_2 führt:

Ist $A_1 \neq P$, sei g die Verbindungsgerade von A_1 mit P; andernfalls sei g die Tangente in P. Dann ist A_2 der von A_1 und P verschiedene Schnittpunkt von g mit dem Graphen von f, wenn es ihn gibt; andernfalls ist A_2 gleich P oder gleich A_1, je nachdem ob g den Graphen in P oder in A_1 berührt.

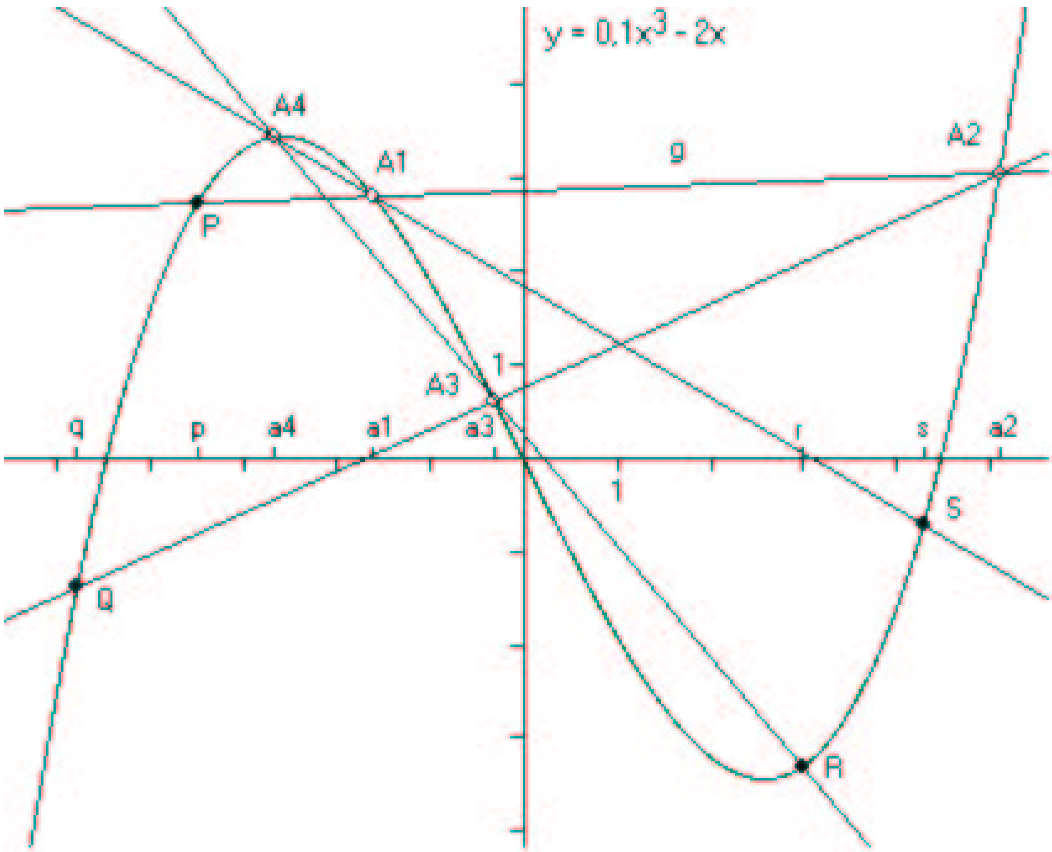


Abb. 2 Der Satz von den drei Spiegelungen beim Graphen von f

Wie bei der in Abb. 1 behandelten Punktspiegelung liegt A_2 auf einer Geraden durch P und A_1. Da aber A_2 auch auf dem Graphen liegen muss, stimmen hier die Abstände von A_1 zu P und von P zu A_2 im Allgemeinen nicht überein. Um diese Spiegelung von der üblichen Punkt-Spiegelung zu unterscheiden, bezeichne ich sie als ‚Euler-Spiegelung' nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783).

Abb. 2 zeigt, wie man von A_1 über A_2 und A_3 zu einem Punkt A_4 gelangt. Wenn nun die Verkettung der Euler-Spiegelungen an P, Q und R wieder eine Euler-Spiegelung ist, dann muss es die Euler-Spiegelung am Punkt S sein, der sich ergibt, wenn man die Verbindungsgerade von A_1 und A_4 mit dem Graphen von f schneidet.

Die Besonderheit von Abb. 1 beruht darauf, dass die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{SR}$ parallel zur Strecke $\overline{A_1A_3}$ verlaufen und halb so lang sind. In Abb. 2 erkennt man einen entsprechenden Zusammenhang, wenn man die x-Werte der markierten Punkte des Graphen ansieht. Wir bezeichnen die x-Werte von $P, Q, R, \ldots$ mit den entsprechenden kleinen Buchstaben $p, q, r, \ldots$. Dann gilt:

$$(1) \qquad p - q = a_3 - a_1 = s - r$$

Wenn dies nachgewiesen werden kann, dann ist der Satz von den drei Spiegelungen gezeigt, denn dann hängt die Lage von S nur von P, Q und R ab, nicht aber von A_1. Das bedeutet, dass durch das Verrücken von A_1 auf dem Graphen von f bei unveränderten Punkten P, Q und R zwar A_2, A_3 und A_4 verändert werden, nicht aber S.

Zum Beweis von (1) benutzen wir den Satz von Vieta (1540-1603). Dieser Satz ist häufig als eine Aussage über die Lösungen einer quadratischen Gleichung bekannt. Er gilt aber entsprechend auch für eine ganzrationale Gleichung dritten Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ein Spezialfall des Satzes von Vieta besagt:

Wenn x_1, x_2 und x_3 drei verschiedene Lösungen der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sind, dann ist

$$(2) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}.$$

Skizze eines Beweis von (2): Die Gleichung

$$(3) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

ist nicht nur für einzelne x-Werte wahr, sondern für alle reellen Zahlen x. Man erkennt dies, indem man den Term links vom Gleichheitszeichen erst durch $(x - x_1)$ und das Ergebnis durch $(x - x_2)$ teilt. Der Rest ist bei dieser Polynom-Division jeweils 0, da x_1 und x_2 Nullstellen von $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sind. Wenn man nun die rechte Seite von (3) ausmultipliziert, ergibt sich:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + a \cdot (-x_1 - x_2 - x_3)x^2 + a \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - ax_1x_2x_3$$

Ein Vergleich der Vorzahlen von x^2 links und rechts vom Gleichheitszeichen zeigt dann (2).
Auch wenn die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nicht drei verschiedene Lösungen hat, kann (2) sinnvoll sein. Wenn nämlich der Graph von $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ die x-Achse bei der Nullstelle nicht kreuzt sondern berührt, so nennt man die Berührstelle ‚doppelte' oder ‚dreifache' Nullstelle und setzt dann bei (2) auf der linken Seite diese Nullstelle mehrfach ein.

Wir wenden jetzt (2) auf die Gleichung $f(x) = mx + b$ an, mit der die Schnittstellen einer Geraden $y = mx + b$ mit dem Graphen von $f : x \mapsto 0{,}1x^3 - 2x$ berechnet werden. Eine äquivalente Umformung ergibt $0{,}1x^3 - (2+m)x - b = 0$. Da hier x^2 nicht vorkommt, kann man sich $0 \cdot x^2$ hinzudenken. Deshalb folgt aus (2), dass für jede Gerade, die bei der Konstruktion einer Euler-Spiegelung eine Rolle spielt, die Summe der Schnittstellen gleich Null ist. Darum ist $a_1 + p + a_2 = 0$ und $a_3 + q + a_2 = 0$. Daraus folgt $p - q = a_3 - a_1$. Entsprechend kann man $s - r = a_3 - a_1$ zeigen. Damit ist der Satz von den drei Spiegelungen beim Graphen von f bewiesen.

Der Satz kann ebenso für andere ganzrationale Funktionen dritten Grades gezeigt werden. Er gilt aber noch für weitere Funktionen, z. B. für die Funktion $h : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, wobei man den Funktionsgraphen durch einen ‚unendlich fernen' Punkt auf der x-Achse ergänzt. Der Beweis muss dann aber abgewandelt werden. Denn die Rolle der Differenz $p - q$ von x-Werten in (1) wird hier von dem Integral $\displaystyle\int_q^p h(x)dx$ übernommen.

Für die Funktionen $j : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ und $k : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ gilt der Satz von den drei Euler-Spiegelungen ebenfalls. Zum Beweis sieht man sich das Integral $\displaystyle\int_q^p j(x)dx$ an, merkwürdigerweise auch bei der Funktion k.

Die Definition der Euler-Spiegelung ist bei allen Kurven anwendbar, bei denen jede Sekante, die keine Tangente ist, die Kurve in genau drei Punkten schneidet. Dabei wird unter einer Sekante eine Gerade verstanden, die die Kurve in mindestens zwei Punkten schneidet. Die Kurven mit der Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ gehören zum Beispiel dazu. In dem unten angegebenen MONOID-Artikel [1] wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser Kurven sehr große natürliche Zahlen in Faktoren zerlegen kann. Die Kurven werden ‚elliptisch' genannt, obwohl sie wenig mit Ellipsen zu tun haben. Man wird bei diesen Kurven auf das sogenannte ‚elliptische Integral' $\displaystyle\int_q^p \frac{1}{\sqrt{x^3+ax+b}}dx$ geführt, für das Leonhard Euler wichtige Sätze bewiesen hat. Darum wurde von mir die Bezeichnung ‚Euler-Spiegelung' gewählt.

Bei den elliptischen Kurven definiert man eine Addition auf der Menge der Kurvenpunkte in folgender Weise:

Es wird ein Kurvenpunkt Q beliebig gewählt. Dann soll die Summe zweier Kurvenpunkte P und R der Punkt S sein, für den $\underset{P}{\to}\underset{Q}{\to}\underset{R}{\to} = \underset{S}{\to}$ gilt.

Bei dieser Definition ist Q das Nullelement. In [1] wird ein unendlich ferner Punkt für Q eingesetzt. Auch für die Punkte des Graphen von f in Abb. 2 kann man eine Addition so definieren. Nimmt man dort für Q den Ursprung, so hängt die Addition auf der Punktmenge eng mit der Addition der x-Werte zusammen. Für $q = 0$ folgt aus (1) nämlich $p + r = s$.

[1] de Jong, Theo, Lenstras Elliptische Kurven-Methode, Monoid 76, Dezember 2003

Hinweis der Redaktion: Die Euler-Spiegelung lässt sich sehr gut mit dem System GeoGebra nachbilden; insbesondere ist die Beziehung (1) und die Invarianz der Lage von S bei festen Punkten P, Q, R direkt zu überprüfen. (`www.geogebra.at`)

Bundeswettbewerb Mathematik 2006

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1
Man finde zwei aufeinander folgende positive ganze Zahlen, deren Quersummen beide durch 2006 teilbar sind.

Lösung Die beiden aufeinander folgenden Zahlen

$$\underbrace{11\cdots1}_{\text{2005-mal}}0\underbrace{99\cdots9}_{\text{223-mal}} \qquad \text{bzw.} \qquad \underbrace{11\cdots1}_{\text{2006-mal}}\underbrace{00\cdots0}_{\text{223-mal}}$$

haben die Quersumme

$$2005\cdot 1 + 223\cdot 9 = 2005 + 2007 = 2\cdot 2006 \qquad \text{bzw.} \qquad 2006 \ ,$$

beide Quersummen sind also durch 2006 teilbar. □

Aufgabe 2
Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ gilt.

Lösung
Beweis (durch Widerspruch): Es seien x und y ganze Zahlen, für die die Gleichung der Aufgabenstellung gilt. Wir addieren auf beiden Seiten der Gleichung den Term $3x^2y + 3xy^2$. Dann gilt äquivalent zur Gleichung der Aufgabenstellung

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4 \ .$$

Hieraus folgt, dass

$$(x+y)^3 \bmod 7 \equiv 4 \ . \tag{2.1}$$

Man überprüft leicht, dass für ganze Zahlen z jedoch stets $z^3 \bmod 7 \in \{0, 1, 6\}$ gilt: ein Widerspruch zu (2.1). □

Aufgabe 3
Für drei Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks gelte die Beziehung $a^2 + b^2 > 5c^2$. Man beweise, dass dann c die Länge der kürzesten Seite ist.

Lösung
Beweis durch Widerspruch:
c sei nicht die Länge der kürzesten Seite; es sei also ohne Einschränkung angenommen, dass

$$a \leq c \ . \tag{3.1}$$

Auf Grund der Dreiecksungleichung und (3.1) ist dann auch

$$b \leq a + c \leq 2c \ .$$

Aus beiden Abschätzungen folgt

$$a^2 + b^2 \leq c^2 + (2c)^2 = 5c^2 \ ;$$

ein Widerspruch zur Aufgabenstellung. □

Aufgabe 4

Ein quadratisches Blatt Papier liegt auf dem Tisch. Es wird schrittweise in mehrere Teile zerschnitten: Bei jedem Schritt wird ein Teil vom Tisch genommen und durch einen geraden Schnitt in zwei Teile zerlegt; diese beiden Teile werden auf den Tisch zurückgelegt.

Man bestimme die kleinste Anzahl von Schritten, mit denen man erreichen kann, dass sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden.

Lösung

Die gesuchte kleinste Anzahl s^* an Schritten, mit denen man erreichen kann, dass sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden, beträgt 1699.

Die Aufgabe ist bewiesen, wenn wir einerseits zeigen, dass mindestens 1699 Schritte erforderlich sind, damit sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden ($s^* \geq 1699$), und wenn wir andererseits eine Folge von 1699 Schritten angeben, an deren Ende sich auf dem Tisch 100 Zwanzigecke befinden ($s^* \leq 1699$).

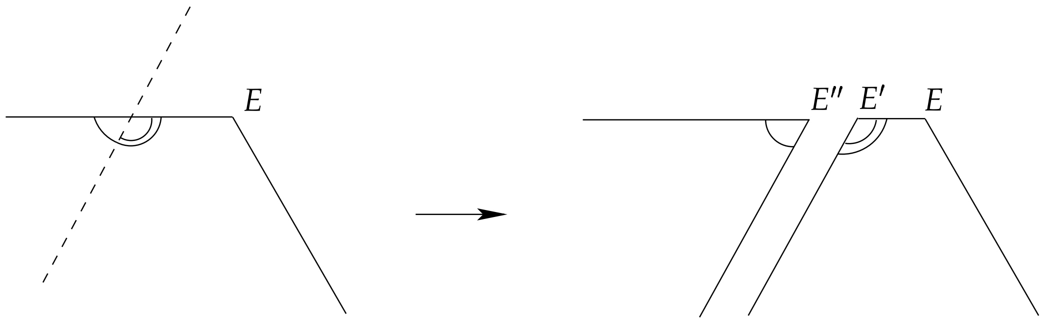
Es ist anschaulich klar, dass alle Teile auf dem Tisch, die durch eine Folge von Schritten wie in der Aufgabenstellung entstehen können, *konvexe* Vielecke sind. Ein Vieleck heißt konvex, wenn für zwei beliebige seiner Punkte die Strecke, die diese Punkte verbindet, vollständig im Vieleck enthalten ist.

Induktiv beweisen wir zunächst, dass nach einer Folge von s Schritten ($s \geq 0$) wie in der Aufgabenstellung gilt:

- Die Teile auf dem Tisch sind genau $s + 1$ konvexe Vielecke.
- Die Summe der Eckenzahlen aller Vielecke auf dem Tisch ist höchstens $4s + 4$.

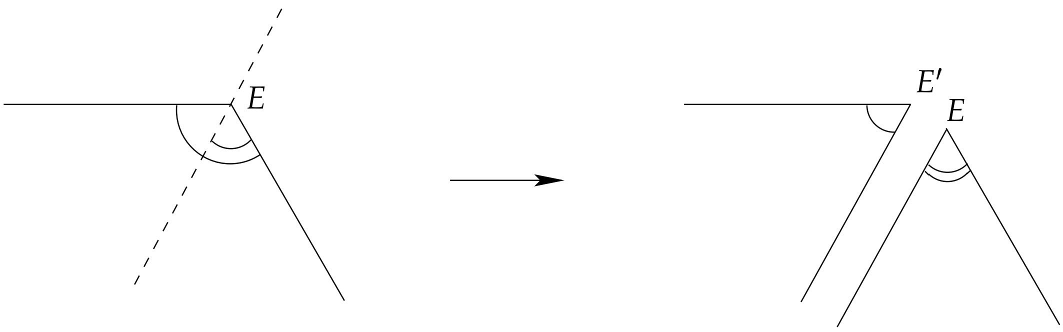
Der Induktionsanfang ($s = 0$) ist klar, weil nach Aufgabenstellung ein Quadrat auf dem Tisch liegt (ein Quadrat ist konvex, darauf gehen wir ganz am Ende des Beweises ein). Im Induktionsschritt ($s \to s + 1$) nehmen wir ein konvexes Vieleck vom Tisch und zerlegen es durch einen geraden Schnitt in zwei Teile. Dass nicht mehr Teile entstehen können, setzt die Aufgabenstellung voraus, es folgt aber auch sofort aus der Konvexität: Der gerade Schnitt „betritt“ bzw. „verlässt“ das Vieleck an zwei Punkten (jeweils eine Ecke oder ein Punkt, der im Inneren einer Kante des Vielecks liegt); zwischen diesen beiden Punkten verläuft der gerade Schnitt genau auf dem Streckenzug, der diese beiden Punkte verbindet, und ist damit nach Definition der Konvexität vollständig im Vieleck enthalten. Dass durch den Schnitt zwei konvexe Vielecke entstehen, darauf gehen wir am Ende des Beweises ein.

Verläuft der Schnitt durch einen Punkt im Inneren einer Kante des Vielecks,



so erhöht sich die Zahl der Ecken an dieser Stelle des Schnitts um 2.

Verläuft der Schnitt durch eine Ecke E,



erhöht sich die Zahl der Ecken an dieser Stelle des Schnitts um 1.

Auf dem Tisch liegen also nach dem Schnitt $1 + (s + 1) = s + 2$ konvexe Vielecke; die Summe der Eckenzahlen hat sich durch den Schnitt um höchstens $2 + 2 = 4$ erhöht und beträgt daher nach dem Schnitt höchstens $4s + 4 + 4 = 4(s + 1) + 4$.

$s^* \geq 1699$: Es seien s (ansonsten beliebige) Schritte derart ausgeführt worden, dass an deren Ende sich auf dem Tisch unter anderem 100 Zwanzigecke befinden. Auf dem Tisch liegen also neben den Zwanzigecken $s + 1 - 100 = s - 99$ konvexe Vielecke, konvexe Vielecke, von denen jedes mindestens 3 Ecken hat. Daher haben die Vielecke auf dem Tisch in Summe mindestens $100 \cdot 20 + 3(s - 99)$ Ecken; nach dem oben Bewiesenen ist die Summe der Eckenanzahlen auf dem Tisch höchstens $4s + 4$. Das bedeutet

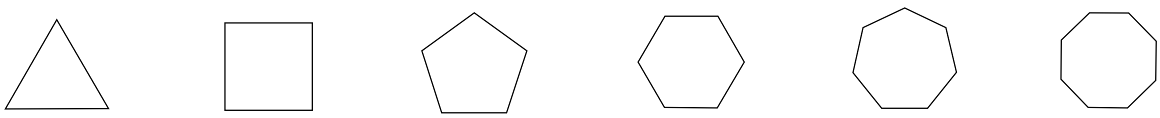
$$100 \cdot 20 + 3(s - 99) \leq 4s + 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1699 \leq s \; .$$

Da die Folge von s Schritten ansonsten beliebig gewählt war, gilt $s^* \geq 1699$.

$s^* \leq 1699$: Ein Rechteck lässt sich durch einen geraden Schnitt in zwei Rechtecke zerlegen. In einer Folge von 99 Schritten wie in der Aufgabenstellung können wir also erreichen, dass sich auf dem Tisch (genau) 100 Rechtecke befinden.
Verläuft ein gerader Schnitt bei einem konvexen n-Eck durch zwei benachbarte Kanten, so entstehen durch den Schnitt ein $(n + 1)$-Eck und ein Dreieck. Wenn wir von einem Rechteck ausgehen, können wir also eine Folge von 16 Schnitten durchführen, an deren Ende sich ein Zwanzigeck und 16 Dreiecke auf dem Tisch befinden. Insgesamt benötigen wir daher $99 + 100 \cdot 16 = 1699$ Schritte wie in der Aufgabenstellung, damit sich 100 Zwanzigecke auf dem Tisch befinden.

Damit ist $s^* = 1699$ bewiesen. Es bleibt, die fehlenden Konvexitätsargumente nachzutragen. Wir betrachten zunächst allgemeiner nicht nur Vielecke, sondern Teilmengen der Ebene. Für sie gilt dieselbe Definition, das heißt, sie sind *konvex*, wenn für zwei beliebige ihrer Punkte die Strecke, die diese Punkte verbindet, vollständig in der Teilmenge enthalten ist. Die Ebene selbst ist konvex. Weitere konvexe Teilmengen der Ebene: Jede Gerade in der Ebene definiert zwei „Halbebenen", die aus allen Punkten der Ebene bestehen, die auf jeweils einer Seite der Geraden liegen. Es ist leicht zu sehen, dass auch Halbebenen konvexe Teilmengen der Ebene sind. Darüber hinaus ist die Schnittmenge von beliebig vielen konvexen Mengen auch eine konvexe Menge: Seien P und Q zwei beliebige Punkte in der Schnittmenge. Für eine beliebige der konvexen Mengen sind die Punkte P und Q also in dieser Menge enthalten, und damit ist auch der Streckenzug, der P und Q verbindet, vollständig in dieser (konvexen) Menge enthalten. Da dies für jede Menge gilt, ist der Streckenzug, der P und Q verbindet, auch vollständig in der Schnittmenge aller Mengen enthalten.

Damit lässt sich nachweisen, dass das Quadrat konvex ist, denn es ist Schnittmenge von vier Halbebenen (nämlich Schnittmenge aller Punkte, die rechts von der Gerade liegen, die durch den linken Rand des Quadrats verläuft, und die unterhalb der Gerade liegen, die durch den oberen Rand des Quadrats verläuft, und analog für die beiden anderen Ränder des Quadrats.) Als Induktionsvoraussetzung sei formuliert, dass sich jedes Teil auf dem Tisch als Schnittmenge von endlich vielen Halbebenen beschreiben lässt. Der gerade Schnitt im Induktionsschritt lässt sich zu einer Gerade fortsetzen. Sie definiert in der oben beschriebenen Weise zwei Halbebenen. Die beiden Teile, die durch den Schnitt entstehen, lassen sich also wiederum jeweils als Schnittmenge von endlich vielen Halbebenen beschreiben. Alle Teile sind also auf Grund der Überlegung im vorigen Abschnitt konvex. Mit einem etwas verfeinerten Induktionsbeweis kann nachgewiesen werden, dass die konvexen Teile tatsächlich sogar konvexe Vielecke sind. □



Lösung der Aufgabe zu den Würfelzerlegungen

Wenn der k^3-Würfel mit dem Basisquadrat Q am Rand oder in einer Ecke des n^3-Würfels sitzt, dann gilt: Im ersten Fall wäre der k^3-Würfel von drei größeren Würfeln und im zweiten Fall wäre er von zwei größeren Würfeln eingeschlossen, was aber offensichtlich aufgrund der folgenden Bilder nicht möglich ist.

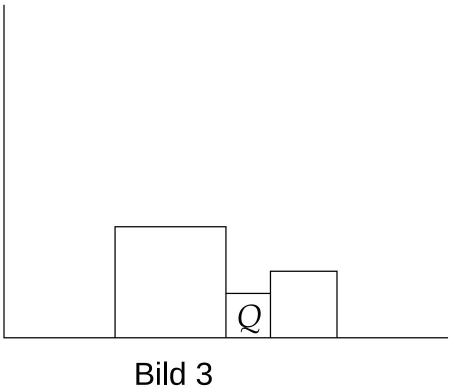


Bild 3

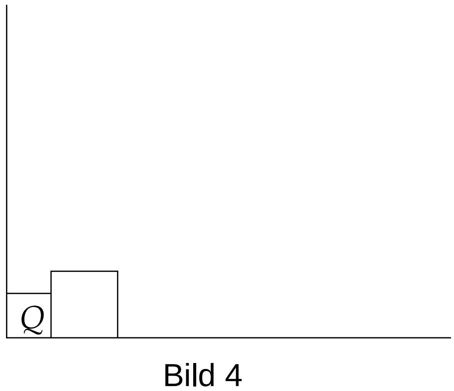


Bild 4

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

- Die Redaktion begrüßt alle neuen Abonnent(inn)en, die sich ab dem Jahrgang 26 zahlreich in die „MONOID-Gemeinde“ eingereiht haben, und freut sich gleichzeitig über die vielen Leserinnen und Leser, die weiterhin MONOID die Treue halten.

- Einem Leser, der von Anfang an zum MONOID-Leserkreis gehört, möchten wir besonders gratulieren: Herrn StD **Wilfried Heuser** vom Auguste-Viktoria-Gymnasium Trier, der den **Lehrerpreis 2005** der Helmholtz-Gemeinschaft Deutscher Forschungszentren erhalten hat für seine hervorragenden Leistungen auf dem Gebiet der Förderung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Interessen von Schülerinnen und Schülern. Herr Heuser ist seit vielen Jahren bei zahlreichen mathematischen Wettbewerben, insbesondere den Mathematik-Olympiaden, vielfältig engagiert.

- Wer es bisher vergessen haben sollte: Der Abo-Beitrag von 8 € für den Jahrgang 2006 (Heft 85 bis 88) bzw. für das Schuljahr 2005/06 (Heft 83 bis 86) kann noch auf das MONOID-Konto Nr. 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) überwiesen werden.

- Dank der finanziellen Unterstützung durch das Institut für Mathematik kann die Redaktion nunmehr für die Korrektur der eingesandten Lösungen und für die Pflege der Internetseiten von MONOID Hilfsassistenten einstellen, so dass es in Zukunft wieder schneller gehen wird mit der Bekanntgabe der Punkte im Heft und auf der Webside.

- Vor wenigen Tagen erreichte uns ein kurzer bebilderter Bericht aus Kairo von der MONOID-Feier der **Deutschen Schule der Borromäerinnen**, den wir am Anschluss unseren Leserinnen und Lesern vorstellen.

- Vom 13. bis 25. August 2006 findet auf Burg Fürsteneck die Hessische Schülerakademie statt. Auf S. 6 dieses Heftes informieren darüber Frau Dr. Cynthia Hog-Angeloni, unseren Leserinnen und Lesern als „MONOID-Layouterin“ schon bekannt, und Prof. Dr. Wolfgang Metzler von der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main.

- Abschließend sei auf das Projekt „Kunstkalender von jungen Menschen mit Körperbehinderung“ des Bundesverbandes Selbsthilfe Körperbehinderter e.V. unter dem Motto: „Junge Künstler mit Handicap gesucht: Malen für die Galerie 2007“ hingewiesen. Einsendeschluss ist der 26. April 2004. Weitere Infos unter `galerie@bsk-ev.org`.

Ekkehard Kroll

MONOID-Feier auf der Felukka

(Ein Kurzbericht der MONOID-AG an der Deutschen Schule der Borromäerinnen in Kairo)

Den Abschluss des „Monoid-Jahres“ feierte die Monoid-Gruppe der DSB Kairo auf einer Felukka. Ein Jahr lang hatten die Schülerinnen, die aus verschiedenen Klassen kommen, sich mit geometrischen und algebraischen Problemstellungen aus der Vierteljahreszeitschrift Monoid beschäftigt und Punkte gesammelt durch erfolgreiche Lösungen. Grund genug zum Feiern!

Von den insgesamt 42 Preisträgern / Preisträgerinnen, die aus der großen Zahl der Löser mit Geld- bzw. Buchpreisen vom „Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz“ ausgezeichnet wurden, entstammen allein sechs Preisträgerinnen (vier 1. Preise und zwei 2. Preise) aus der Monoid-Gruppe der DSB Kairo. Drei Schülerinnen der DSB Kairo erhielten außerdem als Anerkennung für ihre Arbeit ein kostenloses Jahresabonnement von Monoid. Für ihre Ausdauer und die gezeigte mathematische Phantasie wurde ihnen von den betreuenden Lehrern, Herrn Straub und Herrn Weber, Urkunden überreicht.

Die stolzen Gewinner aus dem Monoid-Jahr 2004/2005 mit ihren betreuenden Lehrern.

Rubrik der Löser und Löserinnen
(Stand: neu nach Heft 83)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Charlotte Seiter 2; **Kl. 6:** Kevin Schmitt 11;
Kl. 7: Alexander Gerharz 12; **Kl. 8:** Lisa Simon 15, Julia Zech 16;
Kl. 9: Janina Braun 6, Keno Krewer 6; **Kl. 10:** Patricia Kastner 8.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 7: Lena Baum 10, Désirée Schalk 14;
Kl. 9: Silvana-Maria Clotan 21, Felix Liebrich 23, Martin Reinhardt 29, Jessica Tischbierek 6, Bettina Zimmermann 7.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Soheila Hesham 3; **Kl. 7:** Ossama Basent 7.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Lennart Adam 21; **Kl. 10:** Christian Behrens 24, Martin Alexander Lange 26.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 11: Laura Biroth 22.

Bad Homburg, Kaiserin-Friedrich-Gymnasium: Kl. 7: Gregor Angeloni 15.

Beselich, Grundschule: Kl. 4: Marc Dinges 5.

Darmstadt, Eleonorenschule: Kl. 12: Moritz Egert 20.

Daun, Geschwister-Scholl-Gymnasium:
Kl. 5: Bernadette Mauren 5, Corinna Mayer 3.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 7: Anna-Lena Herrmann 5, Dominik Hildenbrand 1, Jennifer Jost 6, Hannah Lenk 6, Alexander Möller 9, Melanie Willhardt 10.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 6: Philipp Wenzel 11; **Kl. 7:** Kai Roth 3;
Kl. 8: Corinna Dinges 12, Hannah Meilinger 12, Andreas Weimer 7, Johannes Weimer 7.

Halberstadt, Martineum: Kl. 9: Robert Hesse 17.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 9: Christoph Tietz 5.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Christoph Straub, Gerd Weber):
Kl. 5: Sheima’a Ahmed Doma 11;
Kl. 8: Alia’a Ahmed Doma 27, Karen Emil 8, Marina Morad 13;
Kl. 9: Gina Mamdouh 5, Marina Milad 4, Hayat Selim 11;
Kl. 10: Mariam und Salma el Sayyad 11, Alia el Bolock 10;
Kl. 11: Lauren Emil 7, Riham Amr Falchry 4, Nadine Adel 8, Monika Fares 6, Miriam Morad 9, Iman Tarek 13.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 9: Ilja Birmann 3, Artur Grylla 5, Steffen Hirth 5, Alexander Linn 3, Sina Spangenberger 8, Johannes Vetter 3, Patric van Zwamen 5.

Gymnasium Korschenbroich: Kl. 10: Pascal Cremer 27.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 11: Maximilian Mühlbacher 17.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 10: Katharina Kober 11.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 11: Cornelie Koop 12.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 3: Magdalena Winkelvoß 5.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Stefanie Grünwald 16, Katharina Irmscher 16; **Kl. 10:** Maike Bäcker 1.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 8: Florian Schweiger 36.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 11: Bernhard Saumweber 8.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 7: Julia Hennig 5, Vivien Kohlhaas 16, Nora Mollner 9, Kira Godehardt 1;
Kl. 8: Madeline Kohlhaas 16; **Kl. 10:** Miriam Menzel 22; **Kl. 11:** Annika Kohlhaas 11;
Kl. 12: Stefanie Tiemann 24.

Neuss, Quirinus-Gymnasium: Kl. 6: Anne Bach 12.

Nürnberg, Gymnasium Stein: Marion Heublein 13.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Vanessa Kappuss 7, Joshua Mayer 6;
Kl. 5: Lars Behr 5, Tobias Braun 5, Tobias Eckinger 9, Tobias Feick 9, Leonie Herzog 10, Carina Jensen 3, Tim Kinkel 11, Carla Koch 9, Elisabeth Koch 4, Janina Köhler 8, Valentin Kuhn 19, Anna-Katharina Löw 7, Franziska Matern 2, Elias Petry 5, Nils Rehm 9, Mai-Britt Rosengarten 10, Uwe Schulz 13, Jemina Schwab 7, Nikola Trivicevic 13, Bernd von Wehden 7, Alina Wietschorke 11, Manuel Wörth 8;
Kl. 6: Markus Bauch 7, Aline Endreß 7, Nathan Valenti 17, Philipp Wenzel 11;
Kl. 7: Markus Walter 10;
Kl. 8: Eva-Lotte Andereya 8, Larissa Habbel 4, Sophia Waldvogel 6;
Kl. 9: Annkatrin Weber 21.

Östringen, Leibniz-Gymnasium (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 9: Thomas Geiß 21.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 8: Malte Meyn 21.

Pfinztal, Ludwig-Marum-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Pfeifle):
Kl. 12: Robin Roth 22.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 6: Barbara Bücker 10, Carmen Engels 5, David Feiler 14, Jana Klaes 8, Sebastian Kramer 4, Selina Weich 8, Nadia Wester 5.

Speyer, Kolleg (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Kl. 12: Viktor Eberhardt 10, Patrick Heist 7.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 7: Alexander Rettkowski 27; **Kl. 11:** Tobias Grunwald 13.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 11: Juliane Oberwieser 7.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Joel Jung 11, Emily Linn 17; **Kl. 10:** Julia Jung 3.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Elisabeth Manger):
Kl. 10: Charlotte Capitain 21.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 10: Moritz Maurer 12.

MONOID Jahrgang 26 Heft 85 März 2006

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe
Monoidaner: Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Alexander Gerharz, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Philipp Mayer und Rebecca Zimmer
Zusammenstellung und Layout: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Internet: Holger Schier mit Unterstützung durch Oliver Labs

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', zu überweisen; **Adresse nicht vergessen** (oder Bestellung über Internet).
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal.

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität, Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion, D-55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`
Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`