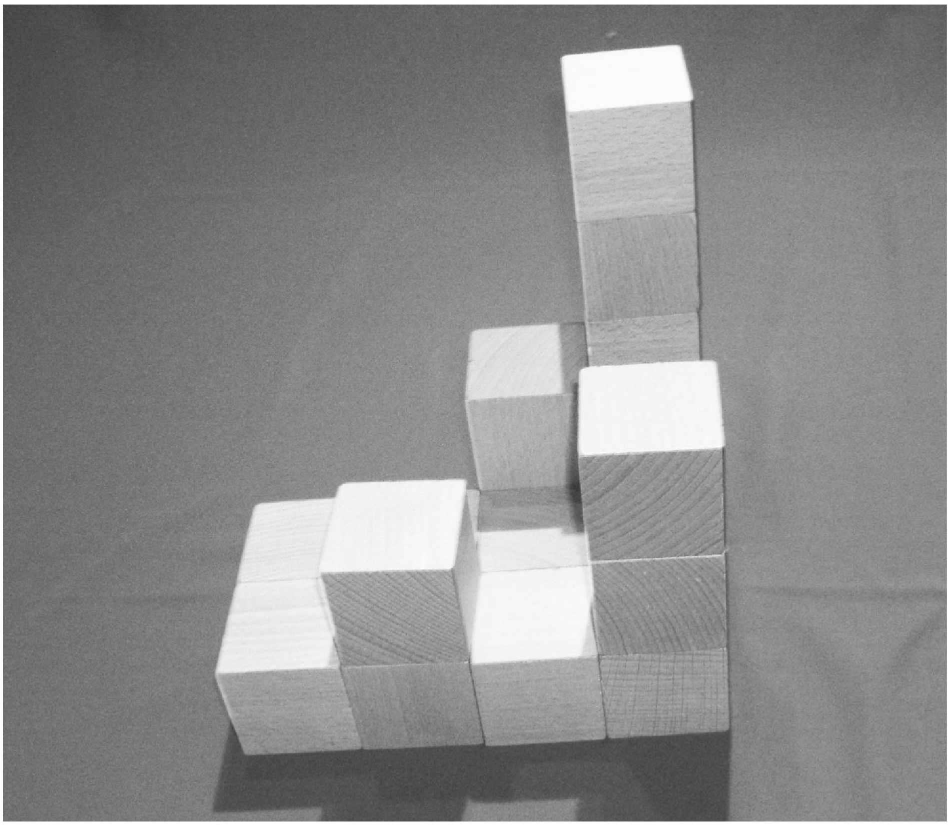
Jahrgang 25 Heft 84 Dezember 2005

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.02.2006.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
D-55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.

Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:

Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

In Memoriam Martin Mettler (1936 - 2005)

von Ekkehard Kroll

Der Stellenwert der Begabungsförderung wird heute hoch eingestuft – das war nicht immer so! Als Martin Mettler 1975 als Spätaussiedler aus Rumänien in die Bundesrepublik Deutschland kam und am Karolinen-Gymnasium in Frankenthal eine Stelle als Mathematiklehrer erhielt, vermisste er jegliche Spur von Förderung der mathematisch Begabten: Es gab keinerlei mathematische Tätigkeit außerhalb des Unterrichts, keine Mathe-AG, keine Teilnehmer am gerade erst gestarteten Bundeswettbewerb Mathematik, geschweige denn an der Internationalen Mathematik-Olympiade. Da war der begeisterte Mathematiker Mettler aus Rumänien Anderes gewöhnt!

Martin Mettler wurde 1936 in Gertianosch im rumänischen Banat geboren. Von 1951 bis 1955 erhielt er eine Ausbildung als Grundschullehrer an der Pädagogischen Lehranstalt Temeswar. Anschließend studierte er von 1956 bis 1960 in Temeswar Mathematik und Physik und war ab 1960 Professor in diesen Fächern am Lyzeum in Oberwischau und an der deutschen Abteilung des „Brediceanu Lyzeums" Lugosch. 1975 siedelte er von Rumänien in die Bundesrepublik Deutschland um. Nach Anerkennung seines Studiums durch weitere Prüfungen wurde er zum Studienrat und später Oberstudienrat am Karolinen-Gymnasium Frankenthal ernannt. Ab 1983 unterrichtete er am Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey, wo er sich auch an der Ausbildung der Referendare beteiligte. Von 1993 bis 1998 war er für den Auslandsschuldienst in Ungarn beurlaubt. 1998 wurde Martin Mettler pensioniert.

Bereits als Schüler war Martin Mettler Mitarbeiter der rumänischen Mathematik-Zeitschrift für Schüler „Gazeta Matematica" und erfolgreicher Teilnehmer an den Mathematik-Olympiaden. Als Lehrer gehörte er bis zur Übersiedlung in die Bundesrepublik dem Redaktionskollegium dieser Zeitschrift an. Vor diesem Hintergrund spielte sich auch die Entstehungsgeschichte von MONOID ab: Im Rahmen der Festlichkeiten zur 200-Jahrfeier des Karolinen-Gymnasiums 1980 veranstaltete die Mathematik-Fachschaft einen innerschulischen Mathematik-Wettbewerb, dessen unerwartet hoher Anklang bei den Schülern und Schülerinnen Anlass war, die Ergebnisse und schönsten Lösungen in einem Blatt festzuhalten. In seinem wunderbaren Buch „Vom Charme der ‚verblassten' Geometrie", das Martin Mettler im Jahre 2000, dem von der UNESCO ausgerufenen „World Mathematics Year", MONOID, dem „Mathematikblatt für Mitdenker", zum 20. Geburtstag widmete, schildert er die weitere Entwicklung dieses ersten Blattes so: „Dies geschah in einer Zeit, in der gerade der „Rubik-Würfel" durch die Lande zog, und wir überlegten, ob unser Blatt nicht attraktiver wäre, wenn auch eine Lösung des Würfel-Problems zu finden wäre. Eine Knobelseite sollte auch nicht fehlen, und selbstverständlich mussten auch „NEUE AUFGABEN" hinein, um die soeben aus ihrer Lethargie geweckten Aufgaben-Löser auf Trab zu halten. So wurde aus dem „Blatt" ein ansehnliches Heft von 32 (teils hand-geschriebenen, teils getippten) Seiten. Nun musste das Heft auch noch einen Namen und ein Titelblatt erhalten, und schon war die erste Ausgabe der Mathe-Zeitschrift fertig." [1. Ausgabe 01.06.1981]

Der Name „MONOID“ erinnert an eine mathematische Struktur, an deren Axiome relativ wenige Anforderungen gestellt werden: eine nichtleere Menge mit einer binären assoziativen Verknüpfung mit neutralem Element (Beispiel: $(\mathbb{N}, *)$). Mit „Monoid“ soll als Ausdruck der Bescheidenheit nach dem Willen des Begründers signalisiert werden, „dass man klein und bescheiden, sozusagen mit dem kleinen Einmaleins der hohen Mathematik, beginnen wolle“. Doch mit jeder Ausgabe wurde MONOID während der 20 Jahre, in der Martin Mettler zusammen mit Kollegen an seinen beiden Gymnasien in Frankenthal und Alzey diese einzigartige Schülerzeitschrift für Mathematik herausbrachte, anspruchsvoller, formal rigoroser, inhaltsreicher, schöner in der Aufmachung. Das Verbreitungsgebiet dehnte sich nach und nach auf das gesamte Bundesgebiet und das benachbarte Ausland aus und entsprechend stieg die Auflage, insbesondere nachdem der Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz im Jahre 2001 auf Nachfrage von Martin Mettler – der wohl die heraufziehenden Krankheitsprobleme schon erahnte – die Herausgabe übernahm. Zur Zeit machen sogar zwei MONOID-AGs an den Deutschen Schulen der Borromäerinnen in Kairo und Alexandria erfolgreich mit.
Dabei stellte Martin Mettler nicht nur zahlreiche Beiträge und Aufgaben zur Verfügung, er bewältigte auch den Hauptteil der Korrekturen der eingereichten Schülerlösungen – zuletzt vom Krankenbett in der Reha-Klinik aus, bis ihm die Krankheit den Stift aus der Hand nahm. Seine wertvollen Ratschläge werden wir sehr vermissen.
Martin Mettler sorgte auch dafür, dass sich Löserfleiß lohnte und in einer jährlichen Feier mit Preisen geehrt wurde. Er warb um Sponsoren, war aber selbst größter Sponsor für MONOID. So floss der Erlös aus seinem Buch „Vom Charme der verblassten Geometrie“ zum größten Teil auf das MONOID-Konto. Mit Blick auf das 25-jährige Jubiläum hatte Martin Mettler noch rechtzeitig begonnen, einen Querschnitt durch die ersten zehn MONOID-Ausgaben 1981 – 1984 sowie weitere Hefte zu ziehen und durch einen Rückblick auf 25 Jahre MONOID sowie durch eine lange Liste von erfolgreichen Löserinnen und Lösern zu ergänzen. Seine Familie hat das Buch im DIN A4-Format unter dem Titel „Spiel und Spaß mit Mathe“ zur MONOID-Feier am 26.11.2005 herausgegeben.*
Zu einer Würdigung der Verdienste von Martin Mettler gehört der Hinweis auf sein großes Engagement im Rahmen mathematischer Wettbewerbe. So war er von 1986 bis 1988 einer der Initiatoren des Landeswettbewerbs Mathematik Rheinland-Pfalz, der wesentlich zur Bestimmung der Ziele, der Inhalte und der Organisationsstrukturen des Wettbewerbs beitrug, und sorgte von 1989 bis 1993 als dessen Leiter durch sein unermüdliches Wirken für die Etablierung des Wettbewerbs als die „Förderungsveranstaltung in Rheinland-Pfalz“ auf mathematischem Gebiet für Schülerinnen und Schüler aus Unter- und insbesondere Mittelstufe. Dazu gehört auch die Mitarbeit Martin Mettlers in den Aufgaben-Kommissionen des Bundeswettbewerbs Mathematik und der Mathematik-Olympiade. Für seine hervorragenden Leistungen in der Anregung von Schülerinnen und Schülern zu besonderen naturwissenschaftlichen Interessen verlieh ihm am 12. Dezember 2003 die Karl Heinz Beckurts-Stiftung in der Münchener Residenz den Lehrerpreis 2003.
Das Problemlösen bei MONOID stellt ein ausgezeichnetes Training für die Teilnahme an solchen Wettbewerben dar, und so waren und sind zahlreiche MONOIDaner dort auf vordersten Plätzen zu finden. Nicht wenige absolvierten (und absolvieren noch) erfolgreich Universitätsstudien mit Promotionsabschluss (in Mathematik und anderen

* Es kann ab sofort zum herabgesetzten Unkostenpreis von 6 € (+ 2 € für Verpackung und Versand) über die MONOID-Redaktion monoid@mathematik.uni-mainz.de bezogen werden.

Fächern) oder gelangten gar auf eine Professur.
Leider war es Martin Mettler nicht mehr vergönnt, das 25-jährige Jubiläum seiner Zeitschrift zu erleben. Er verstarb am 11. September 2005 nach schwerer Krankheit in seinem Heim in Carlsberg. Das Institut für Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz wird das Andenken an Martin Mettler und seine hohes Engagement für die Mathematik dadurch ehren, dass es die von ihm begründete Zeitschrift MONOID an der Schnittstelle von Universität und Schule weiterhin pflegt und fort entwickelt.

Kleine Zahlen

von Markus Dillmann

Nachdem im letzten Heft die großen Zahlen Millionen, Milliarden und Billionen Thema eines Artikels waren, sollen in diesem Heft die kleinen Zahlen betrachtet werden. Viele von Euch haben Begriffe wie *Mikrotechnologie* und *Nanotechnologie* bereits gehört. Das Wort „Nano“ ist auch Name einer Wissenssendung in den 3. Fernsehprogrammen.

Bekannter dürfte die Mikrotechnologie sein. Mit Hilfe der Mikrotechnologie können z.B. Computerbausteine immer kleiner gebaut werden. Die Nanotechnologie wird z.B. in der Medizin und bei der Produktion von Autolacken verwendet. Die Vorsilben Mikro und Nano gehören also in eine Reihe mit den Vorsilben Dezi, Zenti, Milli,... Diese werden verwendet, um Anteile von Einheiten zu bezeichnen. So kennt Jeder Milliliter, Zentimeter oder auch Mikrometer. Schwierig wird es, sich diese Einheiten vorzustellen. Schon der Unterschied von einem Millimeter ist mit dem menschlichen Auge nur schwer zu erkennen. Für noch kleinere Unterschiede benötigen wir Mikroskope.

Jedoch gibt es in der Mathematik – ähnlich wie bei den großen Zahlen – eine Kurzschreibweise für kleine Zahlen. Statt der positiven Exponenten für die großen Zahlen werden negative Exponenten für die kleinen Zahlen verwendet. Die herkömmliche Schreibweise verwendet Brüche, oft auch Dezimalbrüche. Die Zahl $0,4$ kann auch geschrieben werden als $4 \cdot 10^{-1}$. Oder noch einmal anders formuliert: $1 \cdot 10^{-3}$ meint, dass ich die 1 durch 10^3 dividieren muss. Das ergibt dann $\frac{1}{1000}$ oder $0,001$. Im Vergleich mit den großen Zahlen ändert sich also nur die Richtung, in der sich das Komma verschiebt.

Erfreulicher Weise bleiben uns die Rechenregeln, die von den großen Zahlen bekannt sind, weiterhin erhalten. Wenn wir zwei Zahlen multiplizieren, müssen die Exponenten addiert werden: $8 \cdot 10^{-5} \cdot 7 \cdot 10^{-6} = 56 \cdot 10^{-11}$. Beim Dividieren müssen die Exponenten subtrahiert werden: $(42 \cdot 10^{-8}) : (7 \cdot 10^{-3}) = 6 \cdot 10^{-5}$. Diese Regeln können auch verwendet werden, wenn kleine und große Zahlen nebeneinander Verwendung finden.

Zum Abschluss des Artikels noch ein Hinweis zu den Vorsilben: $1\ \mu$m (= Mikrometer) entspricht 10^{-6} m; ein nm (Nanometer) entspricht 10^{-9} m. Die nächstkleinere Einheit sind Pikometer: 1 pm entspricht 10^{-12} m. Jetzt können auch wir uns auch eine kleine Vorstellung von den Größenordnungen in der Mikrotechnologie machen: Wenn in der Mikrotechnologie zwei Leitungen den Abstand $1\ \mu$m haben, dann passen auf einen Millimeter $10^{-3} : 10^{-6} = 1000$ Leitungen. Ein gutes Schulmikroskop kann etwa 1000-fach vergrößern. Die Mikrotechnologie arbeitet also in Größenbereichen, die mit einem guten Mikroskop gerade noch erkennbar sind. Farbpartikel aus der Nanotechnologie, wie sie in Autolacken zum Einsatz kommen, können mit optischen Mikroskopen bereits nicht mehr sichtbar gemacht werden. Die dazu notwendige Vergrößerung kann leicht berechnet werden.

Eine Maschine zur Erzeugung von Folgen

von Stephan Rosebrock

Zahlenfolgen und die Folgenmaschine

Mathematiker arbeiten oft mit Zahlenfolgen, auch nur Folgen genannt. Zum Beispiel ist

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots \tag{1}$$

eine solche Folge. Die Punkte sollen andeuten, dass die Folge immer so weiter geht: $14, 16, 18, 20, 22, \ldots$. Eine *Folge* besteht also aus vielen Zahlen, die nacheinander aufgeschrieben sind. Oft aus unendlich vielen.

Die obige Folge ist nicht so spannend. Man sieht leicht, dass die Folgenglieder, also die in der Folge vorkommenden Zahlen, immer größer werden. Sie werden größer als jede vorgegebene Zahl. Man sagt, die Folge geht gegen *unendlich*.

Wir wollen hier „Maschinen" zur Erzeugung von Zahlenfolgen betrachten. Eine typische ist in Abbildung 1 abgebildet. Die Maschine kann Zahlenfolgen erzeugen. Zu jeder

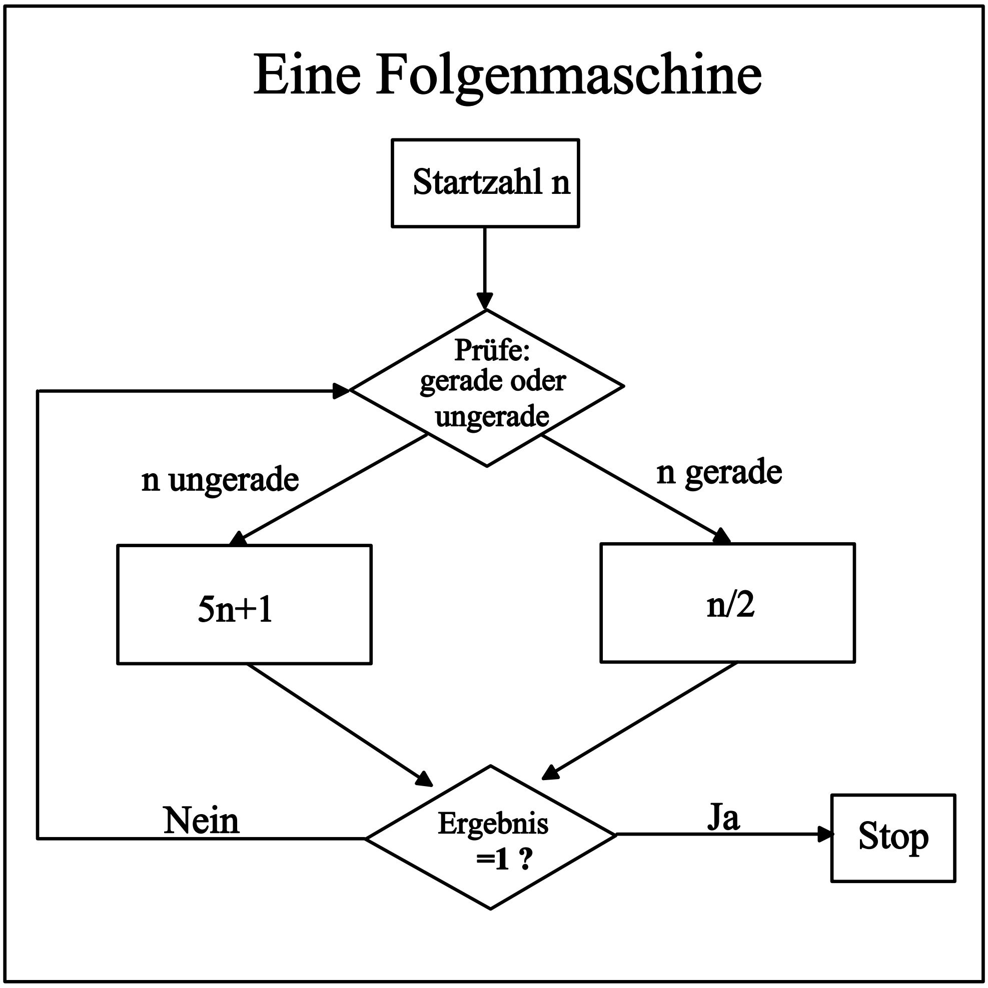


Abbildung 1: Eine Folgenmaschine

„Startzahl" gibt es eine Folge. Wir führen das einmal zur Startzahl 3 durch: Starten wir mit der 3, so ist die 3 unser n. Von dem „Startzahl n" Kasten geht man über „Prüfe:

gerade oder ungerade“ in den „n ungerade“ Zweig, weil die 3 ungerade ist. Dort steht $5n+1$. Wir müssen die 3 also mit 5 multiplizieren und 1 addieren. Wir erhalten 16. Die zweite Zahl unserer Folge ist also 16. Da die 16 ungleich 1 ist, fangen wir mit der 16 als neues n wieder in dem „Prüfe“ Kasten an. 16 ist gerade und wir erhalten 8. Insgesamt erhalten wir die Folge:

$$3, 16, 8, 4, 2, 1$$

Bei der 1 hören wir grundsätzlich auf. Wir haben also eine *endliche* Folge erhalten, eine Folge aus endlich vielen Zahlen.
Wir probieren dasselbe zur Startzahl 20:

$$20, 10, 5, 26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26$$

Die 26 kommt zum zweiten Mal vor. Dann wissen wir, wie die Folge weitergehen muss, weil schon beim letzten Mal nach der 26 die 13 kam und dann die 66, usw. Diese Folge geht also in einen *Zyklus*. Der Zyklus hat die Länge 10, weil es genau 10 Zahlen sind, die immer wieder vorkommen, nämlich:

$$26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52$$

Gibt es auch Startzahlen, bei der die Folgenmaschine eine Folge baut, die gegen unendlich geht wie die Folge (1)? Wir testen die 7:

$$7, 36, 18, 9, 46, 23, 116, 58, 29, 146, 73, 366, 183, 916, 458, 229, 1146, 573, 2866,$$

$$1433, 7166, 3583, 17916, 8958, 4479, 22396, \ldots$$

Es sieht zwar so aus, als ob die Folge gegen unendlich geht, aber sicher kann man nie sein. Es kann immer noch sein, dass ein Folgenglied sich wiederholt oder wir bei der 1 landen. Die Folgen, die unsere Folgenmaschine baut, sind viel komplizierter als die Folge (1).

Wir fassen zusammen:
Hat man eine Folgenmaschine und eine Startzahl gegeben, so können für die entstehende Folge drei Fälle auftreten:

1.) Die Folge stoppt bei der 1,

2.) die Folge geht in einen Zyklus,

3.) die Folge geht gegen unendlich.

Wir wollen uns im Weiteren Methoden überlegen, mit denen wir sehen, welche Folgenmaschinen bei welchen Startzahlen in welchem der drei Fälle landet. Das kann man natürlich jeweils ausprobieren, aber manchmal finden sich Methoden, bei denen man nicht probieren muss, sondern das auch anders sieht.

Weitere Folgenmaschinen
Die Folgenmaschine, die wir eben untersucht haben, heißt $FM_n(5n+1,\ n/2)$, weil in dem „n ungerade“ Kästchen $5n+1$ und in dem „n gerade“ Kästchen $n/2$ steht. Das ist aber nicht die einzige Folgenmaschine, die man bauen kann, denn man kann statt $5n+1$ und $n/2$ (fast) hineinschreiben, was man will. Hier kommt eine Knobelaufgabe zum Üben für dich:

Knobelaufgabe 1 Zeichne dir die Folgenmaschine $FM_n(n+1,\ n+3)$ auf. Jetzt probiere die Folgenmaschine für ein paar Startzahlen. Was beobachtest du? Kann die Folgenmaschine jemals bei der 1 enden oder in einen Zyklus laufen? Was passiert also mit jeder Folge, die diese Folgenmaschine erzeugt?

Die Folgenmaschine $FM_n(3n+1,\ n/2)$ gibt den Mathematikern immer noch Rätsel auf. So weiß man bis heute nicht, ob sie für jede Startzahl bei der 1 endet. Diese Frage ist als *Collatz-Problem* berühmt geworden. Man weiß, dass alle Startzahlen kleiner als $27\,020\,000\,000\,000\,000$ bei der 1 landen (das ist eine völlig unvorstellbar große Zahl), aber man weiß nicht, ob es nicht größere Zahlen gibt, für die diese Folgenmaschine nicht zur 1 läuft.

Knobelaufgabe 2 Betrachte die Folgenmaschine $FM_n(3n+2,\ n/2)$. Probiere die Folgenmaschine für ein paar ungerade Startzahlen aus. Warum geht die Folge immer nach unendlich?

Die Rückwärtsiteration

Wir spielen mit einer weiteren Folgenmaschine $FM_n(3n-1,\ n/2)$. Wir möchten wissen, welche Startzahlen auf die 1 gehen. Sicher die 2, denn die ist gerade und wird in einem Schritt mit $n/2$ zu 1 gemacht. Aber auch die 4, denn die wird zu 2 halbiert. Ebenso gehen $8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ auf die 1, denn alle sind gerade und bleiben gerade, wenn man sie so oft halbiert, bis sie 1 werden. Solche Zahlen nennt man *Zweierpotenzen*. Gehen noch mehr Zahlen auf die 1? Die Startzahl 3 geht in einem Schritt auf die 8, weil 3 ungerade ist und wir dann $3 \cdot 3 - 1$ rechnen müssen. Startzahlen, die auf die 1 gehen, können wir in einem *Baum* aufzeichnen, wie in Abbildung 2. Wir sehen dort alle Zahlen, die in höchstens 6 Schritten zur 1 gehen.

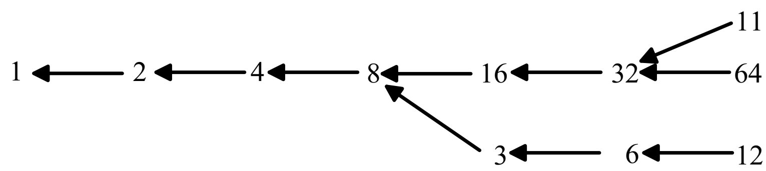


Abbildung 2: Rückwärtsiteration in $FM_n(3n-1,\ n/2)$

Knobelaufgabe 3 Könnt ihr den Baum nach rechts verlängern, indem ihr die Zahlen hinzufügt, die in 7, 8 oder mehr Schritten auf die 1 gehen?

Was ihr dabei tut, nennt man *Rückwärtsiteration*, denn ihr müsst die Folgenmaschine quasi rückwärts durchlaufen.

Knobelaufgabe 4 Führe die Rückwärtsiteration bei der Folgenmaschine $FM_n(3n+5,\ n/2)$ durch. Welche Zahlen gehen hier auf die 1? Zeichne einen entsprechenden Baum, bei dem man ablesen kann, welche Zahlen in 7 Schritten auf die 1 gehen.

Literatur

[1] S. Rosebrock: *Die Folgenmaschine,* MNU 55 (7), (2002), S. 403-407
[2] S. Rosebrock: *Entdeckendes Lernen mit der Folgenmaschine,* Beiträge zum Mathematikunterricht, div Verlag Franzbecker (2003), S. 529-532.
[3] S. Rosebrock und K.-P. Müller: *Entdeckendes Lernen mit und ohne Computer,* in: *PISA – Konsequenzen für die Lehrerbildung*, Karlsruher Pädagogische Beiträge 55,(2003), S. 140-154.
[4] E. Lehmann: *zu: Die Folgenmaschine,* MNU 56 (3), (2003), S. 174-176.
[5] J.C. Lagarias: *The $3x + 1$-problem and its generalizations,* Amer. Math. Monthly 92, S. 3-34, 1985.

Ein Blick hinter die Kulissen: Der Gedächtniskünstler

Von Hartwig Fuchs

Ein Gedächtniskünstler behauptet bei einer Vorstellung, er wisse alle 900 Millionen Produkte aus 142 857 143 und einer beliebigen neunziffrigen Zahl Z auswendig.
Zum Beweis lässt er sich — um dem Verdacht einer Manipulation zu entgehen – von 9 verschiedenen Zuschauern je eine Ziffer von Z nennen. Die Zahl $Z =$ 630 224 799, die man ihm so nennt, notiert er für eine nachträgliche Kontrolle seiner Gedächtnisleistung auf einer Tafel.
Unmittelbar nach der Niederschrift von Z beginnt er damit, die 17 Ziffern des ausgerechneten Produkts, nämlich von

630 224 799 · 142 857 143 = 90 032 114 232 889 257

an die Tafel zu schreiben – und beim Nachrechnen stellt sich seine „Gedächtnisleistung“ als richtig heraus.
Auch ein zweiter und dritter Versuch endet jeweils mit einem richtigen Ergebnis.
Weiß der Gedächtniskünstler also tatsächlich alle 900 000 000 möglichen Produkte auswendig?

Es ist 142 857 143 · 7 = 1 000 000 001. Damit gilt für eine beliebige neunziffrige Zahl $Z = z_1z_2 \dots z_9$ $(z_1, z_2, \dots, z_9$ Ziffern, $z_1 \neq 0)$:

$$z_1z_2 \dots z_9 \cdot 142\,857\,143 \cdot 7 = z_1z_2 \dots z_9 \cdot 1\,000\,000\,001 = z_1z_2 \dots z_9z_1z_2 \dots z_9.$$

Wenn man nun die letzte Zahl durch 7 dividiert, dann ergibt sich das ausgerechnete Produkt $z_1z_2 \dots z_9 \cdot$ 142 857 143.

Und genau diesen Rechentrick wendet der angebliche Gedächtniskünstler an. Er schreibt die ihm genannte Zahl 630 224 799 an die Tafel und denkt sie sich ergänzt zu 630 224 799 630 224 799.

Diese 18-ziffrige Zahl **im Kopf** durch 7 zu dividieren, stellt für ihn natürlich kein Problem dar.

Wenn er also jedes der 900 000 000 Produkte zweier neunziffriger Zahlen so rasch angeben kann, dann ist das nicht der Beweis für ein phänomenales Gedächtnis, sondern nur das Ergebnis einiger elementarer Divisionen.

Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$

von Kurt Rosenbaum

Pierre de Fermat (1601 - 1665) war von Beruf Richter in Toulouse in Südfrankreich. In seiner Freizeit beschäftigte er sich mit Mathematik. Beim Studium des ihm in lateinischer Übersetzung vorliegenden Werkes „Arithmetik“ des antiken griechischen Mathematikers Diophant (2. Hälfte des 4. Jahrhunderts n.Chr.) wurde er zu eigenen zahlentheoretischen Untersuchungen angeregt. Von den Randnotizen, die er dabei machte, ist die folgende besonders bekannt geworden:

Großer Satz von Fermat: Es ist unmöglich, die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in von Null verschiedenen ganzen Zahlen zu lösen, falls die natürliche Zahl n im Exponenten > 2 ist.

Danach ist es insbesondere nicht möglich, die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in von Null verschiedenen ganzen Zahlen zu lösen. Ein erster Beweis dafür stammt von Euler (1707 - 1783). Rund 350 Jahre lang blieb der große Satz von Fermat eine Vermutung. Am 23. Juni 1993 gab der englische Mathematiker Andrew Wiles (geb. 1953) am Ende einer Vortragsserie unter Heranziehung extrem tiefliegender Argumente einen Beweis dafür.

Ein naheliegender Gedanke ist die Frage, ob die Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

in ganzen Zahlen, die sämtlich von Null verschieden sind, lösbar ist. Deren Beantwortung ist unvergleichlich viel einfacher als der Beweis des großen Satzes von Fermat. Durch Probieren findet man

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3^3 & + & 4^3 & + & 5^3 & = & 6^3, \\ 1^3 & + & 6^3 & + & 8^3 & = & 9^3, \\ (-1)^3 & + & 9^3 & + & 10^3 & = & 12^3. \end{array}$$

Das wirft die Frage auf, ob es ein Verfahren gibt, mit dem man alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ finden kann. Zum Teil wird diese Frage beantwortet durch die folgende von Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920) gegebene

Formel: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, so gilt $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ mit

$$\begin{aligned} x &= 3a^2 + 5ab - 5b^2, \\ y &= 4a^2 - 4ab + 6b^2, \\ z &= 5a^2 - 5ab - 3b^2, \\ t &= 6a^2 - 4ab + 4b^2. \end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der Beziehung

$$(u + v + r)^3 = u^3 + v^3 + r^3 + 3u^2v + 3uv^2 + 3u^2r + 3ur^2 + 3v^2r + 3vr^2 + 6uvr.$$

Die mit der Formel von Ramanujan gefundenen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ sind im Allgemeinen nicht primitiv, d.h. der größte gemeinsame Teiler $d = ggT(x, y, z, t)$ kann > 1 sein. Einige einfache Lösungen (gegebenenfalls nach Kürzen durch d) sind:

a	b	x	y	z	t	d
1	0	3	4	5	6	1
1	1	1	2	-1	2	3
2	1	17	14	7	20	3
2	-1	-1	10	9	12	3
8	-1	7	14	17	20	21

Es springt ins Auge, dass die bekannte Lösung $3, 4, 5, 6$ als Bauplan für die Formel von RAMANUJAN dient. In diesem Zusammenhang drängen sich zwei Fragen auf:

1. Lassen sich alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ mit der Formel von RAMANUJAN gewinnen?

2. Es sei x, y, z, t eine feste Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ in ganzen Zahlen. Liefert dann die nach dem Muster von RAMANUJAN gebildete Vorschrift

$$\begin{aligned} X &= xa^2 + zab - zb^2, \\ Y &= ya^2 - yab + tb^2, \\ Z &= za^2 - zab - xb^2, \\ T &= ta^2 - yab + yb^2 \end{aligned}$$

für alle ganzen Werte der Parameter a und b ganze Zahlen mit

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = T^3?$$

Die Antwort fällt in beiden Fällen negativ aus. Davon überzeugen wir uns jeweils durch ein Gegenbeispiel.

Beispiel 1
Die Lösung $x = 1, y = 6, z = 8, t = 9$ kann nicht mit der Formel von RAMANUJAN gewonnen werden.

Beweis:
Aus der Formel von RAMANUJAN folgt $x + z = 8(a^2 - b^2)$ und $t - y = 2(a^2 - b^2)$, also

$$\frac{x+z}{t-y} = 4,$$

falls $a \neq \pm b$. In unserem Beispiel ist aber $\dfrac{x+z}{t-y} = 3$.

Beispiel 2
Aus der Lösung $x = 1, y = 6, z = 8, t = 9$ der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ erhält man die Bildungsvorschrift

$$\begin{aligned} x &= a^2 + 8ab - 8b^2, \\ y &= 6a^2 - 6ab + 9b^2, \\ z &= 8a^2 - 8ab - b^2, \\ t &= 9a^2 - 6ab + 6b^2. \end{aligned}$$

Für $a = 2$ und $b = 1$ ergibt sich $x = 4, y = 7, z = 5, t = 10$. Das ist keine Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$, denn

$$4^3 + 7^3 + 5^3 = 532 \neq 10^3.$$

Wir fragen genauer und stoßen auf zwei Probleme, deren Lösung etwas schwieriger ist und die Kenntnis aller ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ voraussetzt. Einen Hinweis, wie man mit elementaren Hilfsmitteln diese Kenntnis erlangen kann, findet man in der deutschen Übersetzung des 1958 im Verlag R. OLDENBURG in München erschienenen Buches „Zahlentheorie“ von HARDY und WRIGHT.

Problem 1
Welche ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ lassen sich mit der Formel von RAMANUJAN finden?

Problem 2
Unter welchen Bedingungen lassen sich aus einem Quadrupel x, y, z, t ganzer Zahlen mit $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ gemäß

$$\begin{aligned} X &= xa^2 + zab - zb^2, \\ Y &= ya^2 - yab + tb^2, \\ Z &= za^2 - zab - xb^2, \\ T &= ta^2 - yab + yb^2 \end{aligned}$$

mit ganzzahligen Werten für die Parameter a, b ganze Zahlen bilden, für welche

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = T^3$$

gilt?

Einen Anstoß für die Beschäftigung mit diesen Problemen kann man durch die Bearbeitung der folgenden Aufgaben bekommen.

Aufgabe 1
Man schreibe ein Programm, das ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ druckt.

Aufgabe 2
Man zeige, dass die Lösung

$$x = -7,\ y = 20,\ z = -17,\ t = 14$$

der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ mit der Formel von RAMANUJAN gewonnen werden kann und gebe die Werte der Parameter a, b an.

Aufgabe 3
Man bestätige $28^3 + 75^3 + 53^3 = 84^3$ und zeige, dass die Bildungsvorschrift

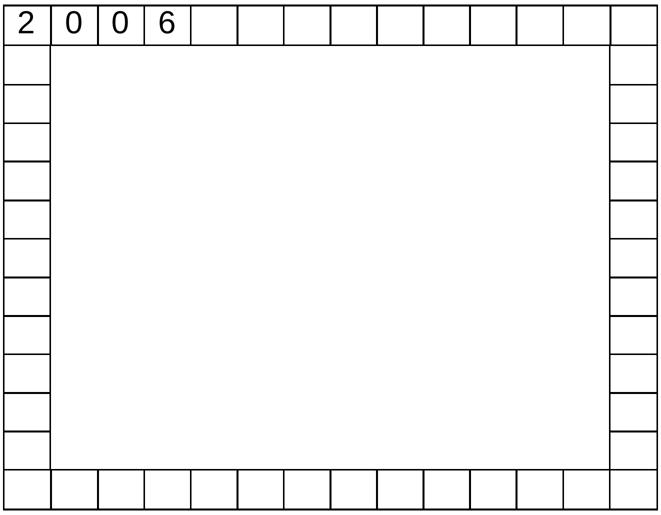
$$\begin{aligned} x &= 28a^2 + 53ab - 53b^2, \\ y &= 75a^2 - 75ab + 84b^2, \\ z &= 53a^2 - 53ab - 28b^2, \\ t &= 84a^2 - 75ab + 75b^2. \end{aligned}$$

für alle ganzen Zahlen a, b Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ liefert.

2006 2006 Die Seite zum Neuen Jahr 2006 2006

von Hartwig Fuchs

Zahlenrätsel



Trage in die 46 leeren Felder der Figur, beginnend nach der Ziffer 6 fortlaufend im Uhrzeigersinn die Ziffern der folgenden Zahlen ein:

1. Die 2006-te Primzahl (5 Ziffern)

2. Eine Potenz von 2006 (10 Ziffern)

3. Die Summe aller Kubikzahlen $\leq 2006^3$ (13 Ziffern)

4. Die am nächsten bei 2006^3 liegende Fakultät $n!$ (10 Ziffern)

5. Die größte ganze Zahl $\leq \sqrt[2006]{2006^{602}}$ (1 Ziffer)

6. Die Anzahl der Teiler von 2006^{166} (7 Ziffern)

Beachte: Im unteren Balken der Figur werden die Ziffern der Zahlen entgegen der üblichen Leserichtung (also von rechts nach links) eingetragen.

Jede der Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 8$ wird nun in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Figur durch Buchstaben ersetzt; Startzahl ist 2006, die Leserichtung im Uhrzeigersinn; z. B. wird die erste 0 in 2006 ersetzt durch I, die zweite Null durch N usw.
$0 \to$ I – N – U – N – E – M – N – O
$1 \to$ U – A – W – T
$2 \to$ E – S – J – R – T – D – O – N – N
$3 \to$ N – E – N
$4 \to$ E – S – E – E – A – K – D – E
$5 \to$ SCH – I – R – E
$6 \to$ G – H – U – D – I – L – R
$7 \to$ T – E – D – S
$8 \to$ E – O
$9 \to$ J
Die Buchstaben – im Uhrzeigersinn gelesen – ergeben einen Wunsch der MONOID-Redaktion.

Hinweise:
1. Die 2000-te Primzahl ist 17389.
3. $1^3 + 2^3 + \ldots + 2006^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$
4. $13! \approx 6{,}2 \cdot 10^9$, $14! \approx 8{,}7 \cdot 10^{10}$
6. $2^{166} \cdot 17^{166} \cdot 59^{166}$ hat $167 \cdot 167 \cdot 167$ Teiler.

Ein unendliches Produkt

Berechne die Zahl x so, dass das unendliche Produkt

$$\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^9\right)\left(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90}\right)\left(1 + x^{100} + x^{200} + \ldots + x^{900}\right)\cdots$$

den Wert 2006 hat.

Die „besondere“ Aufgabe

Von Hartwig Fuchs

Ganzzahlige Seitenlängen eines Vierecks

In einem Viereck seien die Seitenlängen ganzzahlig, und sie seien Teiler des Vierecksumfangs. Zeige, dass dann gilt:
(1) Mindestens zwei Viereckseiten sind gleich lang. (H.F.)

Lösung
Es seien a, b, c, d die Seitenlängen und U sei der Umfang des Vierecks. Dann gilt nach Voraussetzung:
(2) $a + b + c + d = U$ sowie $\alpha a = U, \beta b = U, \gamma c = U$ und $\delta d = U$ für gewisse ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Wir wollen nun annehmen, (1) sei falsch und verfolgen, welche Schlüsse sich daraus ziehen lassen.

Annahme:
(3) a, b, c und d seien alle verschieden,
(4) und es gelte zum Beispiel $a < b < c < d$.

In einem Viereck gilt: Drei Seitenlängen sind zusammen größer als die vierte Seitenlänge – eine geometrisch offensichtliche Tatsache, die wir daher auch nicht beweisen wollen.
Also ist $a + b + c > d$.
Wäre nun $d \geq \frac{1}{2}U$, so wäre $U = (a + b + c) + d > d + d \geq \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$ und somit $U > U$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $d < \frac{1}{2}U$ ist.
Wäre jetzt $d \leq \frac{1}{4}U$, so hätte man mit (4):
$U = a + b + c + d < \frac{1}{4}U + \frac{1}{4}U + \frac{1}{4}U + \frac{1}{4}U = U$ – wieder wäre $U < U$. Also muss $d > \frac{1}{4}U$ sein.
Zusammengefasst ergibt sich für d:
(5) $\frac{U}{4} < d < \frac{U}{2}$.

Nun ist $d = \frac{U}{\delta}$ nach (2); aus (5) folgt damit $\frac{U}{4} < \frac{U}{\delta} < \frac{U}{2}$. Mithin ist $\delta = 3$.

Wegen $c < d$ (vgl. (4)) und $c = \frac{U}{\gamma}$ wegen (2) und mit $\delta = 3$ folgt: $\frac{U}{\gamma} < \frac{U}{3}$ und daher ist $\gamma \geq 4$.

Wegen $b < c$, $b = \frac{U}{\beta}$ und $\gamma \geq 4$ folgt mit $\frac{U}{\beta} < \frac{U}{\gamma}$, dass $\beta \geq 5$ ist.

Schließlich gilt wegen $a < b, a = \frac{U}{\alpha}$ und $\beta \geq 5$ wegen $\frac{U}{\alpha} < \frac{U}{\beta}$, dass $\alpha \geq 6$ ist. Damit haben wir $U = a + b + c + d = \frac{U}{\alpha} + \frac{U}{\beta} + \frac{U}{\gamma} + \frac{U}{\delta} \leq \frac{U}{6} + \frac{U}{5} + \frac{U}{4} + \frac{U}{3} = \frac{57}{60}U < U$. Also sind wir erneut auf den Widerspruch $U < U$ gestoßen.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme (3) falsch ist. Somit müssen mindestens zwei Seiten des Vierecks gleich lang sein: Es gilt (1).

Bemerkung: Eine dem obigen Beweis entsprechende Überlegung zeigt: (1) gilt auch für ein Dreieck; (1) gilt aber nicht notwendiger Weise für n-Ecke, $n \geq 5$.

Lösungen der Aufgaben zur Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$

von Kurt Rosenbaum

Lösung zu Aufgabe 1

Das folgende Maple-Programm von Dr. Wilfried Rausch (TU Ilmenau) druckt alle Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ in natürlichen Zahlen mit $t < 100$.

```
> restart;
> N := 100:
> nz := 0:
> for t from 6 to N do
>  H:=floor( evalf(t/3^(1/3)));
>   for x to H do
>    for y from x to N do
>     if x^3+y^3 > t^3 then break fi;
>     for z from y+((t-x-2*y) mod 6) by 6 to N do
>      if x^3+y^3+z^3 > t^3 then break fi;
>      if igcd(x,y,z) > 1 then next fi;
>      if x^3+y^3+z^3 = t^3 then
>       printf(\% 3d^3 + % 3d^3 + % 3d^3 = % 3d^3, \, x, y, z, t);
>       nz := nz+1;
>       if nz mod 2 = 0 then printf(\\n\) fi;
>      fi;
>     od;
>    od;
>   od;
> od;
```

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$	$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3,$
$3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3,$	$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3,$
$4^3 + 17^3 + 22^3 = 25^3,$	$18^3 + 19^3 + 21^3 = 28^3,$
$11^3 + 15^3 + 27^3 = 29^3,$	$2^3 + 17^3 + 40^3 = 41^3,$
$6^3 + 32^3 + 33^3 = 41^3,$	$16^3 + 23^3 + 41^3 = 44^3,$
$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3,$	$27^3 + 30^3 + 37^3 = 46^3,$
$29^3 + 34^3 + 44^3 = 53^3,$	$12^3 + 19^3 + 53^3 = 54^3,$
$15^3 + 42^3 + 49^3 = 58^3,$	$22^3 + 51^3 + 54^3 = 67^3,$
$36^3 + 38^3 + 61^3 = 69^3,$	$7^3 + 54^3 + 57^3 = 70^3,$
$14^3 + 23^3 + 70^3 = 71^3,$	$34^3 + 39^3 + 65^3 = 72^3,$
$38^3 + 43^3 + 66^3 = 75^3,$	$31^3 + 33^3 + 72^3 = 76^3,$
$25^3 + 48^3 + 74^3 = 81^3,$	$19^3 + 60^3 + 69^3 = 82^3,$
$28^3 + 53^3 + 75^3 = 84^3,$	$50^3 + 61^3 + 64^3 = 85^3,$
$20^3 + 54^3 + 79^3 = 87^3,$	$26^3 + 55^3 + 78^3 = 87^3,$
$38^3 + 48^3 + 79^3 = 87^3,$	$21^3 + 43^3 + 84^3 = 88^3,$
$25^3 + 31^3 + 86^3 = 88^3,$	$17^3 + 40^3 + 86^3 = 89^3,$
$25^3 + 38^3 + 87^3 = 90^3,$	$58^3 + 59^3 + 69^3 = 90^3,$
$32^3 + 54^3 + 85^3 = 93^3,$	$19^3 + 53^3 + 90^3 = 96^3,$
$45^3 + 69^3 + 79^3 = 97^3.$	

Lösung zu Aufgabe 2

In den Formeln

$$\begin{aligned} x &= 3a^2 + 5ab - 5b^2, \\ y &= 4a^2 - 4ab + 6b^2, \\ z &= 5a^2 - 5ab - 3b^2, \\ t &= 6a^2 - 4ab + 4b^2. \end{aligned}$$

betrachten wir a^2, ab und b^2 als Unbekannte. Dann ergeben sich

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{336}(42x + 40y + 10z), \\ ab &= \frac{1}{336}(42x + 16y - 38z), \\ b^2 &= \frac{1}{336}(40y - 32z). \end{aligned}$$

Für $x = -7,\ y = 20,\ z = -17,\ t = 14$ werden $a^2 = 1,\ ab = 2,\ b^2 = 4$. Daher sind die gesuchten Werte der Parameter

$$a = 1, b = 2.$$

Lösung zu Aufgabe 3

Offensichtlich ist $28^3 + 75^3 + 53^3 = 84^3$.
Die Beziehung

$$(28a^2 + 53ab - 53b^2)^3 + (75a^2 - 75ab + 84b^2)^3 + (53a^2 - 53ab - 28b^2)^3$$

$$= (84a^2 - 75ab + 75b^2)^3$$

kann man leicht mit einem Computer-Algebraprogramm nachprüfen.

Die Seite für den Computer-Fan

2006 als Summe aufeinander folgender Zahlen?

Lässt sich 2006 als Summe mehrerer aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen, gibt es also natürliche Zahlen d und n, so dass gilt:

$$n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+d-2) + (n+d-1) + (n+d) = 2006? \qquad \text{(WJB)}$$

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 82

Eine Variante der Catalán-Vermutung

Der belgische Mathematiker Eugène Charles Catalán (1814-1894) stellte 1844 die Vermutung auf, dass die Gleichung $a^m - b^n = 1$ mit natürlichen Zahlen a, b, m, n, wobei

$a > b \geq 2$ und $m, n \geq 2$ sein sollen, die einzige Lösung $a = n = 3$, $b = m = 2$ besitzt. Diese Vermutung wurde erst im Jahre 2002 von dem rumänischen Mathematiker Preda Mihailescu bewiesen. (In MONOID Nr. 71, S. 15, berichteten wir darüber.)

Untersuche mit Deinem Computer, für welche natürlichen Zahlen d sich Lösungen der Gleichung $a^m - b^n = d$ mit natürlichen Zahlen a, b, m, n (alle ≥ 2) finden lassen.

Beispiele: $3^2 - 2^3 = 1$; $3^3 - 5^2 = 2$; $2^7 - 5^3 = 3$; $2^3 - 2^2 = 5^3 - 11^2 = 6^2 - 2^5 = 4; \dots$

(H.F.)

Lösungen:

Mit etwas Geschick schafft man es durch Probieren, obige Beispielreihe mit Darstellungen der geforderten Art für die ersten 20 natürlichen Zahlen d fortzusetzen, außer bei $d = 6$ und $d = 14$. Hier die folgenden Ergebnisse (ohne triviale Umformungen):

$3^2 - 2^2 = 2^5 - 3^3 = 5$;
$x^m - y^n = 6$? (verm. keine Lösung)
$2^4 - 3^2 = 2^5 - 5^2 = 2^{15} - 181^2 = 7$;
$2^4 - 2^3 = 8$;
$5^2 - 2^4 = 6^2 - 3^3 = 253^2 - 40^3 = 9$;
$13^3 - 3^7 = 10$;
$6^2 - 5^2 = 3^3 - 2^4 = 11$;
$2^4 - 2^2 = 12$;
$7^2 - 6^2 = 13$;
$x^m - y^n = 14$? (verm. keine Lösung)
$2^6 - 7^2 = 15$;
$5^2 - 3^2 = 16$;
$5^2 - 2^3 = 17$;
$3^3 - 3^2 = 18$;
$3^3 - 2^3 = 19$;
$6^2 - 4^2 = 20$.

Mit einem Visual-Basic-Programm hat Stefanie Tiemann (Gymnasium Marienberg Neuss) den Bereich bis $d = 100$ systematisch untersucht, wobei sie a, b, m, n (alle ≥ 2) so gewählt hat, dass kein Datenüberlauf erfolgte, also a^m und b^n unterhalb 2 000 000 000 blieben. Für die meisten Zahlen traten dabei mehrere Darstellungen auf; für folgende Zahlen ergab sich jedoch überhaupt keine einzige Darstellung:

6, 14, 34, 42, 50, 58, 62, 66, 70, 78, 82, 86, 90.

Simon Bats (Gymnasium Oberursel) hat mit einem kleinen PHP-Script für den Bereich 1 bis 50 für die Basen und 1 bis 9 für die Exponenten über 190 000 Datensätze erzeugt, jedoch nicht überprüft, welche d unter den Bedingungen $a > b \geq 2$ und $m, n \geq 2$ nicht dargestellt wurden. Außerdem waren einige Resultate – vermutlich durch Datenüberlauf – fehlerhaft.

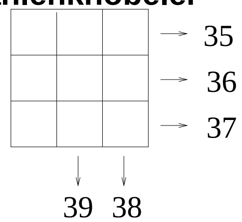
Christian Behrens (Gymnasium am Römerkastell Alzey) zeigt mit der einfachen Formel $d = \left(\frac{d+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{d-1}{2}\right)^2$, dass sich alle *ungeraden* natürlichen Zahlen d als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen lassen. Ferner zieht er aus der Formel $d = \left(\frac{d+4}{4}\right)^2 - \left(\frac{d-4}{4}\right)^2$ den Schluss, dass sich alle Vielfachen von 4 ab 12 als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen ≥ 2 darstellen lassen. Für diese Erkenntnisse braucht man natürlich keinen Computer, sondern den richtigen Blick und ein bisschen Geschick im Termumformen.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 83

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Zahlenknobelei



Verteile die Zahlen $8, 9, 10, \ldots, 16$ so auf die 9 Quadrate der Figur, dass die drei Zeilensummen $35, 36, 37$ und zwei Spaltensummen 38 und 39 sind. (H.F.)

Lösung: (zum Beispiel)

8	11	16
9	15	12
14	13	10

Geburtstags-Logelei

Eine Person behauptet von sich: „Vorgestern war ich noch 20 Jahre alt und im nächsten Jahr werde ich schon 23 Jahre alt werden.“ An welchem Tag hatte die Person Geburtstag, und an welchem Tage fand das Gespräch statt? (gefunden H.F.)

Lösung:

Das Gespräch muss um den Jahreswechsel herum statt gefunden haben; testen wir den Neujahrstag, z.B. den 1. Januar 2005.

Am 1. Januar 2005 war „vorgestern“ der 30. Dezember 2004. Am 30. Dezember 2004 war die Person 20 Jahre alt; am 31. Dezember 2004 muss sie Geburtstag haben: Sie ist dann bereits 21 Jahre alt. Und am 31. Dezember 2005 wird sie 22 Jahre alt. Am 1. Januar 2005 (während des Gesprächs) bedeutet „nächstes Jahr“ 2006 – und tatsächlich wird die Person am 31. Dezember 2006 23 Jahre alt.

Eine einfache Geschwindigkeitsbestimmung

Bei älteren Gleisanlagen sind die Schienen nicht zusammengeschweißt, so dass zwischen ihnen Dehnungsfugen bleiben. Wenn nun ein Zug über eine solche Fuge fährt, hört man einen Klick. Wie lange musst du bei $16,5$ m langen Schienen die Klicks zählen, bis deren Anzahl mit der Geschwindigkeit des Zuges (in km/h) annähernd übereinstimmt? (H.F.)

Lösung:

Wenn der Zug x km in der Stunde, also $x \cdot 1000$ m in der Stunde fährt, dann hört man $(x \cdot 1000) : 16,5 \approx x \cdot 60$ Klicks in der Stunde und somit x Klicks in der Minute.

Wenn man also die Klicks eine Minute lang zählt, dann gibt die Anzahl der Klicks ziemlich genau die Geschwindigkeit des Zuges in km/h an.

Eiswasser

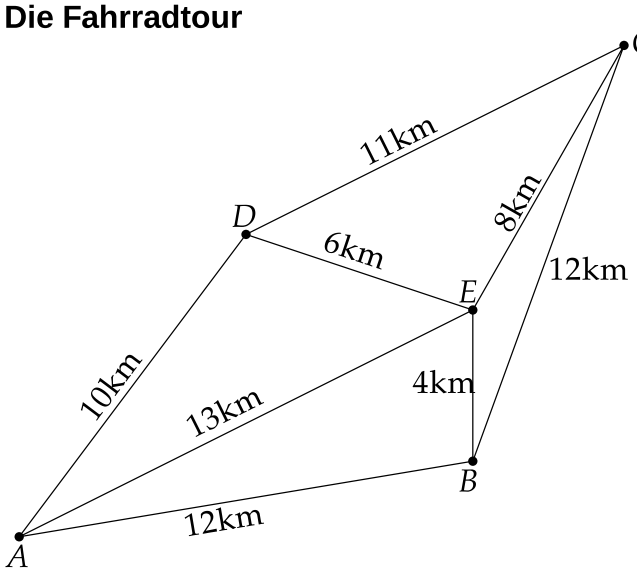
Antje will in einer Literflasche Wasser zu Eis gefrieren lassen. Sie hat gelesen, dass $1\,\mathrm{kg}$ Wasser bei Zimmertemperatur 1% mehr Platz braucht als $1\,\mathrm{l}$ und dass $1\,\mathrm{cm}^3$ Eis nur $\frac{6}{7}$ g wiegt. Da sie diese Angaben nicht für ganz genau hält, will sie sicherheitshalber (damit die Flasche im Gefrierschrank nicht platzt) nur so viel Wasser einfüllen, dass bei Richtigkeit dieser Angaben nach dem Gefrieren $10\ \mathrm{cm}^3$ Platz bleiben sollte.
Wie viel Wasser füllt sie ein? (WJB)

Lösung:

Aus Sicherheitsgründen möchte Antje nur $990\ \mathrm{cm}^3$ Eis in der Flasche haben. Da $1\ \mathrm{cm}^3$ Eis $\frac{6}{7}$ g wiegt, wiegen $990\ \mathrm{cm}^3$ Eis $990 \cdot \frac{6}{7}\ \mathrm{g} = 848{,}57\ \mathrm{g}$. Also müssen $848{,}57$ g Wasser in die Flasche eingefüllt werden. Diese brauchen 1 % mehr Platz als $848{,}57\ \mathrm{ml}$. Also muss Antje $848{,}57\ \mathrm{ml} \cdot \frac{101}{100} = 857{,}06\ \mathrm{ml}$ Wasser in die Flasche einfüllen.

(David Feiler, Gymnasium Nonnenwerth, Remagen)

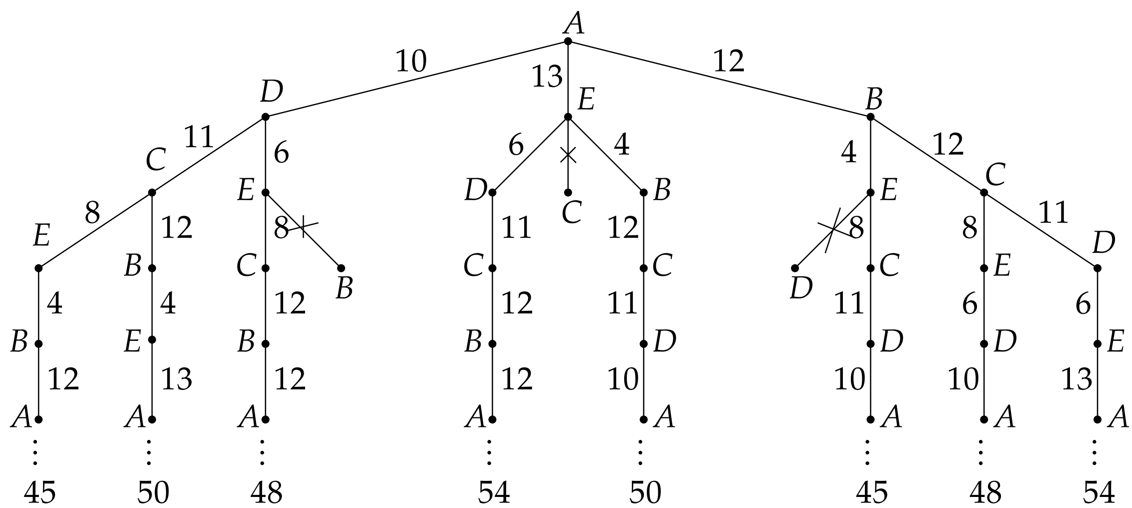
Die Fahrradtour



Mathis plant eine Fahrradtour: Von A-Stadt aus will er zu den Dörfern B, C, D, E fahren und dann nach A zurückkehren.
Wie viele verschiedene Touren gibt es, wenn jede Verbindungsstraße höchstens ein Mal benutzt und jedes Dorf genau ein Mal besucht wird? Welches ist die kürzeste Tour? (H.F.)

Lösung:

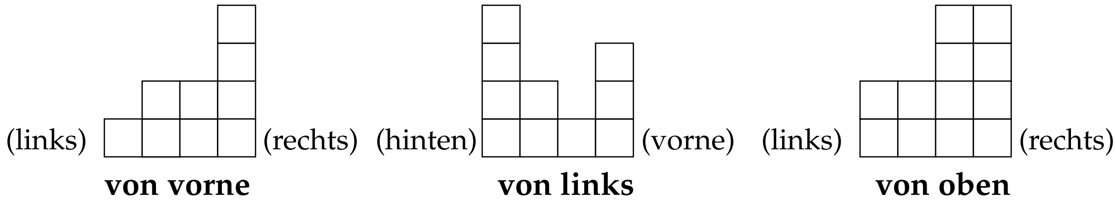
Die möglichen Routen stellen wir graphisch durch einen Baum dar. Durchgekreuzte Verbindungen führen zu nicht erlaubten Routen.



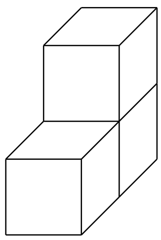
Es gibt acht Routen, von denen sich aber jeweils zwei nur durch ihren Durchlaufungssinn unterscheiden. Die kürzeste Route ist $ADCEBA$ sowie die entgegengesetzt orientierte Route $ABECDA$; beide sind 45 km lang.

Bauklötze

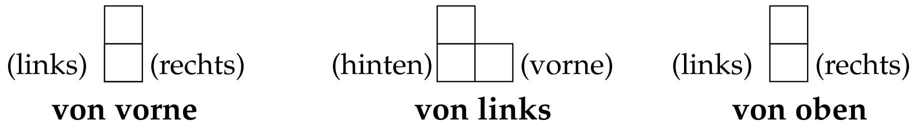
Paulas kleiner Bruder hat aus vielen gleichen Holzwürfeln ein Gebäude errichtet. Paula zeichnet es von vorn, von links und von oben zweidimensional auf:



Wie viele Würfel hat Paulas Bruder höchstens verbaut, wie viele mindestens? Begründe! (C.H-A.)



Hinweis: Die Zeichnungen sind wirklich nur zweidimensional und ohne Perspektive. Das links perspektivisch dargestellte 3-Würfel-Gebäude würde Paula so zeichnen:



Lösung: (siehe auch Titelblatt)

Paulas Bruder hat mindestens 19 und höchstens 22 Würfel verbaut:

Die Ansicht von oben erzwingt als unterste Lage 12 Würfel. Die Ansicht von vorn erzwingt mindestens 5 weitere Würfel oberhalb der untersten Lage. Diese schiebe man nach hinten, so dass es von links bestmöglich passt. Um aber die Dreiersäule der Ansicht links zu erhalten, muss man weitere zwei Würfel in „den Schatten" des Viererturms setzen.

Daher sind es mindestens 19 Würfel, andererseits aber höchstens 22, denn maximal drei weitere Würfel liegen im Schatten von vorn *und* von links.

Hier die Ansichten von oben; die Zahlen geben jeweils die Höhe an:

		1	4
		2	1
1	1	1	1
1	2	1	3

mindestens 19 Würfel

		2	4
		2	2
1	1	1	1
1	2	2	3

höchstens 22 Würfel

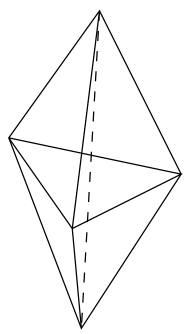
Ein an Diagonalen armer Körper

Kannst Du einen von regelmäßigen Vielecken begrenzten Körper angeben, der nur eine einzige Raumdiagonale besitzt?

(Jeder Würfel zum Beispiel hat genau vier Raumdiagonalen.) (H.F.)

Lösung:

Wenn man zwei kongruente Tetraeder so aneinander legt, dass eine Seite des einen mit einer Seite des anderen Tetraeders zur Deckung kommt, dann entsteht ein Körper mit fünf Ecken, neun Kanten und sechs regelmäßigen Seitenflächen, der nur eine einzige Raumdiagonale hat.



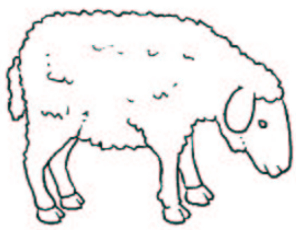
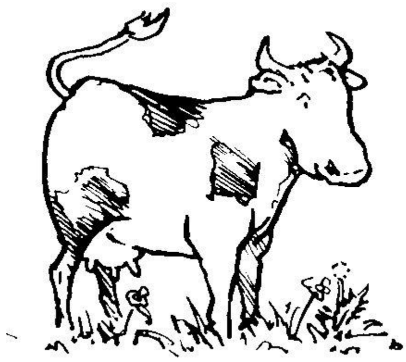
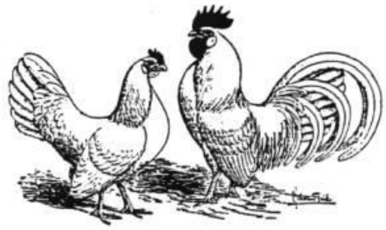
Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Winkel im Dreieck

In einem Dreieck verhalten sich zwei Winkel wie $2:3$. Der dritte Winkel ist so groß wie die beiden zusammen. Kannst Du ein solches Dreieck zeichnen? Wie groß sind die Winkel? (Idee von Céline Mötteli)

Auf dem Viehmarkt

Die Bauern Hensel, Lehmann und Huber gehen mit je 822 € auf den Viehmarkt. Es gibt Kühe für 170 €, Schafe für 82 €, Hähne für 12 € und Hennen für 9 €.

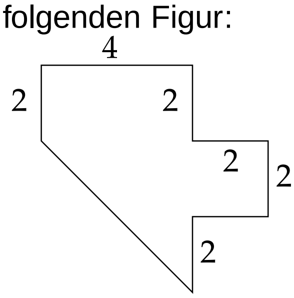
a) Bauer Hensel kauft 3 Kühe und 2 Schafe. Er möchte 6-mal so viele Hennen wie Hähne kaufen. Wie viele Hühner und Hähne kann er noch kaufen und wie viel Geld bleibt übrig?

b) Bauer Lehmann kauft 4 Hähne und 26 Hennen. Vom restlichen Geld will er Schafe kaufen, aber er möchte zum Schluss noch mindestens 75 € übrig haben. Wie viele Schafe kann er kaufen und wie viel Geld hat er dann noch?

c) Bauer Huber möchte nur Schafe und Kühe kaufen, und zwar 1 Schaf mehr als doppelt so viele Schafe wie Kühe. Wie viele Schafe und Kühe kauft er und wie viel Geld hat er dann noch übrig? (Malte Meyn, Freie Waldorfschule Otterberg)

Flächenberechnung

Berechne den Flächeninhalt der folgenden Figur:



Weitere Mathespielerein findet ihr auf der nächsten Seite!

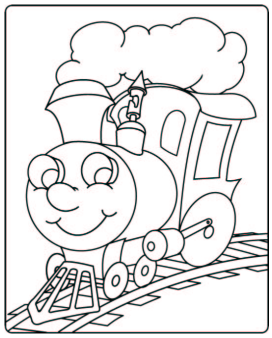
Der Stundenplan

Thomas erhält in der Schule einen neuen Stundenplan. Er weiß nur:

1. In den ersten 4 Tagen der Woche habe ich nur Mathematik, Deutsch, Englisch, Französisch und Biologie.
2. An jedem Tag habe ich 4 verschiedene Fächer und an keinem Tag ist ihre Reihenfolge gleich jener von einem anderen Tag.
3. Niemals habe ich Englisch und Mathematik am gleichen Tag.
4. Habe ich Englischunterricht, so schließt sich unmittelbar Biologie an.
5. Ist an einem Tag aber kein Englischunterricht, so endet der Unterrichtstag stets mit Deutsch.
6. Überdies beginnt jeder Tag mit Französisch, falls ich Deutschunterricht habe.
7. Die ersten drei Unterrichtstage enden mit demselben Fach.

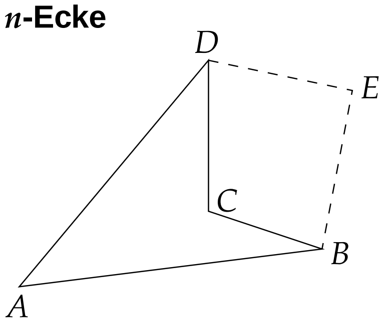
Welchen Stundenplan hat Thomas am Donnerstag ermittelt?

Im InterCity



Herr Müller und Frau Schmitz treffen sich im InterCity von Mainz nach Koblenz. Herr Müller sagt: „Ich fahre diese Strecke in diesem Jahr bereits zum 17. Mal.“ Frau Schmitz erwidert: „Ich sogar schon zum 22. Mal.“ Ermittle, wer in Mainz, und wer in Koblenz wohnt!

***n*-Ecke**



Bei einem n-Eck ($n \geq 3$) müssen *ausspringende* und können *einspringende* Ecken vorkommen – das Viereck $ABCD$ hat 3 ausspringende Ecken und eine einspringende Ecke (vgl. Figur).
Ein n-Eck nur mit ausspringenden Ecken heißt **konvex** – das Viereck $ABED$ ist konvex (vgl. Figur).

In einem konvexen n-Eck sei der arithmetische Mittelwert der n Innenwinkel $165°$.
Wie viele Seiten hat das n-Eck? (H.F.)

Summen

Setze die Berechnung der Summen

$$\begin{array}{lllllllll} 6^0 & + & 6^1 & & & & & = & 7 \\ 6^0 & + & 6^1 & + & 6^2 & & & = & 43 \\ 6^0 & + & 6^1 & + & 6^2 & + & 6^3 & = & 259 \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

fort.

Die Endziffern der 1., der 2., der 3. Summenzahl usw. sind $7, 3, 9$ usw. Wie heißt die Endziffer der 100. Summenzahl. Begründe deine Vermutung!
Bemerkung: $6^0 = 1$ und $6^1 = 6$. (H.F.)

Bereits auf Seite 21 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

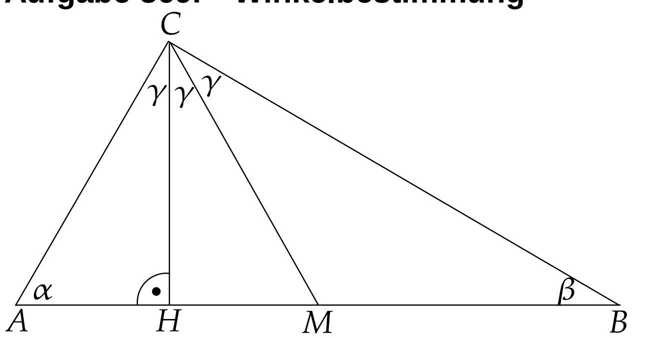
Aufgabe 868. Der Schulweg

Anne benötigt ungefähr 24 Minuten für ihren Schulweg. Als sie sich um 14.15 Uhr auf den Nachhauseweg begibt, ist ihre Mutter bereits von zu Hause losgegangen, um rechtzeitig zum Elternsprechtag in Annes Schule zu erscheinen. Nach 20 Minuten ist sie um 14.25 Uhr und 15 Sekunden schließlich am Schulgebäude angelangt.

Anne und ihre Mutter haben jeweils den gleichen Weg gewählt und sind mit konstanter Geschwindigkeit gegangen. Auf dem Weg liegt ein Tunnel, den die beiden im gleichen Augenblick, jede auf ihrer Seite, erreicht haben. Anne hat den Tunnel $7{,}5$ Sekunden später als ihre Mutter verlassen.

Wann haben beide den Tunnel erreicht? Liegt der Tunnel näher am Schulgebäude oder am Haus der Beiden? (Miriam Menzel, Gymnasium Marienberg in Neuss)

Aufgabe 869. Winkelbestimmung



Im Dreieck ABC werde der Winkel bei C von der Seitenhalbierenden CM und der Höhe CH in drei gleich große Teilwinkel geteilt.

Bestimme die drei Winkel des Dreiecks ABC. (H.F.)

Aufgabe 870. Gerechte Zinsen

Wiebke, Ingrid und Anna bewohnen eine WG (Wohngemeinschaft). Wiebke ist am 1. Oktober 2002 eingezogen, Ingrid am 1. September 2003 und Anna am 1. Januar 2004. Jede der drei Damen hat bei Einzug eine Kaution von 250 € auf ein Sparbuch des Vermieters gezahlt, dessen Zinsen zum 31. Dezember jeden Jahres gutgeschrieben werden. Als alle drei gleichzeitig am 30. Juni 2005 ausziehen und das Sparbuch aufgelöst wird, befinden sich auf dem Sparbuch $780{,}83$ €. Leider hat der ansonsten sehr nette Vermieter keine Ahnung, wie hoch der Zinssatz ist. „Macht nichts“, sagt Ingrid, „wenn wir annehmen, dass der Zinssatz konstant war, bekommt ...“ Ja, wie viel bekommt Wiebke, wie viel Ingrid und wie viel Anna? (VB)

Hinweis: Falls Du für den Zinssatz eine Gleichung findest, für die Du kein Lösungsverfahren kennst, versuche die Lösung zu raten oder benutze ein Computeralgebrasystem.

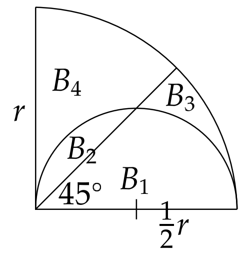
Aufgabe 871. Das Problem der Ziegenhirten

Die beiden Hirten A und B aus einer entlegenen Ecke Innerasiens verkaufen ihre Ziegenherde, die knapp unter 100 Tieren zählt. Für jede Ziege erhalten sie 7 Mal so viele Dirham wie Tiere in der Herde sind. Da A und B nicht dividieren können, lassen sie sich den Verkaufserlös in 100-Dirhamscheinen und den weniger als 100 Dirham betragenden Rest in 2-Dirhammünzen auszahlen, und dann verteilen sie das Geld so: A nimmt einen Schein, dann nimmt B einen Schein, usw. Den letzten Schein erhält A

und B bekommt den Rest, der weniger als 20 Dirham beträgt. Wie viele Dirham erhält A, wie viele B? (H.F.)

Aufgabe 872. Reflexionen
Ein Lichtstrahl aus der linken unteren Ecke eines Quadrats (der Seitenlänge 1) treffe die rechte Seite in der Höhe $h = \frac{m}{n}$ (m, n teilerfremde natürliche Zahlen, $m < n$). Er wird an den Quadratseiten so lange reflektiert, bis er in einer der Ecken des Quadrats ankommt.
a) Zeige, dass der Lichtstrahl wirklich in einer Ecke ankommt.
b) Berechne die Zeit $T(m, n)$, die der Lichtstrahl dafür benötigt. (WJB)

Aufgabe 873. Ist B_2 größer als B_3 ?
Im Viertelkreis vom Radius r sei ein Halbkreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$ und die Halbierende des Viertelkreises wie in nebenstehender Figur gezeichnet. Mit $B_1, \ldots, B_4$ bezeichnen wir die entstehenden Teilflächen. Untersuche, welche der drei Aussagen richtig ist: $B_2 < B_3$, $B_2 = B_3$, $B_2 > B_3$. (H.F.)



Aufgabe 874. Niemals eine Quadratzahl
a) Wann sind zwei unmittelbar aufeinander folgende ganze Zahlen beide Quadratzahlen?
b) Zeige: Das Produkt aus vier unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist niemals eine Quadratzahl. (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 83

Kl. 8-13

Aufgabe 861. Wo steckt der Fehler?
Wir bezeichnen die nicht abbrechende Summe $1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots$ mit S.
Dann gilt $S = 1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots = 1 + 10(1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots) = 1 + 10S$.
Aus $1 + 10S = S$ folgt $9S = -1$, also $S = -\frac{1}{9}$ – und das ist offensichtlich falsch.
Wie erklärst du das? (H.F.)

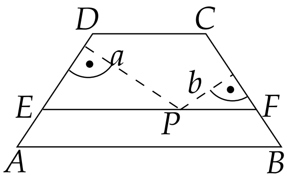
Lösung:
Was immer S ist, eines ist sicher: S ist keine Zahl, sondern größer als jede Zahl. Dann dürfen wir auch nicht mit S so wie mit einer Zahl rechnen!
Das Multiplizieren mit Unendlich ist genauso verboten wie das Dividieren durch 0. Tun wir das doch, dann muss sich dabei nicht notwendiger Weise ein sinnvolles Ergebnis einstellen.

Aufgabe 862. Problem mit dem Alter
Sabine fragt ihren Onkel, wie alt seine drei Kinder sind. Er antwortet: „Als Anna geboren wurde, war Markus so alt wie Birgit bei seiner Geburt gewesen war. Multipliziert man das Produkt aus dem Alter von Anna und dem von Markus mit dem Produkt aus dem

Alter der beiden Mädchen, so erhält man das Vierfache des Produkts aus den Altern der beiden älteren Geschwister.“ Sabine unterbricht ihn: „Jetzt weiß ich, wie alt Anna ist.“ Der Onkel erzählt weiter: „Multiplizierst du das kleinste der drei Produkte mit der Wurzel aus dem mittleren, so erhältst du das größte Produkt.“
a) Wie alt ist Anna?
b) Wie alt sind die anderen Beiden? (WJB)

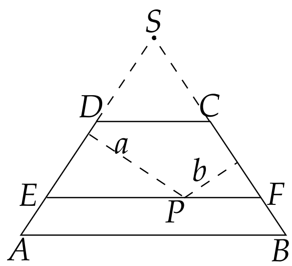
Lösung:
Wir nennen das Alter von Anna x, das von Markus y und das von Birgit z. Es gilt $x < y < z$.
a) $(x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = 4yz \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$. Anna ist zwei Jahre alt.
b) $(xy) \cdot \sqrt{xz} = yz$ quadriert ergibt $x^3y^2z = y^2z^2 \Rightarrow z = x^3 = 8$. Birgit ist also 8 Jahre alt.
Aus $y - x = z - y$ schließt man dann $2y = x^3 + x = 10$, also $y = 5$. Somit ist Markus 5 Jahre alt.

Aufgabe 863. Gleichschenkliges Trapez



Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke EF, $EF \parallel AB$. Seine Abstände zu den Trapezseiten AD und BC seien mit a und b bezeichnet.
Zeige, dass die Summe $a + b$ sich nicht ändert, wenn P seine Lage auf EF beliebig ändert. (H.F.)

Lösung:
Zunächst ergänze man das Trapez zum Dreieck ABS. Dann gilt, wenn $|EFS|$ die Fläche des Dreiecks EFS, $|ES|$ die Länge der Strecke ES bezeichnet: $|EFS| = |PSE| + |PFS| = \frac{1}{2}a|ES| + \frac{1}{2}b|FS|$. Wegen $|ES| = |FS|$ folgt $|EFS| = \frac{1}{2}|ES|(a + b)$ oder $a + b = 2|EFS| : |ES|$. Die letzte Gleichung gilt unabhängig davon, wo P auf EF gewählt wird. Da $2|EFS| : |ES|$ eine konstante Zahl ist, gilt also die Behauptung.



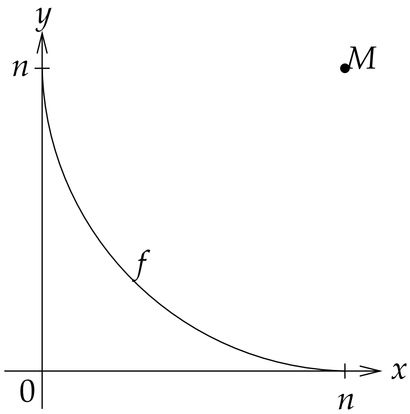
Aufgabe 864. Spezielle pythagoreische Zahlentripel
Die pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z) – also natürliche Zahlen x, y, z mit $x^2 + y^2 = z^2$ – bieten vielfach Anlass zu mathematischen Erkundungen.
Nachdem nun geklärt ist, dass es unendlich viele Tripel der Form $(a, a + 1, c)$ gibt (Heft 79), kann man ebenso gut fragen:
Gibt es Tripel der Form $(a, b, b + 1)$? Vielleicht sogar unendlich viele? Finde eine Gleichung, mit der sich diese Tripel darstellen lassen! (Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:
Es soll gelten: $a^2 + b^2 = (b + 1)^2$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Ausquadrieren und auflösen nach b liefert $b = \frac{a^2-1}{2}$. Wählen wir für a eine ungerade Zahl, etwa $2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$, so ist auch a^2 ungerade und daher $\frac{a^2-1}{2} \in \mathbb{N}$. Dann ist $b = 2n^2 + 2n$, und die Bedingung schreibt sich $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$, was für jedes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Da a ungerade sein muss und die Gleichung für *jede* ungerade Zahl ein solches Tripel liefert, haben wir *alle* möglichen Tripel dieser Form gefunden.

n	$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
$\vdots$			

Aufgabe 865. Funktionsgraph

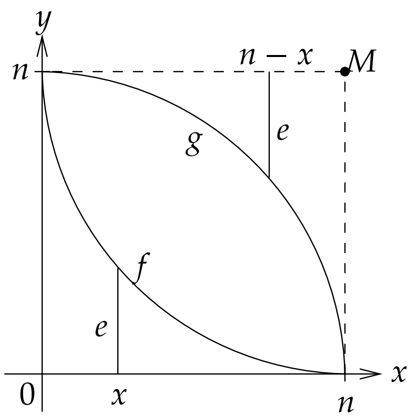


Bestimme die Funktionsvorschrift des Graphen, den man erhält, wenn man mit einem Zirkel bei M einsticht und einen Viertelkreis mit dem Radius $r = n$ zeichnet.

(Christoph Karg, Geschwister-Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:

Zuerst sticht man mit dem Zirkel bei 0 ein und zeichnet einen Viertelkreis mit dem Radius $r = n$.



Allgemein gilt:

(1) $g(x) = \sqrt{n^2 - x^2}, 0 \leq x \leq n$.

Aus der Zeichnung:

(2) $g(n-x) + e = n$

(3) $f(x) = e$

Einsetzen von (3) in (2): $g(n-x) + f(x) = n$, also $f(x) = n - g(n-x)$.
Aus (1): $f(x) = n - \sqrt{n^2 - (n^2 - 2nx + x^2)} = n - \sqrt{n^2 - n^2 + 2nx - x^2}$,
also: $f(x) = n - \sqrt{2nx - x^2}, 0 \leq x \leq n$.

Alternativ schließt man unter Verwendung der Kreisgleichung $(x-n)^2 + (y-n)^2 = n^2$ für einen Kreis mit Mittelpunkt $M(n|n)$ und Radius n nach Ausquadrieren der ersten Klammer $(y-n)^2 = 2nx - x^2$, also für den Bereich $0 \leq x \leq n$: $y = n - \sqrt{2nx - x^2}$.

Aufgabe 866. Ein Zufall oder nicht?

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2005\cdot 2004+\frac{1}{4}}+\sqrt{2005\cdot 2006+\frac{1}{4}}\right)=2005\ ?$$

Trifft die Gleichung zu? Wenn ja, warum? (H.F.)

Lösung:

Aus $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2-x+\frac{1}{4} = x(x-1)+\frac{1}{4}$ folgt $\sqrt{x(x-1)+\frac{1}{4}} = x-\frac{1}{2}$.

Setzt man in der letzten Gleichung $x = 2005$, so ist $\sqrt{2005\cdot 2004+\frac{1}{4}} = 2005-\frac{1}{2}$; für $x = 2006$ folgt $\sqrt{2006\cdot 2005+\frac{1}{4}} = 2006-\frac{1}{2}$. Wegen $\frac{1}{2}\left(2005-\frac{1}{2}+2006-\frac{1}{2}\right) = 2005$ gilt die behauptete Gleichung.

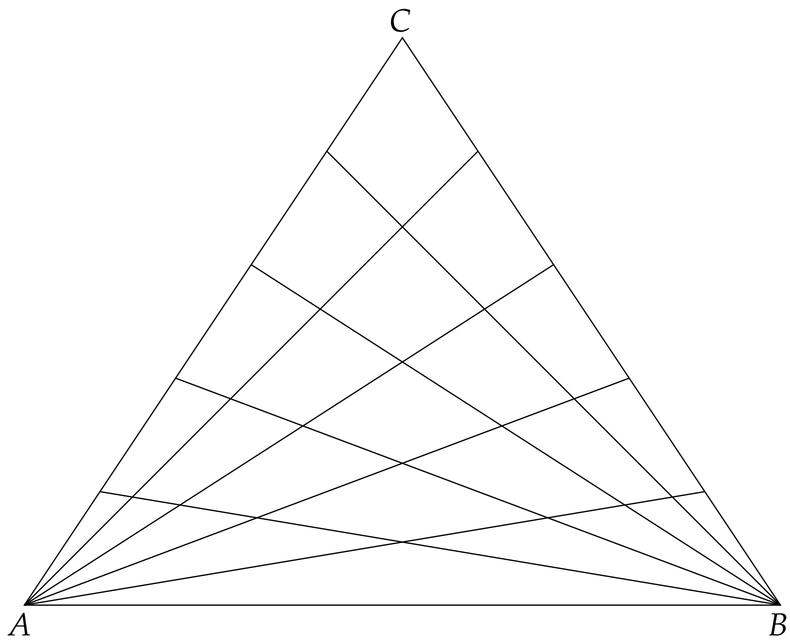
Aufgabe 867. $\ast$

a) Wie viele Dreiecke sind in dieser Figur zu sehen?

b) Kannst Du eine Anzahlformel für den allgemeinen Fall herleiten, wenn die Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ in n Teile unterteilt sind?

(Christoph Sievert, Bornheim)

Hinweis: Das Abzählen dieser Dreiecke – es sind vermutlich mehr, als man auf den ersten Blick erwarten würde – ist nicht besonders spannend; interessanter ist es, einen *systematischen* Weg zu finden, um diese Anzahl relativ schnell zu ermitteln.



Lösung:

a) Es gibt zwei verschiedene Arten von Dreiecken in der Figur:

1: Denken wir uns die Strecke $\overline{AB}$ weg. Dann haben alle Dreiecke die folgende Form: 2 Seiten gehen von A (bzw. B) aus, die dritte Seite ist Teil einer Linie, die von B (bzw. A) ausgeht.

2: Fügen wir die Strecke $\overline{AB}$ wieder hinzu, so gibt es weitere Dreiecke, die alle die Seite AB gemeinsam haben.

Andere Dreicke gibt es nicht!

Zu 1: Wie viele solche Dreiecke gibt es?

Von A gehen 5 Linien aus (ohne $\overline{AB}$). Aus diesen 5 Linien wählen wir 2 aus: Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ solcher Paare. Mit den 5 Linien, die von B ausgehen, ergibt dies $5\cdot 10 = 50$ Dreiecke.

Alles analog von B aus gesehen, ergibt noch einmal 50 Dreiecke, also insgesamt 100 Dreiecke von diesem Typ.

Zu 2: Die Strecke $\overline{AB}$ bildet mit jedem Punkt innerhalb des Dreiecks und auf den Außenlinien ein Dreieck; es gibt $5 \cdot 5$ solcher Punkte, also gibt es 25 Dreiecke von diesem Typ.

Insgesamt sind also $100 + 25 = 125$ Dreiecke in der Figur zu sehen.

b) Die Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ seien in n Teile geteilt.

Zu 1: Dann gehen von A n Linien aus (ohne $\overline{AB}$). Aus diesen n Linien wählen wir 2 aus. Es gibt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ Linienpaare. Mit den n Linien, die von B ausgehen, ergibt dies $\frac{1}{2}n(n-1) \cdot n$ solcher Dreiecke.
Aus Symmetriegründen – von B aus gesehen – wird verdoppelt, also gibt es $n^2(n-1)$ Dreicke von diesem Typ.

Zu 2: Die Strecke $\overline{AB}$ bildet mit jedem Punkt innerhalb des Dreiecks und auf den Außenlinien ein Dreieck; es gibt $n \cdot n$ solcher Punkte, also n^2 Dreiecke von diesem Typ.

Insgesamt sind es also $n^2(n-1) + n^2 = n^3$ Dreiecke.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

• Allen diesjährigen Preisträgerinnen und Preisträgern herzlichen Glückwunsch seitens der MONOID-Redaktion, insbesondere dem Gewinner des *„Goldenen M“*, **Florian Schweiger** vom Gymnasium Marktoberdorf! Der Sonderpreis in Form eines TI-84 Plus, gestiftet von TEXAS INSTRUMENTS, ging an **Stefanie Tiemann** vom Gymnasium Marienberg in Neuss; auch ihr nochmals herzliche Gratulation!

• Mit einer „Maschine zur Erzeugung von Folgen“ reiht sich Dr. **Stephan Rosebrock**, Akademischer Rat an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe (`rosebrock@ph-karlsruhe.de`), in die Reihe der MONOID-Autoren ein. Ein schon vertrauter Autor ist Prof. Dr. **Kurt Rosenbaum** von der Technischen Universität Ilmenau. Er beschäftigt sich in diesem Heft mit den ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$, die er mit Mitteln der höheren Algebra und mit Unterstützung seines Ilmenauer Kollegen Dr. Wilfried Rausch sämtlich bestimmt hat.

• Der Jahreswechsel ist auch der Zeitpunkt zur Überweisung des Abo-Beitrags von 8 € auf das MONOID-Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551900000) für den Jahrgang 2006 (Heft 85 bis 88) bzw. – sofern noch nicht erledigt – für das Schuljahr 2005/06 (Heft 83 bis 86).

• Unter `www.mathekalender.de` findet auch in diesem Jahr während der Adventszeit ein mathematischer Wettbewerb für Schülerinnen und Schüler statt. Wenn Euer Bedarf an Knobeleien von MONOID noch nicht gedeckt ist, schaut Euch den „Digitalen Adventskalender 2005“ des DFG-Forschungszentrums ***Matheon*** mal an!

Ekkehard Kroll

Die MONOID−Redaktion wünscht allen unseren Lesern und Lösern ein frohes und erfolgreiches

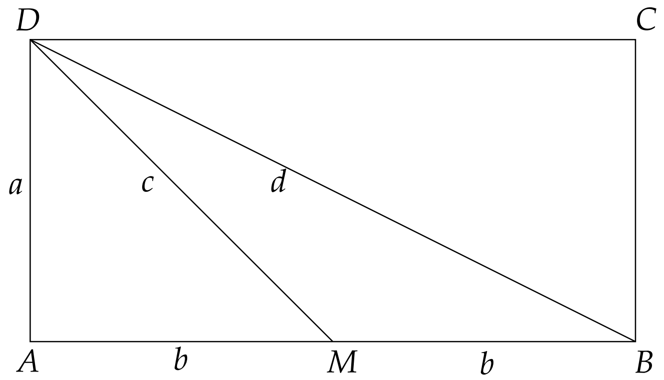
2006 !

Rechtecke und natürliche Zahlen

von Stefanie Tiemann

Problem 2 aus „Wer forscht mit?“ in MONOID 75: Wir suchen ein Rechteck mit der Eigenschaft, dass die Längen a, b, c und d natürliche Zahlen sind.

(Christoph Sievert, Bornheim)



Hier soll M der Mittelpunkt der Strecke AB sein.

Behauptung: Es gibt kein Rechteck, in dem die Längen a, b, c und d natürliche Zahlen sind.

Beweis:

Annahme: Es gibt ein solches Rechteck.

Dann gibt es auch ein Rechteck mit kleinster Diagonale d (Methode des „kleinsten Verbrechers“). In diesem Rechteck gilt nach dem Satz des Pythagoras:

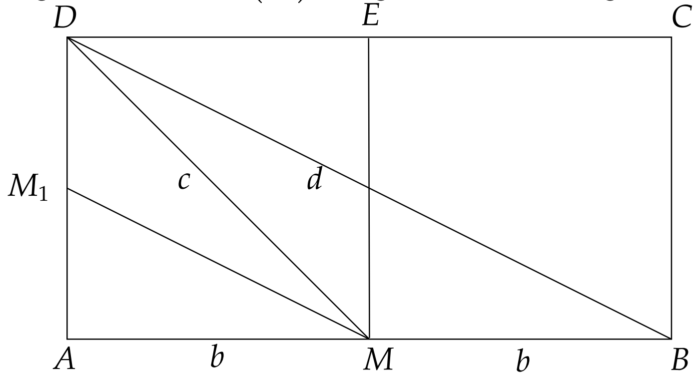
$$(R1)\ a^2 + b^2 = c^2 \qquad (R2)\ a^2 + (2b)^2 = d^2$$

Man betrachtet die 4 Fälle a und b gerade / a und b ungerade / a gerade, b ungerade / a ungerade, b gerade und leitet jeweils einen Widerspruch her.

Fall 1: a gerade und b gerade $\Rightarrow$ c^2 und d^2 sind gerade und damit auch c und d. Mit den Längen $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ und $\frac{d}{2}$ erhält man ein Rechteck mit kleinerem d und der gesuchten Eigenschaft. - Widerspruch.

Fall 2: a ungerade und b ungerade $\Rightarrow$ a^2 und b^2 haben jeweils den Wert 1 mod 4. Es gibt aber keine Quadratzahl c^2, welche gleich 2 mod 4 ist - Widerspruch.

Fall 3: a gerade, b ungerade $\Rightarrow$ $a^2 + (2b)^2$ ist gerade $\Rightarrow$ d^2 ist gerade $\Rightarrow$ d ist gerade.



M_1 ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{MM_1}$ hat die Länge $\frac{d}{2}$.

$AMED$ ist also ein Rechteck, in dem die Längen $b = |\overline{AM}|$, $\frac{a}{2} = |\overline{AM_1}| = |\overline{M_1D}|$, $\frac{d}{2} = |\overline{MM_1}|$ und $c = |\overline{DM}|$ natürliche Zahlen sind und in dem die Diagonale $c = |\overline{DM}|$ kürzer als d ist. - Widerspruch.

Fall 4: a ungerade,b gerade.
(G1) $ggT(a, b, c) = 1$.
Würde eine Primzahl p a, b und c teilen, so folgte aus $a^2 + (2b)^2 = d^2$, dass p d^2 und somit auch d teilte. Dividierte man a, b, c und d durch p, so erhielte man ein Rechteck mit den gesuchten Eigenschaften und Diagonalenlänge $\frac{d}{p} < d$. Also Widerspruch.
(G2) $ggT(a, b, d) = 1$.
Da a ungerade ist, kann keine gerade Zahl a, b und d teilen. Würde eine ungerade Primzahl p a, b und d teilen, so folgte aus $a^2 + b^2 = c^2$, dass p c^2 und somit auch c teilte. Dividierte man a, b, c und d durch p, so erhielte man ein Rechteck mit den gesuchten Eigenschaften und Diagonalenlänge $\frac{d}{p} < d$. Also Widerspruch.
Zunächst ein bekannter **Hilfssatz:**

(H) Es seien x, y und z natürliche Zahlen, welche die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen und für die zusätzlich gilt: $ggT(x, y, z) = 1$ und x ist gerade. Dann gibt es natürliche Zahlen a und b, so dass gilt: $x = 2ab, y = a^2 - b^2$ und $z = a^2 + b^2$.

Beweis des Hilfssatzes: Aus $ggT(x, y, z) = 1$ und $x^2 + y^2 = z^2$ folgt $ggT(x, z) = 1$. Es ist also x gerade und z ungerade. Deshalb gilt $ggT(z - x, z + x) = 1$. (Würde eine Primzahl p $(z - x)$ und $(z + x)$ teilen, so folgte: p ist ungerade. Ferner würde p auch $2z = (z - x) + (z + x)$ und $2x = (z + x) - (z - x)$ teilen, und damit als ungerade Zahl auch x und z, im Widerspruch zu $ggT(x, z) = 1$.)
Da $y^2 = (z - x)(z + x)$ folgt aus der Primfaktorzerlegung, dass $z - x$ und $z + x$ Quadratzahlen sind. Sei also $z + x = t^2, z - x = u^2$. t und u sind ungerade, $x = \frac{t^2 - u^2}{2}$ und $z = \frac{t^2 + u^2}{2}$.
Sei nun $2a = t + u$ und $2b = t - u$. Daraus folgt: $t = a + b$ und $u = a - b$.

Dann gilt:
$$\begin{aligned} x &= \tfrac{t^2 - u^2}{2} = \tfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2} = 2ab; \\ y^2 &= u^2 t^2 = (a - b)^2 (a + b)^2 = (a^2 - b^2)^2, \text{ also } y = a^2 - b^2; \\ z &= \tfrac{t^2 + u^2}{2} = \tfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Nun lässt sich folgendermaßen schließen:
$(R1)$ $a^2 + b^2 = c^2$
$\Rightarrow$ Es gibt nach (H) natürliche Zahlen u und v so dass gilt:
(A) $a = v^2 - u^2, b = 2vu, c = v^2 + u^2$

$(R2)$ $a^2 + (2b)^2 = d^2$
$\Rightarrow$ Es gibt nach (H) natürliche Zahlen x und y so dass gilt:
(B) $a = x^2 - y^2, 2b = 2xy$ $(\Leftrightarrow b = xy), d = x^2 + y^2$

Aus (A) und (B) ergeben sich folgende Gleichungen:
(1) $x^2 - y^2 = v^2 - u^2$ und
(2) $xy = 2uv$

Es gilt $ggT(x, y) = 1$ und $ggT(u, v) = 1$, da sonst $ggT(a, b, d) > 1$ aus (B) oder $ggT(a, b, c) > 1$ aus (A) folgen würde. (Im Widerspruch zu (G2) und (G1).)
Da a ungerade ist, ist eine der Zahlen x und y gerade, die andere ungerade.

Sei y gerade, dann ist $x^2 \equiv 1 \bmod 8$ und $y^2 \equiv 0 \bmod 8$ oder $y^2 \equiv 4 \bmod 8$. Also $x^2 - y^2 = v^2 - u^2 \in \{1 \bmod 8, 5 \bmod 8\}$. (Der Fall x gerade lässt sich entsprechend behandeln - Man multipliziert Gleichung (1) mit (-1) und vertauscht in den folgenden Beweisschritten x und y sowie u und v.)
Damit Gleichung (1) erfüllt sein kann, muss also u gerade und v ungerade sein.
Aus Gleichung (2) folgt nun: 4 teilt y, folglich $y^2 \equiv 0 \bmod 8$.
Aus (1) und $x^2 - y^2 \equiv 1 \bmod 8$ folgt $u^2 \equiv 0 \bmod 8$, also 4 teilt u.
Wieder aus Gleichung (2) folgt jetzt 8 teilt y.

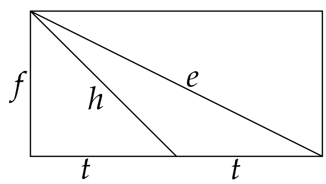
Sei $y = 2^{r+1}y'$ (mit $r \geq 2, y'$ ungerade), dann gibt es ein ungerades u' mit $u = 2^r u'$. Somit:
(3) $xy' = u'v$ und x, y', u', v sind ungerade, $ggT(x, y') = ggT(u', v) = 1$.

Es sei weiterhin:
$e = ggT(x, u'), f = ggT(x, v), g = ggT(y', u'), h = ggT(y', v)$.
Dann sind e, f, g, h paarweise teilerfremd und ungerade, insbesondere $f^2 \equiv h^2 \equiv 1 \bmod 8$.

Es gilt:
$$\begin{aligned} x &= ggT(x, 2uv) && \mid \text{da } x \text{ ein Teiler von } 2uv - \text{ Gleichung } (2) \\ &= ggT(x, u'v) && \mid \text{da } x \text{ ungerade} \\ &= ggT(x, u') \cdot ggT(x, v) && \mid \text{da } ggT(u', v) = 1 \\ &= ef \end{aligned}$$
Analog: $y' = gh, u' = eg, v = fh$.
Aus Gleichung (1) wird jetzt:
$e^2 f^2 - 2^{2r+2} g^2 h^2 = f^2 h^2 - 2^{2r} e^2 g^2$
Sei $t = 2^r g$. Dann haben wir:
$$\begin{aligned} & e^2 f^2 - 4h^2 t^2 = f^2 h^2 - e^2 t^2 \\ \Rightarrow\ & e^2 f^2 - h^2 t^2 - f^2 h^2 + e^2 t^2 = 3h^2 t^2 \\ \Rightarrow\ & (e^2 - h^2)(f^2 + t^2) = 3h^2 t^2 \qquad (4), \end{aligned}$$
wobei t, e, f, h paarweise teilerfremd sind und 4 ein Teiler von t ist.
Ferner gilt: $ggT(e^2 - h^2, h^2) = 1$, da $ggT(e, h) = 1$, und $ggT(f^2 + t^2, t^2) = 1$, da $ggT(f, t) = 1$.
Also folgt aus Gleichung (4): h^2 teilt $(f^2 + t^2)$ und $(f^2 + t^2)$ teilt $3h^2$.
Hierfür sind genau 2 Fälle möglich:
(I) $f^2 + t^2 = 3h^2$
(II) $f^2 + t^2 = h^2$.
Da $t^2 \equiv 0 \bmod 8$ und $f^2 \equiv h^2 \equiv 1 \bmod 8$, ist Fall (I) nicht möglich.

Aus Gleichung (4) folgt für den Fall (II):
$$\begin{aligned} & e^2 - h^2 = 3t^2 \\ \Rightarrow\ & e^2 = h^2 + 3t^2 \\ \Rightarrow\ & e^2 = f^2 + t^2 + 3t^2 \quad \mid \text{Fall (II)} \\ \Rightarrow\ & f^2 + 4t^2 = e^2, \end{aligned}$$
also haben wir 2 Gleichungen mit natürlichen Zahlen; die den Anforderungen des Rechtecks aus der Aufgabenstellung genügen:

(R1') $f^2 + t^2 = h^2$ und
(R2') $f^2 + (2t)^2 = e^2$
Dabei gilt: $e \leq e^2 = (ggT(x, u'))^2 \leq x^2 < x^2 + y^2 = d$.
Also $e < d$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von d.



Damit ist gezeigt: **Es gibt kein Rechteck mit den gewünschten Eigenschaften.**

Errata im Heft 83

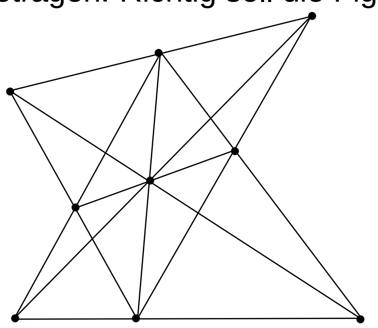
Leider bleiben trotz Korrekturlesens immer mal wieder Fehler stehen. Aber MONOID hat aufmerksame Leserinnen und Leser, die uns auf Irrtümer hinweisen. Dafür bedanken wir uns bei Marcel Ehrhardt, bei den Schülern von Herrn Kuntz und bei Dr. H. Fuchs. Im Folgenden beziehen sich die Seitenzahlen auf Heft 83 (dabei waren die Mathespielereien *„Aufzugsproblem"* und *„Winkel im Parallelogramm"* bereits in Heft 82 gestellt worden):

- Im **„Aufzugs–Problem"** auf Seite 18 muss man für das dritte Stockwerk zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob 8 oder 9 Weiterfahrende aus dem zweiten Stock ankommen. Daraus ergibt sich die Anzahl der Weiterfahrenden im dritten Stock zu 9, im vierten Stock zu 10, im fünften zu 12 und schließlich im sechsten zu 14 bzw. 15. Somit ist die korrekte Antwort auf

  Frage a): Im dritten Stock steigen möglicher Weise drei Personen aus und drei ein.

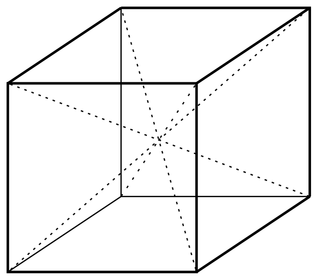
  Frage b): Im sechsten Stock befinden sich mit Sicherheit mehr Leute im Lift als im Erdgeschoss eingestiegen sind.

- In der zweiten Lösung zu „9 Punkte und 9 Strecken" auf Seite 20 oben rechts ist eine Strecke falsch eingetragen. Richtig soll die Figur so aussehen:



- In der Aufgabe **„Winkel im Parallelogramm"** auf Seite 20 muss der Winkel PQR durch Winkel **RQP** ersetzt werden. (Grund: Die Orientierung von Winkeln erfolgt im mathematisch positiven Sinne, also **gegen** den Uhrzeigersinn.)

- Ein Würfel hat nicht drei, sondern **vier** Raumdiagonalen (S. 22, **„Ein an Diagonalen armer Körper"**):



Ferner sind folgende Korrekturen anzubringen:

- Auf Seite 9 ist im Absatz (2) der Klammereinschub *(nicht aber Grenzpunkt)* zu ersetzen durch ***(nicht aber durch einen Schnittpunkt von Grenzlinien)***.

- Auf S. 15 muss es in der 2. Zeile vor dem unteren Quadrat $\mathbf{(2 \cdot 6)^2}$ statt 6^2 beziehungsweise $\mathbf{(2 \cdot n)^2}$ statt n^2 heißen.

Berechnung von Fixpunkten

von Wolfgang J. Bühler

Es sei $x_1, x_2 \dots,$ eine *rekursiv*, d. h. durch eine Vorschrift der Form $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $x_1 = a$ definierte Folge. Dabei sei f eine *stetige* Funktion, d. h. eine Funktion, für die aus der Konvergenz $x_n \to x_0$ die Konvergenz der Funktionswerte $f(x_n) \to f(x_0)$ folgt. Die Funktion f sei definiert auf einem Intervall, einer Halbgeraden oder ganz $\mathbb{R}$.

Aus diesen Voraussetzungen folgt sofort, dass $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, also dass x_0 Fixpunkt von f ist, falls x_n gegen x konvergiert. Ist umgekehrt x_0 ein Fixpunkt von f, so folgt leider nicht unmittelbar, dass die durch $x_{n+1} = f(x_n), x_1 = a$ definierte Folge gegen x_0 konvergiert. Dazu einige Beispiele:

- $f(x) = \frac{x}{2}$ mit Fixpunkt $x_0 = 0$. Hier sieht man leicht $x_n \to 0 = x_0$.
- $f(x) = -\frac{x}{2}$ führt ebenfalls zu $x_n \to 0 = x_0$, aber x_n ist jetzt abwechselnd kleiner als x_o und größer als x_0.
- $f(x) = 2x - 2$ mit Fixpunkt $x_0 = 2$. Ist $x_1 > 2$, so gilt $x_{n+1} - x_0 = 2(x_n - x_0)$, d. h. der Abstand $x_n - x_0$ verdoppelt sich: $x_n \to \infty$. Ist $x_0 < 2$, so sieht man entsprechend $x_n \to -\infty$. Ist $x_1 = 2 = x_0$, so gilt $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_0$.
- $f(x) = x^2$ hat zwei Fixpunkte $x_0 = 0, x_0' = 1$. Ist $0 < |x_1| < 1$, so gilt $|x_1| > x_2 > x_3 > \ldots \to 0$. Ist $|x_1| > 1$, so gilt $|x_1| < x_2 < x_3 < \ldots \to \infty$

Eine einfache Bedingung, die Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ gegen den Fixpunkt x_0 garantiert, ist folgende:

(B1) f ist wachsend für $x \geq x_0$, $x_1 > x_0$ und $f(x) - x_0 \leq c(x - x_0)$ für $x > x_0$, wobei $0 < c < 1$.

Gilt (B1), so ist nämlich $0 < x_2 - x_0 \leq c(x_1 - x_0)$, $0 \leq x_3 - x_0 \leq c(x_2 - x_0) \leq c^2(x_1 - x_0)$, allgemein $0 < x_n - x_0 \leq c^{n-1}(x_1 - x_0) \to 0$.
(B1) ist offenbar erfüllt, wenn $x_1 > x_0$ und $0 < f'(x) < 1$ für $x \geq x_0$.
Ebenso zeigt man, dass unter der Bedingung

(B2) f ist wachsend für $x \leq x_0$, $x_1 \leq x_0$ und $x_0 - f(x) \leq c(x_0 - x)$ für $x < x_0$, wobei $0 < c < 1$

die Folge monoton wachsend gegen x_0 konvergiert. Auch hier genügt der Nachweis von $x_1 \leq x_0$ und $0 < f'(x) < 1$ für $x \leq x_0$.

In **Aufgabe 859. Streckeniteration** kann mit Hilfe von (B1) und (B2) die Konvergenz der Folge für Winkel zwischen $45°$ und $90°$ nachgewiesen werden. Die dort betrachtete Folge lässt sich durch $x_n := a_n^2, p = \cos\alpha$ umschreiben zu $x_{n+1} = f(x_n)$ mit der Funktion $f(x) = x + 1 - 2p\sqrt{x}$ und $x_1 = 1$. Der Fixpunkt x_0 der Funktion f errechnet sich sofort zu $\frac{1}{4p^2}$.

1. Fall: $\frac{1}{2} < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann ist $x_0 < 1, 1 > f'(x) = 1 - \frac{p}{\sqrt{x}} > 0$ für $x_0 \leq x \leq 1$ und somit konvergiert $\{x_n\}$ nach (B1) monoton fallend gegen x_0, also $\{a_n\}$ gegen $\sqrt{x_0} = \frac{1}{2p}$.

2. Fall: $0 < p < \frac{1}{2}$. Hier ist $1 < x_0$ und wieder $1 > f'(x) > 0$ für $1 \leq x \leq x_0$, also konvergiert jetzt $\{a_n\} = \{x_n\}$ nach (B2) monoton wachsend gegen $\sqrt{x_0} = \frac{1}{2p}$.

Zusatzaufgabe zu 859

a) Zeige, dass Konvergenz der Folge $\{x_n\}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 = a$ gegen einen Fixpunkt x_0 von f vorliegt, wenn gilt:

(B3) Es gilt $|f(x) - x_0| \leq c|x - x_0|$ mit $0 < c < 1$ für alle x mit $x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$ für ein $b > 0$ und es ist $x_0 - b \leq a \leq x_0 + b$.

b) Versuche, mit dieser Bedingung die Konvergenz in Aufgabe 859 für Winkel zwischen $0°$ und $45°$ nachzuweisen. Erläutere die möglichen Schwierigkeiten.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Kaiser, Hans und Nöbauer, Wilfried: „Geschichte der Mathematik (für Schule und Unterricht)."

Titel und Untertitel des Buches „Geschichte der Mathematik für Schule und Unterricht" sind Programm: Es wird mit Bezug auf für die Schule relevante Inhalte auf insgesamt 320 Seiten ein kurzer Überblick über die Entwicklung der Geschichte der Mathematik dargestellt.

Die beiden österreichischen Autoren Kaiser und Nöbauer starten mit einem allgemeinen Überblick, der bei Ägyptern und Babyloniern beginnt und bis in die 1. Hälfte des 20. Jahrhunderts reicht. Dieser sehr knapp gehaltene Überblick macht ein Viertel des Gesamtwerkes aus.

Die restlichen drei Viertel des Buches füllen Untersuchungen zur Geschichte einzelner für die Schulmathematik bedeutsamer Themenbereiche: die Geschichte der Arithmetik, die Entwicklung des Zahlbegriffs, die Auflösung von Gleichungen, der Satz des Pythagoras, die drei klassischen Probleme der Antike, Kegelschnitte, die Entstehung der Infinitesimalrechnung, berühmte Probleme der Zahlentheorie sowie die Anfänge von Trigonometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Abgerundet wird der Band durch ein Kapitel über die Wandlungen des Mathematikunterrichts von der Antike bis in die 70er Jahre des 20. Jahrhunderts, eine tabellarische Auflistung von Lebensdaten und Arbeitsgebieten einiger bedeutender Mathematiker sowie einer von 3000 v. Chr. bis 1996 reichenden Zeittafel.

Fazit: „Geschichte der Mathematik für Schule und Unterricht" ist ein knapper aber umfassender Überblick über die Entwicklung der Mathematikgeschichte. Die Fülle des zugrunde liegenden Themengebietes und die Beschränkung auf einen handlichen Band lässt manches für den Fachmann sehr knapp erscheinen, als erster Einstieg in das spannende Themengebiet der Mathematikgeschichte sollte das Buch jedoch in keiner Schul- und Lehrerbibliothek fehlen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Kaiser, Hans / Nöbauer, Wilfried: Geschichte der Mathematik für Schule und Unterricht. Oldenbourg 2002, ISBN 3-486-11595-2, 320 Seiten, 28,90 €.

Art des Buches: Fachbuch über Mathematikgeschichte
Mathematisches Niveau: verständlich
Altersempfehlung: ab 16 Jahren

Martin Mattheis

Der Schild des Schilderich
oder: Die vollständige Induktion in der Geometrie

von Hartwig Fuchs

Es wird berichtet, die Germanen seien rauflustige Leute gewesen, die keiner Auseinandersetzung aus dem Weg gingen. So gerieten auch einmal Schilderich und seine Mannen mit Sigurd und seiner Truppe aneinander. Das folgende Scharmützel nahm einen unglücklichen Verlauf für Schilderich und sein Gefolge: Sie wurden besiegt und allesamt gefangen genommen. Der siegreiche Sigurd aber war beeindruckt von der Tapferkeit der Schilderich-Leute, und er machte deshalb ihrem Anführer ein großzügiges Angebot:
Ritze mit Deinem Schwert höchstens acht gerade Linien von Rand zu Rand in Deinen kreisrunden Schild. Ich lasse dann Dich und so viele der Gefangenen frei wie wir Felder (=Teilgebiete) auf dem Schild zählen. Selbst wenn Du keine Linie einritzt, lasse ich Dich und einen Deiner Männer frei.
△ Wie viele seiner Gefolgsleute kann Schilderich höchstens befreien?

Überlegen wir uns, wie Schilderich dieses Problem angehen sollte.
Er wird natürlich die erlaubte Höchstzahl von acht Linien in den Schild ritzen. Da sich aber eine Einritzung nicht rückgängig machen lässt, darf er seine acht Linien nicht irgendwie in den Schild einschneiden, weil er so leicht die bestmögliche Lösung verfehlen könnte; er sollte sich lieber schrittweise – z. B. mit Skizzen im Sand – an eine Lösung herantasten, etwa so:

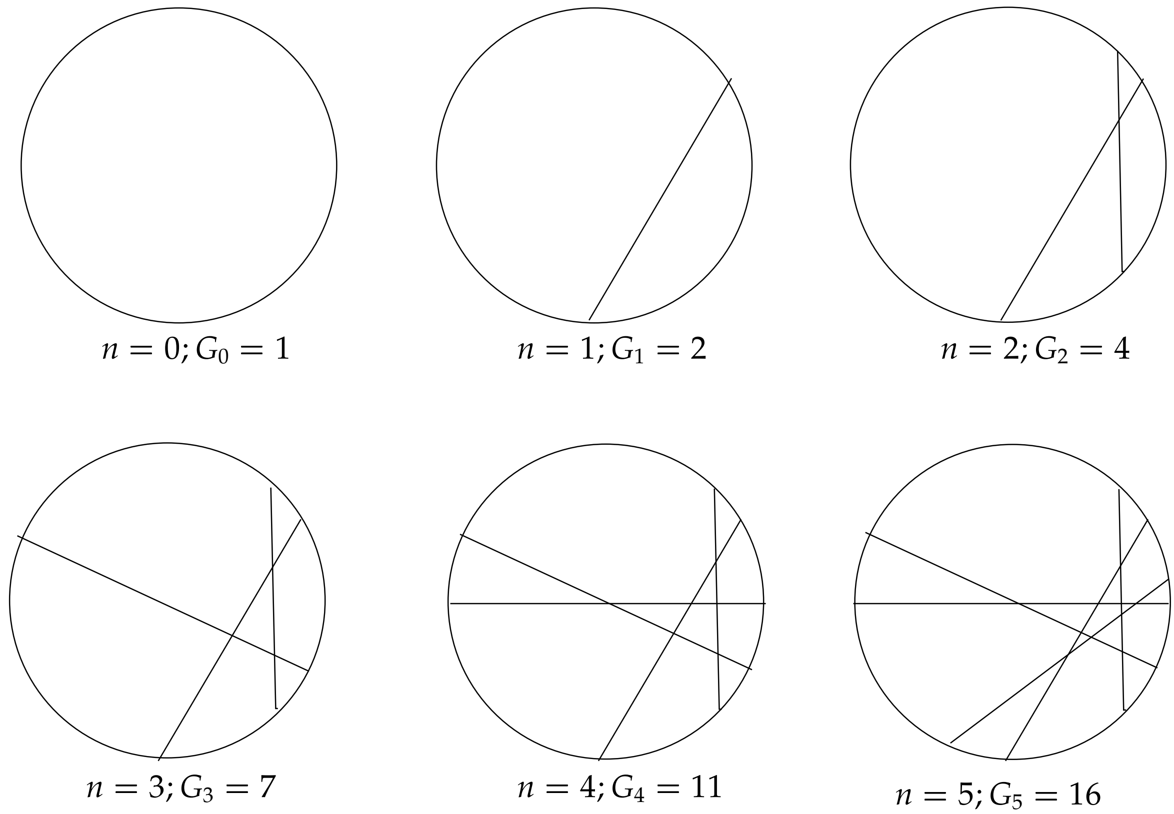


Bild 1

In Bild 1 bezeichnet n die Anzahl der Linien auf dem Schild, und G_n gibt die größte überhaupt mögliche Zahl von Gebieten bei n Linien an.

Überzeuge Dich selbst davon, dass die in Bild 1 angegebenen Zahlen $G_0, G_1, \dots, G_5$ tatsächlich maximal sind.

Aufgabe Finde eine zeichnerische Lösung für Schilderichs Problem mit $n = 8$ (eine Lösung findest Du auf Seite 39).

Wir zeigen nun, wie man beim Schilderich-Problem die Höchstzahl G_n^{max} nicht nur für $n = 8$ sondern für jede beliebige Anzahl n von Linien, $n = 0, 1, 2, \dots$, bestimmen kann.

Aus Bild 1 liest man ab, dass die Zahlen G_n^{max} nach einem regelmäßigen Muster anwachsen: $G_0^{\text{max}} \xrightarrow{+1} G_1^{\text{max}} \xrightarrow{+2} G_2^{\text{max}} \xrightarrow{+3} G_3^{\text{max}} \xrightarrow{+4} G_4^{\text{max}} \xrightarrow{+5} G_5^{\text{max}}$.

Ausführlicher: $G_0^{\text{max}} = 1$ – das hat der siegreiche Sigurd so festgelegt; dann folgen
$G_1^{\text{max}} = 1 + 1;\ G_2^{\text{max}} = 1 + (1 + 2);\ G_3^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + 3);$
$G_4^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + 3 + 4);\ G_5^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5).$

Aha! Die Lösung von Schilderichs Problem für $n = 8$ sieht also vermutlich so aus: $G_8^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 37.$

Dies Ergebnis können wir ohne Zeichnung begründen, indem wir die folgende naheliegende Regel zur Berechnung der Zahlen G_n^{max} beweisen:

(1) $G_n^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + \ldots + n)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zum Beweis von (1) ist vorweg zu klären: Welches Konstruktionsprinzip muss Schilderich befolgt haben, um mit n Linien die höchst mögliche Anzahl an Gebieten zu erhalten?

Eine Analyse von Bild 1 führt zu der Vermutung

(2) Schilderich hat eine „neue“ Linie g_n, $n = 2, 3, 4, \dots$ so in den Schild geritzt, dass g_n alle „alten“ Linien $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ innerhalb des Schildes schneidet und dabei durch keinen Schnittpunkt zweier „alter“ Linien verläuft.

In (2) ist eine unbewiesene Behauptung versteckt, nämlich:

(3) Man kann stets n Linien $g_1, g_2, \dots, g_n$ so finden, dass (2) ausführbar ist.

Wir zeigen, dass (3) für Geraden $g_1, g_2, \dots, g_n$ gilt.

a) Man kann stets zwei Geraden g_1, g_2 so angeben, dass (3) gilt.

b) Annahme: (3) gelte für jede Zahl m, $m < n$, von Geraden $g_1, g_2, \dots, g_m$.

c) Wir zeigen mit b): (3) gilt für n Geraden $g_1, g_2, \dots, g_n$.

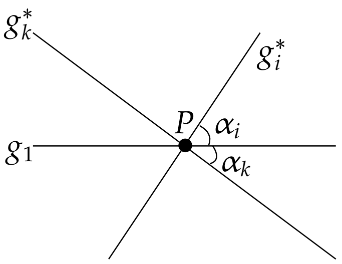


Bild 2

Sei P ein Punkt auf g_1, und g_i^* sei die zu g_i parallele Gerade durch P, $i = 2, 3, \dots n - 1$. Mit α_i sei derjenige Winkel zwischen g_1 und g_i^* bezeichnet, für den gilt: $0° < \alpha_i \leq 90°$ $\big(\alpha_i = 0°$ ist auszuschließen, weil sonst g_1 und g_i parallel wären und deshalb keinen Schnittpunkt besäßen – was aber der Annahme b) widerspräche $\big)$.

Unter den Winkeln α_i sei α_k der kleinste. Dann kann man eine Gerade g_n^* durch P angeben, die mit g_1 einen Winkel $\alpha_n < \alpha_k$ bildet. Deshalb ist g_n^* zu keiner der Geraden $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ parallel – g_n^* hat also mit jeder Geraden g_i einen Schnittpunkt. Man kann nun g_n^* stets so parallel verschieben, dass die verschobene Gerade g_n durch keinen der endlich vielen Schnittpunkte von jeweils zwei der Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ geht. Damit ist c) gezeigt – und aus a), b) und c) folgt, dass (3) zutrifft.

Wenn nun die Konfiguration aus den Schnittpunkten der n Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_n$ zu groß für Schilderichs Schild ist, dann verkleinere man sie, bis alle Schnittpunkte im Inneren des Schildes liegen – die Forderung (2) ist also stets auch mit n Linien im Inneren des Schildes erfüllbar.

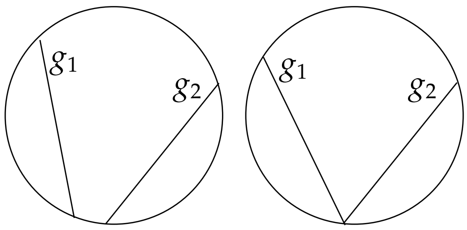
Das oben angewendete, aus den drei Schritten a), b) und c) bestehende Beweisverfahren nennt man eine **vollständige Induktion**.

Wir werden die vollständige Induktion gleich noch einmal anwenden – zum Beweis von (1). Dazu zeigen wir, dass gilt:

(4) Wenn Schilderich n Linien $n = 2, 3, 4, \ldots$ in seinen Schild ritzt, dann ergibt sich die größt mögliche Anzahl von Gebieten bei Befolgung von (2) und die größt mögliche Anzahl ist $G_n^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + \ldots + n)$. Wenn dagegen (2) nicht erfüllt ist, dann ist die Anzahl der Gebiete $< 1 + (1 + 2 + \ldots + n)$.

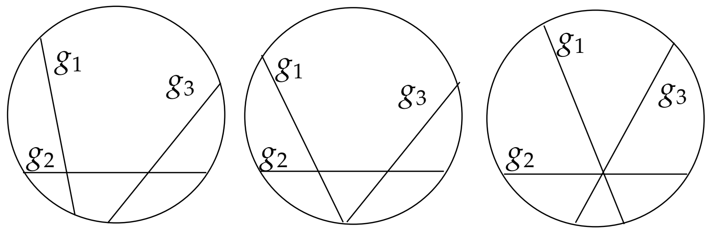
Beweis von (4):

a) (4) gilt für $n = 2$ Linien g_1, g_2. Begründe dies mit Bild 1 für $n = 2$ und mit Bild 3.



$n = 2$; $G_2 = 3$ $n = 2$; $G_2 = 3$

Bild 3



$n = 3$; $G_3 = 6$ $n = 3$; $G_3 = 6$ $n = 3$; $G_3 = 6$

Bild 4

(4) gilt auch für $n = 3$ Linien g_1, g_2, g_3.

Schneiden sich g_1, g_2, g_3 so, dass (2) gilt, dann zeigt Bild 1, dass $1 + (1 + 2 + 3)$ die Maximalzahl von Gebieten, also $G_3^{\text{max}} = 7$ ist.

Sei jetzt also (2) nicht erfüllt. Das ist der Fall, wenn z. B. g_3 mit einer anderen Linie keinen Schnittpunkt im Inneren oder den Schnittpunkt auf dem Rand des Schildes hat oder wenn g_3 durch den Schnittpunkt von g_1 und g_2 verläuft. Dann zeigt Bild 4, dass die dann maximale Anzahl von Gebieten < 7 ist.

b) Annahme: (4) gelte für jede Anzahl m, $m < n$, von Linien $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$.

c) Wir zeigen mit b): (4) gilt für n Linien $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Fallunterscheidung:

1. Alle „alten" Linien $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ und auch die neue Linie g_n seien so in den Schild geritzt, dass (2) gilt. Dann schneidet g_n die $n - 1$ „alten " Linien $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ und durchquert dabei n „alte" Gebiete – diese werden von g_n in $2n$ „neue" Gebiete zerlegt – und mehr „neue" Gebiete kann man auch mit keiner anderen Einritzung von g_n erhalten. Aus b) folgt, dass $G_{n-1}^{\text{max}} = 1 + (1 + 2 + \ldots + n - 1)$ ist. Dann aber gilt $G_n^{\text{max}} = G_{n-1}^{\text{max}} - n$(„alte " Gebiete)$+2n$(„neue" Gebiete)$= G_{n-1}^{\text{max}} + n = 1 + (1 + 2 + \ldots + n)$.

2. Wenigstens eine der Linien $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sei so in den Schild geritzt, dass (2) nicht erfüllt ist.

Dann erhält man mit dieser Linie und zwei anderen Linien wie in Bild 4 keinesfalls die höchst mögliche Anzahl von Gebieten. Somit ist erst recht bei n Linien $g_1, g_2, \ldots, g_n$

die maximale Anzahl Gebiete echt kleiner als im Fall 1.

Mit a), b) und c) ist (4) bewiesen.

Da (4) die Behauptung (1) über die maximal mögliche Gebietsanzahl bei n Linien einschließt, ist mit dem Beweis von (4) zugleich der Beweis von (1) erbracht – insbesondere ist $G_8 = 37$ nachgewiesen, so dass Schilderich maximal 37 seiner Mitstreiter befreien kann.

Ein Problem bleibt: (2) sagt zwar, was Schilderich bei seinen Einritzungen beachten muss – aber damit weiß Schilderich noch nicht, wie er die Linien konkret einritzen soll, damit er auch tatsächlich die maximale Gebietsanzahl erzielt.

Wir überlassen es zunächst unseren Lesern herauszufinden, wie Schilderich seine acht Linien einritzt, damit er 37 seiner Gefolgsleute befreit.

2006 Lösungen der Neujahrsaufgaben 2006

Zahlenrätsel

	E	I	N	G	U	T	E	S	N	E	U	E	S		
	2	0	0	6	1	7	4	4	3	8	0	7	7	2	J
N	3													1	A
R	6													6	H
E	4													2	R
S	7													1	W
E	5													6	U
L	6													4	E
D	4													0	N
I	9													5	SCH
0	0													2	T
N	0													2	D
0	8													5	I
M	0	2	0	7	2	2	6	1	4	4	6	4	5	3	E
		N	E	D	N	O	I	T	K	A	D	E	R		

Ein unendliches Produkt

Wir rechnen – zunächst ohne Nachweis, dass das erlaubt ist – nacheinander aus: 1. Klammer mal 2. Klammer; dies Produkt mal 3. Klammer; usw. Also

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^9)\,(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90}) \quad = 1 + x +^2 + \ldots + x^{99}$$
$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{99})\,(1 + x^{100} + x^{200} + \ldots + x^{900}) = 1 + x +^2 + \ldots + x^{999} \text{ usw.}$$

Das unendliche Produkt lässt sich daher (nach einer vollständigen Induktion) als die unendliche Summe $S = 1 + x +^2 + \ldots$ schreiben.

Annahme: Für x gilt $0 < x < 1$.

Dann findet man: $S = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Daraus folgt für $S = 2006$: $\frac{1}{1-x} = 2006$, also $x = \frac{2005}{2006}$.

Nun sieht man so, dass alles, was wir gemacht haben, nachträglich gerechtfertigt werden kann: Unter der Voraussetzung, dass $x = \frac{2005}{2006}$ ist, rechnen wir von Anfang an alles noch einmal durch – und nun ist das wegen $0 < x < 1$ erlaubt.

Lösungen der Aufgaben zur Folgenmaschine

Knobelaufgabe 1: Zur Startzahl 3 erhalten wir z.B. die Folge:

$$3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, \ldots$$

Die Zahlen werden immer größer und deswegen geht diese Folge, ebenso wie alle anderen Folgen dieser Folgenmaschine, gegen unendlich.

Knobelaufgabe 2: Wenn man eine ungerade Zahl mit 3 multipliziert, so bleibt sie ungerade. Addiert man danach 2, so bleibt sie immer noch ungerade. Ist also n ungerade, so ist auch $3n + 2$ ungerade; $3n + 2$ ist aber größer als n, und deswegen geht die Folgenmaschine nach unendlich für jede ungerade Startzahl.

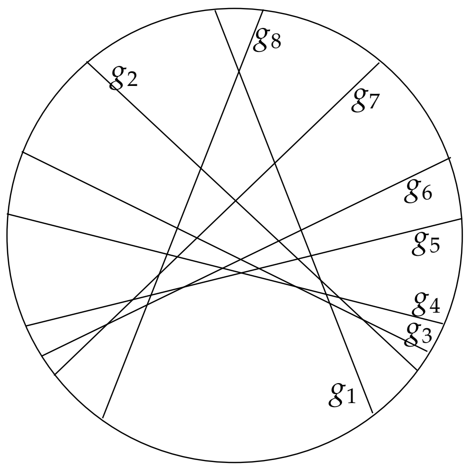
Knobelaufgabe 3: In 7 Schritten gehen 22, 128 und 24 auf die 1. In 8 Schritten gehen die 44, 43, 256 und die 48 auf die 1.

Knobelaufgabe 4:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & 9 \arrow[dl] & 18 \arrow[l] \\
1 & 2 \arrow[l] & 4 \arrow[l] & 8 \arrow[l] & 16 \arrow[l] & 32 \arrow[l] & 64 \arrow[l] & 128 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Rückwärtsiteration in $FM_n(3n + 5,\ n/2)$

Zeichnerische Lösung von Schilderichs Problem:



$n = 8$

$G_8 = 37$

Bild 5

Annahme: 7 Linien $g_1, g_2, \ldots, g_7$ seien wie in Bild 5 bereits in den Schild geritzt. Dann denke man sich die 7 Linien beliebig verlängert. Nun zeichne man nach dem in Bild 5 erkennbaren Muster ohne Rücksicht auf den Schilderich-Kreis eine weitere Linie G_8 so in Bild 5 ein, dass die „neue" Linie mit den 7 „alten" Linien insgesamt 7 Schnittpunkte hat. Wenn man jetzt die „neue" Zeichnung so verkleinert, dass die 7 „neuen" Schnittpunkte im Innern des Schilderichkreises liegen, dann erfüllen die 8 Linien $g_1, g_2, \ldots, g_8$ die Bedingung (2) – siehe oben – und sie erzeugen daher die maximale Anzahl G_8 von Gebieten auf Schilderichs Schild.

Dies Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen. Man kann daher so stets eine zeichnerische Lösung von Schilderichs Problem für jedes n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ erhalten.

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: einschließlich Heft 82)

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2004/05.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Teresa Hähn 41, Bula Hauch 6, Elisabeth Kopf 31, Patricia Petry 4, Kevin Schmitt 12, Anne Vorherr 31;
Kl. 6: Martin Achenbach 19, Emma Braininger 10, Luisa Dörrhöfer 4, Annika Flick 19, Ramona Friedrich 10, Eduard Hauck 6, Larissa Hyar 5, Peter Machemer 10, Marina Matchlakowa 10, Alexander Maus 15, Philipp Mayer 56, Ann-Kristin Müller 4, Patrick Schnell 6, Raphael Wetzel 8;
Kl. 7: Jonathan Peters 71, Lisa Simon 62, Julia Zech 61;
Kl. 8: Keno Krewer 10, Sabine Oßwalt 4;
Kl. 9: Patricia Kastner 67, Johannes Merz 15;
Kl. 10: Markus Bassermann 21; **Kl. 13:** Manuel Ross 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 6: Lena Baum 49, Daniel Draper 34, Melissa Lutsch 10, Monja Reinmuth 26, Ann-Christin Ruhland 28, Désirée Schalk 84, Johanna Stimm 26, Christoph Wippel 12;
Kl. 8: Silvana-Maria Clotan 84, Felix Liebrich 110, Richard Nixdorf 9, Martin Reinhardt 106, Jessica Tischbierek 25, Bettina Zimmermann 11.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 8: Thomas Geiß 79.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Marie-Claire Farag, Rudolf Werner):
Kl. 6: Ossama Bassant 12, Dina Hamdy 8, Ahmed Malak 11, Nada Mohamed 11, Sherif Nariman 3, Hossam Rana 11, Hossny Salma 5, Hassan Shaimaa 10, Amira Wael 12, Mohamed Youmna 7;
Kl. 7: Youmna Awadalla 5, Sarah Magdy 6.

Altötting, König-Karlmann Gymnasium: Kl. 9: Amelie Hüttner 18.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Lennart Adam 10;
Kl. 9: Christian Behrens 88, Martin Alexander Lange 75.

Bad Homburg, Humboldtschule: Kl. 10: Laura Biroth 56.

Beselich, Grundschule: Kl. 3: Marc Dinges 8.

Darmstadt, Eleonorenschule: Kl. 11: Moritz Egert 39.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 6: Marius Falkenhahn 15, Anna-Lena Herrmann 6, Theresa Isert 5, Alexander Möller 6; **Kl. 7:** Sabine Sauer 15, Angela Schmelz 9, Luisa Schmelz 2.

Eltville, Gymnasium (Betreuender Lehrer Markus Dillmann):
Kl. 5: Maruis Holderrieth 10; **Kl. 7:** Daniel Mayer 38, Hagen Söngen 38;
Kl. 9: Ralf Jung 89.

Enger, Widukind-Gymnasium:
Kl. 5: Moritz Aschemeyer 13, Jan-Henrik Branding 41, Lennart Dross 2, Nils Gärtner 2, Florian Junklewitz 12, Christoph Lindemeier 5, Lena Militschke 14, Lisa Sophia Nigbur

2, Nicklas Reetz 2, Wilhelm Reger 5, Philipp Rüter 9, Niklas Rutz 4, Erik Saharge 7, Tobias Schlegel 8.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 13: Lars Imsdahl 14.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Christoph Daum 4;
Kl. 5: Marius Burkhardt 14, Julian Roth 8, Philipp Wenzel 15;
Kl. 6: Lara Czarnetzki 15, Kai Roth 26, Isabell Schardt 7;
Kl. 7: Corinna Dinges 66, Hannah Meilinger 65, Tatjana Mendt 4, Katharina Schmidt 9, Andreas Weimer 63;
Kl. 8: Johannes Weimer 42.

Halberstadt, Martineum: Kl. 8: Robert Hesse 69.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 8: Christoph Tietz 44.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):
Kl. 7: Caroline Amin 4, Alia'a Ahmed Doma 107, Karin Emil 99, Marina Magdy 24, Heba Mandouh 53, Marina Morad 98, Sandra Waguih 29, Sylvia Zekry 18;
Kl. 9: Sherine Ali 6, Marina Ashraf 29, Alia el Bolock 50, Mariam Emad 48, Salma Mariam Ismail 85, Nadia Abou Shady 70, Marwa Talal 66;
Kl. 10: Lauren Emil 30, Nadine Gouda 34, Miriam Morad 29, Iman Tarek 26.

Kaiserslautern, Burggymnasium:
Kl. 10: Eduard Bierich 9, Kerstin Bonfica 24, Simon Gockel 10, Irina Herdt 13, Konstantin Leidner 4, Christopher Mager 4, Matthias Reis 9, Oliver Wilhelm 4, Jonathan Zorner 11;
Kl. 12: Annika Radau 13.

Kusel, Gymnasium: Kl. 5: Marco Gebauer 6, Daniel Heil 6.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 10: Maximilian Mühlbacher 39.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 7: Matthias Vollat 11; **Kl. 8:** Thu Giang Nguyen 5;
Kl. 9: Katharina Kober 70; **Kl. 10:** Christoph Karg 28;
Kl. 11: Claudia Mack 24, Judith Reinhardt 10, Adriana Spalwisz 3;
Kl. 12: Ulrich Koffler 6.

Magdeburg, Werner-von-Siemens-Gymnasium: Kl. 10: Sebastian Schulz 18.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Mattheis):
Kl. 9: Ilja Fragin 24, Niklaas Baudet von Gersdorff 21, Jennifer Groß 22, Sabrina Groß 22, Cordula Rohde 22.

Mainz-Kostheim, Krautgartenschule: Kl. 4: Dorothea Winkelvoß 32.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 7: Stefanie Grünwald 51, Katharina Irmscher 51;
Kl. 9: Maike Bäcker 22, Natalie Geiß 17, Michaela Schuster 17.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 7: Florian Schweiger 166.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 10: Bernhard Saumweber 8.

München, Rupprecht-Gymnasium: Sigurd Vogler 2.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 6: Jennifer Elster 5, Katharina Hortmanns 29, Julia Hennig 12, Kirsten Hubert 13, Marelina Kaules 6, Vivien Kohlhaas 69, Louisa Korbmacher 6, Lea Krause 6, Nora Mollner 60, Felicitas Pünder 9, Hannah Rohmann 6;
Kl. 7: Madeline Kohlhaas 86; **Kl. 9:** Daniela Leinsinger 5, Miriam Menzel 118;
Kl. 10: Annika Kohlhaas 80; **Kl. 12:** Stefanie Tiemann 137.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium: Kl. 9: Martin Jöhlinger 16.

Nürnberg, Gymnasium Stein: Marion Heublein 29.

Oberursel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Mollenhauer):
Kl. 5: Markus Bauch 17, Jan Biersack 4, Aline Endreß 35, Veronika Finke 6, Patricia Gierga 5, Romy Kaestner 5, Luisa Regina Keuscher 7, Philipp Krosien 14, Eveline Lipp 10, Gesa Musiol 48, Clara Nigratschka 10, Marie Oster 6, Heike Weber 12;
Kl. 6: Hannah Braun 29, Philipp Kalte 20, Clara Kilp 11, Jonas Köhler 14, Sabrina Kopp 43, Lars Thiel 12;
Kl. 7: Martin Graßler 16, Larissa Habbel 61, Patricia Limpert 13, Franziska Metzler 8, Sarah Rosengarten 61, Katrin Schlemm 30, Viktoria Schreiber 8, Kilian Valenti 18, Sophia Waldvogel 61, Valentin Walther 33;
Kl. 8: Annkatrin Weber 61; **Kl. 9:** Marie Jargeleit und Alicia Schwammborn 2;
Kl. 10: Sebastian Eckart 14; **Kl. 11:** Simon Bats 35.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 7: Malte Meyn 113.

Pfinztal, Ludwig-Marum-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Pfeifle):
Kl. 8: Finn Lanzendorfer 4; **Kl. 9:** Jiska Classen 4;
Kl. 10: Benjamin Bechtle 6, Fabian Lanzendorfer 4, Robin Roth 21.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Verena Bauch 24, Marian Becker 4, Sandro Birkenhof 3, Barbara Bücker 31, Carmen Engels 19, David Feiler 64, Sarah Geißler 13, Lena Gräf 5, Neal Graham 11, Jana Klaes 41, Sebastian Kramer 24, Nikola Lübbering 19, Maria Pohl 1, Lisa Rohrwasser 10, Alina Schäfer 17, Anna Schilling 14, Fabian Strang 21, Pia Wegmann 11, Selina Weich 30, Korbinian Wester 21, Nadia Wester 17;
Kl. 6: Philip Dahnen 5, Milena Domagalla 5, Leonhard Wolscht 5;
Kl. 8: Keven Runge 3.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):
Kl. 12: Jan B. Boscheinen 25.

Speyer, Kolleg (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Sergej Betcher (Bruder von Olga Betcher, 11. Kl.) 8;
Kl. 11: Viktor Eberhardt 23.

Stadtbergen: Jan Umlauft 25.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 6: Alexander Rettkowski 100; **Kl. 7:** Sina Bronkalla 19;
Kl. 10: Tobias Grunwald 32.

St. Goarshausen, Wilhelm-Hofmann-Gymnasium: Kl. 8: Julia Koch 23.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 10: Juliane Oberwieser 4.

Weiterstadt, Albrecht-Dürer-Schule: Kl. 11: Artjom Zern 21.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 5: Kira Bayer 5, Joel Jung 36, Emily Linn 71, Lukas Scheid 7;
Kl. 7: Sophie Schäfer 1, Philipp Thau 5;
Kl. 9: Julia Jung 32, Sarah Tröbs 32; **Kl. 12:** Verena Prägert 57.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Kl. 9: Charlotte Capitain 76.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 8: Moritz Maurer 17.

MONOID-Preisträger 2005

Das „Goldene M“: Florian Schweiger

Sonderpreis: Stefanie Tiemann

1. Preis: Miram Menzel, Malte Meyn, Felix Liebrich, Alia'a Ahmed Doma, Martin Reinhardt, Alexander Rettkowski, Karin Emil, Marina Morad, Ralf Jung, Christian Behrens, Madeline Kohlhaas, Salma Mariam Ismail, Silvana Clotan, Désirée Schalk.

2. Preis: Annika Kohlhaas, Thomas Geiß, Charlotte Capitain, Martin Alexander Lange, Emily Linn, Jonathan Peters, Katharina Kober, Nadia Abou Shadi, Robert Hesse, Vivien Kohlhaas, Patricia Kastner, Marwa Talal, Corinna Dinges, Hannah Meilinger.

3. Preis: David Feiler, Andreas Weimer, Lisa Simon, Annkatrin Weber, Julia Zech, Sophia Waldvogel, Larissa Habbel, Sarah Rosengarten, Nora Mollner, Verena Prägert, Laura Biroth, Philipp Mayer.

MONOID-Jahresabonnement 2006: Heba Mandouh, Katharina Irmscher, Stefanie Grünwald, Alia'a Ahmed el Bolock, Lena Baum, Gesa Musiol, Mariam Emad, Christoph Tietz, Sabrina Kopp, Johannes Weimer, Jana Klaes, Jan-Henrik Branding, Teresa Hähn.

MONOID-Stein für Löser und Löserinnen aus den 5. und 6. Klassen:
Joel Jung, Aline Endreß, Daniel Draper, Dorothea Winkelvoß, Barbara Bücker, Elisabeth Kopf, Anne Vorherr, Selina Weich, Katharina Hortmanns, Hannah Braun, Ann-Christin Ruhland, Kai Roth, Monja Reinmuth, Johanna Stimm, Sebastian Kramer, Verena Bauch, Fabian Strang, Korbinian Wester.

Das „Goldene M“ sowie die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet. Der Sonderpreis in Form eines TI-84 Plus wurde von TEXAS INSTRUMENTS *zur Verfügung gestellt.*

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Markus Dillmann, Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Helmut Ramser, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Martin Mattheis, Dr. Volker Priebe
Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Patricia Kastner, Felix Liebrich, Johannes Merz, Manuel Ross und Rebecca Zimmer
Zusammenstellung und Layout: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Internet: Oliver Labs

MONOID Jahrgang 25 Heft 84 Dezember 2005

Inhalt

Abonnementbestellungen über die MONOID-Homepage (siehe unten).
Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort ’MONOID’, zu überweisen; **Adresse nicht vergessen** (oder Bestellung über Internet).
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Johannes Gutenberg-Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
D-55099 Mainz

Telefon: 06131/39-26107
Fax: 06131/39-24389

e-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Homepage: `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`