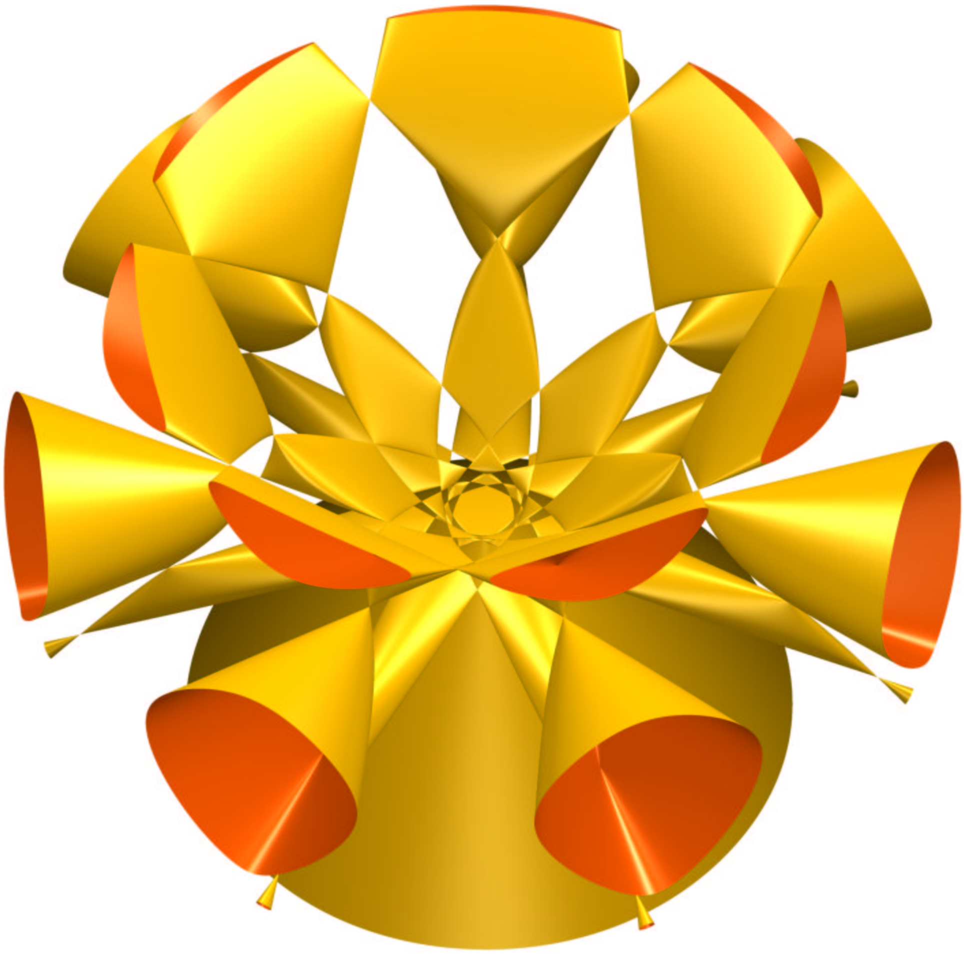
Jahrgang 24 Heft 80 Dezember 2004

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

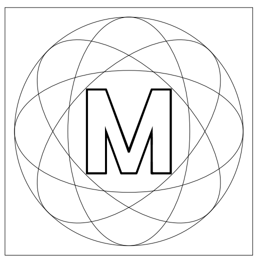
15.02.2005.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg
Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: `martinmettler@web.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**



Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Wie groß ist eigentlich unendlich?

von Valentin Blomer

Gibt es eigentlich mehr Primzahlen oder mehr Quadratzahlen? Gute Frage. Sicherlich gibt es von beiden unendlich viele. Bedeutet das, dass es genauso viele Primzahlen wie Quadratzahlen gibt? Das ist sicherlich zu einfach, denn es gibt ja auch unendlich viele reelle Zahlen, aber intuitiv würde man sofort sagen, es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen. Viel mehr. Was sind schon die natürlichen Zahlen gegen den ganzen Zahlenstrahl?

Wir müssen uns zunächst einmal genau darüber klar werden, was wir mit der umgangssprachlichen Formulierung „gibt es mehr. . . “ eigentlich meinen. Noch genauer: Wir brauchen eine mathematisch präzise Definition, wann zwei Mengen gleichgroß sind. Wenn wir zum Beispiel wissen wollen, ob in einem Kino mehr Frauen als Männer sind, können wir natürlich einfach zählen und vergleichen. Das hilft uns aber gar nichts, wenn in dem Kino zufällig unendlich viele Frauen und Männer sind. Wir können aber folgendes machen: Wir bitten immer je einen Mann und eine Frau, den Saal zu verlassen. Wenn am Schluss niemand im Saal übrig bleibt, dann waren gleichviele Männer und Frauen im Kino. Zugegeben, das dauert sehr lang bei unendlich vielen Kinobesuchern, aber das soll uns momentan nicht kümmern. Was passiert hier mathematisch? Wir versuchen, jeder Frau einen Mann zuzuordnen, so dass kein Mann zwei oder mehr Frauen bekommt (schließlich muss er ja nach der ersten Frau bereits den Saal verlassen), aber auch kein Mann am Schluss allein bleibt. In der Mathematik nennt man eine solche Zuordnung eine umkehrbar eindeutige Abbildung (das Fachwort ist Bijektion), und wir können es probeweise mit folgender Definition versuchen:

Definition. Zwei Mengen A und B heißen gleichgroß oder gleichmächtig, wenn es eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.
Umkehrbar eindeutig heißt, dass jedes $b \in B$ *genau ein* $a \in A$ besitzt, das ihm zugeordnet wurde, es bleibt also kein b allein, aber es bekommt auch kein b zwei oder mehr a's zugeordnet.

In diesem Fall wollen wir $A \sim B$ schreiben. Ist das eine gute Definition? Zunächst hat sie den Vorteil, dass sie prinzipiell auch für unendliche Mengen anwendbar ist, denn in der Definition ist ja von Anzahlen keine Rede. Für endliche Mengen liefert sie genau das, was wir erwarten würden: Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichgroß, wenn sie gleichviele Elemente enthalten. So finden wir zum Beispiel zwischen den Mengen $\{1, 7, 11\}$ und {blau, grün, rot} die Abbildung $1 \mapsto$ grün, $7 \mapsto$ rot und $11 \mapsto$ blau (jede andere wäre auch ok, wir müssen nur wenigstens eine finden). Wir werden es aber nie schaffen, eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung zwischen den Mengen $A = \{6, 7\}$ und $B = \{9, 22, -25\}$ zu finden, denn immer bleibt wenigstens ein Element aus B allein. Das klingt vielversprechend, und deshalb hat man sich in der Mathematik auch auf diese Definition geeinigt.

Was passiert bei unendlichen Mengen? Betrachten wir zum Beispiel die Mengen $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ und $B = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2 \ldots\}$. Sind sie gleichmächtig? Vorsicht, nicht zu schnell antworten. Prüfen wir die Definition. Gibt es eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen A und B? Ja, hier ist eine:

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{N} &\to \mathbb{N}_0 \\ n &\mapsto n-1 \end{aligned}$$

Die Zahl 1 wird also auf die 0 abgebildet, die 2 auf die 1 usw. Deshalb gibt es für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ ein $a \in \mathbb{N}_0$, das ihm zugeordnet wurde, nämlich $b+1$, aber dies ist auch wirklich das einzige Element. Also gilt $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0$.

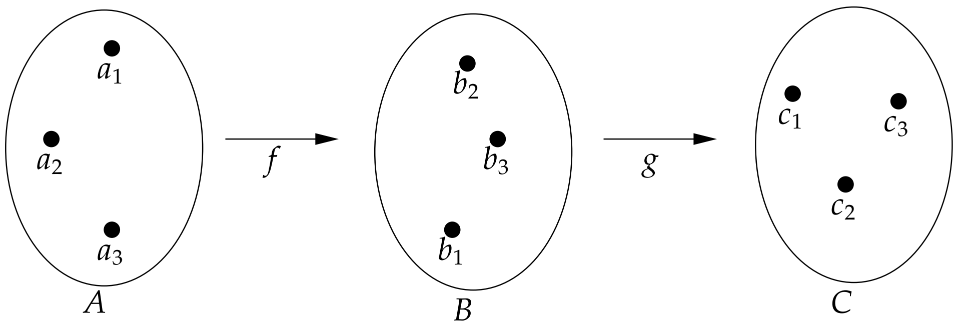
Sind die Mengen $\mathbb{N}$ und $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ gleichmächtig? Ja, hier ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung:

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{N} &\to \{2, 4, 6, 8 \dots\} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

Zugegeben, das Ergebnis ist etwas unerwartet, aber es zeigt, dass sich unendliche Mengen eben etwas anders verhalten als endliche: Es kann in der Tat vorkommen, dass eine Menge gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von ihr ist. Hier ist ein kleiner

Satz. Ist $A \sim B$ und $B \sim C$, dann ist $A \sim C$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es umkehrbar einedeutige Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$. Wir definieren $h : A \to C$ durch $h(a) = g(f(a))$ für alle $a \in A$. Dann ist h umkehrbar eindeutig.



Zurück zu unserer Ausgangsfrage. Gibt es eigentlich mehr Primzahlen oder mehr Quadratzahlen? Nach den vorherigen Überlegungen drängt sich der Schluss auf, dass beide Mengen gleichmächtig sind. Wieso? Wir nummerieren die Primzahlen durch: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ Dann ordnet die Abbildung $n \mapsto p_n$ jeder natürlichen Zahl n genau eine Primzahl zu, nämlich die n-te. Ebenso zeigt die Abbildung $n \mapsto n^2$, dass es genauso viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen gibt, und deshalb gilt nach dem vorherigen Satz $\{p \mid p \text{ prim}\} \sim \mathbb{N} \sim \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Eine Menge M, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, heißt übrigens *abzählbar unendlich*. Warum? Sie ist sicher unendlich groß, und man kann ihre Elemente abzählen: Es gibt ja eine Abbildung, die jedem $m \in M$ ein $n \in \mathbb{N}$ zuordnet; wir können also sagen, m ist das n-te Element der Menge, d.h. wir können die Menge M abzählen.

Gibt es eigentlich Mengen, die man nicht abzählen kann? Ja, es gibt Mengen, die in diesem Sinne größer sind als $\mathbb{N}$, viel größer sogar, und das werden wir im nächsten Monoid untersuchen.

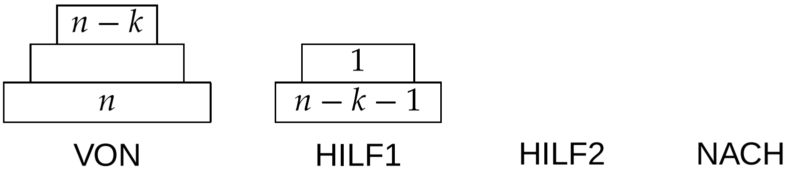
Neues zum „Turm von Heilbronn“

Im MONOID-Heft Nr. 78 hatte uns Herr **Arndt Miltner** den „Turm von Heilbronn“ vorgestellt, eine Variante des Turms von Hanoi, bei der vier statt drei Nadeln zur Verfügung stehen, und eine Reihe von Fragen damit verbunden.

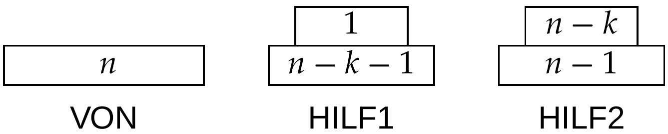
Lars Grütter, Klasse 7b im Röntgen-Gymnasium Würzburg, hat ein rekursiv angelegtes Programm in Turbo Pascal 6.0 geschrieben, mit dem man den Turm von Hanoi virtuell nachspielen kann. Nach Eingabe der Anzahl der Scheiben gibt es die Anzahl der Züge und eine optimale Zugfolge aus; damit lässt sich die Tabelle auf S. 13 in MONOID 78 bestätigen.

Dr. Wolfgang Moldenhauer aus Erfurt weist auf den Aufsatz „Ein Turm mehr in Hanoi" von Fötsch und Waldmann in der *Wurzel* 7 (1993), 154-157, hin, worin für den Fall von vier Nadeln eine obere Schranke für die benötigte Zuganzahl angegeben werde, die für die Anzahl $n \leq 9$ Scheiben auch scharf sei, wie man durch vollständiges Absuchen aller Möglichkeiten nachprüfe (Enumeration). Herr Moldenhauer schreibt weiter:

Die Idee dabei ist: Man wählt $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ geschickt und legt zunächst $n-k-1$ Scheiben von VON nach HILF1 unter Benutzung von HILF2 und NACH.



Dann werden k Scheiben von VON auf HILF2 unter Benutzung von NACH gelegt.



Wir legen die Scheibe n um.

Dann werden die k Scheiben von HILF2 nach NACH unter Benutzung von VON gelegt. Schließlich legt man die $n-k-1$ Scheiben von HILF1 nach NACH unter Benutzung von VON und HILF2.

Sei $v(n)$ die benötigte Zuganzahl. Dann ist $v(0) = 0$ und

$$v(n) = 2 \cdot \min_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} \{v(n-k-1) + d(k)\} + 1 \text{ mit } d(n) = 2^n - 1 \text{ (3 Stangen!).}$$

Man findet heraus (Beweis durch vollständige Induktion!):

Sei $n = r + \sum_{i=1}^{p} i$ mit $p \geq 0$, $r \in \{1, \ldots, p+1\}$. (Diese Darstellung ist eindeutig!)

Dann ist $$v(n) = v\left(r + \sum_{i=1}^{p} i\right) = (r+p-1)2^p + 1.$$

Das optimale k (k war ja „geschickt" gewählt worden) ergibt sich zu

$k = p = \left[\sqrt{2n + \sqrt{n}}\right] - 1$. Schließlich ergibt sich für große n

$$v(n) \approx \sqrt{2n} \cdot 2^{\sqrt{2n}}.$$

Dies ist immerhin deutlich besser als $d(n) \approx 2^n$.

Natürlich kann man diese Idee auf 5 Stangen (Man wählt k_1 und k_2 geschickt, so dass ...), auf 6 Stangen (Man wählt k_1, k_2, k_3 geschickt), ... übertragen. Man erhält dann obere Schranken*. Dies löst aber das Problem nicht abschließend, weil unklar bleibt, ob die jeweils vorgestellte Verteilung der Scheiben die beste ist. Oder anders gesagt: Es fehlt eine untere Schranke.

Ich bin im Übrigen überzeugt, dass die für 4 Stangen angegebene Lösung die beste ist. Und schließlich:

„Der Turm von Heilbronn" ist zumindest „Der Turm von Jena".

*Natürlich ist die Schranke weiter zu verbessern, da mehr als zwei Hilfsfelder zur Verfügung stehen.

Über das „Modulo-Rechnen“

von Ekkehard Kroll

„Wann geht euer Flieger nach Australien?“ – “Heute Abend um 22 Uhr 40.“ – „Und wie lange seid ihr unterwegs?“ – „Mit Umsteigen in Bangkok und knapp 4 Stunden Aufenthalt in Singapur sind es bis Darwin gut 21 Stunden.“ – „Dann kommt ihr ja – bei Berücksichtigung der Zeitverschiebung von 9 Stunden, die dazu zu zählen sind – erst übermorgen um 4 Uhr 40 in Darwin an!“

Ein Flug nach Australien ist sicher nicht alltäglich, aber ein „Rechnen modulo 24“, um Uhrzeiten zu bestimmen, schon. Da 30 bei Division durch 24 den Rest 6 lässt, umfasst diese Zeitspanne also einen ganzen Tag und 6 Stunden. Wir können auch so rechnen:

$$22 + 30 = 52 = 2 \cdot 24 + 4 \equiv 4 \ (\textit{modulo}\ 24),$$

somit wird aus 22:40 Uhr zwei Tage später 4:40 Uhr.

Ein anderes Beispiel betrifft das Datum von Wochentagen. Die diesjährige MONOID-Feier fand am 27. November statt. Auf welches Datum fällt sie im nächsten Jahr? Das Jahr hat 52 Wochen; wegen $365 = 7 \cdot 52 + 1 \equiv 1\ (\textit{modulo}\ 52)$ haben wir eine Verschiebung um 1 Wochentag; der 27. November 2005 ist also ein Sonntag; da die MONOID-Feier aber an einem Samstag statt finden soll (nämlich immer am Samstag vor dem 1. Adventssonntag), wird die Feier mit der Vergabe der MONOID-Preise am 26. November 2005 sein. (Vorsicht bei Schaltjahren!)

Die Division einer ganzen Zahl n durch eine natürliche Zahl $m > 1$, den ***Modul***,

$$n = q \cdot m + r,$$

mit einer ganzen Zahl q kann immer so eingerichtet werden, dass der auftretende Rest r zwischen 0 („die Division durch m geht auf“) und $m - 1$ liegt. Man muss nur den Quotienten q betragsmäßig größtmöglich wählen. Sind wir nur an den dabei auftretenden Resten und nicht an dem genauen Wert von q interessiert, schreiben wir $\boldsymbol{n \equiv r}$ **(modulo** $\boldsymbol{m}$**)** oder auch kurz $\boldsymbol{n \equiv r \pmod{m}}$ (lies: „n kongruent r *modulo* m“) und sagen „n wird *modulo* m auf den Rest r reduziert“. Wegen $n - r = q \cdot m$ gilt die Äquivalenz:

$$n \equiv r \pmod{m} \iff m \text{ teilt } (n - r).$$

Damit lassen sich leicht die elementaren Rechenregeln für Kongruenzen herleiten:
Aus $n_1 \equiv r_1 \pmod{m}$ und $n_2 \equiv r_2 \pmod{m}$ folgt:

$$n_1 + n_2 \equiv r_1 + r_2 \pmod{m},\ n_1 - n_2 \equiv r_1 - r_2 \pmod{m} \text{ und } n_1 \cdot n_2 \equiv r_1 \cdot r_2 \pmod{m}.$$

Wenn dabei die rechten Seiten den Bereich zwischen 0 und $m - 1$ verlassen, kann eine erneute Reduktion *modulo* m vorgenommen werden. Bei der Division müssen wir allerdings vorsichtig sein: Es ist z.B. $8 \equiv 2 \pmod{6}$ und $2 \equiv 2 \pmod{6}$, aber nicht $8 : 2 \equiv 2 : 2 \pmod{6}$. Eine ähnliche Beobachtung machen wir beim Erweitern bzw. Kürzen von Kongruenzen. Stets gilt nämlich:
Aus $n \equiv r \pmod{m}$ folgt $n \cdot t \equiv r \cdot t \pmod{m}$ für alle ganzen Zahlen t.
Dagegen kann nicht immer ein gemeinsamer Faktor weggekürzt werden; so folgt z.B. aus $8 \equiv 2 \pmod{6}$, also $4 \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{6}$ keineswegs $4 \equiv 1 \pmod{6}$.
Wenn allerdings der Faktor t in der Kongruenz $n \cdot t \equiv r \cdot t \pmod{m}$ zum Modul m teilerfremd ist, darf er weggekürzt werden; denn aus $n \cdot t - r \cdot t = q \cdot m$ folgt $(n - r) \cdot t = q \cdot m$. Wenn nun m und t teilerfremd sind, muss m bereits komplett in $n - r$ „stecken“, d.h., $n \equiv r \pmod{m}$ sein.

Überhaupt sind die zu einem Modul m teilerfremden Reste in der Menge $\{1, \ldots, m-1\}$ von besonderem Interesse. Wenn sie mit einander multipliziert und anschließend die Produkte modulo m reduziert werden, ergeben sich wieder zu m teilerfremde Reste; denn aus $r_1 \cdot r_2 \equiv r \pmod{m}$ mit zu m teilerfremden Resten folgt $r_1 \cdot r_2 = r + q \cdot m$ mit einer ganzen Zahl q. Wären nun r und m nicht teilerfremd, so hätten sie (mindestens) einen gemeinsamen Primteiler, der dann auch das Produkt $r_1 \cdot r_2$ und folglich mindestens einen der beiden Faktoren r_1 oder r_2 teilen müsste, was der Teilerfremdheit von r_1 und r_2 zu m widerspräche.

Da 1 und $m-1$ stets zu m teilerfremd sind, gibt es mindestens einen, in der Regel zwei zu m teilerfremde Reste (beachte $m \geq 2$). Multiplizieren wir alle zu m teilerfremden Reste mit einem festen zu m teilerfremden Rest r und reduzieren anschließend *modulo* m, erhalten wir wieder *alle* zu m teilerfremden Reste; denn aus $r_1 \cdot r \equiv r_2 \cdot r \pmod{m}$ würde durch Kürzen sofort $r_1 \equiv r_2 \pmod{m}$ folgen. Also gibt es auch einen zu m teilerfremden Rest r_0 mit $r_0 \cdot r \equiv 1 \pmod{m}$, d.h., r_0 ist der multiplikativ-inverse Rest zu r. Somit ist die Menge aller zu m teilerfremden Reste bezüglich der Multiplikation und der Inversenbildung *modulo* m abgeschlossen; man sagt, dass sie *modulo* m eine *Gruppe* bildet. Bezeichnen wir diese mit G_m, so ist z.B. $G_2 = \{1\}$, $G_3 = \{1,2\}$, $G_4 = \{1,3\}$, $G_5 = \{1,2,3,4\}$, $G_6 = \{1,5\}$, $G_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$, $G_8 = \{1,3,5,7\}$, $G_9 = \{1,2,4,5,7,8\}$, $G_{10} = \{1,3,7,9\}, \ldots$ (Setzt die Reihe selbst noch ein Stück fort! Was fällt euch auf?)*

Bezeichnet $|G_m|$ die Anzahl der Elemente von $G_m = \{r_1, r_2, \ldots, r_{|G_m|}\}$ und ist $r \in G_m$, so gilt wegen $\{r \cdot r_1, r \cdot r_2, \ldots, r \cdot r_{|G_m|}\} \equiv \{r_1, r_2, \ldots, r_{|G_m|}\} \pmod{m}$:

$$r^{|G_m|} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{|G_m|} = r \cdot r_1 \cdot r \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r \cdot r_{|G_m|} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{|G_m|} \pmod{m}$$

Durch Kürzen folgt:

$$r^{|G_m|} \equiv 1 \pmod{m}$$

Das ist der Satz von EULER-FERMAT, der im Spezialfall, dass m eine *Primzahl* p ist, die Form

$$r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

erhält (so genannter *kleiner Satz von FERMAT*); denn hier sind die sämtlichen Reste $1, \ldots, p-1$ automatisch zu p teilerfremd, so dass $|G_p| = p-1$ gilt. Dies kann als Primzahltest herangezogen werden – im ausschließenden Sinn (denn die Erfüllung des kleinen Satzes von FERMAT ist nur eine notwendige und noch keine hinreichende Bedingung): Gibt es eine zu m teilerfremde Zahl r, die

$$r^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

nicht erfüllt, so ist m keine Primzahl.

Beispiel: Könnte 1023 Primzahl sein? Da 2 zu 1023 offensichtlich teilerfremd ist, untersuchen wir (testweise!) $2^{1022} \pmod{1023}$: Aus $2^{10} = 1024 \equiv 1 \pmod{1023}$ folgt sofort $2^{1022} = 2^{1000} \cdot 2^{20} \cdot 2^2 \equiv 1^{100} \cdot 1^2 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{1023}$; also ist 1023 keine Primzahl. Dies hätten wir allerdings noch schneller an der Tatsache erkennen können, dass 3 ein Teiler von 1023 ist, was wiederum ganz schnell an der Quersumme 6 abzulesen ist. Wie ist dieser Zusammenhang zu finden?

Nun, mit Hilfe des Modulo-Rechnens lassen sich praktische Teilbarkeitsregeln herleiten, was hier am Beispiel der Teilbarkeit einer ganzen Zahl durch 3 bzw. durch 11 demonstriert werden soll.

---

* Auf der Existenz von multiplikativen Inversen in G_m kann sogar eine Bruchrechnung *modulo* m aufgebaut werden – mehr darüber im nächsten Heft!

Ist $n = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ die Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zehnersystem, gilt also $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, so bezeichnet man die $a_i, i = 1, 2, \dots, k$, als die *Ziffern* von n und die Summe $Q := a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ als ihre *Quersumme* bzw. $A := (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + - \dots + a_2 - a_1 + a_0$ als ihre *alternierende Quersumme*. Nun gilt $10^0 = 1 \equiv 1 \pmod 3$, $10^1 = 10 \equiv 1 \pmod 3$, also $10^i \equiv 1 \pmod 3$ für alle $i = 0, 1, 2, \dots$ und folglich $n \equiv Q \pmod 3$. Dies liefert die Teilbarkeitsregel:

Eine Zahl ist durch 3 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Entsprechend folgt aus $10^0 = 1 \equiv 1 \pmod{11}$, $10^1 = 10 \equiv -1 \pmod{11}$, also $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$ für alle $i = 0, 1, 2, \dots$ und folglich $n \equiv A \pmod{11}$ die Teilbarkeitsregel:

Eine Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Das Modulo-Rechnen können wir auch nutzbringend anwenden bei der Behandlung folgender Frage aus dem Artikel über das **Dürer-Quadrat** in MONOID Nr. 79:

Ist 34 stets ein Teiler von $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 16^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$?

Da diese Summe eine gerade Zahl und $34 = 2 \cdot 17$ mit ungerader Primzahl 17 ist, reduziert sich das Problem auf die Frage:

Ist 17 stets ein Teiler von $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 16^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$?

Für $1 \leq n \leq 6$ war in MONOID 79 durch direkte Berechnung der Potenzsummen ihre Teilbarkeit durch 34 schon bestätigt worden. Mit Hilfe des Computeralgebra-Systems DERIVE kann festgestellt werden, dass dies für den jeweils untersuchten Bereich (z.B. für $1 \leq n \leq 100$) auch gilt außer in den Fällen, in denen n ein Vielfaches von 16 ist. Woran liegt das?

Sei p eine ungerade Primzahl und $n = k \cdot (p-1)$ mit einer natürlichen Zahl k. Aus dem kleinen Satz von FERMAT folgern wir für jedes $r \in G_p = \{1, \dots, p-1\}$:

$$r^n = (r^{p-1})^k \equiv 1^k = 1 \pmod p$$

Damit erhalten wir für die Summe der n-ten Potenzen:

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (p-1)^n \equiv 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = p - 1 \pmod p$$

Für $p = 17$ bedeutet dies: Wenn n ein Vielfaches von 16 ist, teilt 17 nicht die Summe $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 16^n$; die in MONOID 79 allgemein gestellte Frage ist also zu verneinen.

Wie steht es nun mit den übrigen Fällen? Sei p wieder eine beliebige ungerade Primzahl und n nun kein Vielfaches von $p - 1$. Die Division von n durch $p - 1$ mit Rest liefert eine Darstellung der Form $n = k \cdot (p-1) + s$ mit $1 \leq s \leq p - 2$. Wegen

$$r^n = (r^{p-1})^k \cdot r^s \equiv 1^k \cdot r^s = r^s \pmod p$$

können wir uns von vornherein auf $1 \leq n \leq p - 2$ beschränken. Ist d der größte gemeinsame Teiler von n und $p - 1$, so reduziert sich $\{1^n, 2^n, \dots, (p-1)^n\}$ *modulo* p d-fach auf eine Menge mit $\frac{p-1}{d}$ Elementen, deren Summe bereits $\equiv 0 \pmod p$ ist, so dass insgesamt

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \equiv d \cdot 0 = 0 \pmod p$$

wird. Zum detaillierten Nachweis werden einige Resultate über Potenzreste aus der elementaren Zahlentheorie benötigt, deren Herleitung diesen Rahmen sprengen würde. Sind z.B. n und $p - 1$ teilerfremd, gilt $\{1^n, 2^n, \dots, (p-1)^n\} \equiv \{1, 2, \dots, p-1\} = G_p \pmod p$, so dass

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \equiv 1 + 2 + \dots + (p-1) = p \cdot \tfrac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod p$$

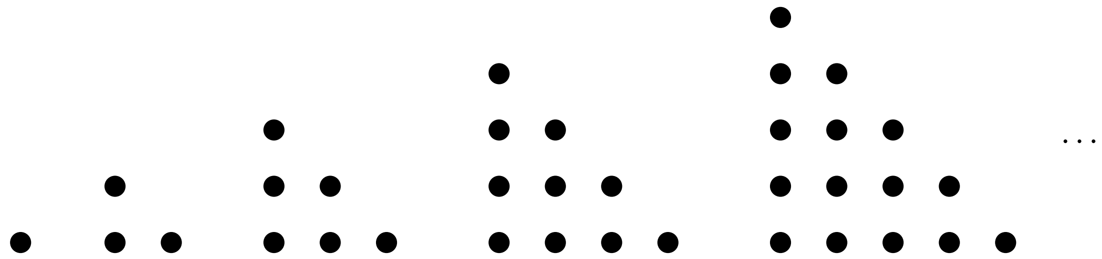
ist. Für $p = 17$ und ein $n \in \mathbb{N}$, das kein Vielfaches von 16 ist, gilt also tatsächlich:

$$1^n + 2^n + \dots + 16^n \equiv 0 \pmod{17}$$

Dreieckszahlen

von Hartwig Fuchs

Wie so viele mathematische Historien beginnt auch die der Dreieckszahlen in der griechischen Antike, in der Zahlen stets in Beziehung zu geometrischen Objekten gesetzt wurden: Zum Beispiel brachten die Griechen Kubikzahlen n^3 mit würfelförmigen Körpern (cubus), Quadratzahlen mit quadratischen Flächen in Verbindung – und Dreieckszahlen definierten sie durch „dreieckige“ Anordnungen von Punkten in der Ebene:



Diesen „Dreiecken“ ordneten sie die **Dreieckszahlen** (kurz: **Δ-Zahlen**) $3, 6, 10, 15, \ldots$ zu. Heute lässt man die Folge der Δ-Zahlen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ mit $\Delta_1 = 1$ beginnen – was einem einzelnen Punkt der Ebene entspricht.
Aus der Figur erkennt man das Bildungsgesetz der Folge $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$:
$\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \Delta_1 + 2$, $\Delta_3 = \Delta_2 + 3$, $\ldots$ – allgemein:

(1) $\Delta_n = \Delta_{n-1} + n, \ n \geq 2.$

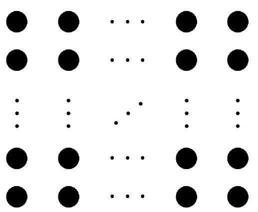
Wir wollen statt (1) eine einfacher funktionierende Bildungsregel angeben. Weil
$\Delta_n = \Delta_{n-1} + n = \Delta_{n-2} + (n-1) + n = \Delta_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots =$
$1 + 2 + 3 + \ldots + n$ gilt, erhält man mit der bekannten Summenformel (vgl. Heft 79)
$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, also

(2) $\Delta_n = \frac{1}{2}n(n+1), \ n \geq 1.$

Eine kleine Liste von Δ-Zahlen:

Δ_n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}	Δ_{11}	Δ_{12}	Δ_{13}	$\ldots$
Wert von Δ_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	$\ldots$

Die Griechen haben (2) mit einer geometrischen Überlegung hergeleitet:



Ein quadratisches Punktmuster aus $(n+1)^2$ Punkten hat $n+1$ Punkte auf einer Diagonalen und Δ_n Punkte oberhalb sowie auch Δ_n Punkte unterhalb der Diagonalen. Somit ist $(n+1)^2 = n + 1 + 2\Delta_n$. Also gilt $\Delta_n = \frac{1}{2}\big((n+1)^2 - (n+1)\big) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Auch einen Test dafür, ob eine natürliche Zahl d eine Δ-Zahl ist oder nicht, kannten die Griechen bereits. Man setze d in die Gleichung (2) ein. Wenn dann die positive Lösung n der Gleichung $d = \frac{1}{2}n(n+1)$ eine natürliche Zahl ist, dann ist d die Δ-Zahl Δ_n. Nun gilt: Aus $d = \frac{1}{2}n(n+1)$ folgt $n^2 + n - 2d = 0$ und $n = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1+8d}\right)$. Falls nun $1 + 8d$ eine Quadratzahl ist, dann ist $\sqrt{1+8d}$ eine ungerade natürliche Zahl und $-1 + \sqrt{1+8d}$ ist eine gerade natürliche Zahl; n selbst ist daher eine natürliche Zahl. Damit hatten die Griechen das
Kriterium: Wenn $1 + 8d$ eine Quadratzahl ist, dann ist d eine Δ-Zahl.

Beispiel:
$d = 2004$ ist keine Δ-Zahl, weil $1 + 8d = 16033$ keine Quadratzahl ist. Dagegen ist $d = 2016$ wegen $1 + 8d = 127^2$ eine Δ-Zahl; aus $n = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{127^2}\right) = 63$ folgt $d = \Delta_{63}$.

Eigenschaften von Δ-Zahlen
Unter den Δ-Zahlen findet sich nur eine Primzahl: $\Delta_2 = 3$. Sei $n > 2$. Dann ist Δ_n keine Primzahl. Falls nämlich n gerade ist, $n = 2m$, dann hat $\Delta_n = \frac{1}{2}n(n+1) = m(n+1)$ die Teiler $m \neq 1$ und $n + 1 \neq 1$; falls n ungerade und daher $n + 1$ gerade ist, $n + 1 = 2m$, dann hat $\Delta_n = n \cdot m$ die Teiler $n \neq 1$ und $m \neq 1$.

Die Δ-Zahlen Δ_{4n} und Δ_{4n+3} sind gerade, während Δ_{4n+1} und Δ_{4n+2} ungerade sind, $n = 1, 2, 3 \ldots$
Denn mit (2) gilt:
$\Delta_{4n} = \frac{1}{2}4n(4n+1) = 2n(4n+1)$ und
$\Delta_{4n+3} = \frac{1}{2}(4n+3)(4n+3+1) = (4n+3)(2n+2)$;
$\Delta_{4n+1} = \frac{1}{2}(4n+1)(4n+1+1) = (4n+1)(2n+1)$,
$\Delta_{4n+2} = \frac{1}{2}(4n+2)(4n+2+1) = (2n+1)(4n+3)$.

Es sei p eine Primzahl, $p > 2$. Dann sind die Δ-Zahlen Δ_{pn-1} und Δ_{pn} durch p teilbar, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dies folgt unmittelbar aus $\Delta_{pn-1} = \frac{1}{2}(pn-1)pn$ und $\Delta_{pn} = \frac{1}{2}pn(pn+1)$.

Es gibt Δ-Zahlen Δ_n, deren Index n selbst eine Δ-Zahl ist. Beispiel: Δ_1, Δ_3, Δ_6, Δ_{10} sind solche Zahlen. Wir können diese Sorte von Δ-Zahlen wegen $1 = \Delta_1$, $3 = \Delta_2$, $6 = \Delta_3$, $10 = \Delta_4$ auch so schreiben:
$\Delta_1 = \Delta_{\Delta_1}$, $\Delta_3 = \Delta_{\Delta_2}$, $\Delta_6 = \Delta_{\Delta_3}$, $\Delta_{10} = \Delta_{\Delta_4}$.
Offensichtlich sind mit Δ_{Δ_n}, $n = 1, 2, 3, \ldots$, alle Δ-Zahlen mit einer Δ-Zahl als Index erfasst. Die Frage, wie man die Zahlen Δ_{Δ_n} berechnen kann, führt unmittelbar in das Gebiet der

Beziehungen zwischen Δ-Zahlen.
Zwischen den Δ-Zahlen Δ_n und Δ_{Δ_n} besteht der Zusammenhang: $\Delta_{\Delta_n} = \frac{1}{2}\Delta_n^2 + \frac{1}{2}\Delta_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Das ergibt sich sofort, wenn man in der Gleichung (2) jede Zahl n durch Δ_n ersetzt und dann die rechte Seite der neuen Gleichung ausmultipliziert.

Eine schöne additive Beziehung zwischen Δ-Zahlen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= \Delta_4 \\ \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8 &= \Delta_9 + \Delta_{10} \\ \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{15} &= \Delta_{16} + \Delta_{17} + \Delta_{18} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ein Beweis, dass alle diese Gleichungen zutreffen, lässt sich aus der unten angegebenen Gleichung (5) herleiten.

Ohne Beweis geben wir noch zwei multiplikative Beziehungen zwischen Δ-Zahlen an: $\Delta_n \cdot \Delta_{n-1} = \frac{1}{2}\Delta_{n^2-1}$ und $(\Delta_{n+1} \cdot \Delta_{n-1}) : \Delta_n = \Delta_n - 1$.

Beziehungen zwischen Δ-Zahlen und anderen Zahlenarten
Einen sehr interessanten Zusammenhang zwischen natürlichen Zahlen und Δ-Zahlen

hat C. F. Gauß im Alter von 19 Jahren entdeckt. Am 10. Juli 1796 notiert er in seinem Tagebuch

(3) „EΥPHKA! num $= \Delta + \Delta + \Delta$."

– sehr frei übersetzt: „Sieh' da (heureka)! Jede natürliche Zahl (num) ist die Summe von höchstens drei Δ-Zahlen."

Die Freude von Gauß über (3) ist zu sehen vor dem Hintergrund eines ähnlichen additiven Zerlegungsproblems, für das weder Gauß selbst noch viele Mathematiker vor ihm und nach ihm bis heute übrigens keine Lösung gefunden haben, nämlich Goldbachs Vermutung „$2 \cdot$ num $=$ prim $+$ prim" (jede gerade natürliche Zahl ≥ 4 ist die Summe zweier Primzahlen).

Eine allgemein bekannte Verbindung zwischen Δ-Zahlen und natürlichen Zahlen stellt die folgende Summenformel her – vgl. (2):

(4) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \Delta_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Weiter gilt (ohne Beweis):

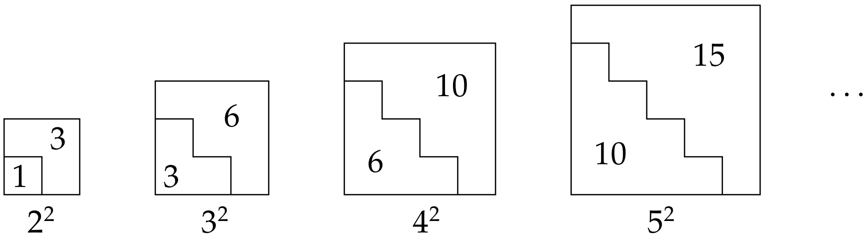
(5) $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Besonders vielfältig sind die Beziehungen zwischen Δ-Zahlen und Quadratzahlen; wir können nur einige davon angeben.

Jede Summe $\Delta_n + \Delta_{n+1}$ zweier aufeinander folgender Δ-Zahlen Δ_n, Δ_{n+1} ist eine Quadratzahl: $\Delta_n + \Delta_{n+1} = (n+1)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Denn $\Delta_n + \Delta_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+(n+2)) = (n+1)^2$.

Aber schöner ergibt sich die Aussage über $\Delta_n + \Delta_{n+1}$ aus der folgenden Figur:



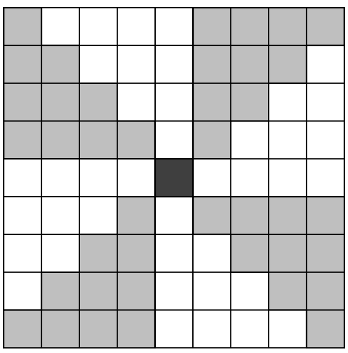
Bereits Diophant von Alexandria (um 250 n.Chr.) wusste, dass $1 + 8\Delta_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ stets eine Quadratzahl, nämlich $(2n+1)^2$, ist und dass umgekehrt jede ungerade Quadratzahl $(2n+1)^2$ die Summe aus 1 und dem 8-fachen der Δ-Zahl Δ_n ist; also:

(6) $1 + 8\Delta_n = (2n+1)^2$.

Beispiel: Mit $\Delta_{10} = 55$ folgt $1 + 8\Delta_{10} = 21^2$; umgekehrt ist $2005^2 = 1 + 8 \cdot \Delta_{1002}$.

Am schnellsten zeigt man Diophants Aussage (6) mit (2) so:

$1 + 8\Delta_n = 1 + 8 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.



Aber wie schon bemerkt wurde: die Griechen haben ihre arithmetischen Überlegungen bevorzugt geometrisch dargestellt. Machen wir es ebenso.

Aus der nebenstehenden Figur – die ein Beispiel für $(2n+1)^2 = 9^2$ abgibt – liest man ab: Das gegitterte große Quadrat enthält $(2n+1)^2$ kleine Quadrate; jede der 8 getreppten Figuren besteht aus Δ_n kleinen Quadraten; und im Zentrum gibt es ein kleines „schwarzes" Quadrat. Und schon haben wir (6)!

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt: Zwischen n und $2n$ befindet sich stets mindestens eine Primzahl (Postulat von Bertrand, vgl. Heft 78). Eine verwandte Aussage werden wir nun für Δ-Zahlen beweisen.

(7) Für jedes $n \geq 1$ gilt: Zwischen den Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ befindet sich stets mindestens eine Δ-Zahl.

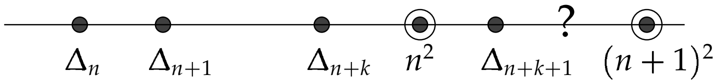
Beispiel (vgl. die Tabelle oben):

$1^2 < \Delta_2 < 2^2 < \Delta_3 < 3^2 < \Delta_4, \Delta_5 < 4^2 < \Delta_6 < 5^2 < \Delta_7 < 6^2 = \Delta_8 < \Delta_9 < 7^2 < \cdots$

Nachweis von (7):

Für $n > 1$ ist $\frac{1}{2}n(n+1) < n^2$, so dass mit (2) gilt: $\Delta_n < n^2$.

Es sei nun Δ_{n+k}, $k \geq 0$, die größte Δ-Zahl $\leq n^2$.



Es ist $k \leq n-1$. Denn aus $k \geq n$ folgt: $\Delta_{n+k} \geq \Delta_{2n} = \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+1) > n^2$ und das steht im Widerspruch zu $\Delta_{n+k} \leq n^2$.

Daher gilt für Δ_{n+k+1} wegen (1):

$n^2 < \Delta_{n+k+1} = \Delta_{n+k} + n + k + 1 \leq n^2 + n + (n-1) + 1 < (n+1)^2$. Somit trifft (7) zu.

Auch zwischen Δ-Zahlen und Kubikzahlen, Biquadratzahlen usw. lassen sich interessante Beziehungen herstellen – nur einige davon seien hier (ohne Beweise) aufgeführt:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \Delta_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

$(n+1)^3 = \Delta_{n+1}^2 - \Delta_n^2$;

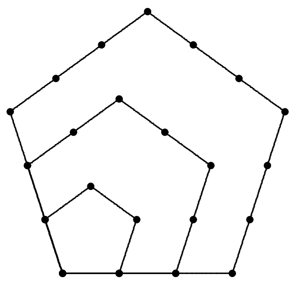
n^4 ist stets als eine Summe aus zwei Δ-Zahlen darstellbar, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{3}\Delta_n^2(4\Delta_n - 1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tantum!*

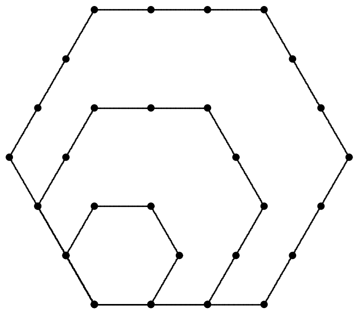
Ausblick

Wir wollen noch zwei Möglichkeiten zur Verallgemeinerung von Δ-Zahlen angeben und zwei Aufgaben stellen, deren Lösungen ihr an anderer Stelle in diesem Heft findet.

a) 

Wenn man in der ersten Figur das Dreieck durch regelmäßige Vielecke ersetzt, dann kann man damit *Polygonal-Zahlen* definieren. In der nebenstehenden Figur ist als Beispiel eine – hier ineinander geschachtelte – Folge von Fünfecken samt Halbierungs-, Drittelungs-, ... punkten der Seiten gegeben, durch die *Pentagonal-Zahlen* $P_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$, also $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, ... definiert werden (vgl. Heft 78).

Aufgabe (Hexagonal-Zahlen)



Definiere mit Hilfe der Figur die sogenannten Hexagonal-Zahlen H_n und gib eine Berechnungsformel für sie an.

b) Wenn man von Dreiecken wie in der ersten Figur zu Tetraedern übergeht, dann kann man *Tetraeder-Zahlen* $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ definieren, so wie es aus der nachfolgenden Kanonenkugel-Aufgabe ersichtlich ist.

*Genug! Es reicht!

Aufgabe (Tetraeder-Zahlen)
Gleich große Kanonenkugeln sind in Schichten so aufeinander geschichtet, dass ein tetraederförmiger Haufen entsteht. In einer Schicht befinden sich – von oben nach unten gezählt – 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... Kugeln. Wie viele Kugeln befinden sich in der 10. Schicht? In der n-ten Schicht?

$*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$

Lauter Lügengeschichten ?

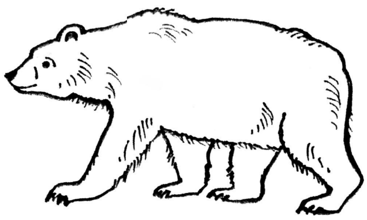
von Hartwig Fuchs

Der wegen seiner unglaublichen Abenteuer bekannte Baron von Münchhausen hat ein interessantes Hobby entdeckt: Beobachtung wild lebender Bären.
Einmal unternahm er deshalb eine Reise in ein Bärengebiet. Dort konnte er längere Zeit das Verhalten eines Bären studieren, den er Bruno nannte.

a) Eines Tages verlor Münchhausen den Bären Bruno aus den Augen. Um Bruno eventuell wiederzufinden, ging er nach folgender Strategie vor: Von seinem Zeltplatz wanderte er 3 km immer nach Süden, dann änderte er seine Richtung und ging 3 km nach Westen und danach 3 km nach Norden.
Danach – so erzählte es Münchhausen seinen Freunden daheim – befand er sich wieder am Ausgangspunkt seiner Suchaktion.
Kann diese Geschichte wahr sein?

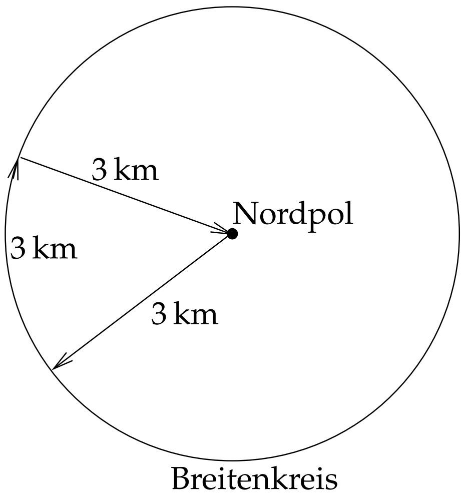
b) Als der Bär Bruno einmal sein Jagdgebiet verlegte, folgte ihm Münchhausen mit seinem Zelt in die neue Gegend. Auch dort verlor er eines Tages Brunos Spur. Um den Bären zu suchen, ging er diesmal so vor: Von seinem Zeltplatz aus wanderte er 3 km nach Norden, danach 3 km nach Westen und schließlich 3 km nach Süden.
Und so sei er – behauptete Münchhausen später – wieder genau zum Ausgangspunkt der Wanderung zurückgekommen. Ist es möglich, dass Münchhausen die Wahrheit erzählt hat?

c) Auch an einem dritten Standort verlor Münchhausen einmal den Kontakt zum Bären Bruno. Um ihn eventuell wiederzufinden, ging er diesmal 3 km nach Süden, dann 3 km nach Osten, wieder 3 km nach Norden und zuletzt 3 km nach Westen.
Und wieder – sagte Münchhausen – habe er sich danach am Ausgangspunkt befunden. Kann Münchhausens Bericht wahr sein?

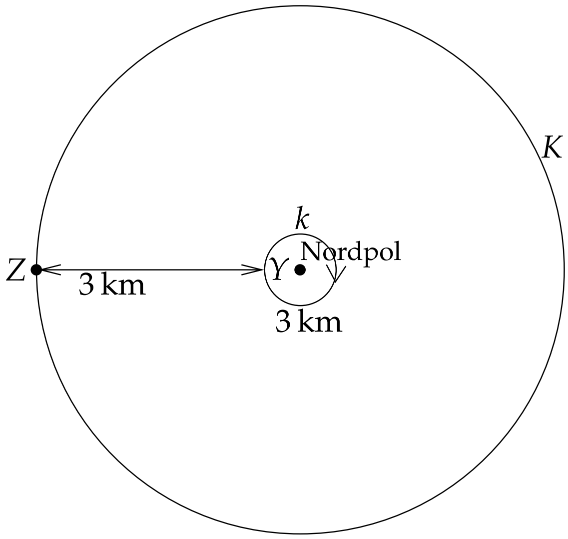


Lösung:

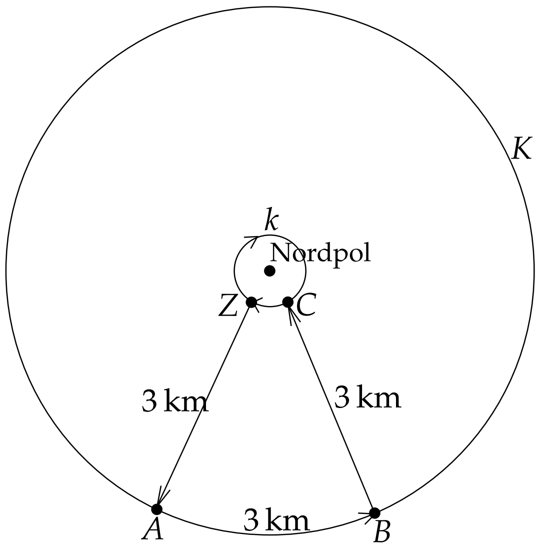
Vorweg:
1. Die Erde wird als eine Kugel vorausgesetzt (tatsächlich ist sie es nur näherungsweise).
2. Auf Grund der Angaben Münchhausens fanden seine Wanderungen nur auf Stücken von Längen- und Breitenkreisen statt.



a) Münchhausens Geschichte ist nur dann wahr, wenn sein Zelt am Nordpol stand (vgl. Figur). Übrigens: Bruno muss ein Eisbär sein. Die Gegend um den Südpol scheidet aus, weil es dort keine Bären gibt. Jeder Punkt der Oberfläche, der kein Pol ist, scheidet ebenfalls aus, weil die Wegbeschreibung für diese Punkte keine geschlossene Figur ergibt (vgl. Vorbemerkung 2.).



b) Man kann unendlich viele Punkte angeben, für die Münchhausens Bericht wahr ist. Es sei k derjenige Breitenkreis um den Nordpol, dessen Umfang 3 km beträgt; K sei der Breitenkreis, dessen Abstand (längs eines Längenkreises gemessen) 3 km beträgt. Befand sich das Zelt auf dem Breitenkreis K (z.B. in $Z \in K$), so wanderte Münchhausen längs eines Längenkreises zum Punkt Y auf k, umwanderte k genau einmal und kehrte von Y nach Z zurück – und dann hat Münchhausen die Wahrheit gesagt. Übrigens: Der Südpol scheidet wieder aus – dort gibt's keine Bären.



c) Auf der Erdkugel gibt es Breitenkreise k und K, für die gilt (vgl. Figur):
Der Abstand von k und K ist 3 km und wenn das Bogenstück von A nach B 3 km lang ist, dann ist der Umfang von k plus dem Bogenstück von C nach Z ebenfalls 3 km lang.

Wenn nun Münchhausens Zelt in einem beliebigen Punkt $Z \in k$ stand und er von dort über A und B nach C ging, von C den Kreis k einmal ganz durchlief und weiter noch das Bogenstück von C nach Z wanderte, dann hat Münchhausen die Wahrheit gesagt.

Nachbemerkung:

1. Wenn Bruno kein Eisbär ist, dann gibt es für c) auch Lösungen in der Nähe des Südpols und in der Nähe des Äquators.
2. Die Radien der in a), b) und c) auftretenden Breitenkreise können mit den Mitteln der „Kugelgeometrie" numerisch bestimmt werden – eine Aufgabe für Anhänger der Präzision.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Küstenmacher, Werner Tiki / Partoll, Heinz / Wagner, Irmgard: Mathe macchiato.

Was kommt dabei heraus, wenn sich ein für seine christlich geprägten Cartoons bekannter Karikaturist mit zwei unterrichtserfahrenen Mathematikern zusammentut?

Ein liebevoll illustriertes Buch über viele grundlegende Themen der (Schul-) Mathematik.

Die beiden Comic-Figuren Miss Mathe und der numerische Praktiker führen den Leser durch die folgenden Themengebiete der Klassenstufen 5 bis 11: Zahlen; Variablen, Operatoren und Ausdrücke; Geometrie; Funktionen, Koordinaten und Graphen; Gleichungen; diskrete und stetige Wachstumsvorgänge; Winkelfunktionen; Reihen; erste Schritte in die Differentialrechnung sowie Beispielaufgaben mit Lösungen.

Die verschiedenen Themen werden anschaulich, einfach und grundlegend dargestellt. Witzige Cartoons visualisieren Sachverhalte, erheitern und lassen den Leser der behandelten Mathematik näher kommen.

Auch wenn manche Themengebiete wie z.B. Wachstumsvorgänge oder Winkelfunktionen den jüngeren Lesern zunächst schwierig erscheinen mögen, so ist dem Autorenteam ein Buch gelungen, das man aufgrund der anschaulichen Erklärungen und der liebevollen Illustrationen immer wieder gerne zum Blättern und Schmökern zur Hand nehmen wird.

Zum Schluss noch ein Zitat zur Zielsetzung aus dem Vorwort von „Mathe macchiato“, welchem man sich voll und ganz anschließen kann: „Sie werden merken: Es ist ein schönes Gefühl zur Mathematik ‚du‘ sagen zu dürfen!“

Fazit: Ein Nachschlagewerk oder doch ein Comic? Über diese Frage kann man geteilter Meinung sein. Klar ist jedoch, dass man dieses Buch immer wieder gerne zur Hand nehmen und nicht nur auf Grund der Illustrationen immer ein Kapitel mehr als zunächst geplant lesen wird.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Küstenmacher, Werner Tiki / Partoll, Heinz / Wagner, Irmgard:
Mathe macchiato. Cartoon-Mathematikkurs für Schüler und Studenten.
Pearson 2003, ISBN 3-8273-7061-2, 208 Seiten, 14,95 €

Art des Buches:	Cartoon-Sachbuch
Mathematisches Niveau:	verständlich
Altersempfehlung:	ab 11 Jahren

Martin Mattheis

Die Seiten für den Computer-Fan

Die dritte Wieferich-Primzahl

Nach einem Satz, den Pierre de Fermat bewies, gilt für jede ungerade Primzahl p:

(1) p ist ein Teiler von $2^{p-1} - 1$.

Beispiel: 31 ist ein Teiler von $2^{30} - 1$, denn $2^{30} - 1 = 31 \cdot 34\,636\,833$.

Der deutsche Mathematiker Arthur Wieferich (1884-1954) untersuchte 1909 ein mit (1) verwandtes Problem*, nämlich die Frage: Gibt es Primzahlen p, für die gilt:

(2) Auch p^2 ist ein Teiler von $2^{p-1} - 1$?

Solche Primzahlen wollen wir *Wieferich-Primzahlen* nennen.

So weit Wieferich auch rechnete, er fand nur Primzahlen p mit der Eigenschaft

(3) p^2 ist kein Teiler von $2^{p-1} - 1$.

Beispiel: 31 ist keine Wieferich-Primzahl, denn $31^2 = 961$ ist kein Teiler von $2^{30} - 1 = 1\,073\,741\,823$.

Nun zur **Aufgabenstellung:**

a) Es gibt genau zwei Wieferich-Primzahlen $p < 3600$. Bestimme sie!

b) Kannst Du eine dritte Wieferich-Primzahl angeben?

*Historische Bemerkung:

Die Wieferich-Primzahlen spielten eine Rolle bei den Beweis-Versuchen der Fermat-Vermutung: Für $n \geq 3$ hat $x^n + y^n = z^n$ keine Lösungen in natürlichen Zahlen x, y, z. Wieferich zeigte nämlich: $x^p + y^p = z^p$ hat keine Lösungen in natürlichen Zahlen x, y, z, wenn p eine Primzahl > 2 mit der Eigenschaft (3) ist. (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 78

Eine Vermutung von Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665), der berühmte französische Jurist mit mathematischen Neigungen, machte bei seinen Zahlenspielereien folgende Beobachtung:

$2^2 - 2$ ist durch 2 teilbar	$2^4 - 2$ ist nicht durch 4 teilbar
$2^3 - 2$ ist durch 3 teilbar	$2^6 - 2$ ist nicht durch 6 teilbar
$2^5 - 2$ ist durch 5 teilbar	$2^8 - 2$ ist nicht durch 8 teilbar
$2^7 - 2$ ist durch 7 teilbar	$2^9 - 2$ ist nicht durch 9 teilbar
$2^{11} - 2$ ist durch 11 teilbar	$2^{10} - 2$ ist nicht durch 10 teilbar
$\vdots$	$\vdots$

Nach vielen weiteren Rechnungen – die Du heutzutage mit dem Computer nachvollziehen kannst – gelangte Fermat zu der

Vermutung: Wenn $2^n - 2$ durch n teilbar ist, dann ist n eine Primzahl.

Was meint Dein Computer zu Fermats Vermutung? (H.F.)

Lösung:

Christian Behrens hat seinen Computer bis $n = 50$ rechnen lassen und dabei festgestellt, dass Fermats Vermutung bis dahin stimmt, Martin Alexander Lange konnte bis $n = 53$ gehen, aber dann wurden auch bei seinem Computer die Ergebnisse durch

Rundungsfehler unexakt. Laura Biroth und Marion Heublein kamen bis $n = 35$; bei $n = 36$ wurden beide durch das (nicht korrekte) ganzzahlige Ergebnis des Computers getäuscht, woraus sie schlossen, dass Fermat mit seiner Vermutung nicht Recht hatte.

Leichter hat man es mit einem Computeralgebra-System wie DERIVE. Damit stellt man fest, dass Fermats Vermutung bis $n = 340$ richtig ist. Bei $n = 341$ wird sie erstmals für eine natürliche Zahl $n > 1$ falsch; denn

$$\frac{2^{341}-2}{341} = 131363\ldots484550$$

ist eine ganze (101-stellige) Zahl, obwohl $341 = 11 \cdot 31$ *keine* Primzahl ist. Die in DERIVE einzugebende Formel, um dies zu überprüfen lautet:

```
VECTOR([n, (2^n-2)/n], n, 1, 341)
```

Auf die Zahl 341 wird man hingeführt, wenn man in dieser Formel statt 341 versuchsweise eine hinreichend große Zahl, z.B. 400 oder 500, eingibt und die Ergebnisse anschaut. Ein Nachweis von Hand sieht so aus:

$$\begin{aligned}
2^{341} - 2 &= 2 \cdot \left(2^{340} - 1\right) \\
2^{340} - 1 &= \left(2^{170} - 1\right)\left(2^{170} + 1\right) = \left(2^{85} - 1\right)\left(2^{85} + 1\right)\left(2^{170} + 1\right) \\
2^{85} + 1 &= \left(2^{80} - 1\right) \cdot 2^5 + 3 \cdot 11 \\
2^{85} - 1 &= \left(2^{80} - 1\right) \cdot 2^5 + 31 \\
2^{80} - 1 &= \left(2^{40} - 1\right)\left(2^{40} + 1\right) = \left(2^{20} - 1\right)\left(2^{20} + 1\right)\left(2^{40} + 1\right) \\
2^{20} - 1 &= \left(2^{10} - 1\right)\left(2^{10} + 1\right) = 1023 \cdot \left(2^{10} + 1\right) = 3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot \left(2^{10} + 1\right)
\end{aligned}$$

Von unten nach oben gelesen, ergibt sich: $2^{85} + 1$ hat den Teiler 11, $2^{85} - 1$ hat den Teiler 31. Deshalb hat das Produkt $\left(2^{85} - 1\right)\left(2^{85} + 1\right) = 2^{170} - 1$ den Teiler $11 \cdot 31$. Folglich ist auch $2^{340} - 1$ und damit $2^{341} - 2$ durch $11 \cdot 31 = 341$ teilbar, was zu zeigen war.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: monoid@mathematik.uni-mainz.de).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

$*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Lösungen der beiden Aufgaben des Artikels „Dreieckszahlen“

Hexagonal-Zahlen: $H_1 = 1$, $H_2 = 6$, $H_3 = 15$, $H_4 = 28$, $H_5 = 45$, $H_6 = 66, \ldots$;
allgemein $H_n = \frac{1}{2}n(4n-2)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tetraeder-Zahlen: In der 1., 2., 3., ..., 10., ..., n. Schicht befinden sich Δ_1, $\Delta_1 + \Delta_2$, $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \ldots, \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{10}, \ldots, \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ Kugeln, Δ_i Dreieckszahlen. Für diese Summen gilt: $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Insbesondere ist $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{10} = 660$.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 79

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

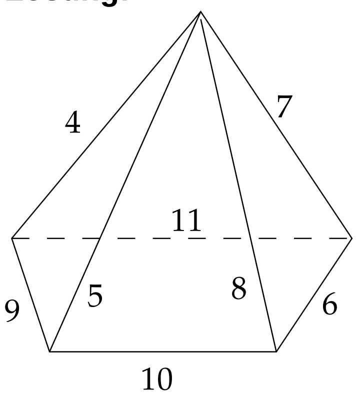
Eine magische Pyramide

An jede der acht Kanten einer Pyramide mit viereckiger Grundfläche ist eine der Zahlen $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ so anzubringen, dass für alle Eckpunkte gilt: Die Summe der Zahlen an den in den Ecken zusammenstoßenden Kanten ist jeweils die gleiche (magische Summe).

a) Wie sind die acht Zahlen anzuordnen und wie heißt die magische Summe?

b) Untersuche a) für die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. (H.F.)

Lösung:



Links steht eine Lösung für a) mit der magischen Summe

$$24 = \frac{2 \cdot (4 + 5 + \ldots + 11)}{5}.$$

Mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 8$ hat die Aufgabe hingegen keine Lösung, denn:

$$\frac{2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8)}{5} \text{ ist keine natürliche Zahl.}$$

Alle Neune

Ersetze die Buchstaben $a, b, \ldots, i$ durch die Zahlen von 1 bis 9. Jede Zahl darf man nur einmal verwenden:

$$a + b + c = d + e + f = g + h + i$$

Welche Lösungen gibt es? (Keven Runge, Gymnasium Nonnenwerth)

Lösung:

Die Summe aller Zahlen $a, b, \ldots, i$ ist 45. Durch drei geteilt ergibt sich für die drei Teilsummen 15. Versucht man nun die Zahlen so zu verteilen, dass jede Teilsumme 15 ergibt, so erhält man die folgenden Lösungen (andere Zahlen als $5 + 9$ bzw. $6 + 8$ sind mit 1 z.B. nicht zu kombinieren):

$$1 + 5 + 9 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 \quad \text{oder} \quad 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7$$

Eine wahre Geschichte

Neulich rief mich eine Lektorin eines Hamburger Verlages an. In einem Buch käme der Begriff „Sekundzahlen“ vor für Zahlen, die durch 1 und sich selbst und noch genau eine andere Zahl teilbar sind. Sie wollte wissen, ob es diesen Namen tatsächlich gibt, ich sei doch da Experte. Im ersten Moment fand ich die Namensgebung als Erweiterung von Primzahlen ganz gelungen, doch dann fiel mir ein, dass man für diese Zahlen gar keinen Namen braucht, weil sie sich ganz einfach charakterisieren lassen. Wie? (VB)

Lösung:
Die „Sekundzahlen“ sind genau die Quadrate der Primzahlen, denn nur diese haben genau drei Teiler: 1, sich selbst und eben die Primzahl.

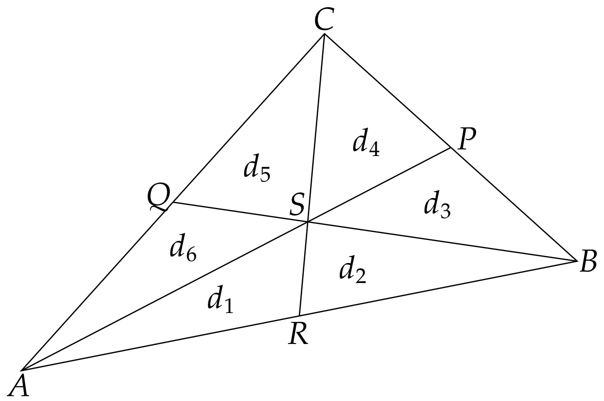
Bauplatztausch
Herr Kaufmann tauscht einen quadratischen Bauplatz gegen einen rechteckigen, bei dem die eine Seite $5m$ länger und die andere Seite $5m$ kürzer als beim quadratischen Bauplatz ist.
Hat er sich beim Tausch verbessert?
(Adriana Spalwisz, Geschwister–Scholl–Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:
Das quadratische Grundstück habe die Seitenlänge x Meter. Also hat dieser Bauplatz eine Fläche von x^2 Quadratmeter.
Das rechteckige Grundstück hat die Seitenlängen $x + 5$ Meter und $x - 5$ Meter. Für die Fläche ergibt sich also $(x + 5) \cdot (x - 5) = (x^2 - 25)$ Quadratmeter.
Der rechteckige Bauplatz ist also 25 Quadratmeter kleiner als der quadratische.

Zahlensuche
x und y seien zwei natürliche Zahlen. Jeder der Ausdrücke $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$ hat als Wert eine der Zahlen $4, 9, 15, 36$.
Wie heißen x und y? (H.F.)

Lösung:
$x \cdot y$ hat den größten und $x : y$ hat den kleinsten Wert der vier Ausdrücke.
Also gilt: $x \cdot y = 36$ und $x : y = 4$.
Der Wert von $x + y$ ist größer als der von $x - y$.
Also gilt: $x + y = 15$ und $x - y = 9$.
Aus den letzten beiden Gleichungen folgt: $x = 12, y = 3$.

Zerlegung eines Dreiecks

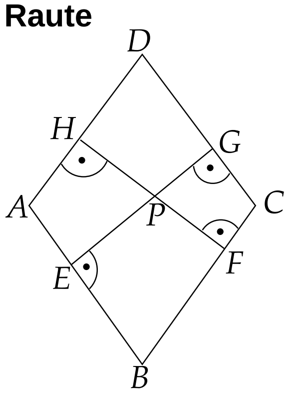


Im Dreieck ABC mit der Fläche F seien P, Q, R die Seitenmittelpunkte. Die drei Strecken AP, BQ, CR, die sich im Schwerpunkt S des Dreiecks schneiden, zerlegen das Dreieck ABC in sechs Teildreiecke.
Zeige: Jedes der sechs Teildreiecke hat die Fläche $\frac{1}{6}F$. (H.F.)

Lösung:
Die Teildreiecke und ihre Flächen seien mit $d_1, d_2, \ldots, d_6$ bezeichnet. Weil d_1 und d_2 Basisstrecken gleicher Länge und die gleiche Höhe haben, gilt

(1) $d_1 = d_2$.
Ganz analog begründet man
(2) $d_3 = d_4$ und $d_5 = d_6$.
Offenbar haben die Dreiecke BQA und BCQ die gleiche Fläche, so dass $d_1 + d_2 + d_6 = d_3 + d_4 + d_5$ ist. Mit (1) und (2) folgt:
(3) $d_1 = d_3$.
Auch die Dreiecke ABP und APC haben die gleiche Fläche. Also ist $d_1 + d_2 + d_3 = d_4 + d_5 + d_6$, woraus mit (1), (2) $2d_1 + d_3 = d_3 + 2d_5$ folgt. Damit ist
(4) $d_1 = d_5$.
Insgesamt gilt also: $d_1 = d_2 = \ldots = d_6$ und wegen $d_1 + d_2 + \ldots + d_6 = F$ ist $6d_1 = F$, woraus $d_1 = \frac{1}{6}F$ folgt; also ist auch $d_2 = \frac{1}{6}F, \ldots, d_6 = \frac{1}{6}F$.

Raute



P sei ein Punkt im Innern der Raute $ABCD$. $|PE|$, $|PF|$, $|PG|$, $|PH|$ seien die Abstände des Punktes P von den Seiten der Raute.
Zeige:
Wie auch immer P im Innern der Raute gewählt wird, stets hat die Summe $|PE| + |PF| + |PG| + |PH|$ den gleichen Wert. (H.F.)

Lösung:
Zum Beweis zunächst 4 „parallele“ Überlegungen.
Die Länge einer jeden Seite der Raute $ABCD$ sei a. Dann gilt:
(1) Die Fläche des Dreiecks APB ist $\frac{1}{2}a \cdot |PE|$.
(2) Die Fläche des Dreiecks BPC ist $\frac{1}{2}a \cdot |PF|$.
(3) Die Fläche des Dreiecks CPD ist $\frac{1}{2}a \cdot |PG|$.
(4) Die Fläche des Dreiecks DPA ist $\frac{1}{2}a \cdot |PH|$.
Bezeichnen wir die Fläche der Raute mit F, so folgt aus (1) bis (4):
(5) $F = \frac{1}{2}a\left(|PE| + |PF| + |PG| + |PH|\right)$.
Damit gilt $|PE| + |PF| + |PG| + |PH| = \frac{2F}{a}$
und zwar unabhängig davon, wo P im Innern der Raute gewählt wird.

Wo war Willi?
Willi erzählt: „Auf meiner letzten Forschungsreise ist mir folgendes passiert: Ich ging einmal $5\,\mathrm{km}$ weit genau nach Süden, dann $5\,\mathrm{km}$ nach Westen; nach weiteren $5\,\mathrm{km}$ nach Norden war ich wieder zurück an meinem Ausgangspunkt.“ Nach kurzer Überlegung antwortet Nina: „Natürlich war Dein Ausgangspunkt der Nordpol.“ Darauf Willi: „Nein, weit gefehlt!“ Wo war Willi? (WJB)

Lösung:
Nina hat durchaus richtig überlegt. Aber wenn Willi nicht am Nordpol war, kommt noch der Südpol in Betracht; denn um den Südpol gibt es einen Kreis von $5\,\mathrm{km}$ Umfang, und jeder Punkt $5\,\mathrm{km}$ nördlich davon kommt als Ausgangspunkt in Frage. Allerdings könnte Wili auch von einem Punkt $5\,\mathrm{km}$ nördlich von einem Kreis mit Umfang $\frac{5}{n}\,\mathrm{km}$ gestartet sein ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$); er muss dann diesen Kreis n-mal abgewandert sein – ob das am Südpol aber so interessant ist?

2005 2005 Aufgaben zum Neuen Jahr 2005 2005

von Hartwig Fuchs

Eine überraschende Summe

Berechne

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2004\cdot 2005}$$

und begründe Dein Ergebnis!

Zahlenquadrat

1984	2029	2028	2027	1988	1989	1990
1985	1995	2017	2016	1998	1999	2025
1986	1996	2002	2009	2004	2014	2024
2023	2013	2007	**2005**	2003	1997	1987
2019	2010	2006	2001	2008	2000	1991
2018	2011	1993	1994	2012	2015	1992
2020	1981	1982	1983	2022	2021	2026

Im Zahlenquadrat aus den 49 aufeinander folgenden Zahlen $1981, 1982, 1983, \ldots, 2029$ sind drei magische Quadrate verborgen. Welche sind sie und wie heißen ihre magischen Summen?

Die Lösungen findet ihr an anderer Stelle in diesem Heft!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Zahlenrätsel

	4		
			2
2			
		4	

In jedes der leeren Felder ist jeweils eine der Zahlen $1, 2, 3, 4$ so einzusetzen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte alle vier Zahlen verschieden, aber in jeder Diagonalen die Zahlen gleich sind. (H.F.)

Der Würfelturm

Fünf normale Würfel sind willkürlich übereinander gestapelt. Die oben liegende Seite des obersten Würfels zeigt eine 2. Wie viele Augen sind insgesamt sichtbar?

(Sarah Tröbs, WEG Winnweiler)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Fünfer-Produkt

Das Produkt von 5 unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer ein Vielfaches von 120. (H.F.)

Quersumme

Wie groß ist die Quersumme von $7 \cdot 10^{222} - 1$? (H.F.)

Der Bücherwurm

Constanzes Mutter hat in ihrem Bücherregal eine vierbändige Ausgabe von Schillers Werken. Jeder Band hat genau 600 Seiten. Das einzelne Blatt hat eine Dicke von $0,14$ mm, der Einband eine Stärke von $2,5$ mm. Ein Bücherwurm frisst sich von Seite 1 des ersten Bandes durch bis zur Seite 600 von Band 4 mit einer Geschwindigkeit von 3 mm pro Stunde. *Wie lange braucht er?*

Marktfrau Maria

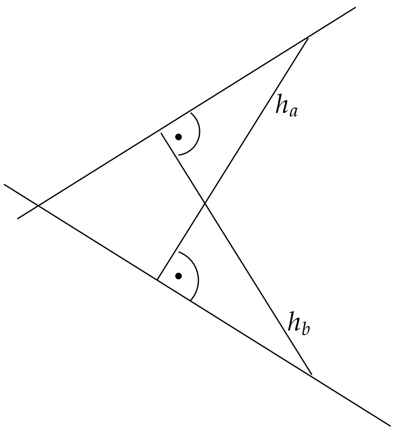
Marktfrau Maria verkauft Melonen.

Der erste Käufer braucht eine größere Menge für ein Hotel. Maria verkauft ihm eine halbe Melone weniger als drei Viertel ihres Vorrats. Anschließend kauft der Wirt eines Restaurants eine halbe Melone weniger als drei Viertel des Restbestands. Auch dem dritten und vierten Käufer verkauft Maria jeweils eine halbe Melone weniger als drei Viertel ihres verbliebenen Vorrats. Danach hat sie noch eine Melone übrig.

Wie viele Melonen hatte sie am Anfang? (WJB)

Alles gleichschenklige Dreiecke, oder?

Martin hat wild auf ein Blatt Papier zwei gleich lange Strecken gezeichnet, dann hat er versucht, diese Strecken zu Höhen eines Dreiecks zu machen, und siehe da: Egal wie er sich anstellte, es wurden immer gleichschenklige Dreiecke.



a) Zeichne zwei Strecken, mache sie zu Strecken eines Dreiecks (Lotgeraden!) und teste, ob ein gleichschenkliges Dreieck entsteht!

b) Untersuche, ob ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, immer gleichschenklig ist!
Tipp: Erinnere Dich, dass die Höhen bei der Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks eine Rolle spielen.

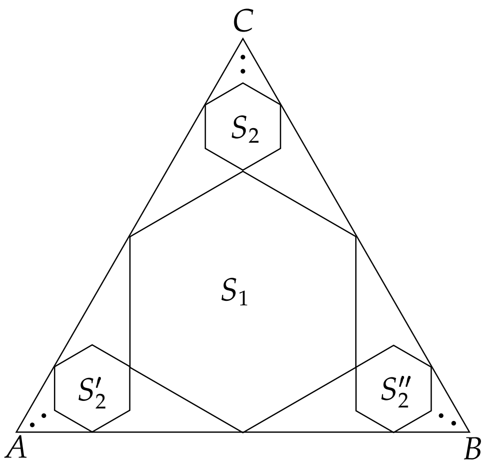
Bereits auf Seite 21 findet ihr zwei Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 842.
Eine Menge $\mathbb{M}$ bestehe aus aufeinander folgenden natürlichen Zahlen, für die gelten soll:
Jeweils 3 verschiedene Elemente haben ein Produkt > 2004 und eine Summe < 2004.
Bestimme die Menge $\mathbb{M}$, die möglichst viele Zahlen enthält. (H.F.)

Aufgabe 843. Sechsecke im Dreieck
In ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Höhe h sei ein regelmäßiges Sechseck S_1 so einbeschrieben, dass auf jeder Dreiecksseite ein Eckpunkt von S_1 liegt. In die freien Dreiecksflächen bei A, B und C zeichne man drei regelmäßige Sechsecke S_2, S_2', S_2'', die alle eine Ecke mit S_1 gemeinsam haben und von denen jeweils zwei Eckpunkte auf den Dreiecksseiten liegen. In die freien Flächen bei A, B, C konstruiere man auf die gleiche Weise drei weitere regelmäßige Sechsecke S_3, S_3', S_3'', usw. ohne Ende. So entsteht eine 3-fach symmetrische Figur, von der nebenstehendes Bild eine Vorstellung vermittelt.



Wie groß ist die Summe der Umfänge aller Sechsecke im Dreieck? (H.F.)

Aufgabe 844. Pythagoreische Zahlentripel
Die natürlichen Zahlen x, y und z erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Dann gilt:

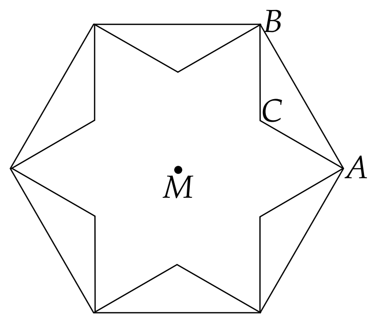
a) Mindestens eine der Zahlen x, y oder z ist durch 3 teilbar.

b) Mindestens eine der Zahlen x, y oder z ist durch 4 teilbar.

c) Mindestens eine der Zahlen x, y oder z ist durch 5 teilbar.

(Stefanie Tiemann, Gymnasium Marienberg, Neuss)

Aufgabe 845. Stern im Sechseck



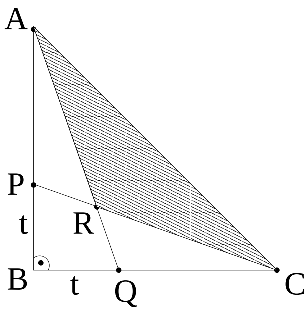
In ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge r sei ein Stern wie in der Figur konstruiert.
Um wieviel ist die Fläche des Sechsecks größer als die des Sterns? (H.F.)

Aufgabe 846. Gemeinsame Nullstellen
Kann man a so wählen, dass die Nullstellenmengen der beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 + 13x - 30, \qquad g(x) = ax^3 - (13a - 3a^2)x^2 - 69ax + 90a^2$$

übereinstimmen? (WJB)

Aufgabe 847.

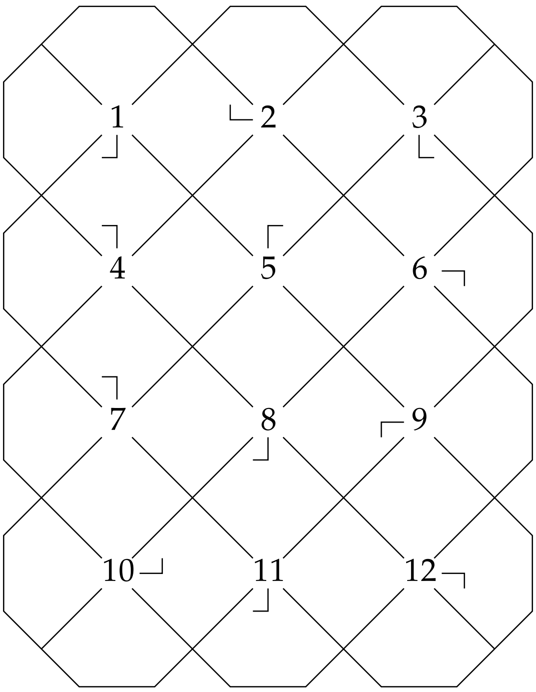


Das rechtwinklige Dreieck ABC sei gleichschenklig mit $|AB| = |BC| = s$. Die Punkte P und Q seien so gewählt, dass $|PB| = |QB| = t$, t eine gegebene Zahl, ist. Bestimme die Fläche des Dreiecks ARC in Abhängigkeit von s und t. (H.F.)

2005 **Mehr Aufgaben zum Neuen Jahr** 2005

von Hartwig Fuchs

Zahlenrätsel



Trage um die Nummern herum vierziffrige natürliche Zahlen in die Felder ein, je Feld eine Ziffer; das Anfangsfeld und die Schreibrichtung sind durch einen Haken angegeben.

1 : $v - (x - 2)$
2 : $v =$ Vielfaches von 383
3 : $w =$ kleinstmögliche Primzahl
4 : $7w + 2$
5 : $x =$ eine im nächsten Jahr häufig vorkommende Zahl
6 : eine 4-te Potenz
7 : $3y$
8 : $y = ($Produkt aus 5 aufeinander folgenden Primzahlen$) - 9$
9 : $v : 6 + 2$
10 : $7w - x - 13$
11 : Zahl mit den Teilern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
12 : Spiegelzahl von $5w$

Vermeidbare Rechnung?
Begründe:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2005}{2004} < \sqrt{2005}, \qquad \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2004}{2003} > \sqrt{2005}.$$

Endziffern einer Potenz
Wie heißen die drei letzten Ziffern von 2005^{2005} ?

Die Lösungen findet ihr an anderer Stelle in diesem Heft!

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 79

Kl. 8-13

Aufgabe 836. Die drei Schlösser

Fritz soll eine Aufgabensammlung aus dem Aufbewahrungsraum in der Schule holen. Der Lehrer hat diese vergessen. Der Lehrer gibt ihm seinen Schlüsselbund, vergisst aber, ihm zu sagen, welcher Schlüssel der richtige ist. Auf dem Weg fällt das Fritz auf. Erst überlegt er, ob er zurückgehen soll. Dann aber rechnet er schnell aus, wie viele Möglichkeiten es maximal gibt, also wie oft er maximal ausprobieren muss. Dann entscheidet er sich, sein Glück auszutesten. Da dieser Raum aber auch sehr wichtige Gegenstände hat, ist er mit drei Schlössern gesichert. Am Schlüsselbund sind 15 Schlüssel.

Wie oft muss er mindestens und wie oft maximal probieren?

(Sigurd Vogler, Rupprecht-Gymnasium München)

Lösung:

Mindestens 3 mal (da drei Schlösser), maximal $15 + 14 + 13 = 42$ mal.

Beim ersten Schlüsselloch müsste er im schlechtesten Fall 15 mal ausprobieren bis er den richtigen Schlüssel hat. Am nächsten Schloss aber nur noch 14 mal (ein Schlüssel steckt im ersten Schloss), am letzten dann nur noch 13 mal.

Aufgabe 837. Division durch 7

Jede von sechs natürlichen Zahlen wird als ein Vielfaches von 7 und einem nicht negativen Rest geschrieben; z.B. $39 = 5 \cdot 7 + 4$. Die Summe der sechs Reste betrage 5. Begründe, dass das Produkt der sechs Zahlen ein Vielfaches von 7 ist. (H.F.)

Lösung:

Für einen Rest r gilt: $0 \leq r \leq 6$. Da die Summe der sechs Reste $= 5$ ist, muss mindestens einer der Reste 0 sein; d.h. eine der Ausgangszahlen ist ein Vielfaches von 7. Dann aber ist das Produkt der 6 Ausgangszahlen auch ein Vielfaches von 7.

Aufgabe 838. Lauter Quadratzahlen?

$$\begin{array}{rcl} 49 & = & 7^2 \\ 4489 & = & 67^2 \\ 444889 & = & 667^2 \\ 44448889 & = & ? \\ \vdots & & \end{array}$$

Man denke sich das nebenstehende Zahlenschema beliebig lange fortgesetzt. Ist dann jede links stehende Zahl eine Quadratzahl? Begründe deine Antwort! (H.F.)

Lösung:

In der n-ten Zeile des Schemas haben wir die Zahl

$$Z = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ Ziffern } 4}\underbrace{88\ldots89}_{n \text{ Ziffern}}.$$

Es ist

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ Ziffern } 1} = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right).$$

Damit können wir Z auch so schreiben:

$$\begin{aligned} Z &= 44\ldots4\cdot10^n+88\ldots8+1 = 4\cdot(11\ldots1)\cdot10^n+8\cdot(11\ldots1)+1 \\ &= 4\cdot\frac{1}{9}\cdot(10^n-1)\cdot10^n+8\cdot\frac{1}{9}\cdot(10^n-1)+\frac{9}{9} \\ &= \frac{1}{9}\left(4\cdot10^{2n}+4\cdot10^n+1\right) = \left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Also sind alle Zahlen des Schemas Quadratzahlen der Form

$$\left(\frac{200\ldots01}{3}\right)^2 = (\underbrace{66\ldots6}_{n-1 \text{ Ziffern } 6}7)^2.$$

Aufgabe 839. Niemals eine Quadratzahl

Zeige: Die Summe der Quadrate dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist niemals eine Quadratzahl. (H.F.)

Lösung:

Annahme: Es gibt natürliche Zahlen m und n, so dass $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = m^2$ gilt. Die linke Seite lässt sich umformen zu $3n^2+6n+5 = 3(n^2+2n+1)+2 = 3(n+1)^2+2$. Diese Zahl lässt bei Division durch 3 also den Rest 2. Das muss dann aber auch für m^2 gelten. Nun lässt m selbst bei Division durch 3 den Rest 0 oder 1 oder 2. Wir unterscheiden daher drei Fälle:

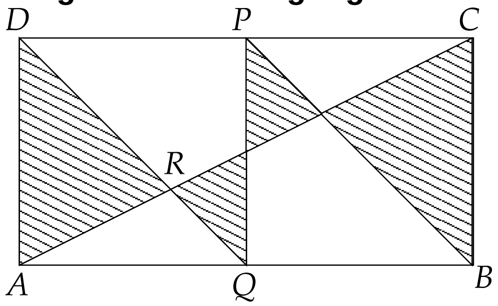
Fall 1: $m = 3k$; dann ist $m^2 = 3\cdot(3k^2)$.

Fall 2: $m = 3k+1$; dann ist $m^2 = 3\cdot(3k^2+2k)+1$.

Fall 3: $m = 3k+2$; dann ist $m^2 = 3\cdot(3k^2+4k+1)+1$.

In keinem Fall ergibt sich bei der Division von m^2 durch 3 der Rest 2. Also war unsere Annahme falsch.

Aufgabe 840. Zerlegungen im Rechteck



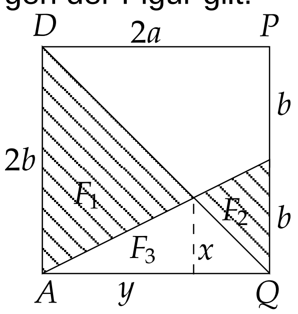
Das Rechteck $ABCD$ wird von der Strecke PQ in zwei kongruente Teile zerlegt.

Vergleiche die Flächen der Dreiecke ARD und AQR.

Welcher Bruchteil der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ist schraffiert? (H.F.)

Lösung:

Aus Symmetriegründen betrachten wir nur das Rechteck $AQPD$. Mit den Bezeichnungen der Figur gilt:



$$(1) \quad \frac{y}{x} = \frac{2a}{b} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2ax}{b}$$

$$(2) \quad F_1 = \frac{1}{2}\cdot 2by = \frac{b\cdot 2ax}{b} = 2ax$$

$$(3) \quad F_3 = \frac{1}{2}\cdot 2ax = ax$$

Aus (1) und (3) folgt:

(4) $F_1 = 2F_3$

Nun ist $F_1 + F_3 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab$, also $3F_3 = 2ab$ wegen (4).

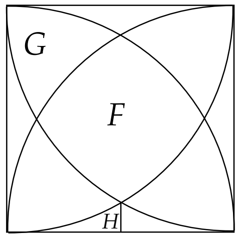
(5) $F_3 = \frac{2ab}{3}$ und $F_1 = \frac{4ab}{3}$

Wegen $F_2 = \frac{1}{2} \cdot 2ab - F_3 = ab - \frac{2ab}{3}$ folgt

(6) $F_2 = \frac{ab}{3}$ und $F_1 + F_2 = \frac{5ab}{3}$

Die schraffierten Flächen betragen wegen (6) aus Symmetriegründen $\frac{10ab}{3}$, während das Rechteck $ABCD$ die Fläche $8ab = \frac{24ab}{3}$ hat. Somit ist $\frac{5}{12}$ der Rechteckfläche schraffiert.

Aufgabe 841. Florians Fläche

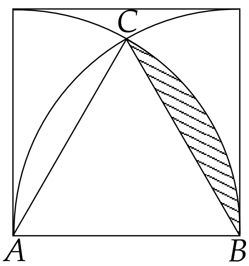


Florian spielt gern mit Zirkel und Lineal. Eines Tages sieht seine Lehrerin bei ihm die nebenstehende Zeichnung und stellt ihm die Frage: Wie groß ist die Fläche in der Mitte, wenn die Seitenlänge des Quadrats gleich 1 ist? (gefunden WJB)

Lösung:

Die Fläche des Quadrats ist (1) $1 = F + 4G + 8H$,

die eines Viertelkreises ist (2) $\frac{\pi}{4} = F + 3G + 4H$.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit Seitenlänge 1, hat also den Flächeninhalt $D = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; ferner ist $\measuredangle CAB = 60°$. Schreiben wir für die schraffierte Fläche E, so liefert ein Vergleich der beiden Bilder $2E + D = F + 2G + 2H$. Da hier für den Sechstelkreis $\frac{\pi}{6} = E + D$ gilt, erhalten wir noch die Formel

(3) $F + 2G + 2H = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Multiplizieren wir Gleichung (3) mit 4 und subtrahieren Gleichung (1), so erhalten wir

(4) $3F + 4G = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} - 1$

Multiplizieren wir Gleichung (3) mit 2 und subtrahieren Gleichung (2), so erhalten wir

(5) $F + G = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}$

Aus $4 \cdot$ (5) – (4) ergibt sich schließlich $F = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1 \approx 0,315$.

Alternative Lösung mit Integralrechnung:

Zunächst ergibt sich aus (1) und (2) $1 - \frac{\pi}{4} = G + 4H$, d.h. $G = 1 - \frac{\pi}{4} - 4H$ und somit $F = 1 - 4G - 8H = -3 + \pi + 8H$. Zur Berechnung von H bemerken wir, dass diese Fläche unter dem Kreis um $(0,1)$ mit Radius 1, d.h. $(y-1)^2 + x^2 = 1$ liegt. Dieses Kreisstück entspricht somit der Gleichung $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$, d.h.

$$H = \int_0^{1/2} \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) \approx 0,0217$$

und $F = \pi - 3 + 8H \approx 0,315$.

Der Sierpiński-Prozess P_6

von Stefanie Tiemann

Die Sierpiński-Funktionen und Sierpiński-Prozesse gehen zurück auf eine Veröffentlichung des polnischen Mathematikers W. Sierpiński (1883-1968) aus dem Jahre 1964.

Definition: Sei z eine natürliche Zahl mit n Ziffern und der Zifferndarstellung $z = z_1z_2 \dots z_{n-1}z_n$ und z^* die Spiegelzahl von z mit der Zifferndarstellung $z_nz_{n-1} \dots z_2z_1$.
Die Sierpiński-Funktion $S_i(z)$ ist definiert als $(z+i)^*$, wobei z und i natürliche Zahlen sind. Wendet man S_i insgesamt L-mal ($L \geq 1$) auf z an, so spricht man von einem Sierpiński-Prozess P_i der Länge L mit der Startzahl z.
Ein Prozess $z \xrightarrow{(L)} z$ heißt eine Schleife der Länge L.

In Monoid 65 und 66 hat Herr Dr. Fuchs über die Sierpiński-Prozesse P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7, P_8, P_9 und P_{10} berichtet. Über diese Prozesse weiß man einiges. Zu P_6 aber wurde nichts gefunden. Deswegen habe ich mich mit diesem Prozess beschäftigt.

Zunächst ein **Beispiel** für einen P_6 Prozess: (Es wird jeweils 6 addiert und dann die Ziffernreihenfolge umgekehrt.)
$35 \to 14 \to 2 \to 8 \to 41 \to 74 \to 8 \to 41$
Dieser Prozess endet in einer Schleife der Länge 3: $8 \xrightarrow{(3)} 8$.

Startzahlen kleiner 1000:
Um mehr über P_6 Prozesse zu erfahren, habe ich zuerst mit Hilfe meines Computers alle P_6 Prozesse mit Startzahlen kleiner 1000 untersucht. Das Ergebnis: Alle Prozesse enden in einer Schleife, und es gibt zwölf verschiedene Schleifen.

Schleifen der Länge 3:	$8 \to 41 \to 74 \to 8$ und $19 \to 52 \to 85 \to 19$
Schleifen der Länge 6:	$5 \xrightarrow{(6)} 5$, $6 \xrightarrow{(6)} 6$, $9 \xrightarrow{(6)} 9$, $12 \xrightarrow{(6)} 12$, $13 \xrightarrow{(6)} 13$,
	$16 \xrightarrow{(6)} 16$, $17 \xrightarrow{(6)} 17$ und $23 \xrightarrow{(6)} 23$
Schleifen der Länge > 6:	$1 \xrightarrow{(30)} 1$ und $53 \xrightarrow{(27)} 53$

Erweiterung des Startzahlenbereichs:
Für Startzahlen bis 9999 gibt es weitere 69 Schleifen, und zwar 3 der Länge 15 und 66 der Länge 30. Nachdem sich durch eine Erweiterung des Startzahlenbereichs bis auf 99999 keine weiteren Schleifen finden lassen, liegt die Vermutung nahe, dass es beim Prozess P_6 nur endlich viele Schleifen gibt. Dies ist aber nicht so.

(1) P_6 **hat unendlich viele Schleifen, und es gibt keine obere Schranke für die Länge von Schleifen**

$1053 \to 9501 \to 7059 \to 5607 \xrightarrow{(10)} 5937 \to 3495 \to 1053$
$100053 \to 95001 \to 700059 \to 560007 \xrightarrow{(310)} 599937 \to 349995 \to 100053$
$10000053 \to 95000001 \to 70000059 \to 56000007 \xrightarrow{(3310)} 59999937 \to 34999995 \to 10000053$
Diese Reihe lässt sich beliebig so fortsetzen: Es sei 0_m ein Block aus m Nullen. Dann gilt für $n \geq 3$:
(1) $10_{2n+1}53 \xrightarrow{P_6} 950_{2n+1}1 \to 70_{2n+1}59 \to 560_{2n+1}7$

Wir schreiben um: $560_{2n+1}7 = 560_n 0_{n+1}7$ und verfolgen getrennt, was mit 560_n sowie $0_{n+1}7$ unter P_6 passiert.

$$\begin{aligned}
z &= 560_n \qquad\qquad 0_{n+1}7 \\
P_6(z) &= (0_{n+1}7+6)^* \quad 560_n^* \\
P_6^2(z) &= (560_n^*+6)^* \quad\; 0_{n+1}7+6 \\
P_6^3(z) &= (0_{n+1}7+2\cdot 6)^* 560_n^*+6 \\
P_6^4(z) &= (560_n^*+2\cdot 6)^* \; 0_{n+1}7+2\cdot 6 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Dies kann man so lange fortsetzen, bis durch Addition von 6 ein Übertrag von der rechten Hälfte auf die linke Hälfte stattfindet – nach insgesamt 3_n10 Anwendungen von P_6. (Die Definition von 0_n gilt analog für die anderen Ziffern.) Nachweis:

$0_{n+1}7 \xrightarrow{(3_n10)} 0_{n+1}7 + \frac{1}{2}\cdot 3_n10\cdot 6 = 0_{n+1}7 + 3_n10\cdot 3 = 0_{n+1}7 + 9_n30 = 9_n37$

$560_n \xrightarrow{(3_n10)} \left(560_n^* + \frac{1}{2}\cdot 3_n10\cdot 6\right)^* = (65 + 3_n10\cdot 3)^* = (65+9_n30)^* = 9_{n+1}5^* = 59_{n+1}$

Somit ist in Fortsetzung von (1):

$560_{2n+1}7 \xrightarrow{(3_n10)} 59_{2n+1}37 \to 349_{2n+1}5 \to 10_{2n+1}53$

Die Länge der Schleife ist 3_n15, wird also beliebig groß.

(2) **Jeder P_6 Prozess endet in einer Schleife**

(3) Angenommen, es gibt einen P_6 Prozess, der nicht in eine Schleife führt; dann durchläuft er unendlich viele paarweise verschiedene Zahlen $z_0, z_1, z_2, \dots$ Unter diesen Zahlen wird es immer wieder vorkommen: Ein z_{m+1} hat eine Ziffer mehr als z_m. Das ist nur möglich, wenn z_m von einer Form 9_nz mit $z = 5, 6, \dots, 9$ ist. Nun gilt für diese Zahlen 9_nz mit $n > 1$:

$9_n6 \xrightarrow{(7)} 20_{n-2}19 < 9_n6, \quad 9_n8 \xrightarrow{(3)} 10_{n-1}7 < 9_n8,$

n gerade	n ungerade
$9_n5 \xrightarrow{(3_{n/2}7)} 20_{n-1}9 < 9_n5$	$9_n5 \xrightarrow{(16_{n-2}76)} 30_{n-2}23 < 9_n5$
$9_n7 \xrightarrow{(16_{n/2-1}70_{n/2-1}12)} 20_{n-2}35 < 9_n7$	$9_n7 \xrightarrow{(16_{n-2}73)} 20_{n-2}17 < 9_n7$
$9_n9 \xrightarrow{(3_{n/2}6)} 20_{n-1}7 < 9_n9$	$9_n9 \xrightarrow{(16_{n-1}9)} 10_{n-1}5 < 9_n9$

An einem Beispiel sieht man, dass damit der P_6 Prozess stets in eine Schleife hinein läuft im Widerspruch zu (3), woraus die Richtigkeit der Behauptung (2) folgt. Dieses Beispiel kann mit dem gleichen Ergebnis für jede der Zahlen $z_m = 9_nz$, $z = 5, 6, \dots, 9$ durchgespielt werden!

Beispiel: Es sei $z_m = 9_n6$. Dann ist: $z_0 \xrightarrow{(\cdots)} z_m = 9_n6 \xrightarrow{(7)} 20_{n-2}19 \xrightarrow{(\cdots)} y_1$, y_1 das größte $n+1$-ziffrige Element im P_6 Prozess. Da der P_6 Prozess über die $n+1$-ziffrigen Zahlen hinaus führen soll, muss y_1 von der Form 9_nz mit $z = 5, 6, 7, 8, 9$ sein.

Falls $y_1 = 9_n6$ ist, dann befindet sich der P_6 Prozess in einer Schleife. Falls $y_1 \neq 9_n6$ ist, dann sei z.B. $y_1 = 9_n8$. Ausgehend von 9_n8 gelangt dann der Prozess über $10_{n-1}7$ zu einer größten $n+1$-ziffrigen Zahl y_2.

Falls hier $y_2 = 9_n6$ oder $= 9_n8$, dann sind wir wieder in einer Schleife. Im anderen Fall verlängert man den Prozess von y_2 aus zu einer größten $n+1$-ziffrigen Zahl $y_3 = 9_nz$, $z = 5, 6, \ldots, 9$ usw.
Spätestens nach fünf Prozess-Verlängerungen befindet sich der P_6 Prozess dann endgültig in einer Schleife.

Enthält eine Schleife eine Zahl > 999, so haben alle Elemente der Schleife die gleiche Anzahl von Ziffern
Hätte die Schleife Elemente mit unterschiedlicher Anzahl Ziffern, so wäre eine Zahl der Form 9_n5, 9_n6, 9_n7, 9_n8 oder 9_n9 mit $n \geq 2$ in der Schleife.

Zu zeigen: Keine Zahl der Form 9_n5, 9_n6, 9_n7, 9_n8 oder 9_n9 ist Element einer Schleife.

Behauptung:
(4) Alle Prozesse mit Startzahlen 9_n5, 9_n6, 9_n7, 9_n8 oder 9_n9 erreichen maximal Zahlen, die zwei Ziffern mehr als die Startzahlen besitzen.

Der Beweis ist eine Erweiterung (zusätzlich Ermittlung einer oberen Schranke) des Beweises, dass jeder P_6 Prozess in einer Schleife endet.
Beweis zu (4) durch Fallunterscheidung:
Startzahl $9_{2n}5$:
$9_{2n}5 \to 10_n0_n1 \xrightarrow{(3_n2)} 79_n9_n7 = 79_{2n}7 \to 30_{2n}8 \to 410_{2n-1}3 \to 90_{2n-1}14 \to 20_{2n-1}9$
$9_{2n}5$ ist unterschritten und der Prozess hat maximal eine Zahl mit einer Ziffer mehr als die Startzahl erreicht.

Die weiteren Fälle: Startzahlen $9_{2n}6$, $9_{2n}7$, $9_{2n}8$, $9_{2n}9$, $9_{2n+1}5$, $9_{2n+1}6$, $9_{2n+1}7$, $9_{2n+1}8$, $9_{2n+1}9$ sind entsprechend nachzuweisen.

Die Prozesse erreichen folgende Maximalwerte, die allesamt höchstens zwei Ziffern mehr als die Startzahl besitzen:

Max$(P_6(9_{2n}5)) = 9_n779_n$, Max$(P_6(9_{2n}6)) = 910_{2n-2}14$, Max$(P_6(9_{2n}7)) = 9_{2n+1}85$,
Max$(P_6(9_{2n}8)) = 70_{2n}4$, Max$(P_6(9_{2n}9)) = 9_n889_n5$, Max$(P_6(9_{2n+1}5)) = 9_{2n+1}89$,
Max$(P_6(9_{2n+1}6)) = 910_{2n-1}14$, Max$(P_6(9_{2n+1}7)) = 9_{2n+1}85$, Max$(P_6(9_{2n+1}8)) = 70_{n+1}4$,
Max$(P_6(9_{2n+1}9)) = 9_{2n+1}87$.

Behauptung:
(5) Nachdem ein P_6 Prozess eine der Startzahlen 9_n5 (n gerade), 9_n6, 9_n7, 9_n8 oder 9_n9 unterschritten hat, erreicht er auch eine Zahl mit mindestens drei Ziffern weniger.

Beweis von (5) durch Fallunterscheidung (Startzahlen $9_{2n}5$, $9_{2n}6$, $9_{2n}7$, $9_{2n}8$, $9_{2n}9$, $9_{2n+1}6$, $9_{2n+1}7$, $9_{2n+1}8$, $9_{2n+1}9$):

Startzahl $9_{2n}5$
$9_{2n}5 \xrightarrow{(3_n7)} 20_{2n-1}9 \to 510_{2n-2}2 \to 80_{2n-2}15 \to 510_{2n-2}8 \to 410_{2n-3}15 \to 120_{2n-3}14$
$\to 20_{2n-3}21$ (die erste Ziffer weniger) $\to 720_{2n-3}2 \to 80_{2n-3}27 \to 330_{2n-3}8 \to 410_{2n-4}33$
$\to 930_{2n-4}14 \to 20_{2n-4}39$ (die zweite Ziffer weniger) $\to 540_{2n-4}2 \to 80_{2n-4}51$
$\to 750_{2n-4}8 \to 410_{2n-5}57 \to 360_{2n-5}14 \to 20_{2n-5}63$ (die dritte Ziffer weniger)

Für alle neun Fälle lässt sich zeigen, dass der Prozess Zahlen erreicht, die drei Ziffern weniger haben als die Startzahl.

Aus (4) und (5) folgt: Jeder P_6 Prozess mit einer der Startzahlen $9_{2n}5$, $9_{2n}z$, $9_{2n+1}z$ mit $z = 6, 7, 8, 9$, enthält eine Zahl, die kleiner ist als die Startzahl und von der aus die Startzahl nicht mehr erreicht wird.

P_6 verhält sich bei Startzahlen der Form $9_{2n+1}5$ anders; hier gilt:

$P_6(9_{2n+1}5) \xrightarrow{(16_{2n-1}76)} 30_{2n-1}23 \xrightarrow{(6)} 120_{2n-2}41 \xrightarrow{(6_{n-1}30)} 120_{2n-2}41.$

Also:

$P_6(9_{2n+1}5) \xrightarrow{(16_{2n-1}82)} 120_{2n-2}41 \xrightarrow{(6_{n-1}30)} 120_{2n-2}41.$

Zusätzlich gilt: $120_{2n-2}41 \xrightarrow{(6_{n-1}30)} 120_{2n-2}41$ durchläuft nicht $9_{2n+1}5$, da die Länge der Schleife kleiner $16_{2n-1}82$ (der Prozesslänge von $9_{2n+1}5$ bis $120_{2n-2}41$) ist.

Also ist für alle Zahlen der Form 9_n5, 9_n6, 9_n7, 9_n8 oder 9_n9 gezeigt, dass sie nicht Element einer Schleife sind.

Mögliche Schleifenlängen

Nachdem jetzt bekannt ist, dass alle Elemente einer Schleife die gleiche Anzahl Ziffern haben (außer den zwölf Schleifen mit Startzahlen ≤ 999), habe ich ein Computerprogramm zur Errechnung der folgenden Werte erstellt.

Ziffern	Länge (Anzahl) Schleifen	Länge (Anzahl) Schleifen	Länge (Anzahl) Schleifen	Länge (Anzahl) Schleifen	Länge (Anzahl) Schleifen	Anzahl der Schleifenelemente
4	30 (66)	15 (3)				$2025 = 25 \cdot 9 \cdot 9$
5	keine					
6	630 (66)	315 (15)	300 (675)			$245025 = 25 \cdot 99 \cdot 99$
7	keine					
8	6630 (66)	3315 (3)	6300 (675)	3000 (6750)		$24950025 = 25 \cdot 999 \cdot 999$
9	keine					
10	66630 (66)	33315 (3)	66300 (675)	63000 (6750)	30000 (67500)	$2499500025 = 25 \cdot 9999 \cdot 9999$

Vermutlich gibt es keine Schleifen nur aus Zahlen mit einer ungeraden Anzahl von Ziffern.

Bei einer geraden Anzahl von Ziffern scheint es ein Schema für die Längen und die Anzahlen der Schleifen sowie die Gesamtzahl aller Schleifenelemente zu geben.

Mit ist es aber nicht gelungen, diese Vermutungen zu beweisen (oder vielleicht auch zu widerlegen).

$*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Vorsicht vor...

...Bildungsgesetzen für Primzahlen

Herr **Dr. Wolfgang Moldenhauer** aus Erfurt sandte zu dem Beitrag „Vorsicht vor zu schnellen Verallgemeinerungen“ von Hartwig Fuchs in MONOID 79, S. 36-38, an die MONOID-Redaktion folgende Bemerkungen zu der Frage „Ein Bildungsgesetz für Primzahlen?“:

Es sei die Folge (z_n) definiert durch $z_n = \underbrace{3\dots3}_{n \text{ Stück}}1$.

Herr Fuchs hat festgestellt, dass z_i eine Primzahl für $i = 1, 2, \dots, 7, 17$ ist. Für $i = 8, 9, \dots, 16$ und $i = 18, \dots, 38$ sind die Folgenglieder zusammengesetzte Zahlen. z_{39} ist Primzahl. Ob es weitere Primzahlen in der Folge gibt, ist mir nicht bekannt. (Anmerkung der Redaktion: Auch z_{49}, z_{59}, z_{77} und z_{100} sind Primzahlen; alle übrigen Zahlen z_i mit $40 \leq i \leq 99$ sind keine Primzahlen. Dies lässt sich leicht mit dem Computeralgebrasystem DERIVE überprüfen.)

Auf jeden Fall gibt es aber in der Folge (z_n), $n = 1, 2, 3, \dots$ *unendlich viele zusammengesetzte* Zahlen. Es gilt nämlich für die Teilbarkeit durch 17:

$$17 \mid z_{8+16k} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Beweis durch vollständige Induktion nach k:

Für $k = 0$ ist $z_8 = 333333331 = 17 \cdot 19607843$ (Induktionsanfang).

Es sei $17 \mid z_{8+16k}$ vorausgesetzt (Induktionsbasis). Dann ist (Schluss von k auf $k+1$):

$$\begin{aligned}
z_{8+16(k+1)} &= \underbrace{3\dots3}_{16 \text{ Stück}} z_{8+16k} \\
&= 3 \cdot \left(10^{8+16k+16} + 10^{8+16k+15} + \dots + 10^{8+16k+1}\right) + z_{8+16k} \\
&= 3 \cdot 10^{8+16k+1}\left(10^{15} + 10^{14} + \dots + 1\right) + z_{8+16k} \\
&= 3 \cdot 10^{8+16k+1}\frac{10^{16}-1}{9} + z_{8+16k} \quad \text{(Formel für geometrische Reihen)} \\
&= 10^{8+16k+1}\frac{10^{16}-1}{3} + z_{8+16k}.
\end{aligned}$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat (siehe S. 7) ist $17 \mid (10^{16} - 1)$. Da 3 und 17 teilerfremd sind, gilt auch $17 \mid \frac{10^{16}-1}{3}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $17 \mid z_{8+16k}$, folglich auch $17 \mid z_{8+16(k+1)}$.

Also sind alle Folgenglieder $z_8, z_{24}, z_{40}, z_{56}, \dots$ durch 17 teilbar.

Analog kann man weitere unendliche Folgen zusammengesetzter Zahlen mithilfe des kleinen Satzes von Fermat konstruieren. Z.B. sind $z_{11}, z_{29}, z_{47}, z_{65}, \dots$ durch 19 teilbar (Differenz der Indizes ist 18), die Folgenglieder $z_{16}, z_{31}, z_{46}, z_{61}, \dots$ sind durch 31 teilbar (Differenz der Indizes ist 15) usw.

Auf diese Weise ist jedes zusammengesetzte Folgenglied der Startwert einer unendlichen Folge von zusammengesetzten Folgengliedern. Intuitiv ergibt sich, dass in der Folge (z_n) Primzahlen nur „ziemlich selten“ auftreten können.

Kleine Übersicht zur Konstruktion weiterer Folgen:

n	9	10	12	13	14	15	18	19	20	21
kleinster Primfaktor in z_n	673	307	523	607	181	199	1009	29	23	177943

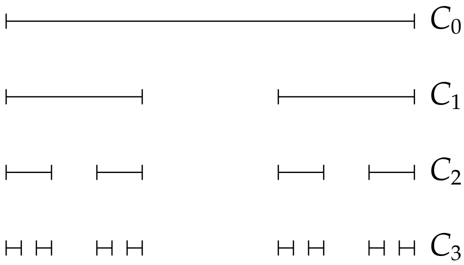
Auch zu den „Perfekten Zahlen im Mittelalter“ hat Herr Moldenhauer der MONOID-Redaktion einige Ausführungen zugeschickt; mehr darüber im nächsten Heft.

Erste Schritte in die Fraktale Geometrie II

von Hartwig Fuchs

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob ein Cantor-Staub auf einem Sierpiński-Teppich liegen kann. Die Antwort vermag nur die Mathematik zu geben: Denn wir werden „sehen“, dass sich beide Objekte unserer anschaulichen Vorstellung entziehen.
Zunächst aber: Was sind ein Cantor-Staub, ein Sierpiński-Teppich?

Ein fraktaler Cantor-Staub $\mathcal{C}$
Georg Cantor (1845-1918), der Begründer der Mengenlehre, war einer der ersten Mathematiker, der Fraktale konstruiert und untersucht hat. Seine weithin bekannten Beispiele – heute als *Cantor-Stäube*† bezeichnet – entstehen durch eine unvorstellbar weit getriebene Verdünnung von Punktmengen. Cantor geht dabei so vor:



Als Startfigur C_0 verwendet er die Strecke $[0;1]$ des Zahlenstrahls. Sein erster Konstruktionsschritt besteht darin, dass er C_0 in drei gleich lange Strecken unterteilt und die mittlere Teilstrecke (ohne die Endpunkte) entfernt – die so entstandene Figur sei C_1. Aus jeder der beiden Strecken von C_1 entfernt er dann wieder die „mittlere Drittelstrecke“ (ohne die Endpunkte), und er erhält C_2 usw.

Denkt man sich diesen Prozess analog unbeschränkt fortgesetzt, dann ergibt sich letztendlich ein *fraktaler Cantor-Staub* $\mathcal{C}$.

Man macht sich leicht klar, dass Cantors Vorgehen auch als Kaskaden-Iteration einer Ersetzungskonstruktion mit Startfigur C_0, Generator G_0 (der hier mit C_1 übereinstimmt) und Konstruktionselementen $G_1, G_2, G_3, \dots$ mit $G_1 = \frac{1}{3}G_0$, $G_2 = \frac{1}{9}G_0$, $G_3 = \frac{1}{27}G_0, \dots$ gesehen werden kann.

Der fraktale Cantor-Staub $\mathcal{C}$ lässt sich nur schwer veranschaulichen. Je weiter man in der Konstruktion der Figuren $C_0, C_1, C_2, \dots$ kommt, um so größer wird die Gesamtlänge der Lücken. Schließlich gilt: Die Gesamtlänge der Lücken im fraktalen Cantor-Staub $\mathcal{C}$ ist 1.
Beweis:
Die Gesamtlänge $|C_n|$ aller Lücken in C_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, ist

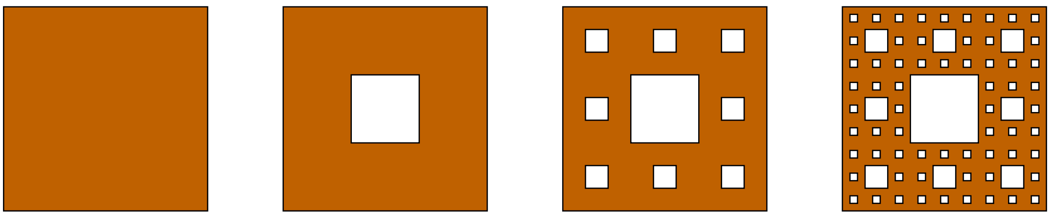
$$\begin{aligned} |C_n| &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ gilt daher $|C_n| \to 1$, so dass die Behauptung zutrifft.
Die Lücken im Fraktal $\mathcal{C}$ nehmen also insgesamt die Länge der Startfigur an. Das bedeutet aber nicht, dass der fraktale Cantor-Staub $\mathcal{C}$ leer ist, d.h. dass im Fortschreiten der Cantorschen Konstruktion nach und nach alle Punkte aus C_0 entfernt werden.

†Cantor selbst spricht von „Diskontinua“.

Es gilt zwar: In C_n, $n \geq 1$, hat jede der 2^{n-1} Strecken die Länge $\frac{1}{3^n}$, so dass wegen $\frac{1}{3^n} \to 0$ für $n \to \infty$ im Fraktal $\mathcal{C}$ nur Strecken der Länge 0 vorkommen – aber das sind Punkte!
Nun sind jedoch diese Punkte so im Intervall $[0;1]$ verteilt, dass ihre Abstände von Punkt zu Punkt verschieden sind. Deshalb ist eine zutreffende anschauliche Vorstellung vom Cantor-Staub $\mathcal{C}$ nicht möglich.

Ein fraktaler Sierpiński-Teppich $\mathcal{T}$
Die bisher betrachteten Fraktale samt ihren Vorstufen und ihren Konstruktionselementen $G_0, G_1, G_2, \ldots$ sind aus Punkten und Strecken aufgebaut.
Der polnische Mathematiker Waclaw Sierpiński (1882-1962) hat wohl als erster diesen doch sehr beschränkten Vorrat von konstruktivem Ausgangsmaterial erweitert, indem er zur Erzeugung von Fraktalen auch Flächenstücke (z.B. Dreiecke, Quadrate usw.) verwendete.
So beschreibt er 1916 die Konstruktion eines Fraktals, das heute ein *Sierpiński-Teppich* $\mathcal{T}$ genannt wird. Seine *Startfigur* T_0 ist ein Quadrat der Seitenlänge 1, das wir zur besseren Veranschaulichung schwarz anmalen. Als *Generator* G_0 dient ihm T_0, aus dem das mittlere Quadrat der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ herausgeschnitten ist. Die außerdem benötigten Konstruktionselemente $G_0, G_1, G_2, \ldots$ erhält er aus der Forderung, dass sie alle G_0 ähnlich sind und $G_1 = \frac{1}{9}G_0$, $G_2 = \frac{1}{9^2}G_0$, $G_3 = \frac{1}{9^3}G_0, \ldots$ gelten soll.
Konstruktion T: Sierpiński zerlegt jede Figur T_n, $n \geq 0$, in 9^n gleich große Quadrate. Danach ersetzt er eines der vorhandenen schwarzen Quadrate aus T_n durch G_n.
Eine *Kaskaden-Iteration* von T, bestehend bei T_0 aus 1, bei T_1 aus 8, bei T_2 aus 8^2,... Konstruktionen T, führt dann von T_0 zu T_1, von T_1 zu T_2, von T_2 zu T_3,... (vgl. die folgenden Figuren) und letztendlich zum Fraktal $\mathcal{T}$.



T_0 $\quad$ $G_0 = T_1$ $\quad$ T_2 $\quad$ T_3

Ein Sierpiński-Teppich kann sicher nicht als Fussbodenbelag verwendet werden – dazu ist er zu löcherig. Tatsächlich gilt sogar: Die Fläche aller Löcher im Sierpiński-Teppich $\mathcal{T}$ der Seitenlänge 1 ist 1.
Beweis:
Die Fläche aller Löcher in der Figur T_n, $n \geq 1$, sei $|T_n|$. Dann ist

$$|T_n| = \frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \ldots + \frac{8^{n-1}}{9^n} = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} + \ldots + \frac{8^{n-1}}{9^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}{1 - \frac{8}{9}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Für $n \to \infty$ gilt daher $|T_n| \to 1$, so dass die Behauptung gilt.
Eine zweite für die Anschauung unerwartete Eigenschaft von $\mathcal{T}$: Der Umfang aller Löcher im Sierpiński-Teppich $\mathcal{T}$ ist unendlich groß. Denn dieser Umfang ist

$$4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} + 8^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{8^2}{3^2} + \ldots\right) > \frac{4}{3}(1 + 1 + 1 + \ldots).$$

Auf einem Sierpiński-Teppich $\mathcal{T}$ liegen (mindestens) zwei Cantor-Stäube $\mathcal{C}$.

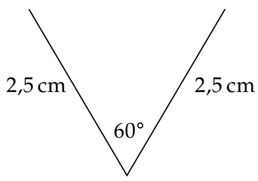
Jede der Vorstufen T_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ von $\mathcal{T}$ und das Fraktal $\mathcal{T}$ selbst besitzt einen quadratischen Rahmen R_n bzw. R. Vom Mittelpunkt der linken Seite eines solchen Rahmens R_n bzw. des Rahmens R konstruiert man (oder: denkt man sich konstruiert) eine Strecke S_n bzw. S zum Mittelpunkt der rechten Seite des Rahmens. Beim „Durchqueren" der Figur T_n wird die Strecke S_n unterteilt in schwarze und weiße Teilstrecken – je nach dem, ob sie durch ein schwarzes Quadrat oder ein Loch der Figur T_n verläuft. Wenn man nun für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Strecke S_n (samt ihren schwarzen und weißen Teilstrecken) mit der entsprechenden Vorstufe C_n des fraktalen Cantor-Staubes $\mathcal{C}$ vergleicht, dann stellt man fest:

Jedes S_n stimmt mit C_n überein. Daraus folgt, dass die Strecke S (samt ihren schwarzen und weißen Bestandteilen) den Cantor-Staub $\mathcal{C}$ darstellt. Somit ist $\mathcal{C}$ eine Teilfigur des Sierpiński-Teppichs $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ „liegt auf" $\mathcal{T}$.

Wegen der Symmetrie von $\mathcal{T}$ gibt es einen zweiten Cantor-Staub $\mathcal{C}$ „auf" $\mathcal{T}$. Um das einzusehen, braucht man S nur um $180°$ um das Zentrum von $\mathcal{T}$ zu drehen. Auch die „Diagonalen" von $\mathcal{T}$ sind zwei (maßstäblich abgeänderte) fraktale Cantor-Stäube – wovon sich der Leser selbst überzeugen möge.

Eine Aufgabe für den Computer-Freund

Ein fraktaler Blumenkohl $\mathcal{B}$



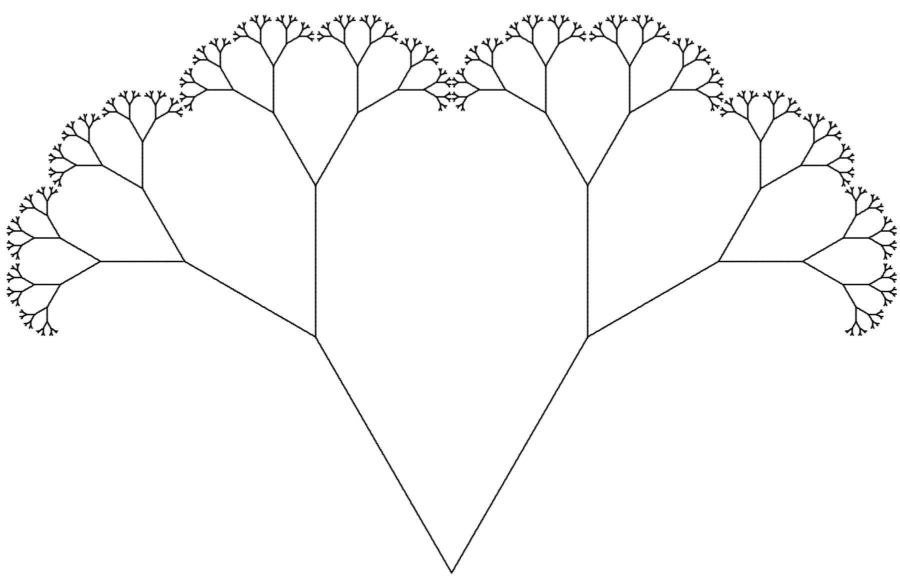
Startfigur B_0

Vorgaben

Ein Winkel mit der Öffnung $60°$ und den Schenkellängen $2{,}5\,\mathrm{cm}$ sei als Startfigur B_0 gegeben. Als Generator verwende man das mit Faktor $\frac{1}{2}$ verkleinerte Abbild von B_0. Alle weiteren Konstruktionselemente seien G_1 mit $G_1 = \frac{1}{2}G_0$, G_2 mit $G_2 = \frac{1}{4}G_0$, G_3 mit $G_3 = \frac{1}{8}G_0$ usw.

Konstruktion B: An einem freien Endpunkt P einer Strecke, die in einer Figur B_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, vorkommt, füge man das Elemente G_n so an, dass sich in P die Winkel $120°$, $60°$, $120°$ ergeben. Gib eine graphische Darstellung von B_7 als eine angenäherte graphische Darstellung des Fraktals $\mathcal{B}$ an. (H.F.)

Lösung:



2005 Lösungen zu den Neujahrsaufgaben 2005

Eine überraschende Summe

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2004\cdot 2005}=$

$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2005}=\frac{2004}{2005}$

Zahlenquadrat

Die Zahlenfigur enthält drei konzentrische Quadrate mit 49, mit 25 und mit 9 Elementen.

Die magische Summe S_7 des größten Quadrats ist
$S_7 = 1981 + 1982 + \ldots + 2029 = 98245$.

Die magische Summe S_5 des mittleren Quadrats ist
$S_5 = 1993 + 1994 + \ldots + 2017 = 50125$.

Die magische Summe S_3 des kleinsten Quadrats ist
$S_3 = 2001 + 2002 + \ldots + 2009 = 18045$.

Die magischen Summen weisen noch eine interessante Beziehung zur zentralen Zahl 2005 auf: $S_3 = 3^2 \cdot 2005$, $S_5 = 5^2 \cdot 2005$, $S_7 = 7^2 \cdot 2005$.

Zahlenrätsel

$1:\ v-(x-2) = 7189$	$5:\ x = 2005$	$9:\ v:6+2 = 1534$
$2:\ v = 383\cdot 24 = 9192$	$6:\ 7^4 = 2401$	$10:\ 7w-x-13 = 5045$
$3:\ w = 1009$	$7:\ 3y = 6903$	$11:\ 2520$
$4:\ 7w+2 = 7065$	$8:\ y = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11-9 = 2301$	$12:\ 5405$

Vermeidbare Rechnung?

Es seien $U=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2005}{2004}$ und $G=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2004}{2003}$.

(1) Es gilt $\frac{3}{2}<\frac{2}{1},\ \frac{5}{4}<\frac{4}{3},\ \frac{7}{6}<\frac{6}{5},\ \ldots,\ \frac{2005}{2004}<\frac{2004}{2003}$.

$U^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2005}{2004}\cdot\frac{2005}{2004}<\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2004}{2003}\cdot\frac{2005}{2004}=2005.$

Aus $U^2 < 2005$ folgt $U < \sqrt{2005}$. Für G^2 gilt mit (1)

$G^2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2004}{2003}\cdot\frac{2004}{2003}>\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2004}{2003}\cdot\frac{2005}{2004}=2005.$

Aus $G^2 > 2005$ folgt $G > \sqrt{2005}$.

Endziffern einer Potenz

Für jede mindestens vierstellige Zahl Z gilt:
(1) $Z\cdot 2005$ und $Z\cdot 5$ haben die gleichen drei Endziffern.
Nachweis:
Das Produkt $Z\cdot 2000$ endet mit dem Ziffernblock 000. Aus $Z\cdot 2005 = Z\cdot 2000 + Z\cdot 5$ folgt daher (1).

Die drei letzten Ziffern einer Zahl $Z > 1000$ seien z_3, z_2, z_1. Wir schreiben dann kurz: $Z = [z_3z_2z_1]$. Für $Z = 2005 = [005]$ gilt dann mit (1):
$Z^2 = [005]\cdot 2005 = [005]\cdot 5 = [025]$;
$Z^3 = [025]\cdot 2005 = [025]\cdot 5 = [125]$;
$Z^4 = [125]\cdot 2005 = [125]\cdot 5 = [625]$;
$Z^5 = [625]\cdot 2005 = [625]\cdot 5 = [125]$ usw. $Z^{2005} = [625]\cdot 2005 = [625]\cdot 5 = [125]$.
Die letzten drei Ziffern von 2005^{2005} sind $1, 2, 5$.

Eine Fläche mit 99 Singularitäten

von Oliver Labs

In diesem Artikel behandeln wir Flächen im dreidimensionalen Raum, die durch die einfachsten Funktionen beschrieben werden können, die es gibt: Polynome. Diese sind übrigens schon so interessant und kompliziert, dass es ein eigenes Forschungsgebiet der Mathematik gibt, das sich mit ihnen beschäftigt: die Algebraische Geometrie.
Bevor wir aber zu den Flächen kommen, betrachten wir uns Kurven in der Ebene. Zunächst einige Beispiele, die man aus der Schule kennt:

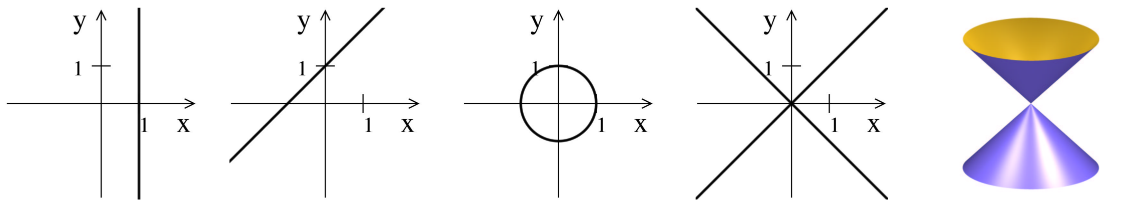
Beispiel 1 (Ebene algebraische Kurven)

- Geraden: *Jede Gerade in der Ebene kann durch eine Gleichung der Form* $f_{a,b,c} = 0$ *beschrieben werden, wobei* $f_{a,b,c} = ax + by + c$ *für gewisse* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Z.B.:*

- *Die Gleichung* $f_{1,0,-1} = 0$ *wird genau von allen Punkten* $P = (p_x, p_y)$ *der Menge* $\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ *erfüllt: Setzt man für* x *bzw.* y *die Koordinaten* p_x *bzw.* p_y *ein, ergibt sich:* $f_{1,0,-1}(p_x, p_y) = p_x - 1 = 0 \Leftrightarrow p_x = 1$.
- *Sind* $t \in \mathbb{R}$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *so liegen die* (p_x, p_y), *die* $f_{t,-1,c} = 0$ *erfüllen, auf einer Geraden mit Steigung* t *durch* $(0, c)$ *(d.h. mit* y*-Achsen-Abschnitt* c, *Bild (b)).*

- Kreise: *Der Kreis mit Radius* r *um den Ursprung besteht aus allen Punkten* (x, y), *die eine Gleichung der Form* $k_r := x^2 + y^2 - r^2 = 0$ *erfüllen (Bild (c)).*

- Zwei sich schneidende Geraden: *Die Menge der Punkte* (x, y), *welche die Gleichung* $s := x^2 - y^2 = 0$ *erfüllen, besteht aus zwei Geraden, die sich im Ursprung schneiden (Bild (d)). Es gilt nämlich:* $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$.



(a) $x - 1$ (b) $x - y + 1$ (c) $x^2 + y^2 - 1$ (d) $x^2 - y^2$ (e) $x^2 + y^2 - z^2$

Allgemein definiert man:

Definition 1 (Ebene algebraische Kurven)

- *Sei* f *ein Polynom in den zwei Variablen* x *und* y. *Das Polynom* f *ist* ***vom Grad*** d, *falls die Summe der Exponenten jedes Summanden kleiner oder gleich* d *ist.* f *hat dann also die Form*

$$f = a_1 x^d + a_2 x^{d-1} y + a_3 x^{d-1} + a_4 x^{d-2} y^2 + \cdots + a_{k(d)}$$

für gewisse Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k(d)$, *wobei* $k(d) := \binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$. *Aufgabe: Zeige, dass* $k(d)$ *die korrekte Anzahl der Koeffizienten ist!*

- *Die* ***Nullstellenmenge*** *von* f *sind alle Punkte* $P = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$, *welche die Gleichung* $f(p_x, p_y) = 0$ *erfüllen.*

- *Eine* ***ebene algebraische Kurve vom Grad*** d *ist die Nullstellenmenge eines Polynoms vom Grad* d *in zwei Variablen.*

An „glatte“ Punkte einer Kurve kann man eine eindeutige Tangente legen (z.B. an einen Punkt des Kreises von Bild (c)). Punkte, in denen dies nicht möglich ist (z.B. der Ursprung in Bild (d)), nennt man Singularitäten. Algebraisch exakt definiert man:

Definition 2 (Singularität) *Sei eine Kurve als Nullstellenmenge eines Polynoms f gegeben. Ein Punkt $P = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ heißt **Singularität** der Kurve, falls $f(p_x, p_y) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(p_x, p_y) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(p_x, p_y) = 0$. Hierbei bezeichnet $\frac{\partial f}{\partial x}$ die partielle Ableitung von f nach x, d.h. man fasst y als Konstante auf und leitet f dann ab. Eine Kurve ohne Singularität heißt **glatt**.*

Beispiel 2 (Singularitäten)

- Zu Bsp. s (Bild (d)): $s = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial s}{\partial y} = -2y$. *Der Ursprung $(0,0)$ ist eine Singularität: $s(0,0) = 0$, $\frac{\partial s}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial s}{\partial y}(0,0) = 0$.*

- Zu Bsp. k_1, (Bild (c)): $k_1 = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial k_1}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial k_1}{\partial y} = 2y$. *Der Kreis, definiert durch k_1, hat also keine Singularität $P = (p_x, p_y)$, weil sonst $2p_x = 0$ und $2p_y = 0$ gelten müsste, also $(p_x, p_y) = (0,0)$. Aber $(0,0)$ ist kein Punkt des Kreises, weil $k_1(0,0) = 0^2 + 0^2 + 1 = 1 \neq 0$. Der Kreis ist somit eine glatte Kurve.*

Alle bisherigen Begriffe kann man auch für drei Variablen definieren. So erhalten wir **algebraische Flächen** im dreidimensionalen Raum und Singularitäten darauf.

Beispiel 3 (Algebraische Flächen)

- Zu Bild (e): *Der Kegel mit Gleichung $K := x^2 + y^2 - z^2$ hat eine Singularität in $(0,0,0)$: $\frac{\partial K}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial K}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial K}{\partial z} = -2z$; setzt man den Punkt $(0,0,0)$ in K und die partiellen Ableitungen ein, ergibt sich jeweils 0. Dies ist die einzige Singularität von K.*

- Die Kugel: *Die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ist hingegen glatt: Beweis wie beim Kreis.*

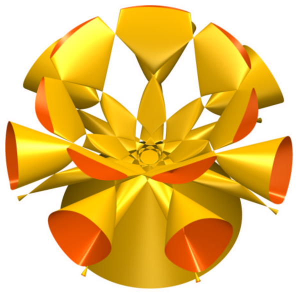
Die **maximale Anzahl $\mu^2(d)$ von Singularitäten einer Kurve vom Grad d** ist bekannt: $\mu^2(d) = \binom{d}{2}$. Sie wird erreicht durch d Geraden; diese schneiden sich in $\binom{d}{2}$ Punkten.

Die **maximale Anzahl $\mu^3(d)$ von Singularitäten einer Fläche vom Grad d** kennt man aber nur für $d \leq 6$. Obwohl Mathematiker bereits seit mehr als 150 Jahren daran forschen, gibt es für $\mu^3(d)$, $d \geq 7$, nur Schranken von oben und unten, die für großen Grad d noch recht weit auseinander liegen. Die Tabelle auf der folgenden Seite fasst das aktuelle Wissen über $\mu^3(d)$ zusammen. Für $d = 7$ liefert die folgende, kürzlich vom Autor gefundene Fläche S_α eine Verbesserung: $\mu^3(7) \geq 99$. Übrigens weiß man seit 1992, dass $\mu^3(7) \geq 93$ (S. V. Chmutov) und seit 1983, dass $\mu^3(7) \leq 104$ (A. N. Varchenko).

Satz 1 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ die reelle Nullstelle ($\alpha \approx -0.14010685$) der Gleichung $7\alpha^3 + 7\alpha + 1 = 0$. Dann hat die Fläche $S_\alpha := P - U_\alpha$ vom Grad 7 genau 99 Singularitäten, wobei*

$$\begin{aligned} P &:= x\cdot\left[x^6 - 3\cdot7\cdot x^4y^2 + 5\cdot7\cdot x^2y^4 - 7\cdot y^6\right] \\ &\quad +7\cdot z\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^3 - 2^3\cdot z^2\cdot\left(x^2+y^2\right)^2 + 2^4\cdot z^4\cdot\left(x^2+y^2\right)\right] - 2^6\cdot z^7, \\ U_\alpha &:= (z+a_5)\left((z+1)(x^2+y^2) + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4\right)^2, \end{aligned}$$

$$a_1 := -\tfrac{12}{7}\alpha^2 - \tfrac{384}{49}\alpha - \tfrac{8}{7}, \qquad a_2 := -\tfrac{32}{7}\alpha^2 + \tfrac{24}{49}\alpha - 4, \qquad a_3 := -4\alpha^2 + \tfrac{24}{49}\alpha - 4,$$
$$a_4 := -\tfrac{8}{7}\alpha^2 + \tfrac{8}{49}\alpha - \tfrac{8}{7}, \qquad a_5 := 49\alpha^2 - 7\alpha + 50.$$



Die Tabelle unten zeigt den aktuellen Stand des Wissens über $\mu^3(d)$. Für $d = 2$ liefert der Kegel (Bild (e)) mit einer Singularität das Maximum. In der Abb. links ist ein Ausschnitt der Fläche S_α vom Grad 7 mit 99 reellen Singularitäten dargestellt; deren Existenz zeigt: $\mu^3(7) \geq 99$. Mehr Bilder, Filme und Informationen unter: `www.AlgebraicSurface.net`

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\mu^3(d) \geq$	0	1	4	16	31	65	**99**	168	216	$\approx \frac{5}{12}d^3$
$\mu^3(d) \leq$	0	1	4	16	31	65	104	174	246	$\approx \frac{4}{9}d^3$

Es ist also immer noch unklar, ob es Flächen vom Grad 7 mit $100, 101, \ldots, 104$ Singularitäten gibt. Entweder müsste man ein Polynom in drei Variablen aufschreiben, dessen zugehörige Fläche eine solche Anzahl von Singularitäten aufweist. Oder man müsste beweisen, dass es so ein Polynom nicht geben kann. Aber wie? Was ist die wirkliche Anzahl? Wie sieht es für andere Grade d aus? Um der Antwort dieser Fragen einen weiteren Schritt näher zu kommen, braucht man wieder eine neue, gute Idee...

$*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Auch 2004 sind viele neue MONOID-Abonnenten hinzu gekommen, insbesondere zum Beginn des Schuljahres 2004/05. Auch für das Kalenderjahr 2005 liegen schon zahlreiche Bestellungen vor. Diejenigen unter unseren MONOID-Freunden, die noch nicht den Folgebeitrag überwiesen haben, seien höflich daran erinnert (Konto-Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“).

2. Oliver Labs, der der Mainzer Arbeitsgruppe *Algebraische Geometrie* von Prof. Dr. Duco van Straten angehört und nebenbei den Internet-Auftritt von MONOID betreut, gelang vor Kurzem eine Verbesserung in der Abschätzung der Anzahl von Singularitäten algebraischer Flächen; er berichtet in dem Beitrag *„Eine Fläche mit* 99 *Singularitäten“* (s. Titelbild) selbst darüber.

3. Zur **MONOID-Feier 2004** versammelten sich am 27. November im *Atrium maximum et minimum* der Universität Mainz etwa 150 Festgäste, um die Übergabe der Preise an die erfolgreichsten Aufgabenlöserinnen und -löser sowie die Preisträgerinnen und Preisträger vom Landeswettbewerb Mathematik am Elisabeth-Langässer-Gymnasium Alzey und Karolinen-Gymnasium Frankenthal zu ehren. Leider war der Begründer von MONOID, Herr **Martin Mettler**, an der Teilnahme verhindert, da er sich als Rekonvaleszent nach einer schweren Operation noch schonen muss. Die Versammlung entsandte ihm unter großem Beifall die besten Wünsche. Die 25-Jahrfeier 2005 in Frankenthal werden wir hoffentlich wieder vereint begehen können. – Nach dem Grußwort des Vizepräsidenten für Studium und Lehre, **Prof. Dr. Jürgen Oldenstein**, in dem dieser die Bedeutung von MONOID an der Schnittstelle von Schule und Universität unterstrich, stellte Herr **Klaus Ernhofer** in seinem Festvortrag ***„Umstülpungsprozesse in der Natur, Geometrie und Technik“*** vor. Ausgehend vom umstülpbaren Würfel, faszinierte er die Festversammlung mit realen und virtuellen Umstülpungen an verschiedenen Polyedern. Herr Ernhofer ist Leiter eines Forschungsprojekts zur technischen Anwendung von Umstülpungsprozessen und Lehrer für Mathematik, Biologie und Philosophie an der Waldorfschule Dachsberg im Schwarzwald. Seine Präsentation wurde umrahmt von den Gesangseinlagen der ***Authentic Voices*** des Seminars für Englische Philologie. In der anschließenden Preisvergabe konnten die meisten der 76 Preisträgerinnen und Preisträger ihre Urkunden und Präsente persönlich unter dem Beifall des Auditoriums in Empfang nehmen. Das **Goldene M 2004** erhielt **Stefanie Tiemann** vom Gymnasium Marienberg in Neuss für die höchste erreichte Zahl von 151 Punkten sowie ihre Mitarbeit an MONOID durch Aufgabenvorschläge und einen Beitrag über den *Sierpiński-Prozess* P_6, einem Teil ihrer Arbeit *„Schwarze Löcher in der Mathematik – Eine Untersuchung von Ziffernoperatoren“*, mit der sie 2004 am Wettbewerb „Schüler experimentieren“ mit Erfolg teilgenommen hat. Die Laudatio auf Stefanie Tiemann hielt ihre Lehrerin Frau **Cordula Langkamp**. – Zum Abschluss der Feier konnten sich alle Gäste an dem reichhaltigen Büffet, das der *Verein der Freunde der Mathematik* ausgerichtet hatte, stärken.

Fotos von der Feier können im Internet unter der MONOID-Adresse `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid` angeschaut werden.

Ekkehard Kroll

MONOID-Preisträger 2004

Das „Goldene M“: Stefanie Tiemann

1. Preis: Christian Behrens, Laura Biroth, Charlotte Capitain, Thomas Geiß, Stephan Holzer, Lars Imsdahl, Martin Alexander Lange, Felix Liebrich, Miriam Menzel, Johannes Merz, Lisa Mettler, Stefan Tran, Annkatrin Weber.

2. Preis: Karin Emil, Robert Hesse, Martin Jöhlinger, Patricia Kastner, Annika Kohlhaas, Madeline Kohlhaas, Laura Mettler, Marina Morad, Miriam Morad, Verena Prägert, Judith Reinhardt, Manuel Ross, Désirée Schalk, Florian Schweiger, Lisa Simon.

3. Preis: Markus Bassermann, Alia el Bolock, Jan B. Boscheinen, Lauren Emil, Johann Kirsch, Katharina Kirsch, Katharina Kober, Vivien Kohlhaas, Claudia Mack, Christian Münkel, Jonathan Peters, Sarah Tröbs.

MONOID-Jahresabonnement 2005: Nadia Abou Shadi, Maike Bäcker, Simon Bats, Corinna Dinges, Natalie Geiß, Anne Gutberlet, Larissa Habbel, Marion Heublein, Nadine Issa, Julia Jung, Christoph Karg, Julia Koch, Moritz Maurer, Hannah Meilinger, Nora Mollner, Sabine Oßwalt, Alexander Rettkowski, Sarah Rosengarten, Iman Tarek, Christoph Tietz, Sophia Waldvogel, Andreas Weimer, Johannes Weimer, Konstantin Wüst, Julia Zech.

MONOID-Stein für Löser und Löserinnen aus den 5. und 6. Klassen:
Lisa Engel, Alexander Heiss, Carolin Klein, Patricia Limpert, Tatjana Mendt, Matthias Monschau, Carolin Roßbach, Katrin Schlemm, Daniel Schwind, Joscha Wagner.

Das „Goldene M“ sowie die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet.

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 19.10.2004)

Die Klassenangaben beziehen sich auf das Schuljahr 2003/04.

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Daniel Albrecht 8, Luisa Dörrhöfer 4, Annika Flick 3, Ramona Friedrich 13, Alexander Gerharz 12, Leonie Hartmann 2, Eduard Hauck 4, Alexander Heiss 16, Larissa Hyar 4, Britt Kalusche 4, Marie-Christine Keul 3, Benedikt Konrad 2, Julia Loos 6, Peter Machemer 4, Marina Matchlakowa 5, Philipp Mayer 9, Ann-Kristin Müller 3, Isabelle Nau 3, Delina Nguyen 4, Sebastian Ofner 6, Max Pfeffer 4, Manuel Riemer 7, Patrick Schnabel 6, Jan Schneider 3, Daniel Schwind 16, Raphael Wetzel 3;
Kl. 6: Laura Brückbauer 14, Patrick Marx 13, Jaqueline Mechsner 7, Jonathan Peters 51, Arne Siefkes 6, Lisa Simon 67, Joscha Wagner 16, Benedikt Werner 4, Ozan Yilmaz 5, Julia Zech 34;
Kl. 7: Janina Braun 24, Dorothee Fister 6, Claudia Heiss 26, Johanna Mees 12, Vanessa Nagel 21, Sabine Oßwalt 46, Nastassja von der Weiden 19;
Kl. 8: Patricia Kastner 64, Johannes Merz 82;
Kl. 9: Markus Bassermann 58, Isabel Heldt 4, Ines Rodriguez 4;
Kl. 12: Manuel Ross 63.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Laura Mettler 61, Désirée Schalk 74, Johanna Stimm 6;
Kl. 7: Victoria Andreä 21, Felix Liebrich 95, Lisa Mettler 85, Richard Nixdorf 20, Nina Rein 10, Konstantin Wüst 30, Rebecca Zimmer 15;
Kl. 9: Marc Rein 14.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Thomas Geiß 121; **Kl. 10:** Stefan Tran 103.

Jens Senger 18.

Altdorf, Gymnasium: Kl. 7: Marc Legradi 20.

Altötting, König-Karlmann Gymnasium: Kl. 8: Amelie Hüttner 20.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Kl. 8: Christian Behrens 115, Martin Alexander Lange 99.

Andwill (Schweiz): Fredi Stolz 5.

Ansbach, Gymnasium Carolinum:
Kl. 5: Sieglinde Holzknecht 7; **Kl. 9:** Arnulf Holzknecht 7.

Bad Homburg: Kl. 9: Laura Biroth 96.

Bingen, Hildegardis-Gymnasium: Kl. 6: Katharina Kirsch 57.

Bingen, Stefan-George-Gymnasium: Kl. 8: Johann Kirsch 51.

Boppard, Kant-Gymnasium: Kl. 9: Thomas Klauer 10.

Calw-Stammheim,Maria von Linden-Gymnasium: Kl. 9: Michael Nothacker 12.

Duderstadt, Eichsfeld-Gymnasium: Kl. 12: Sebastian Gutknecht 17, Manuel M. 24.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 5: Theresa Heil 6, Theresa Isert 8; **Kl. 6:** Angela Schmelz 13, Luisa Schmelz 4;
Kl. 7: Julia Gerk 12, Anne Gutberlet 29; **Kl. 8:** Christian Münkel 51.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 12 Lars Imsdahl 83.

Ginsheim, IGS Mainspitze: Kl. 7 Jennifer Saul 20.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Anastasia Popova 1, Lea Schmitz 3;
Kl. 6: Corinna Dinges 38, Laura Herborn 4, Carolin Klein 22, Hannah Meilinger 44, Tatjana Mendt 21, Katharina Schmidt 12, Andreas Weimer 40, Johannes Weimer 30;
Kl. 7: Theresa Becker 2, Marina Bernikowa 2, Sarah Bieser 3, Jonathan Bös 2, Vanessa Faber 2, Jonas Fischer 6, Andreas Foltyn 3, Josephine Jordan 5, Alessandra Kremer 1, Cathrin Reusch 3, Andre Schardt 4, Adrian Schmidt 1, Lara Schneider 5, Simon Theis 1, Christian Wappler 2;
Kl. 9: Lena Bertram 3, Carina Czarnrtzki 2, Julia Dick 3, Theresa Krischke 11, Marcus Weidenfeller 5, Jonas Weyer 5;
Kl. 13: Daniel Bartholomä 13.

Halberstadt, Martineum: Kl. 7: Robert Hesse 61.

Halle, Georg-Cantor-Gymnasium: Kl. 7: Christoph Tietz 38.

Heidelberg, Englisches Institut: Nadia Rauh 12.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):
Kl. 6: Karin Emil 68, Marina Morad 79;
Kl. 8: Alia el Bolock 58, Nadia Abou Shadi 47;
Kl. 9: Lauren Emil 59, Nadine Issa 49, Mariette Michael 10, Mireille Micher 19, Miriam Morad 63, Iman Tarek 31.

Kelkheim/Taunus, Eichendorffschule (Betreuende Lehrer Herr Marsen, Herr Ackermann):
Kl. 8: Isabell Peyman 21, Sonja Sauckel-Plock 16, Viola Sommer 4.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium: Kl. 6: Marius Rackwitz 3.

Landau, Max-Sievogt-Gymnasium: Kl. 10: Christina Flörsch 8.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 9: Maximilian Mühlbacher 17.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 8: Katharina Kober 51; **Kl. 9:** Christoph Karg 33;
Kl. 10: Claudia Mack 54, Michaela Mack 5, Judith Reinhardt 62, Jonas Weber 7.

Magdeburg, Werner-von-Siemens-Gymnasium: Kl. 9: Sebastian Schulz 15.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 7: Christopher Ölmüller 11.

Mainz, Schlossgymnasium: Kl. 13: Stephan Holzer 107.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Maike Bäcker 37, Natalie Geiß 31, Michaela Schuster 9, Helena Schweizer 17.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 6: Florian Schweiger 70.

München, Gisela-Gymnasium: Kl. 10: Bernhard Saumweber 5.

München, Maria-Theresia-Gymnasium: Kl. 10: Robert Siemering 26.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 5: Claudia Däschner 10, Kirsten Hubert 14, Vivien Kohlhaas 54, Lea Krause 8, Nora Mollner 45, Daria Schymczyk 4;

Kl. 6: Madeline Kohlhaas 76; **Kl. 7:** Hannah Rautenberg 19;
Kl. 8: Annika Kohlhaas 72, Miriam Menzel 108;
Kl. 9: Anika Sonnenberg 22, Stefanie Tiemann 151.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):
Kl. 8: Martin Jöhlinger 68.

Nürnberg: Marion Heublein 43.

Oberusel, Gymnasium (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):
Kl. 5: Hannah Braun 7, Philipp Kalte 5;
Kl. 6: Larissa Habbel 42, Patricia Kuther 11, Patricia Limpert 19, Sarah Rosengarten 32, Katrin Schlemm 21, Viktoria Schreiber 8, Sophia Waldvogel 30, Valentin Walther 10;
Kl. 7: Annkatrin Weber 119, Mirella Rechinti 1;
Kl. 9: Sebastian Eckart 20;
Kl. 10: Simon Bats 33.

Otterberg, Freie Waldorfschule: Kl. 7: Malte Meyn 7.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Philip Dahnen 8 , Matthias Monschau 21, Jan Radermacher 4;
Kl. 6: Michael Monschau 5, Felix Schmitt 12;
Kl. 7: Keven Runge 12, Tobias Wallek 23;
Kl. 10: Dominik Schellberg 4, Paul W. Schnabel 4.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):
Kl. 8: Franziska Groß 4; **Kl. 10:** Jan B. Boscheinen 54.

Speyer, Friedrich-Magnus-Schwerd Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Karmann):
Kl. 7: Melanie Zickgraf 12.

Speyer, Kolleg: Kl. 12: Tina Hartmann 6.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 5: Alexander Rettkowski 29.

St. Goarshausen, Wilhelm-Hofmann-Gymnasium: Kl. 7: Julia Koch 30.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 9: Juliane Oberwieser 25.

Weisenheim am Berg, Regionale Schule: Kl. 7: Marc Andre Biehl 7.

Weiterstadt: Kl. 3: Alexandra Einicke 9; **Kl. 11:** Artgam Zern 19.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Geraldine Arning 6, Valerie Barchet 2, Sarah Breunich 8, Lisa Engel 25, Julia Krebs 9, Louisa Linn 6, Carolin Roßbach 16, Sophie Schäfer 2, Lisa Schwarz 10, Philipp Thau 12;
Kl. 7: Kurosch Habibi 13;
Kl. 8: Julia Jung 30, Sarah Tröbs 52;
Kl.11: Verena Prägert 72.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Kl. 8: Charlotte Capitain 89.

Gymnasium Wolfen-Stadt: Kl. 13: Martin Radloff 13.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 7: Moritz Maurer 43.

MONOID Jahrgang 24 Heft 80 Dezember 2004

Inhalt

Valentin Blomer: Wie groß ist eigentlich unendlich? . . . 3
Neues zum „Turm von Heilbronn“ . . . 4
Ekkehard Kroll: Über das „Modulo-Rechnen“ . . . 6
Hartwig Fuchs: Dreieckszahlen . . . 9
Hartwig Fuchs: Lauter Lügengeschichten ? . . . 13
Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik . . . 15
Die Seiten für den Computer-Fan . . . 16
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 79 . . . 18
Hartwig Fuchs: Aufgaben zum Neuen Jahr . . . 21
Neue Mathespielereien . . . 21
Neue Aufgaben . . . 23
Hartwig Fuchs: Mehr Aufgaben zum Neuen Jahr . . . 24
Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 79 . . . 25
Stefanie Tiemann: Der Sierpiński-Prozess P_6 . . . 28
Vorsicht vor Bildungsgesetzen für Primzahlen . . . 31
Hartwig Fuchs: Erste Schritte in die Fraktale Geometrie II . . . 33
Lösungen zu den Neujahrsaufgaben . . . 36
Oliver Labs: Eine Fläche mit 99 Singularitäten . . . 37
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion . . . 39
MONOID-Preisträger 2004 . . . 40
Rubrik der Löser(innen)/ Stand 19.10.2004 . . . 41

Die Redaktion

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339 oder -26107; Fax -24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid