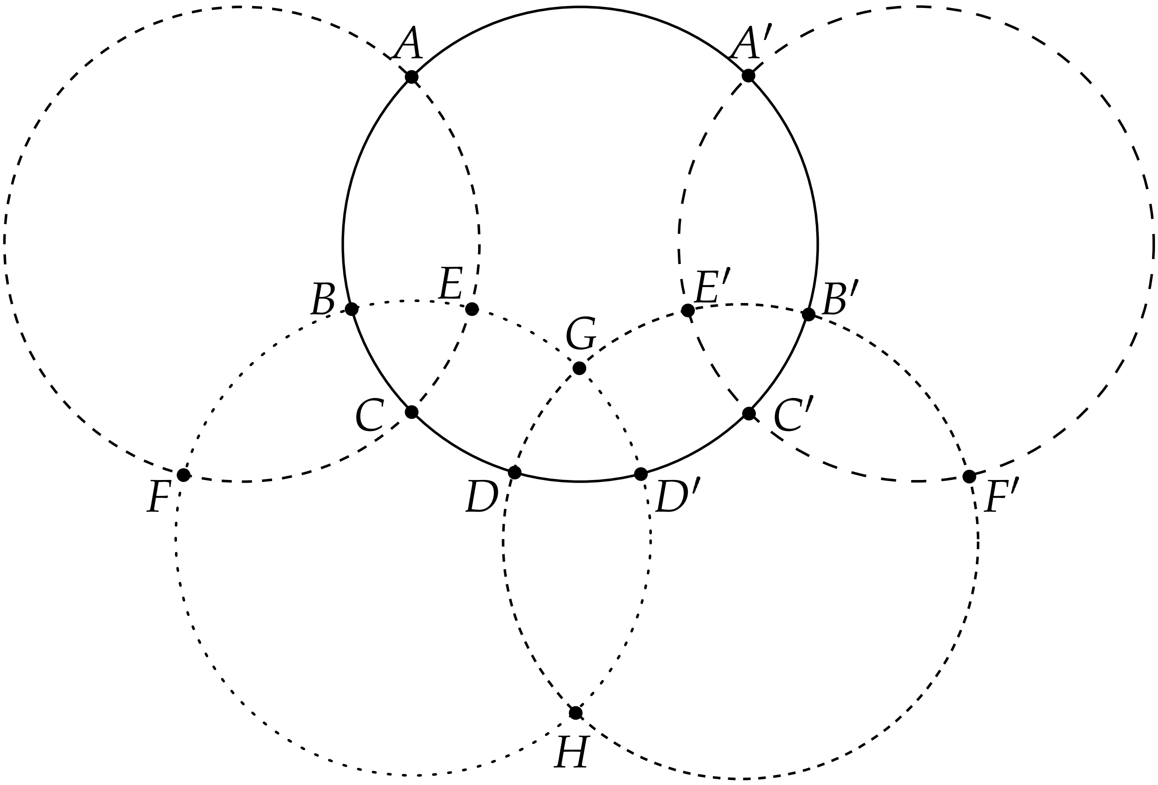
Jahrgang 24 Heft 78 Juni 2004

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbstständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben!

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.09.2004.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg
Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler und **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth.
Die Namen Aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

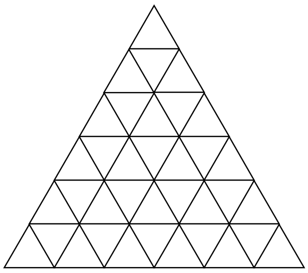
Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch Allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Zur Aufgabe „Gleichseitige Dreiecke“
(Mathespielereien, MONOID 76)

Eine Seite für Mathis von Martin Mettler



In der Abbildung sieht man ein gleichseitiges Dreieck, bei dem die Seiten in $n = 6$ gleichlange Teilstrecken geteilt sind. Verdeckt man die untere Schicht von Dreiecken, so erhält man den Fall $n = 5$, verdeckt man zwei Schichten von unten, so erhält man den Fall $n = 4$ usw. In dieser Figur haben wir also die Möglichkeit, alle Fälle $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ zu veranschaulichen.

Zur Abzählung der Dreiecke im Fall $n = 6$ verfahren wir wie folgt:

Wir zählen zunächst die Dreiecke mit der Seitenlänge 1 (die Länge einer Teilstrecke). Dazu fangen wir an der Spitze an und finden in der ersten Schicht 1 solches Dreieck, in der zweiten Schicht 3, in der dritten Schicht 5 usw., in der sechsten Schicht 11.

Insgesamt finden wir $1 + 3 + 5 + \ldots + 11 = \mathbf{36}$ Dreiecke der Seitenlänge 1. Ich nenne sie 1er.

Wir zählen nun die 2er, d.h. Dreiecke mit der Seitenlänge 2 (die Länge zweier Teilstrecken):

Mit der Spitze ganz oben haben wir 1, mit der Spitze auf der ersten Linie haben wir 2, mit der Spitze auf der zweiten Linie 3, mit der Spitze auf der dritten Linie 4, mit der Spitze auf der vierten Linie 5.

Es gibt aber auch 2er-Dreiecke, deren Spitze unten und deren Grundseite oben liegt. Mit Spitze auf der ersten, zweiten und dritten Linie gibt es kein solches Dreieck. Aber mit der Spitze auf der vierten Linie und der Grundseite auf der zweiten Linie gibt es 1. Mit der Spitze auf der fünften Linie und der Grundseite auf der dritten Linie gibt es 2 und mit der Spitze auf der sechsten Linie und der Grundseite auf der vierten Linie gibt es 3 solche Dreiecke.

2er sind also insgesamt: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + (1 + 2 + 3) = \mathbf{21}$.

Wir zählen nun die 3er-Dreiecke:

Mit der Spitze ganz oben haben wir 1, mit der Spitze auf der ersten Linie haben wir 2, mit der Spitze auf der zweiten Linie haben wir 3, mit der Spitze auf der dritten Linie 4.

Mit der Spitze unten und der Grundseite oben gibt es nur 1 mit der Spitze auf der sechsten Linie und der Grundseite auf der dritten Linie.

3er sind also insgesamt: $1 + 2 + 3 + 4 + (1) = \mathbf{11}$.

An 4er-, 5er- und 6er-Dreiecken gibt es nur solche mit der Spitze nach oben, nämlich $1 + 2 + 3 = 6$ bzw. $1 + 2 = 3$ bzw. 1.

Wir haben also

$$\begin{array}{lll}
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 & = \mathbf{36} & \text{1er-Dreiecke,} \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 + 2 + 3 & = \mathbf{21} & \text{2er-Dreiecke,} \\
1 + 2 + 3 + 4 \quad + 1 & = \mathbf{11} & \text{3er-Dreiecke,} \\
1 + 2 + 3 & = \mathbf{6} & \text{4er-Dreiecke,} \\
1 + 2 & = \mathbf{3} & \text{5er-Dreiecke,} \\
1 & = \mathbf{1} & \text{6er-Dreieck.}
\end{array}$$

Die fettgedruckten Zahlen ergeben insgesamt $A(6) = 78$ Dreiecke im Fall $n = 6$.

Das Abzählen bei $n = 5, 4, 3$ ist nun leicht nachzuvollziehen. Man findet: $A(5) = 48$, $A(4) = 27$ und $A(3) = 13$.

Allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl der Dreiecke

Eine Seite für Anspruchsvolle von Martin Mettler

Bei der Aufstellung einer solchen Formel für den Fall einer **geraden** Zahl n stützen wir uns auf die Veranschaulichung im Fall $n = 6$. Wir erhalten die Tabelle:

$$\begin{array}{lll}
1+3+5+7+\ldots+(2n-3)+(2n-1) & & 1\text{er} \\
1+2+\ldots+(n-2)+(n-1) & +1+2+\ldots+(n-5)+(n-4)+(n-3) & 2\text{er} \\
1+2+\ldots+(n-2) & +1+2+\ldots+(n-5) & 3\text{er} \\
\vdots & & \\
1+2+\ldots+\left(\frac{n}{2}+1\right) & +1 & \left(\frac{n}{2}\right)\text{er} \\
1+2+\ldots+\frac{n}{2} & & \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{er} \\
\vdots & & \\
1+2 & & (n-1)\text{er} \\
1 & & n\text{er}
\end{array}$$

Bei der Addition all dieser Summen verwenden wir folgende Formeln, auf deren Herleitung wir im nächsten MONOID-Heft eingehen werden:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \text{woraus } \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ leicht folgt;}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Für die Anzahl $A(n)$ aller gleichseitigen Dreiecke bei n Teilstrecken auf jeder Seite des Ausgangsdreiecks gilt dann: $A(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k + S$, wobei

$$S = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(2k-1)2k}{2} = 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k^2 - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k = \frac{2}{6}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}\left(2\left(\frac{n}{2}-1\right)+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}$$

Also ist $A(n) = n^2 + \dfrac{n\cdot(n^2-1)}{6} + \dfrac{n\cdot(2n^2-9n+10)}{24} = \dfrac{1}{8}\cdot(2n^3+5n^2+2n)$

Für **ungerades** n finden wir analog (z.B. anschaulich am Fall $n = 9$):
$A(n) = \dfrac{1}{8}\cdot(2n^3+5n^2+2n-1)$

Wegen $2n^2+5n+2 = (n+2)(2n+1)$ gilt schließlich folgende Formel:

$$A(n) = \begin{cases} \frac{1}{8}\cdot n\cdot(n+2)\cdot(2n+1), & \text{falls } n \text{ gerade ist;} \\ \frac{1}{8}\cdot\left(n\cdot(n+2)\cdot(2n+1)-1\right), & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Man überprüft sofort:

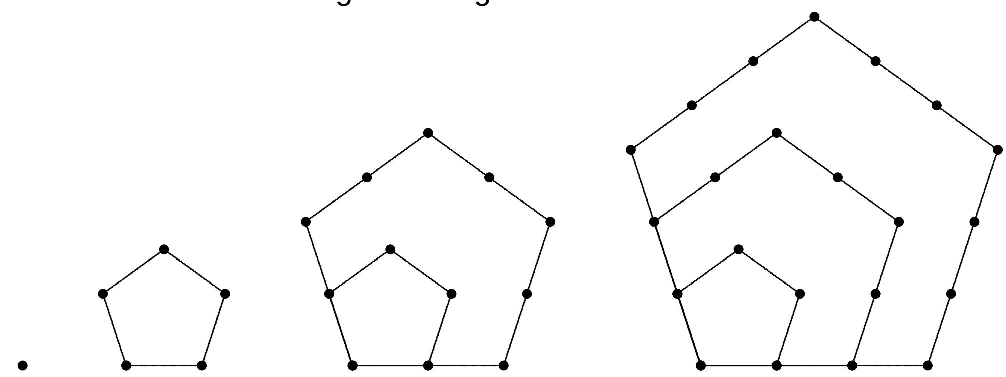
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$A(n)$	1	5	13	27	48	78	118	170	235	315	256275

Eine mathematische Exkursion für Mathis: Auch so kann man abzählen

von Hartwig Fuchs

Pentagonalzahlen

Die mit F_1, F_2, F_3, F_4 beginnende Folge der Figuren in (1) denke man sich nach dem aus (1) erkennbaren Muster beliebig weit fortgesetzt.

(1)  $\dots$

F_1 F_2 F_3 F_4

Die Anzahl der Punkte in den Figuren $F_1, F_2, F_3, \dots$ von (1) heißen **Pentagonal-** oder **Fünfeckzahlen**; sie werden mit $P_1, P_2, P_3, \dots$ bezeichnet.

Wir stellen nun die Frage: Wie groß ist die 15te Pentagonalzahl P_{15}? Um die Antwort zu finden, zeichnen wir nicht die zeitaufwändige Figur F_{15}. Vielmehr geben wir ein Zählverfahren an, das bequemer und schneller zum Ziel führt. Dieses Verfahren ist 4-schrittig.

1. Schritt: Bestimme einige der ersten Pentagonalzahlen $P_1, P_2, P_3, \dots$
2. Schritt: Berechne die Abstände von P_1 nach P_2, von P_2 nach P_3, usw.

Wir veranschaulichen diese beiden Verfahrensschritte durch das Schema (2)

(2)

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
P_1 & & P_2 & & P_3 & & P_4 & & P_5 & & P_6 & & \dots \\
1 & & 5 & & 12 & & 22 & & 35 & & 51 & & \\
 & + & & + & & + & & + & & + & & & \\
 & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & & & \dots
\end{array}
$$

(Überprüfe selbst, ob diese Fünfeckzahlen richtig sind.)

3. Schritt: Versuche in der Folge der Abstände eine Regelmäßigkeit zu finden.
4. Schritt: Setze mit Hilfe diese Regelmäßigkeit zunächst die Folge der Abstände fort und berechne dann mit ihnen neue Pentagonalzahlen.

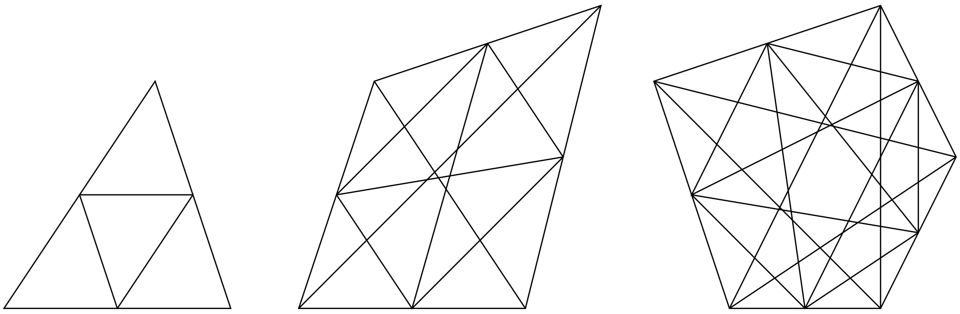
In (2) bemerken wir, dass sich die Abstände um jeweils 3 vergrößern. Damit können wir der Reihe nach alle Abstände angeben und aus ihnen die Fünfeckzahlen berechnen, insbesondere auch P_{15}. Das sieht abgekürzt so aus:

1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	$330 = P_{15}$
4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	

Die 15te Pentagonalzahl ist somit 330.

Traversen in Vielecken

In Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ... bezeichnen wir die Diagonalen sowie die Verbindungsstrecken von Seitenmittelpunkten als Traversen („Durchquerende“).
Die Figuren F_3, F_4, F_5 sind Beispiele für Vielecke, in denen alle Traversen eingezeichnet sind.

(3) 

F_3 F_4 F_5 ...

Uns interessiert nun die Frage nach der Anzahl T_n aller Traversen in einem n-Eck, $n \geq 3$.
Als Beispiel bestimmen wir T_{15} für ein 15-Eck. Weil aber die dazu benötigte Figur F_{15} nur mit ziemlichem Zeitaufwand gezeichnet werden könnte, werden wir die Aufgabe nicht graphisch, sondern mit dem oben beschriebenen Abzählverfahren lösen.
Dazu bestimmen wir zunächst etwa $T_3, T_4, \ldots, T_7$ und erhalten das Schema:

(4)

T_3		T_4		T_5		T_6		T_7		...
3		8		15		24		35		
	+		+		+		+			
	5		7		9		11			...

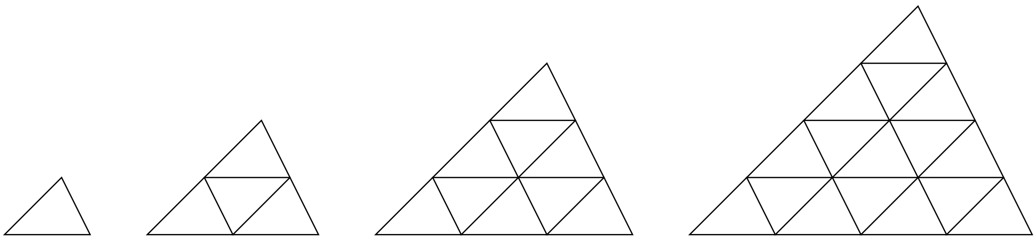
(Überprüfe selbst die Richtigkeit dieser Zahlen.)

Offensichtlich vergrößern sich die Abstände der T-Zahlen um jeweils 2. Damit ergibt sich T_{15} für ein 15-Eck durch eine Fortsetzung zunächst der zweiten Zeile und dann der ersten Zeile des Schemas (4) – was abgekürzt so aussieht:

3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	$195 = T_{15}$	(2. Rechenzeile)
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27		(1. Rechenzeile)

Also hat ein 15-Eck insgesamt 195 Traversen.

Dreiecke im Dreieck

(5) 

F_1 F_2 F_3 F_4 ...

Die Figurenfolge F_1, F_2, F_3, F_4 denke man sich nach dem aus (5) ablesbaren Muster mit $F_5, \ldots, F_n$ ($n \geq 5$) beliebig weit fortgesetzt.
Wir wollen nun mit unserem Abzählverfahren die Anzahl der in der Figur F_{15} vorhandenen Dreiecke bestimmen.

Dazu geben wir zunächst die Anzahl D_n von Dreiecken in F_n, $1 \leq n \leq 8$, an – z.B. ist $D_3 = 13$, weil F_3 neun Dreiecke F_1, drei Dreiecke aus vier Figuren F_1 und ein Dreieck aus neun Figuren F_1 enthält.

Da die Abstände der Zahlen $D_1, D_2, \ldots, D_8$ keine offensichtliche Gesetzmäßigkeit des Größerwerdens erkennen lassen – vgl. die zweite Zeile von (6) – erweitern wir unser Abzählverfahren, indem wir uns die Abstände der Abstände anschauen – vgl. dritte Zeile von (6):

	Anzahlen D_n von Dreiecken	D_1		D_2		D_3		D_4		D_5		D_6		D_7		D_8	$\ldots$
		1		5		13		27		48		78		118		170	
(6)	Abstände der D_n		4		8		14		21		30		40		52		$\ldots$
	Abstände der Abstände			4		6		7		9		10		12			$\ldots$

Die dritte Zeile von (6) zeigt nun tatsächlich eine Regelmäßigkeit, die man zur Fortsetzung von (6) bis hin zu D_{15} so ausnutzen kann:
Wir verlängern die dritte Zeile von (6) nach dem aus (6) ablesbaren Muster um sieben Zahlen, berechnen aus diesen sieben Abstände der zweiten Zeile von (6) und damit die sieben Zahlen $D_9, \ldots, D_{15}$ der ersten Zeile von (6) – abgekürzt sieht das dann so aus:

$\ldots$ 78	118	170	235	315	411	525	658	812	$988 = D_{15}$	(3. Rechenzeile)
$\ldots$ 40	52	65	80	96	114	133	154	176		(2. Rechenzeile)
$\ldots$ 12	13	15	16	18	19	21	22			(1. Rechenzeile)

In der Figur F_{15} kommen also $D_{15} = 988$ Dreiecke vor.

Hinweis für Mathis
Mit unserem Zählverfahren kann man auch Zahlen P_n, T_n, D_n aus den obigen Beispielen mit $n > 15$ bestimmen.
Überprüfe nun, was Du gelernt hast, an der Mathespielerei „Rechtecke im Rechteck“ auf Seite 19.

Hinweis für Fortgeschrittene
Für das oben beschriebene Abzählverfahren bleibt offen, ob es zu jedem gegebenen n die Zahlen P_n, T_n, D_n (zumindest theoretisch) liefert. Diese Lücke ist also jeweils noch zu schließen. Wir zeigen beispielhaft für die Pentagonalzahlen, wie man dazu vorgehen kann.
Wir bezeichnen den Abstand von P_{n-1} und P_n mit A_{n-1}, $n - 1 \geq 1$. Dann ist zur Rechtfertigung unseres Abzählverfahrens für Fünfeckzahlen zu zeigen, dass gilt:
(7) $A_{n-1} = A_{n-2} + 3$ für $n - 1 > 1$ und $A_1 = 4$ für $n - 1 = 1$.
An der Figur 3 aus (1) macht man sich klar: Das größte Fünfeck einer Figur F_n hat auf jeder Seite n Punkte, insgesamt besitzt es also $5n - 5$ Punkte (die Eckpunkte des Fünfecks dürfen nicht doppelt gezählt werden). Auf zwei seiner Seiten befinden sich insgesamt $(n-1) + (n-2)$ Punkte, die bereits in der Figur F_{n-1} auftreten. F_n weist daher $5n - 5 - (n-1) - (n-2) = 3n - 2$ mehr Punkte auf als F_{n-1}. Somit ist $A_{n-1} = 3n - 2$, also
(8) $A_{n-1} = 3(n-1) + 1$ und analog $A_{n-2} = 3(n-2) + 1 = 3(n-1) + 1 - 3$.
Aus (8) ergibt sich die Behauptung (7).

Mit (8) kann man leicht eine geschlossene Formel für Pentagonalzahlen herleiten: Wegen

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} \\ &= 1 + (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3(n-1) + 1) \\ &= n + 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= n + 3 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \end{aligned}$$

folgt

(9) $P_n = \frac{1}{2} n(3n-1),\ n \geq 1.$

Wie lauten die geschlossenen Formeln für T_n bzw. D_n ?
(Die Lösungen stehen an anderer Stelle in diesem Heft!)

Trugschluss: Die wundersame Geldvermehrung

6 Schüler wollen einen Fußball kaufen, der $28,50$ € kosten soll; dafür zahlt jeder $4,75$ € in die gemeinsame Kasse. Kaum haben die Schüler den Ball erworben und den Laden verlassen, da bemerkt der Verkäufer, dass er irrtümlich den Preis um $4,50$ € zu hoch angesetzt hat. Also eilt er den Schülern hinterher, um ihnen einen Teil des zu viel bezahlten Betrages zurückzugeben, allerdings nur $1,50$ €, während er 3 € für sich behält – gewissermaßen als Belohnung für seine läuferische Leistung.

Nachdem die $1,50$ € gerecht aufgeteilt sind, beträgt der Kostenanteil eines jeden Schülers $4,50$ € für den Ball.

Nun gilt: $6 \cdot 4,50$ € $= 27$ €; mit den 3 € des Verkäufers ergibt das insgesamt 30 €, also $1,50$ € mehr als ursprünglich vorhanden waren!

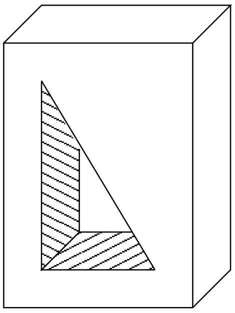
Welcher Fehler führt zu diesem Trugschluss? (H.F.)

Lösung:

Man sollte so rechnen: $28,50 - (1,50 + 3,00) = 28,50 - 1,50 - 3,00$.
Tatsächlich wird gerechnet: $28,50 - (1,50 + 3,00) = 28,50 - 1,50 + 3,00$,
ein klarer *Verstoß* gegen eine *Klammer-Regel*.

Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder, . . .

von Hartwig Fuchs



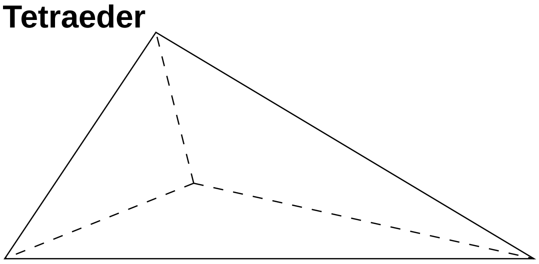
Ein **Polyeder** ist ein Objekt des 3-dimensionalen Raumes: Es ist ein Körper, dessen Oberfläche (lückenlos) von ebenen, geradlinig begrenzten Vielecken gebildet ist. Ein solcher Körper heißt ein **konvexes Polyeder**, wenn seine Oberfläche keine „Einbuchtungen“ nach innen aufweist; präziser: wenn je zwei seiner inneren Punkte durch eine Strecke verbunden werden können, die vollständig im Innern des Körpers verläuft.
Ein Würfel zum Beispiel ist ein konvexes Polyeder, der Körper links dagegen nicht.

Die *konvexen* Polyeder werden wir nach der Anzahl m der ihre Oberfläche bildenden n-Ecke sortieren – wobei wir die zu einem bestimmten m gehörigen Körper mit $P(m)$ und ihre Oberfläche mit $O(m)$ bezeichnen.
Vorweg:

(1) Die Oberfläche $O(m)$ eines Polyeders $P(m)$ besteht aus mindestens vier Vielecken – so dass stets $m \geq 4$ ist.

Denn seine Oberfläche $O(m)$ enthält ein n-Eck V mit mindestens drei Seiten. Da an jeder Seite von V ein konvexes Vieleck angrenzt, besteht $O(m)$ aus mindestens vier Vielecken.

Tetraeder



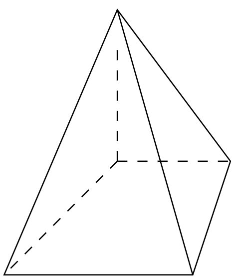
Die Körper $P(4)$, deren Oberfläche $O(4)$ aus genau vier Vielecken besteht, heißen **Tetraeder***.

Die Figur links stellt ein Tetraeder dar.

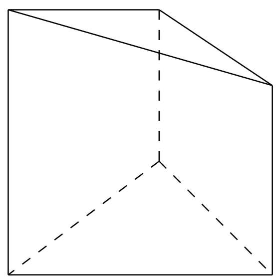
(2) Die vier Vielecke der Oberfläche eines Tetraeders sind stets Dreiecke.

Denn angenommen auf der Oberfläche eines Tetraeders befindet sich ein n-Eck V mit $n \geq 4$. An jede Seite von V stößt ein konvexes Vieleck von $O(4)$ an. Also hat $O(4)$ mindestens fünf Vielecke. Aus diesem Widerspruch folgt, dass die Annahme nicht zutreffen kann – also gilt (2).

Pentaeder



Bei den **Pentaedern** $P(5)$ lassen sich zwei Typen unterschiedlichen Oberflächenaufbaus feststellen: Die vierseitigen Pyramiden, deren Oberfläche aus vier Dreiecken und einem Viereck gebildet sind und die dreiseitigen Prismen mit einer Oberfläche aus zwei Dreiecken und drei Vierecken. Weitere Pentaedertypen gibt es nicht, wie sich zeigen lässt.

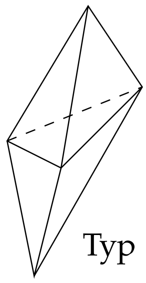


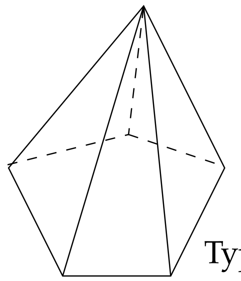
Hexaeder

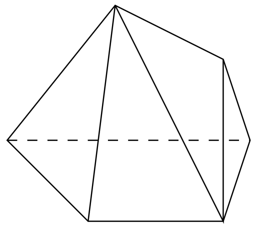
Bei den Hexaedern kann man bereits sieben Typen unterschiedlicher Kombinationen von Oberflächen-Vielecken finden. Wir wollen sie auf zwei Arten beschreiben: numerisch und graphisch.

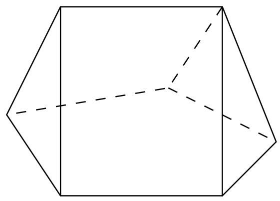
Kombinationen der Oberflächen-Vielecke beim Hexaeder und ihre Veranschaulichungen.

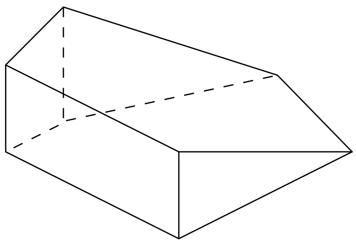
	Anzahl der		
	Dreiecke	Vierecke	Fünfecke
Typ 1	6	0	0
Typ 2	5	0	1
Typ 3	4	2	0
Typ 4	3	2	1
Typ 5	2	2	2
Typ 6	2	4	0
Typ 7	0	6	0

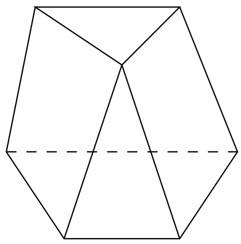

Typ 1

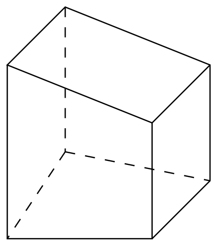

Typ 2


Typ 3


Typ 4


Typ 5


Typ 6


Typ 7

Weitere Hexaeder-Typen gibt es nicht, z.B. gibt es nur einen Hexaeder-Typ mit zwei Fünfecken, nämlich Typ 5. Hier haben die beiden Fünfecke eine Kante gemeinsam. Versuche, Hexaeder mit zwei Fünfecken zu konstruieren, die nur genau einen Punkt oder gar keinen Punkt gemeinsam haben, scheitern, da der Versuch konvexe Polyeder zu bekommen, zwangsläufig zu Heptaedern führt.

Heptaeder, Oktaeder, . . .

Man hat zeigen können, dass es 34 Typen von Heptaedern $P(7)$ und sogar 257 Typen von Oktaedern $P(8)$ gibt. Allerdings ist wohl keine Formel bekannt, die die Anzahl von Typen eines Polyeders $P(m)$ für jedes $m = 4, 5, 6, \ldots$ zu berechnen gestattet.

Eine reizvolle Aufgabe für geometrische Tüftler: Welches sind die 34 Vieleckskombinationen der Oberflächen von Heptaedern, und wie sehen sie aus?

---

*Polyeder $P(m)$ werden zumindest bei kleinen m mit Hilfe von griechischen Zahlwörtern bezeichnet, nämlich: téttares (4), penté (5), hex (6), heptá (7), októ (8) usw.

Hättest Du es gewusst?

Was sind die Platonischen Körper und warum gibt es nur fünf davon?

Von Hartwig Fuchs

Ein konvexes Polyeder (= Vielflächner) P ist ein Körper ohne Einbuchtungen nach innen, dessen Oberfläche O aus konvexen n-Ecken, $n \geq 3$ (Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ... ohne Einsprünge nach innen) so zusammengesetzt ist, dass jeweils genau zwei dieser Vielecke an einer Kante von P aneinander grenzen.
Sind nun die Vielecke der Oberfläche *regelmäßige* n-Ecke, $n \geq 3$, dann spricht man von einem **regulären Polyeder**.

Bereits in der Antike haben die Griechen fünf reguläre Polyeder entdeckt – sie sind in Figur 1 angegeben:

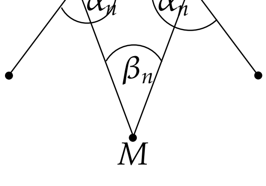
Figur 1

Diese fünf Polyeder heißen seit damals die **Platonischen Körper**, weil Plato (427 - 347 v.Chr.) ihnen in seiner Schrift „Timaios" eine zentrale Stelle in seiner Naturbetrachtung als Repräsentanten des Kosmos und seiner vier Grundbausteine Feuer, Wasser, Erde, Luft zuwies. Lange Zeit versuchten griechische Mathematiker weitere reguläre Polyeder zu ermitteln – bis Theaitetos (um 414 - 369 v.Chr.) wohl nachweisen konnte, dass es tatsächlich nur fünf solcher Körper gibt. Euklid deutet das an im 13. Buch seiner „Elemente" – dem wohl einflussreichsten mathematischen Lehrbuch aller Zeiten.

Warum gibt es nur fünf Platonische Körper?

Die Antwort auf diese Frage kann auf so elementare Weise gegeben werden, dass es durchaus vorstellbar ist, schon Theaitetos könnte diese Überlegungen gekannt haben.

Ein ebenes konvexes Vieleck nennt man ein **regelmäßiges n-Eck**, $n \geq 3$, wenn es n Eckpunkte hat und seine n Seiten gleich lang und seine n Innenwinkel bei den Eckpunkten gleich groß sind (vgl. Figur 2).

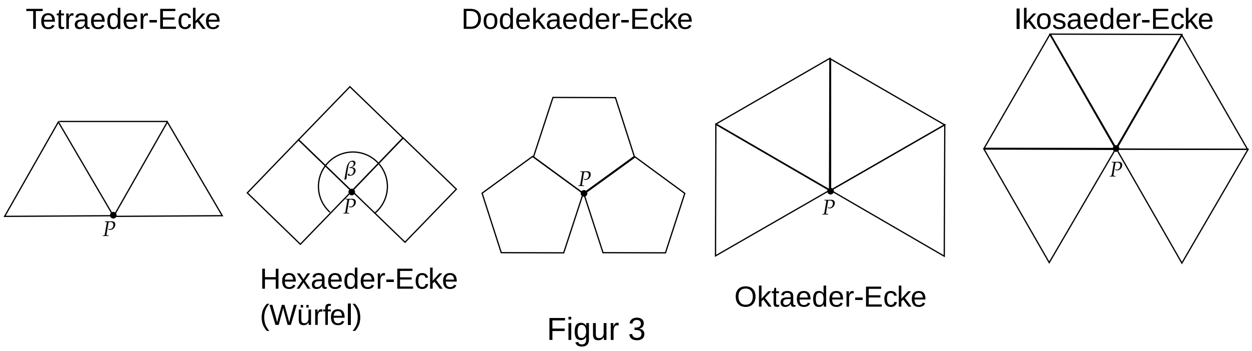


Figur 2

Die Innenwinkel α_n eines regelmäßigen n-Ecks kann man leicht bestimmen: Verbindet man den Mittelpunkt M des n-Ecks mit zwei benachbarten seiner Ecken, dann erhält man ein gleichschenkliges Dreieck mit den Winkeln $\frac{1}{2}\alpha_n$, $\frac{1}{2}\alpha_n$, β_n. Offenbar ist $n \cdot \beta_n = 360°$ und $\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\alpha_n + \beta_n = 180°$. Also gilt $\beta_n = \frac{1}{n}360°$ und $\alpha_n = 180° - \beta_n = 180° \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ und damit

(1) $\qquad \alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$

Es sei nun K ein reguläres Polyeder mit einer Oberfläche aus n-Ecken; P sei ein beliebiger Eckpunkt von K, von dem k Kanten ausgehen – so dass in P offenbar k n-Ecke zusammenstoßen (das gilt aus Symmetriegründen für jede Ecke von K), wobei offenbar $k \geq 3$ ist. Wir denken uns diese Ecke samt den dort zusammentreffenden n-Ecken aus der Oberfläche von K herausgetrennt und längs einer der in P endenden Kanten eines n-Ecks aufgeschnitten. Dann ist es möglich, das Oberflächenstück in der Ebene



Figur 3

auszubreiten – vgl. Figur 3 –, wobei zwischen den beiden „Ufern“ des Kantenschnitts eine Lücke in Form eines Winkels $360° - \beta > 0°$ klafft. Für den Winkel β bei P (vgl. Figur 3, Würfelecke) gilt: $\beta = k \cdot \alpha_n < 360°$. Mit (1) erhält man daraus
$k \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180° < 360°$, also $k(n-2) < 2n$ und schließlich

(2) $\qquad k \cdot n < 2(n+k)$ $\quad$ mit $n \geq 3$ und $k \geq 3$.

Wir zeigen: Für $k \geq 6$ und $n \geq 6$ gilt:

(3) $\qquad k \cdot n > 2(n+k)$.

Sei nämlich $k = v \cdot n$. Falls $v \geq 1$ ist, dann ist $n > 5 > 2\left(\frac{1}{v} + 1\right) = 2\frac{v+1}{v}$, also $vn > 2(v+1)$ und daher $vn \cdot n > 2(vn+n)$; mit $vn = k$ hat man also (3).
Falls $v \leq 1$ ist, dann ist $n = \frac{1}{v} \cdot k$ oder $n = w \cdot k$ mit $w \geq 1$. Damit folgt (3) wie im Fall $v \geq 1$.

Aus (2) und (3) ergibt sich zunächst: $3 \leq k \leq 5$ und $3 \leq n \leq 5$. Aber von den damit möglichen neun Kombinationen (k, n) erfüllen nur fünf die Bedingung (2), der alle Körperecken eines regulären Polyeders K „gehorchen“, nämlich

(4) $\qquad (k, n) \in \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\}$

– vgl. Figur 3.

Zu jedem dieser fünf Paare (4) gibt es nun genau einen Typ von regulären Polyedern – wie man sich an Figur 1 anschaulich leicht klar macht – mit der folgenden Oberflächenstruktur: Tetraeder aus 4 Dreiecken, Hexaeder aus 6 Quadraten, Dodekaeder aus 12 Fünfecken, Oktaeder aus 8 Dreiecken, Ikosaeder aus 20 Dreiecken – und dies sind bereits alle überhaupt möglichen Platonischen Körper.

* * * * * * * *

Auf Seite 8 wurde nach geschlossenen Formeln für T_n und D_n gefragt. Es gilt:

$$T_n = n(n-2), \ n \geq 3,$$

$$D_n = \begin{cases} \frac{1}{8}(n(n+2)(2n+1) - 1), & n \text{ ungerade } \geq 1, \\ \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1), & n \text{ gerade } \geq 2. \end{cases}$$

(Hinweis: D_n ist mit $A(n)$ auf Seite 4 identisch.)

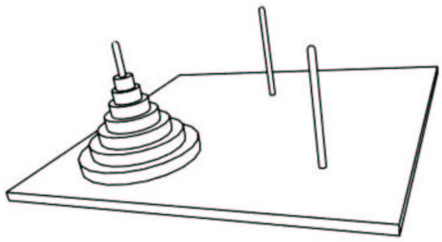
Der Turm von Heilbronn

von Arndt Miltner

Neulich betrachteten die Schülerinnen und Schüler der 10. Klasse und ich den Turm von Hanoi. Die Legende ist bekannt?

> In seinem Buch *Mathematical Recreations and Essays* berichtet W. W. Rouse Ball eine interessante Legende über den Ursprung eines Spieles, das Turm von Hanoi genannt wurde. Im großen Tempel von Benares, in der Nähe des Domes, der das Zentrum der Welt markiert, liegt eine Bronzeplatte, in die drei Diamantnadeln eingelassen sind, jede ein Cubit[a] hoch und so dick wie der Körper einer Biene. Während der Schöpfung stapelte Gott 64 goldene Scheiben von abnehmender Größe auf eine der Nadeln; die größte Scheibe zuunterst auf der Bronzeplatte liegend. Das ist der Turm von Brahma.
>
> Der Überlieferung nach arbeiten die Priester Tag und Nacht an der Umschichtung der Scheiben von einer Diamantnadel auf die andere entsprechend den festgeschriebenen Gesetzen Brahmas, die fordern, daß der diensttuende Priester *nicht mehr als eine Scheibe auf einmal* bewegt und jede Scheibe so auf eine Nadel schichtet, daß *keine schmalere Scheibe darunter liegt*. Wenn die 64 Scheiben von der Nadel, auf die sie Gott während der Schöpfung gestapelt hatte, auf eine der anderen Nadeln umgeschichtet worden sind, werden Turm, Tempel und die Brahmanen zu Staub zerfallen und die Welt wird mit einem Donnerschlag verschwinden.
>
> [a] Anm. d. Übers.: altes Längenmaß, 45 bis 56 cm

Wir fingen klein an: mit 3 Scheiben. Anschließend 4, dann 5, wegen der Systematik noch zwei Scheiben und eine. Wir erhielten folgende Ergebnisse:



n Scheiben	1	2	3	4	5	6	...
a_n Versetzungen	1	3	7	15	31	...	

Julian, Kaja und vielen anderen fiel auf, dass man, um die nächste Zahl zu bekommen, die vorherige doppelt nehmen muss und noch 1 dazu. Warum? Führt man die Umsetzung praktisch durch (mit Münzen z.B.), müssen wir den Turm, der auf der untersten Scheibe sitzt, komplett versetzen, dann die unterste Scheibe auf die freie Nadel, dann noch einmal den kleineren Turm auf die unterste Scheibe umsetzen. Als Formel ausgedrückt:

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} \quad \text{oder} \quad a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1.$$

Einen solchen Beweis nenne ich einen besonders schönen Beweis (bsB), weil er begreifbar und einsehbar ist.

Moriz kam auf eine andere Formel: Er betrachtete die Bewegungen der einzelnen Scheiben und stellte fest, dass die unterste einmal bewegt wird, die zweitunterste zweimal, die dritte viermal, die vierte achtmal usw. Also

$$a_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

(wie bei der Schachlegende vom Weizenkorn). Ebenfalls ein bsB!

Beim ersten Beweis wird der ganze Vorgang betrachtet (eine synthetische Herangehensweise), beim zweiten Beweis werden einzelne Scheibe verfolgt (eine analytische Betrachtung).
Übrigens ist $a_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$. Wenn die Priester pro Sekunde eine Versetzung vornehmen könnten, bräuchten sie mehr als 580 Milliarden Jahre... Wir haben also noch etwas Zeit...
So weit, so gut. Jan und Wilko wollten noch wissen, was sich ändert, wenn anstelle von 3 Nadeln nun 4 Nadeln zur Verfügung stehen. Das ist das (neue?) Problem „der Turm von Heilbronn". Wir machten uns ans Werk:

n Scheiben	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
a_n Versetzungen	1	3	5	9	13	17	25	33	41	... ...

2 2 4 4 4 8 8 8

Einige meinten, keine Regel zu erkennen. Andere betrachteten die Differenzen und vermuteten: erst zweimal 2, dann dreimal 4, dann vielleicht viermal 8, usw.
Manuela und Natascha bekamen zu Hause für $n = 10$ tatsächlich 49 Versetzungen und 65 Versetzungen für $n = 11$ heraus. Soweit wurde die Vermutung bestätigt, aber das ist noch kein Beweis. An dieser Stelle wollten wir Euch zur Party einladen und folgende Fragen der geschätzten Öffentlichkeit übergeben:

1) Stimmen die Ergebnisse überhaupt?
2) Wer findet einen bsB für die Vermutung?
3) Wer findet einen sB? (Ein richtiger Beweis ist ein sB.)
4) Wer findet ein Gegenbeispiel?
5) Wie sieht es mit 5 Nadeln, mit 6 Nadeln usw. aus?

Wer eine Idee hat oder gar einen Beweis findet, schreibe an die MONOID-Redaktion!

* * * * * * *

Wo steckte der Fehler?

Das fragten wir in Heft 77, als die beiden Eis-Listen (die Abholliste von Anna und die Guthabenliste von Tante Emma) unterschiedliche Summen ergaben – ein Widerspruch! Wirklich ein Widerspruch? Die Abholliste von Anna endete bei 1 und ihre Guthabenliste bei Tante Emma bei Null – klar! Nach dem letzten Eis hatte Anna kein Guthaben mehr. Der Denkfehler steckte in der Annahme, dass die Summen der beiden Listen übereinstimmen müssten – das brauchten sie aber nicht, da die beiden Listen unterschiedliche Tatsachen festhielten: Annas Liste hielt fest, wie viele Portionen Eis Anna nach und nach bekommen hat. Die Summe musste am Ende 40 ergeben. Tante Emmas Liste hielt fest, wie viele Portionen Eis Anna noch abholen durfte, die Summe braucht hier *nicht* 40 zu ergeben. Hätte Anna alles Eis auf einmal geholt, sähen die Listen nämlich so aus:

Anna	Tante Emma
40	0

Es gab also überhaupt keinen Widerspruch! (E.K.)

Die Seite für den Computer-Fan

Eine Vermutung von Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665), der berühmte französische Jurist mit mathematischen Neigungen, machte bei seinen Zahlenspielereien folgende Beobachtung:

$2^2 - 2$ ist durch 2 teilbar	$2^4 - 2$ ist nicht durch 4 teilbar
$2^3 - 2$ ist durch 3 teilbar	$2^6 - 2$ ist nicht durch 6 teilbar
$2^5 - 2$ ist durch 5 teilbar	$2^8 - 2$ ist nicht durch 8 teilbar
$2^7 - 2$ ist durch 7 teilbar	$2^9 - 2$ ist nicht durch 9 teilbar
$2^{11} - 2$ ist durch 11 teilbar	$2^{10} - 2$ ist nicht durch 10 teilbar
$\vdots$	$\vdots$

Nach vielen weiteren Rechnungen – die Du heutzutage mit dem Computer nachvollziehen kannst – gelangte Fermat zu der
Vermutung: Wenn $2^n - 2$ durch n teilbar ist, dann ist n eine Primzahl.

Was meint Dein Computer zu Fermats Vermutung? (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 76

Für gute Rechner

Berechne den Wert von
a) $x^2 - yz$ für $x = 123\,456\,789$, $y = 162\,558\,760$, $z = 93\,760\,427$;
b) $9x^4 - y^4 + 2y^2$ für $x = 10864$, $y = 18817$

einmal mit dem Taschenrechner (wirklich!), dann aber auch durch schriftliche Rechnung. Vergleiche die Ergebnisse! Erklärung? (H.F.)

Lösung:
Die schriftliche Rechnung liefert für beide Ausdrücke den exakten Wert $\mathbf{1}$; mit einem einfachen Taschenrechner erhält man im Beispiel a) den Wert 0 (als Folge von Rundungen), im Beispiel b) sehr (!) unterschiedliche Ergebnisse (z.B. 2, aber auch 1158978) in Abhängigkeit von der Stellenzahl, mit welcher der jeweilige Rechner arbeitet, in jedem Falle ein Ergebnis $\neq 1$. Fazit: Es ist ein kritischer Umgang mit Rechnerergebnissen zu empfehlen!
Fleißig (und richtig) gerechnet haben: Christian Behrens, Jan B. Boscheinen, Stephan Holzer, Martin Jöhlinger, Martin Alexander Lange, Claudia Mack, Stefanie Tiemann.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`).
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 77

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Wochentag

Welcher Wochentag ist am 20. Juni, wenn in diesem Monat an drei ungeradzahligen Tagen Donnerstag ist? (MM)

Lösung:

Der Juni hat 30 Tage. Also können 3 ungeradzahlige Donnerstage nur dann vorkommen, wenn der 1. Juni ein Donnerstag ist.
Dann ist auch der 8., 15., 22. und 29. ein Donnerstag.
Der 20. ist ein Dienstag (zwei Tage vor Donnerstag, dem 22.).

Bestsellerliste

Auf der Bestsellerliste einer bekannten Zeitschrift stehen die acht besten Kinofilme einer Woche und deren Platzierung der Vorwoche.

Hinweise

1. „Überleben! - Alive" ist diese Woche nicht auf Platz 8.
2. Der Film auf Platz 7 stand auch in der Vorwoche dort, der Spitzenreiter der Vorwoche konnte sich aber in dieser Woche nicht mehr an erster Stelle halten.
3. „Und täglich grüßt das Murmeltier" steht auf Platz 2 der Bestsellerliste.
4. In der Vorwoche lag „Forever young" zwei Plätze hinter dem Film „Armee der Finsternis".
5. „Aus der Mitte entspringt ein Fluss" (Vorwoche Platz 6) liegt wie schon in der Vorwoche einige Platzierungen hinter dem Kinofilm „Sommersby", der sich in der Vorwoche unter den ersten drei Plätzen befand.
6. Um einen Platz verbessern konnte sich der Film, der in der Vorwoche auf Platz 4 stand; Platz 5 dagegen lag in der Vorwoche eine Platzierung weiter vorn.
7. „Gewagtes Spiel" hat eine ungerade Platznummer auf der Bestsellerliste bekommen.
8. Der Film „Armee der Finsternis" auf Platz 8 war in der Vorwoche um fünf Plätze vor dem Film „Dschungelbuch", der diese Woche nicht Platz 1 belegt.
9. Der Kinofilm, der eine Woche zuvor Platz 5 erreichte, steht nun zwei Plätze hinter dem Film, der in der Vorwoche auf Platz 6 stand.

Fragen

1. Welche Filme stehen jeweils auf den Plätzen 3, 4 und 6 der Bestsellerliste?
2. Welche Filme standen in der Vorwoche auf den Plätzen 2,3 und 7 der Bestsellerliste?

(gefunden von Vanessa Nagel, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

Lösung:
Der sechste Hinweis gibt zwei Informationen, wobei die zweite so zu verstehen ist, dass der Film, der in der *Vorwoche* auf Platz 5 stand, in der Vorwoche eine Platzierung weiter vorn stand als in dieser Woche, also jetzt auf Platz 6 steht.

Platz	diese Woche	Vorwoche
1	Sommersby	Und täglich grüßt das Murmeltier
2	Und täglich grüßt das Murmeltier	Sommersby
3	Gewagtes Spiel	Armee der Finsternis
4	Aus der Mitte entspringt ein Fluss	Gewagtes Spiel
5	Dschungelbuch	Forever Young
6	Forever Young	Aus der Mitte entspringt ein Fluss
7	Überleben! - Alive	Überleben! - Alive
8	Armee der Finsternis	Dschungelbuch

Zahlenrätsel
Von welcher Zahl ist das Dreifache um 7 größer als das Zehnfache?
(Adriana Spalwisz, Geschwister–Scholl–Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:
Sei x die gesuchte Zahl. Dann muss gelten: $3x = 10x + 7$, also $3x - 10x = 7$. Man erhält also $-7x = 7$, und somit ist $x = -1$ die gesuchte Zahl.

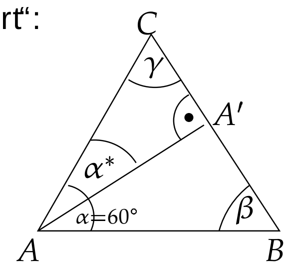
Der Strich
Wer kann durch Einfügen eines einzigen Strichs aus der offensichtlich falschen Aussage

$$126 - 3 = 894$$

eine richtige Aussage machen? (Felix Liebrich, Karolinen-Gymnasium Frankenthal)

Lösung:
$126 - 3 \neq 894$ oder auch $126 - 3 \leq 894$

Dreiecke und Prozentrechnung
Julia, eine der ganz cleveren Mathematikerinnen in der 7b, trifft am Schuljahresende ihren ehemaligen Mathe-Lehrer, der sie (natürlich) nach ihren mathematischen Errungenschaften im letzten Schuljahr ausfragen will. Na ja, Julia berichtet ziemlich ausweichend von einigen Themen. Aber schon ist ihr alter Lehrer „in Fahrt“:



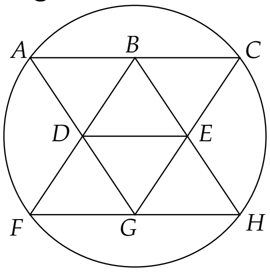
„Prozentrechnung und Dreieckslehre habt Ihr gerade behandelt. Das ist ja schön. Da habe ich immer am Jahresende die Schüler noch mal richtig getestet. So ’ne schöne kleine Aufgabe, in der der ganze Stoff der 7. Klasse drin ist! Na schau sie Dir mal an.“ Hat der Mensch doch tatsächlich sogar dafür eine Aufgabe dabei! Also, die Aufgabe lautet:
„In einem Dreieck ABC ist $\alpha = 60°$, und der Winkel β ist 92% von γ. Welchen Winkel α^* bildet die Höhe AA' mit der Seite AC?“

Lösung:
Da $\alpha = 60°$ ist, muss wegen der Winkelsumme im Dreieck $\beta + \gamma = 120°$ sein. Da β 92% von γ ist, gilt also

$$\gamma + \frac{92}{100}\gamma = 120° \Rightarrow \frac{192}{100}\gamma = 120° \Rightarrow 192\gamma = 12000° \Rightarrow \gamma = \frac{12000°}{192} \Rightarrow \gamma = 62{,}5°.$$

Daher ist $\beta = 120° - 62,5° = 57,5°$. Jetzt betrachten wir uns noch das Teildreieck $AA'C$. Darin muss für den gesuchten Winkel α^* gelten: $\alpha^* = 180° - 90° - 62,5° = 27,5°$.

Figur nachzeichnen



Wie kann man diese Figur, ohne abzusetzen und ohne irgend eine Linie doppelt zu zeichnen, nachzeichnen?
(Christoph Karg, Geschwister Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:
Ein Lösung von vielen ist $D \to B \to E \to D \to G \to E \to C \to B \to A \to D \to F \to G \to H \to F \to A \to C \to H \to E$.

Der Zahlenfloh macht Sprünge
Auf dem Zahlenstrahl seien alle natürlichen Zahlen und die Null markiert. Ein Zahlenfloh, der zu Beginn auf der Marke 0 sitzt, kann nach rechts nur Sprünge der Länge 9 und nach links nur der Länge 7 machen.

a) Kann er die Marke 1 erreichen?
b) Gibt es eine Marke, die er von 0 aus nicht erreichen kann?
c) Welches ist die Minimalzahl von Sprüngen, mit der er zur Marke 2003 gelangt?
d) Gibt es eine Marke m, die er mit genau m Sprüngen erreicht?

(H.F.)

Lösung:

zu a) Ja: Es ist $4 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = 1$.

zu b) Nein: Er braucht die Sprungfolge $4 \cdot 9 - 5 \cdot 7$ nur n-Mal auszuführen, um jede beliebige Marke n zu erreichen; es ist nämlich $n \cdot (4 \cdot 9 - 5 \cdot 7) = n(36 - 35) = n$.

zu c) Zunächst macht der Zahlenfloh Neuner-Sprünge, bis er die Marke $N = 2003 - n$ erreicht, wobei n ein Vielfaches von 7 sein muss. Mit dem Taschenrechner findet man: $N = 2052 = 2003 + 49$ mit kleinst möglichem n. Wegen $2003 = 2052 - 49 = 228 \cdot 9 - 7 \cdot 7$ ist 235 die minimale Sprungzahl.

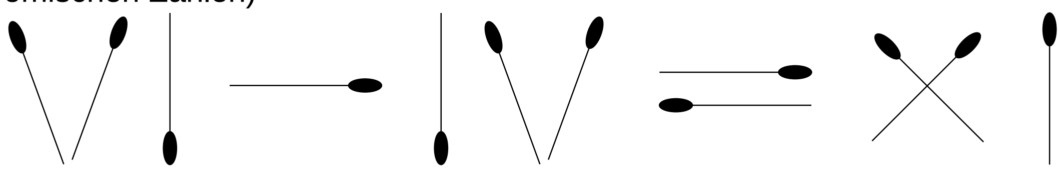
zu d) Falls es eine Lösung gibt, dann muss für sie gelten:
$n \cdot 9 - s \cdot 7 = m$ und $n + s = m$, wobei n die Anzahl der Neuner-Sprünge und s die Anzahl der Siebener-Sprünge angibt. Aus den zwei Gleichungen folgt $n \cdot 9 - s \cdot 7 = n + s$ oder $n \cdot 8 - s \cdot 8 = 0$ oder $n = s$. Wegen $n + s = m$ und $n + s = n + n$ folgt $m = 2n$.
Also: Eine Lösung m muss gerade sein. Dann aber ergibt sich aus $\frac{m}{2} \cdot 9 - \frac{m}{2} \cdot 7 = m$, dass die Anzahl der Sprünge von 0 nach m offenbar $\frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m$ ist.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Streichhölzer

Kannst Du durch Umlegen eines einzigen Streichholzes aus der falschen Gleichung (mit römischen Zahlen)

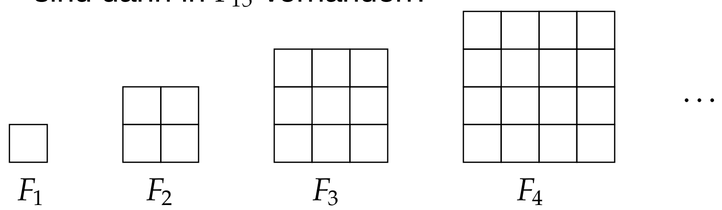


eine richtige Gleichung machen? (gefunden von H.F.)

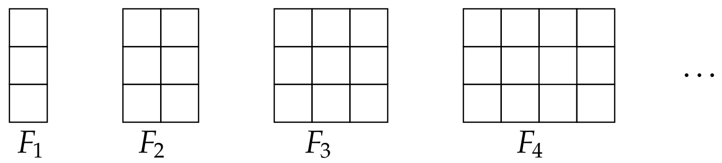
Rechtecke im Rechteck

Die Folge der Figuren F_1, F_2, F_3, F_4 in (a) bzw. in (b) denke man sich nach dem jeweils erkennbaren Muster bis F_{15} einschließlich fortgesetzt. Wie viele Rechtecke – auch Quadrate – sind dann in F_{15} vorhanden?

(a)



(b)



(H.F.)

Alter Lokomotivführer

Wenn man das Alter (in ganzen Jahren) eines Lokomotivführers mit dem seiner Kinder – die alle älter als ein Jahr sind – multipliziert, dann erhält man 9503. Wie viele Kinder hat der Mann? Wie alt sind er und seine Kinder? (H.F.)

Auf einer Parkbank

Auf einer Parkbank wollen sich 10 Personen hinsetzen. Es sind drei Türken, vier Franzosen, zwei Dänen und ein Italiener. Allerdings wollen immer Personen gleicher Nationalität zusammen sitzen. Wie können sie sitzen? Wie viele Möglichkeiten gibt es?

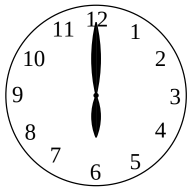
(Sigurd Vogler, Rupprecht-Gymnasium München)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Der Uhrschlag



Eine Uhr braucht 5 Sekunden, um 6 Uhr zu schlagen.

Wie lange braucht sie um 12 Uhr? (WJB)

Ein magisches Quadrat

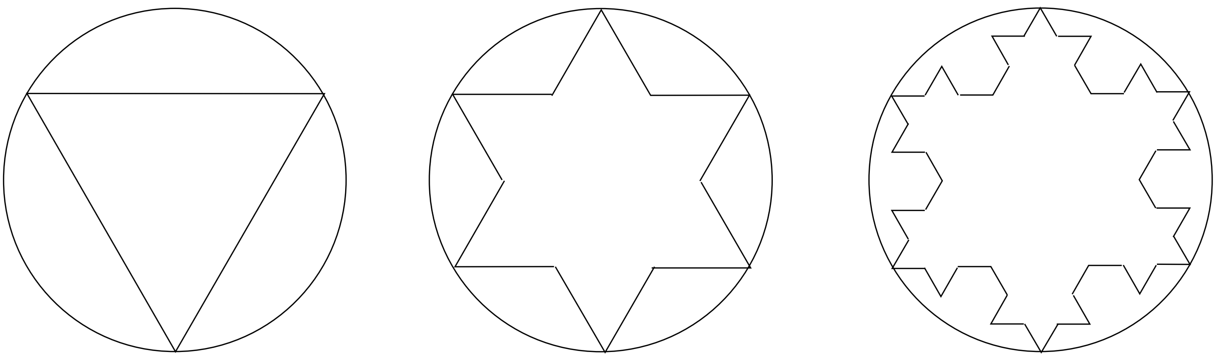
$\boxed{2000}$	2007	2014	1991	i
h	$\boxed{2001}$	g	2010	1992
f	e	$\boxed{2002}$	2009	2011
2012	d	1996	$\boxed{2003}$	c
2006	2013	b	a	$\boxed{2004}$

Bestimme die Werte der Buchstaben $a, b, c, \ldots, i$.

Beachte, dass die fünf Zeilensummen, die fünf Spaltensummen und die zwei Diagonalensummen alle den gleichen Wert besitzen müssen. (H.F.)

Mathematix plant grenzenlos

Ein kleines gallisches Dorf ist von einem kreisförmigen, etwa 33 „Galles“ (gallisches Längenmaß) langen Zaun umgeben. Mathematix, der Dorf-Chef, träumt von einer Grenze, die länger als die des großen Nachbardorfes ist, die 100 Galles misst. Eines Tages kommt der Architekt Geometrix und legt ihm sechs Pläne vor, von denen die drei ersten hier abgebildet sind:



Er erklärt zu den Plänen: „Im ersten Plan habe ich ein gleichseitiges Dreieck dargestellt. Jede Seite dieses Dreiecks ist 9 Galles lang. In jedem Plan sind alle Strecken gleich lang, bevor man sie in 3 gleiche Teile teilt. Mit dem sechsten Plan kann ich deinen Traum verwirklichen.“ Untersuche, ob Geometrix Recht hat!

Bereits auf Seite 19 findet ihr Mathespielereien!

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 830. Exkurs in die Kryptographie

Kannst Du diesen Text entschlüsseln?

```
BKAIFZE CBOFBK

JXOHRP TXPJBFBO COBRQ PFZE FJJBO YBPLKABOP XRC AFB
PLJJBOCBOFBK XIP YBDBFPQBOQBO OXACXEOBO ELCCQ BO GBABP
JXI XRC DRQBP TBQQBO IBQWQBP GXEO EXQ BO CLIDBKABP
CBPQDBPQBIIQ

BP OBDKBQB DBKXR KBRK JXI BKQTBABO XJ SLOJFQQXD LABO XJ
KXZEJFQQXD

BP DXY BIC PLKKFDB SLOJFQQXDB RKA WBEK PLKKFDB
KXZEJFQQXDB

TFB SFBIB CBOFBKQXDB EXQQB JXOHRP TXPJBFBO
```

(Sonja Breske, Christina Collet)

Aufgabe 831. Primzahl-Zwillinge

Es seien p und $p+2$ Primzahlen; dann heißen p und $p+2$ *Primzahl-Zwillinge*.

Begründe, dass für Primzahlen $p > 5$ gilt:

a) Das arithmetische Mittel von Primzahl-Zwillingen p und $p+2$ ist eine Zahl mit mindestens fünf verschiedenen Teilern.

b) Das um 1 vermehrte Produkt aus Primzahl-Zwillingen p und $p+2$ ist stets ein Vielfaches von 36.

c) Wenn p und $p+2$ Primzahl-Zwillinge sind, dann ist $p+4$ keine Primzahl.

(H.F.)

Aufgabe 832. Treppenzahlen

Eine natürliche Zahl habe die Zifferndarstellung $z_1 z_2 z_3 \dots z_n$, für die Ziffern gelte $1 \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq \dots \leq z_n \leq 9$.

Wie viele n-stellige natürliche Zahlen dieser Form gibt es

a) für $n = 2$?

b) für $n = 3$?

c) Wie kann man die Anzahl allgemein berechnen?

(Stefanie Tiemann, Gymnasium Marienberg, Neuss)

Aufgabe 833. Der erfolglose Springer

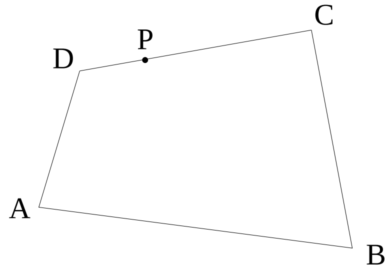
Für die Züge eines Springers auf dem Schachbrett gilt die Behauptung

B : Es ist nicht möglich, mit dem Springer von einem Eckfeld zum diagonal gegenüber liegenden Eckfeld zu ziehen und dabei jedes Feld des Schachbretts genau einmal zu besetzen.

Beweise oder widerlege B ! (gefunden: H.F.)

Aufgabe 834. Geometrie am Viereck

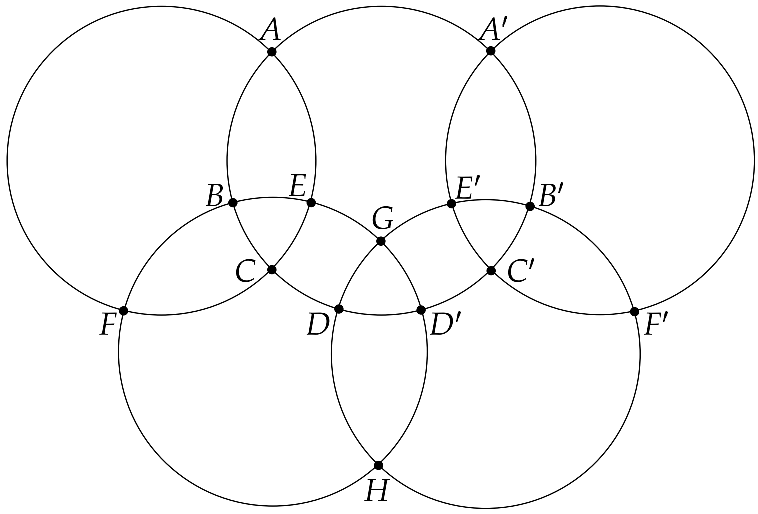
Gegeben ist ein beliebiges ebenes konvexes Viereck $ABCD$ mit einem beliebigen Punkt P auf der Seite CD.



Konstruiere eine Gerade durch P, die das Viereck in zwei flächengleiche Teile teilt.

(Steffen Biallas, Albert–Einstein–Gymnasium Magdeburg)

Aufgabe 835. Eine olympische Knobelei



Ordne jedem Buchstaben der Figur eine natürliche Zahl so zu, dass gilt: Zu verschiedenen Buchstaben gehören verschiedene Zahlen; die Zahlen, die spiegelbildlich zur Symmetrieachse GH der Figur liegen sowie die zu G und H gehörigen Zahlen unterscheiden sich um 2, und die Summen der Zahlen längs eines jeden der fünf Kreise stimmen überein.

a) Bestimme die Zahlen $A, A', \ldots, F, F', G, H$ so, dass S möglichst klein ist.

b) Entwickle nun aus einer Lösung der Aufgabe eine neue Zuordnung von Zahlen zu den Buchstaben der Figur so, dass gilt: Die Summen der Zahlen längs eines jeden Kreises haben alle den gleichen Wert S, und S ist eine Zahl, die in diesem Jahr häufig zusammen mit der Figur (die dann allerdings unbeschriftet und bunt ist) vorkommt.

(H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 77

Kl. 8-13

Aufgabe 824. Klaras Kiesel

Klara findet zwei Kieselsteine. Ihre Freundin Sybille behauptet, dass man eine geschlossene Kurve finden kann, die bei beiden Kieseln auf der Oberfläche vorkommt.
Hat Sybille recht? (WJB)

Lösung:

Ja, man kann (wenn auch nur in Gedanken) die beiden Kiesel so hinschieben, dass sie einander teilweise durchdringen. Der Durchschnitt ihrer Oberflächen ist dann die gesuchte geschlossene Kurve.

Aufgabe 825. Eine geometrische Knobelei

Kannst Du in der Ebene 8 Geraden so zeichnen, dass gilt:

a) Die 8 Geraden schneiden sich in genau 9 Punkten?

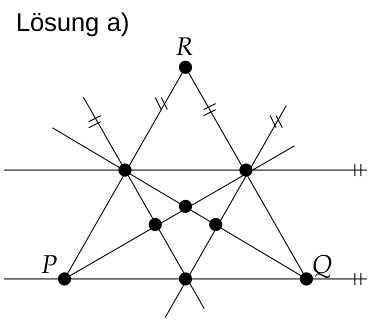
b) Sie schneiden sich genau in 10 Punkten?

c) Sie schneiden sich in genau 11 Punkten?

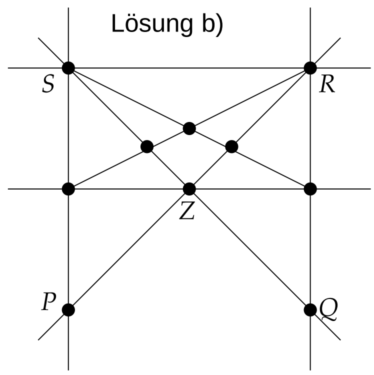
Kannst Du die Fragen b) und c) auch für 9 Geraden beantworten?
(Eine korrekte Zeichnung genügt als Lösung.) (H.F.)

Lösung:

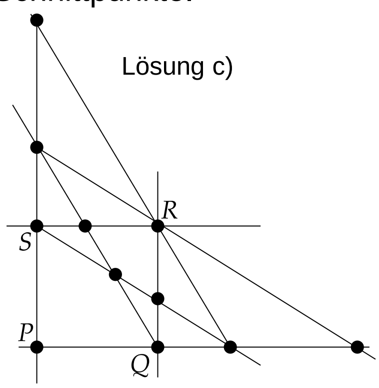
Die Angaben $g = 8,\ S = 9$ bedeuten: 8 Geraden haben 9 Schnittpunkte.



$g = 8,\ S = 9$
PQR ein gleichseitiges Dreieck



$g = 8,\ S = 10$
$PQRS$ ein Quadrat



$g = 8,\ S = 11$
$PQRS$ ein Quadrat

Zweiter Aufgabenteil

Wenn man in der Figur a) die Höhe durch R im Dreieck PQR zeichnet, dann hat man eine Lösung für den Fall $g = 9,\ S = 10$. Zeichnet man in der Figur b) die Gerade durch das Zentrum Z des Quadrats $PQRS$ und parallel zu PS, dann hat man eine Lösung für den Fall $g = 9,\ S = 11$. Eine weitere Lösung erhält man, wenn man in der Figur c) eine Gerade durch PR zeichnet.

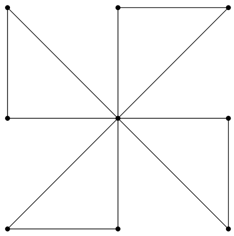
Aufgabe 826. Kürzbare Brüche

Gibt es Brüche $\frac{a}{b}$, $a \neq b$, so dass gilt: Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \frac{a+3}{b+3}, \ldots, \frac{a+10}{b+10}$ sind allesamt kürzbar? (Begründung und Beispiel) (H.F.)

Lösung:

Wenn es gelingt, Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+1}{b+1}$ zu finden, so dass $\frac{a}{b}$ z.B. durch 2, 3, 5 und 7 und $\frac{a+1}{b+1}$ durch 11 kürzbar ist, dann gilt: $\frac{a+2}{b+2}, \frac{a+4}{b+4}, \frac{a+6}{b+6}, \frac{a+8}{b+8}, \frac{a+10}{b+10}$ sind durch 2 kürzbar, $\frac{a+3}{b+3}, \frac{a+9}{b+9}$ sind durch 3 kürzbar, $\frac{a+5}{b+5}$ ist durch 5 und $\frac{a+7}{b+7}$ durch 7 kürzbar. Weil nun z.B. $\frac{2100}{4410}$ durch 2, 3, 5 und 7 sowie $\frac{2100+1}{4410+1}$ durch 11 kürzbar sind, folgt: Alle Brüche $\frac{2100}{4410}, \frac{2100+1}{4410+1}, \ldots, \frac{2100+10}{4410+10}$ sind kürzbar.

Aufgabe 827. Eine undurchführbare Nummerierung



Die von jeweils 2 Punkten begrenzten Strecken der Figur sollen so mit den Zahlen 1 bis 12 nummeriert werden, dass die Summe der Zahlen auf den in einem Punkt zusammen stoßenden Strecken bei allen 9 Punkten gleich ist. (H.F.)

Lösung:

Wir treffen die Annahme: Es gibt eine Nummerierung mit den beschriebenen Eigenschaften.

Der Wert der 9 möglichen, gleich großen Summen ist also $9s$.

Da jede der Zahlen $1, 2, \ldots, 12$ stets in zwei Einzelsummen vorkommt, gilt: $9s = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 12) = 156$. Somit ist $s = 156 : 9$, und s ist keine ganze Zahl. Das aber widerspricht dem Faktum, dass s eine ganze Zahl sein muss.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist, woraus folgt: Die geforderte Nummerierung ist nicht durchführbar.

Aufgabe 828. Ganze Zahlen am Dreieck

a) Man bestimme das flächenkleinste rechtwinklige Dreieck, bei dem alle Seiten und Höhen ganzzahlige Maßzahlen haben.

b) Löse die gleiche Aufgabe, wenn auch noch der Umkreisradius ganzzahlig sein soll.

(Steffen Biallas, Albert-Einstein-Gymnasium Magdeburg)

Lösung:

zu a):

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten zugleich Höhen (jede jeweils als Höhe auf der anderen Kathete). Damit müssen im gesuchten Dreieck a, b, c und h_c ganzzahlig sein. Die Ganzzaligkeit von a, b und c wird durch alle pythagoreischen Zahlentripel erfüllt, von denen $(3; 4; 5)$ das kleinste ist. Außer den ganzzahligen Vielfachen dieses Tripels ist das Tripel $(5; 12; 13)$ das nächstgrößere.

Aus den Flächenformeln für das rechtwinklige Dreieck folgt die Gleichheit $a \cdot b = c \cdot h_c$. Für ein pythagoreisches Zahlentripel $(3k; 4k; 5k)$ gilt dann $h_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3k \cdot 4k}{5k} = \frac{12k}{5}$. Den kleinsten ganzzahligen Wert für h_c erhält man für $k = 5$, da 5 eine Primzahl ist.

Dafür ist $a = 15, b = 20, c = 25, h_c = 12$.

Für das nächstgrößere pythagoreische Zahlentripel würde $h_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{5k \cdot 12k}{13k} = \frac{60k}{13}$ gelten, und k müsste den Wert 13 haben.

Damit hat das gesuchte Dreieck die Maßzahlen: $a = 15, b = 20, c = 25, h_c = 12$.

zu b):
Nach dem Satz des Thales gilt für den Umkreisradius $R = \frac{c}{2}$.
Damit muss das gesuchte Dreieck nun die Maßzahlen $a = 30, b = 40, c = 50, h_c = 24$ haben.
(Das nächstgrößere pythagoreische Zahlentripel führt zu rechtwinkligen Dreiecken mit größerer Fläche.)

Aufgabe 829. Primzahlen in einer Oktave
Unter acht unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen > 2 gibt es höchstens drei Primzahlen. (H.F.)

Lösung:
Nachdem wir uns bei den Folgen $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$;
$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ und
$5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$
direkt von der Richtigkeit der Behauptung überzeugt haben, schreiben wir nun eine beliebige, genügend lange Folge natürlicher Zahlen beginnend mit $6n$, $n \geq 1$, hin und unterstreichen darin alle Zahlen, die mit Sicherheit keine Primzahlen sind:
$\underline{6n}$, $6n+1$, $\underline{6n+2}$, $\underline{6n+3}$, $\underline{6n+4}$, $6n+5$, $\underline{6(n+1)}$, $6(n+1)+1$,
$\underline{6(n+1)+2}$, $\underline{6(n+1)+3}$, $\underline{6(n+1)+4}$, $6(n+1)+5$, $\underline{6(n+2)}$

Wenn man nun bei den Teilfolgen aus 8 Zahlen:
$[6n, \ldots, 6(n+1)+1]$, $[6n+1, \ldots, 6(n+1)+2]$, $[6n+2, \ldots, 6(n+1)+3]$,
$[6n+3, \ldots, 6(n+1)+4]$, $[6n+4, \ldots, 6(n+1)+5]$, $[6n+5, \ldots, 6(n+2)]$
die möglichen Primzahlkandidaten zählt, so findet man davon jeweils 2 oder 3.
Die 6 angegebenen Teilfolgen repräsentieren für $n = 1, 2, 3, \ldots$ alle überhaupt nur möglichen Teilfolgen. Man wird also in jeder Teilfolge höchstens 3 Primzahlen finden.

Wo steckt der Fehler?

Zwei Geraden g und h im Raum seien durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die gegenseitige Lage dieser Geraden!

Lösung: Durch Gleichsetzen folgt
(1) $t = 4 + 2s$
(2) $1 + t = 4 + s$
(3) $1 = 3 + s$
Durch Einsetzen von t aus (1) in (2) und Auflösen nach s ergibt sich $s = -1$ und damit aus (1): $t = 2$. Da $t = 2$ und $s = -1$ eindeutig bestimmt sind, haben g und h einen Schnittpunkt S, dessen Koordinaten sich durch Einsetzen von $t = 2$ in die Gleichung von g ergeben: $S(2|3|\underline{1})$.
Beim Einsetzen von $s = -1$ in die Gleichung von h ergibt sich jedoch: $S(2|3|\underline{2})$.

Wo steckt der Fehler? (Gekürzt entnommen aus A. Furdek: Fehler-Beschwörer)

Der Primzahlsatz

von Theo de Jong

Seit Euklid ist bekannt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Vielleicht habt Ihr schon mal einen Beweis davon gesehen: In einem früheren Monoid ist bestimmt schon mal der Beweis gegeben worden. Heute besprechen wir die Frage, wieviele Primzahlen es in dem Abschnitt von 1 bis zu einer beliebigen natürlichen Zahl gibt. Um dies genau formulieren zu können, definieren wir für alle natürlichen Zahlen n die Zahl $\pi(n)$ als die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich n. Zum Beispiel ist $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$. Es gilt der berühmte

Primzahlsatz. $\pi(n) \approx n/\ln(n)$.

Zum Beispiel sagt der Primzahlsatz, dass es etwa $5.428.681$ Primzahlen kleiner als 100 Millionen gibt; der wirkliche Wert ist $5.761.455$. Man sieht insbesondere, dass es relativ viele Primzahlen gibt: Dies ist eine wichtige Tatsache z.B. für die Kryptographie (RSA-Verfahren). Der Primzahlsatz wurde am Anfang des 18. Jahrhunderts von Gauß vermutet und erst 1896 von Hadamard und de la Vallée Poussin unabhängig voneinander bewiesen. Der Primzahlsatz ist nicht einfach zu beweisen: Um den Beweis verstehen zu können, braucht man mehrere Semester Mathematikstudium. In diesem Beitrag wollen wir einen etwas schwächeren Satz beweisen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Definition. Für natürliche Zahlen n definieren wir d_n als das kleinste gemeinsame Vielfache aller Zahlen kleiner gleich n.

Zum Beispiel ist $d_2 = 2$, $d_3 = 6$, $d_4 = 12$, $d_5 = 60$, $d_6 = 60$, $d_7 = 420$, $d_8 = 840$. Bemerke: $d_n \geq d_m$ für $n > m$.

Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d_n \geq 2^{n-2}$.

Beweis. Der Beweis ist sehr trickreich und braucht ein kleines bisschen Integrationstheorie. Wir betrachten ein Polynom

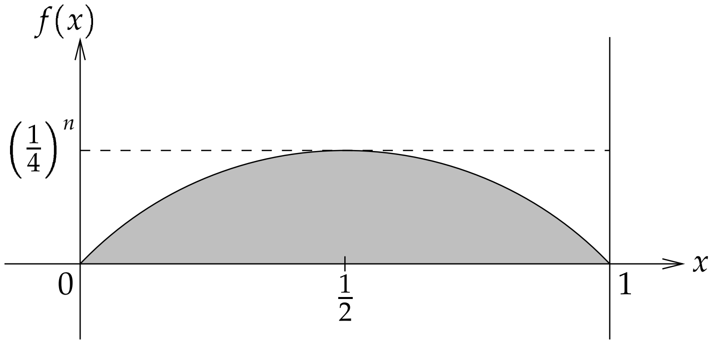
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

auf dem Intervall $[0, 1]$, wobei a_i ganze Zahlen sind mit $a_m \neq 0$. Wir nehmen an, dass $f(x) > 0$ ist auf dem offenen Intervall $(0, 1)$. Für die Fläche F unter dem Graphen von $f(x)$ zwischen den Grenzen 0 und 1 zeigt man mit Hilfe der Integrationstheorie

$$F = \int_0^1 f(x)\,dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_m}{m+1}.$$

Insbesondere ist $d_{m+1}F \in \mathbb{Z}$; wegen $F > 0$ gilt sogar $d_{m+1}F \in \mathbb{N}$.

Nehmen wir speziell $f(x) = x^n(1-x)^n$. Die Funktion $g(x) = x(1-x)$ hat das Maximum $1/4$ bei $x = 1/2$. Also: $f(x)$ hat das Maximum $(1/4)^n$ bei $x = 1/2$. Die Fläche F ist damit höchstens $(1/4)^n$ und somit $d_{2n+1}F \leq d_{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$.



Andererseits ist $d_{2n+1}F \in \mathbb{N}$ und daher $d_{2n+1} \geq 2^{2n}$. Da $d_{2n+2} \geq d_{2n+1} \geq 2^{2n}$, gilt $d_k \geq 2^{k-2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Satz. Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\pi(n) \geq \ln(2) \cdot (n-2)/\ln(n)$.

Beweis. Seien $p_1, \ldots, p_k$ alle Primzahlen kleiner gleich n, also $k = \pi(n)$. Sei für alle $i = 1, \ldots, k$ die natürliche Zahl α_i so gewählt, dass $p_i^{\alpha_i} \leq n$, aber $p_i^{\alpha_i+1} > n$. Es ist also

$$1 \leq \alpha_i = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)} \right\rfloor,$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet. Dann teilt, nach Definition von d_n, jedes $p_i^{\alpha_i}$ die Zahl d_n, aber $p_i^{\alpha_i+1}$ teilt d_n nicht, da d_n das *kleinste* gemeinsame Vielfache aller Zahlen kleiner als n ist. Primzahlen größer als n teilen d_n ebenfalls *nicht*, aus dem gleichen Grund. Es folgt

$$d_n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Nun ist $2^{n-2} \leq d_n$ nach dem vorherigen Satz. Somit

$$2^{n-2} \leq d_n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \leq n \cdots n = n^k,$$

da die α_i so gewählt waren, dass $p_i^{\alpha_i} \leq n$. Der Übergang zu den Logarithmen liefert:

$$(n-2)\ln(2) \leq k \ln(n).$$

Wegen $k = \pi(n)$ ist der Satz bewiesen. $\square$

Wie Ihr wisst, ist $\ln(2) \approx 0{,}69314718$. Also können wir „nur“ beweisen, dass es mindestens $3.762.874$ Primzahlen kleiner als 100 Millionen gibt. Allerdings haben wir auch einen neuen Beweis für die Tatsache gegeben, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Neues über Mersennesche Primzahlen

Im MONOID-Heft 76 berichteten wir, dass bisher 39 Mersennesche Primzahlen gefunden wurden. In der Zwischenzeit hat GIMPS („Great Internet Mersenne Prime Search“) zwei weitere „entdeckt“:
Zunächst am 17. November 2003 die $6\,320\,430$-stellige Zahl $2^{20\,996\,011} - 1$, dann am 15. Mai 2004 die 41. bekannte Mersennesche Primzahl $2^{24\,036\,583} - 1$; sie ist mit $7\,235\,733$ Ziffern um fast eine Million Ziffern länger und derzeit auch die größte bekannte Primzahl. Näheres, z.B. wie ihr mit eurem Computer an der Suche nach neuen Primzahlen teilnehmen könnt, erfahrt ihr im Internet unter

`http://www.mersenne.org`

Das Postulat von Bertrand und seine Verschärfungen

– Ein Blick in die experimentelle Mathematik –

von Hartwig Fuchs

Die Primzahlen sind die (multiplikativen) Bausteine der natürlichen Zahlen. Und zugleich sind sie die Stolpersteine der Zahlentheoretiker, denn ihre Verteilung in der Menge der natürlichen Zahlen folgt möglicher Weise keinem erkennbaren Muster. Betrachten wir dazu nur einmal einige benachbarte Primzahlen und ihre Abstände von einander:

Primzahlen	2		3		5		7		11		13		17		19 …		1669		1693		1697 …		9551		9587		9601 …	
Abstand		1		2		2		4		2		4		2		…		24		4		…		36		14		…

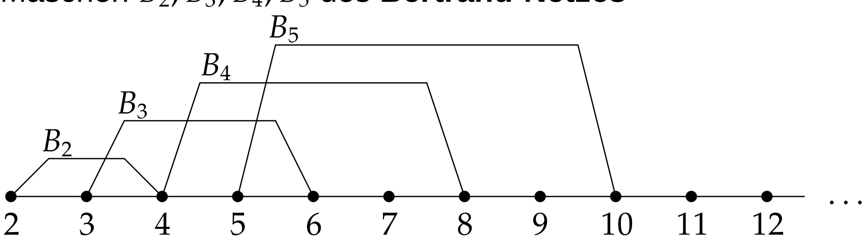
Den kleinsten Abstand 1 haben nur die Primzahlen 2 und 3. Es gibt (vermutlich!) unendlich viele Primzahlzwillinge wie 3 und 5 vom Abstand 2. Es können aber auch beliebig große primzahlfreie Lücken zwischen zwei benachbarten Primzahlen p_1 und p_2 auftreten, wie man sich leicht an folgendem Beispiel klar macht:
Es ist $p := 1\,000\,000\,000\,333$ eine Primzahl; $p!$ sei die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$. Dann gilt: 2 teilt $p! + 2$, 3 teilt $p! + 3$, $\ldots$, p teilt $p! + p$; also sind alle Zahlen von $p! + 2$ bis $p! + p$ keine Primzahlen. Ist p_1 die größte Primzahl $\leq p! + 1$ und p_2 die kleinste Primzahl $\geq p! + p + 1$, so haben die benachbarten Primzahlen p_1 und p_2 den Mindestabstand $(p! + p + 1) - (p! + 1) = p > 10^{12}$.

$(*)$ Die Abstände benachbarter Primzahlen bilden eine völlig unregelmäßige Folge, in der auch beliebig große Elemente vorkommen.

Diese Abstandsfolge ist so chaotisch, dass bis heute niemand in ihr eine Gesetzmäßigkeit entdeckt hat, die es gestattete, von einer Primzahl aus die nächst größere Primzahl zu berechnen.
Und doch ist es dem französischen Geometer **Joseph L. Bertrand** (1822–1900) trotz $(*)$ gelungen, ein Netz zu „knüpfen", welches – wenn man es über die Menge der natürlichen Zahlen wirft – in jeder seiner Maschen mindestens eine Primzahl „einfangen" sollte. Die Maschen seines Netzes sind Mengen $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, und Bertrand behauptete von ihnen – wovon ihn wohl die numerische Untersuchung weitreichender Primzahllisten überzeugt hatte, was er aber nicht beweisen konnte – das später sogenannte

Postulat von Bertrand
Für jedes $n \geq 2$ gilt: Zwischen n und $2n$ befindet sich stets eine Primzahl.

Beispiel: Die Maschen B_2, B_3, B_4, B_5 des **Bertrand-Netzes**



Offenbar ist die Primzahl 2 in keiner Masche B_n des Bertrand-Netzes enthalten. Dagegen kommt jede Primzahl $p \geq 3$ in mindestens einer Masche, nämlich in $B_{p-1} = \{p-1, p, \ldots, 2p-2\}$, vor; genauer gilt sogar:

Zu jedem $p \geq 3$ gibt es $\frac{p-1}{2}$ Maschen, die p enthalten.

Beispiel:

Die Primzahl $p = 43$ wird genau von den $\frac{p-1}{2} = 21$ Maschen $B_{22} = \{22, 23, \ldots, 44\}$, $B_{23} = \{23, 24, \ldots, 46\}, \ldots, B_{42} = \{42, 43, \ldots, 84\}$ „eingefangen".

Umgekehrt zeigen Computeruntersuchungen, dass für $n \geq 6$ jede Masche B_n – vermutlich! – stets mehr als eine Primzahl enthält; für $n \leq 5$ vgl. die Figur oben.
Kann man deshalb die Maschen B_n des Bertrand-Netzes zu den Maschen C_n eines neuen Netzes so verengen, dass sich in C_n eventuell weniger Primzahlen als in B_n, aber immer noch mindestens eine Primzahl befindet?

Eine erste Antwort auf diese Frage gab **Pafnuti L. Chebychev*** (1821–1894): Er fand ein gegenüber dem Bertrand-Netz engmaschigeres Netz mit den Maschen
$C_n = \{n, n+1, \ldots, 2n-2\}$, $n = 4, 5, 6, \ldots$

Beispiel: Die Maschen $C_4, C_5, \ldots, C_9$ des **Chebychev-Netzes**

n	4	5	6	7	8	9	...
Masche C_n	$\{4,5,6\}$	$\{5,6,7,8\}$	$\{6,\ldots,10\}$	$\{7,\ldots,12\}$	$\{8,\ldots,14\}$	$\{9,\ldots,16\}$	...
eingefangene Primzahl	5	7	7	11	11, 13	11, 13	...

P. L. Chebychev hatte wie schon vor ihm Bertrand sein Netz gewiss erst nach umfassender Durchforstung langer Primzahllisten angeben können. Aber anders als Bertrand hatte er seine zunächst nur numerisch begründeten Ergebnisse auch mathematisch absichern können, indem er bewies:

> **Das Netz von Chebychev**
> Für jedes $n \geq 4$ gilt: Zwischen n und $2n-2$ befindet sich stets eine Primzahl.

Natürlich versuchte Chebychev, das von ihm gefundene Netz enger zu „knüpfen". Dazu trat er zunächst in seine eigenen Fußstapfen und untersuchte Netze mit Maschen $C'_n = \{n, n+1, \ldots, 2n-3\}$, mit Maschen $C''_n = \{n, n+1, \ldots, 2n-4\}$ usw. Sie genügten alle der Anforderung, dass jede ihrer Maschen mindestens eine Primzahl „einfängt" (Überprüfe dies mit Deinem Computer – eine Primzahltabelle tut es auch – für das Netz mit den Maschen $C'_8, C'_9, C'_{10}, \ldots$ bis hin zur Masche C'_{1000}).

Aber diese Netze stellten für Chebychev wohl eine zu geringfügige Verfeinerung seines ursprünglichen Netzes dar. Deshalb versuchte er es mit einem anderen Ansatz: Er betrachtete Netze mit Maschen $D'_n = \{n, n+1, \ldots, n+\delta n\}$ – wir werden sie **δ-Netze** nennen. Wenn Chebychev hier $\delta = 1$ setzte, erhielt er $D'_n = B_n$, für $\delta = \frac{n-2}{n}$ war $D'_n = C_n$, für $\delta = \frac{n-3}{n}$ war $D'_n = C'_n$ usw.

Aber er konnte jetzt für δ auch jede beliebige positive reelle Zahl < 1 wählen. Das ergab dann i.A. die Unbequemlichkeit, dass $n + \delta n$ keine ganze Zahl war. Dem half er ab, indem er $\lfloor \delta n \rfloor$ an die Stelle von δn setzte, wobei $\lfloor \delta n \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq \delta n$ bezeichnet; damit ist $n + \lfloor \delta n \rfloor$ ganzzahlig.

* Andere Schreibweisen dieses Namens: Tschebyschew, Tschebyscheff und (engl.) Chebeshev.

Dass die Maschen seiner δ-Netze durchweg viel enger sind als die Maschen seines ursprünglichen C_n-Netzes, lehrt ein einfacher Vergleich, z.B.
$C_{1000} = \{1000, 1001, \ldots, 1998\}$ mit D_{1000} für $\delta = \frac{1}{100}$, $D_{1000} = \{1000, 1001, \ldots, 1010\}$.

Beispiel eines δ-Netzes:
Wir bestimmen für $\delta = \frac{1}{4}$ einige Mengen D_n.
D_n sollte mindestens drei Zahlen enthalten (warum?), so dass $n \geq 8$ zu wählen ist.

n	8	9	10	...	20	21	22	23	24	...
$\lfloor \frac{1}{4} n \rfloor$	2	2	2	...	5	5	5	5	6	...
Menge D_n	$\{8,9,10\}$	$\{9,10,11\}$	$\{10,11,12\}$	...	$\{20,\ldots,25\}$	$\{21,\ldots,26\}$	$\{22,\ldots,27\}$	$\{23,\ldots,28\}$	$\{24,\ldots,30\}$	...
eingefangene Primzahl	/	/	11	...	23	23	23	/	29	...

Die Tabelle weist auf ein Anfangsproblem hin: Nicht alle Mengen D_n sind als Maschen eines δ-Netzes geeignet, weil sie keine Primzahlen „einfangen".
Wenn wir aber im letzten Beispiel mit einem Computer oder mit einer Primzahlliste die Tabelle über $n = 24$ hinaus fortsetzen, dann ergibt sich, dass (vermutlich) D_{23} die letzte Menge ist, die keine Primzahl „einfängt":

> **Das δ-Netz von Chebychev mit $\delta = \frac{1}{4}$**
> Für jedes $n \geq 24$ gilt: Zwischen n und $n + \lfloor \frac{1}{4} n \rfloor$ befindet sich stets eine Primzahl.

Man darf getrost annehmen, dass Chebychev auch mit δ-Netzen für verschiedene δ-Werte herumrechnete und -probierte und dass er dabei zu immer engmaschigeren δ-Netzen gelangte. Dadurch entstand wohl zwangsläufig das Bedürfnis, von der experimentellen zur beweisenden Mathematik überzugehen – und das gelang Chebychev! Er konnte nämlich den folgenden Satz beweisen, mit dem das Problem, für welche Zahlen δ die zugehörigen Mengen $D_n = \{n, n+1, \ldots, n + \lfloor \delta n \rfloor\}$ ein δ-Netz bilden, völlig gelöst wird.

> **Das allgemeine δ-Netz von Chebychev**
> Zu jeder beliebig kleinen positiven reellen Zahl $\delta < 1$ gibt es eine Zahl – wir wollen sie die Anfangszahl n_δ nennen –, so dass gilt: Immer wenn $n \geq n_\delta$ ist, dann befindet sich zwischen n und $n + \lfloor \delta n \rfloor$ mindestens eine Primzahl.
> (Für $\delta = \frac{1}{4}$ ist $n_\delta = 24$, s.o.; für $\delta = \frac{1}{5}$ ist $n_\delta = 31$; für $\delta = \frac{1}{10}$ ist $n_\delta = 89$ usw.)

Mit dem Satz von Chebychev ist die Frage nach den Primzahlen einfangenden Netzen keineswegs erledigt. Wir können leicht Mengen E_n definieren, von denen wir nicht wissen, ob sie die Maschen eines solchen Netzes bilden.

Beispiel: Es sei $E_n = \{n, n+1, \ldots, n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$. Gilt dann für jedes $n \geq 48$: Zwischen n und $n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ befindet sich stets eine Primzahl? Ist $E_{47} = \{47, 48, \ldots, 53\}$ tatsächlich die letzte Menge, die keine Primzahl „einfängt"?

Versuch' es selbst, diese Frage mit dem Computer oder mit einer Primzahltabelle zu bearbeiten. Du erhältst damit ein Netz, das von allen δ-Netzen verschieden ist.

Künstliche Intelligenz und Mathematik?

Von Peter Dauscher

Künstliche Intelligenz

Künstliche Intelligenz – das klingt zuerst einmal sehr nach Science fiction. Unwillkürlich denkt man an künstliche Wesen und intelligente Roboter aus Büchern wie Michael Crichtons „Beute" oder Filmen wie „Star Trek". Aber auch in der wirklichen Welt gibt es einen Forschungszweig, der als „Künstliche Intelligenz" (KI) (im Englischen „Artificial Intelligence") bezeichnet wird.

Die Anfänge gehen dabei bis in die 1950er Jahre zurück: Durch die neue Erfindung des Digitalcomputers wurde es damals möglich, Berechnungen in einer bis dahin nie gekannten Geschwindigkeit automatisch durchzuführen. So verwundert es kaum, dass diese Fortschritte die Hoffnung weckten, in naher Zukunft auch das menschliche Denken in Computern nachbilden zu können. Noch im Jahr 1967 behauptete Marvin Minsky, einer der führenden KI-Forscher: „Innerhalb einer Generation wird das Problem der Künstlichen Intelligenz im Wesentlichen gelöst sein". Und tatsächlich: Eine Generation später, im Jahr 1997, schlug der von IBM entwickelte Computer *Deep Blue* den Schach-Weltmeister Garry Kasparov. Und niemand wird bezweifeln wollen, dass zum Schachspielen ein gehöriges Maß an Intelligenz gehört, vor allem dann, wenn man gegen einen Profi gewinnen möchte.

Trotzdem würden sich die meisten KI-Forscher von heute mit Marvin Minskys Aussage von 1967 nicht recht anfreunden können. Auch wenn gutes Schachspielen für den Menschen eine große Herausforderung ist: für einen Computer gehören Probleme wie Schachspielen eher zu den leichteren Übungen. Das liegt vor allem daran, dass die Möglichkeiten im Schachspiel durch verhältnismäßig wenige, sehr exakte Regeln komplett beschrieben werden können. Schwierig für den Menschen ist die riesige Menge an Spielverläufen, die sich durch die Anwendung dieser Regeln ergeben. Ein Computer hat die Möglichkeit, in sehr kurzer Zeit extrem viele Schachzüge und ihre Konsequenzen „durchzuspielen" und sich das Ergebnis in seinem Speicher exakt zu merken. Damit ist die Vielzahl an Spielverläufen beim Schach aber sehr viel weniger problematisch als für den Menschen. Etwas Ähnliches kennen wir ja im Prinzip auch von unserem Taschenrechner, der uns in fast unmerklicher Zeit eine Kubikwurzel oder einen Sinus-Wert berechnet, ohne dass wir ihn deshalb für ein Mathematik-Genie halten.

Allerdings gilt auch das Umgekehrte: Manche Fähigkeiten, die uns Menschen normalerweise sehr leicht fallen, über die wir in der Regel nicht einmal nachdenken, können für Computer und Roboter extrem schwierig sein: Es gibt es bislang noch kaum einen Roboter, der das Laufen auf zwei Beinen auch nur annähernd so gut beherrscht wie ein typisches dreijähriges Kind. Und das liegt nicht etwa nur an der Lauf*mechanik* der Roboter, die unseren Knochen, Muskeln und Sehnen noch weit unterlegen ist, sondern auch insbesondere an der Steuerung, also an der „Lauf*software*". Auch das Erkennen von Gegenständen und Personen, das zielgerichtete Greifen und Hinlegen von Objekten stellen noch immer ernst zu nehmende Probleme für heutige Methoden der KI dar.

Beispiel RoboCup

Wenn schon diese Einzelfähigkeiten für die heutige KI schwierig sind, dann kann man sich vorstellen, dass z.B. Fußballspielen, wo all dies zusammenkommt, eine höchst trickreiche Aufgabe darstellt. Dies war der Anlass dafür, die internationale RoboCup-Initiative zu gründen (`www.robocup.org`)*. Auf der Grundlage von Roboter-Fußball und ähnlich schwierigen Aufgaben sollen neue Entwicklungen im Bereich der Künstlichen Intelligenz auf ihre Alltagstauglichkeit getestet werden. Das betrifft viele verschiedene Aspekte von Künstlicher Intelligenz wie z.B. das Erkennen von Kamera-Bildern, das Planen von geeigneten Aktionen, das Zusammenspiel mehrerer Spieler des gleichen Teams, sowie das Lernen aus eigenen Fehlern und das Anpassen der eigenen Strategie an die gegnerische Mannschaft.

Das Fernziel der RoboCup-Initiative ist es, bis zum Jahr 2050 ein Fußballteam aus Robotern konstruiert zu haben, das gegen den menschlichen Fußball-Weltmeister gewinnen kann. Auf dem langen Weg zu diesem Ziel versuchen Forschungsteams aus aller Welt, möglichst leistungsfähige Fußball-Roboter und -Programme zu konstruieren, die mit der internationalen Konkurrenz mithalten können. Das gilt auch für unsere Mainzer Mannschaft, die *Mainz Rolling Brains* (`www.rollingbrains.de`), die schon an vielen internationalen Wettbewerben von Seattle bis Melbourne teilgenommen hat. Außerdem wird in diesem Bereich sehr viel Grundlagenforschung betrieben und z.B. in Deutschland durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft in einem Schwerpunktprogramm gefördert (`http://ais.gmd.de/dfg-robocup`). Auch hier ist das Institut für Informatik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz beteiligt, insbesondere an Forschungen im Bereich moderner Lernverfahren.

Mathematik ?

Was hat aber nun das Ganze mit Mathematik zu tun? Ist es nicht so, dass die Informatiker sich einfach an ihren Computer setzen und versuchen, möglichst schlaue Programme zu schreiben?

Die klare Antwort auf diese Frage ist: Nein!

Zwar verwenden wir hier in Mainz Lernverfahren, die von biologischen Neuronalen Netzen motiviert sind. Das bedeutet aber nicht, dass neben unseren Rechnern ein Biologiebuch liegt und wir versuchen, die biologischen Erkenntnisse direkt in PASCAL, C^{++} oder eine andere Programmiersprache zu übersetzen. Wenn wir in der Informatik von Neuronalen Netzen sprechen, dann sind dies in der Regel stark vereinfachte Modelle, die in der Sprache der Mathematik beschrieben werden.

Warum aber in der Sprache der Mathematik und nicht gleich in einer Programmiersprache? Dies soll an einem kleinen Beispiel gezeigt werden, das so ähnlich auch bei den Neuronalen Netzen vorkommt, die wir in Mainz verwenden:

Wenn man sagen will, dass man bei einer Menge von 10 Werten, die von 1 bis 10 durchnummeriert sind, die Nummer i^* desjenigen finden möchte, der am nächsten an einem Wert x liegt, dann kann man das durch eine mathematische Formel, aber auch durch eine Folge von PASCAL-Befehlen zum Ausdruck bringen. Beide Möglichkeiten sind hier gezeigt:

*Näheres zu RoboCup findet sich auch im September-Heft 2003 von MONOID im Beitrag von Christian Meyer.

$$i^*(x) = \underset{i=1...10}{\operatorname{argmin}} |x - w_i|$$

```
i_stern:=-1;
minabstand:=100000;
for i:=1 to 10 do
    begin
    if abs(x-w[i])<minabstand then
       begin
       minabstand:=abs(x-w[i]);
       i_stern:=i;
       end;
    end;
```

Man erkennt sofort einige Vorteile, die die Formel gegenüber dem Programmcode hat: Zum einen ist die Formel deutlich kürzer und zumindest einem geübten Mathematiker oder Informatiker ist nach wenigen Sekunden klar, was die Formel ihm sagen will. Zum anderen muss man sich bei der Formulierung in PASCAL um Details wie die Vorbelegungen `i_stern:=-1` oder `minabstand:=100000` Gedanken machen, die mit der eigentlichen Aufgabenstellung gar nichts zu tun haben. So ist es viel leichter, in der mathematischen Formulierung den Überblick zu behalten, selbst wenn das Verfahren recht komplex wird.

Das gezeigte Beispiel war dabei noch denkbar einfach mit Programmiersprachen zu beschreiben. Viele Methoden der Künstlichen Intelligenz verwenden jedoch komplexe mathematische Konzepte z.B. aus der Vektoranalysis oder der Wahrscheinlichkeitstheorie. Während die Mathematik im Laufe ihrer Entwicklung praktische und kompakte Schreibweisen für diese Konzepte gefunden hat, ist hier die Beschreibung durch Programmcode allein für einen Außenstehenden häufig kaum noch zu durchschauen.
Der wichtigste Vorteil ist, dass die Mathematik Umformungsregeln vorgibt, die beschreiben, wie sich mathematische Ausdrücke zu neuen kombinieren lassen. Wenn man Terme ineinander einsetzt, vereinfachen sich die Ausdrücke häufig erheblich und es lassen sich plötzlich ganz neue Zusammenhänge erkennen (was bei Programmcode so kaum der Fall wäre).
Exakte mathematische Beweise zu Verfahren der Künstlichen Intelligenz sind zwar zur Zeit noch immer eher die Ausnahme als die Regel, allerdings wurden bereits einige vielversprechende Ansätze in der sogenannten Algorithmischen Lerntheorie (oder Computational Learning Theory, CoLT) entwickelt, die versucht, das Phänomen „Lernen“ der mathematischen Beweisbarkeit zugänglicher zu machen. So gibt es mittlerweile eine Reihe von Beweisen, dass bestimmte Probleme für alle auch nur denkbaren Lernalgorithmen schwer lösbar sind.

Es bleibt abzuwarten, wie sich das Verhältnis zwischen Künstlicher Intelligenz und Mathematik in den nächsten Jahren weiterentwickeln wird. Vielleicht werden dabei Bereiche aus der Mathematik eine Rolle spielen, von denen man dies zur Zeit noch gar nicht erwartet. Auf jeden Fall ist es sehr wahrscheinlich, dass aus der gegenseitigen Befruchtung von Mathematik und KI-Forschung in den nächsten Jahren viele wichtige und spannende Fortschritte zu erwarten sind. Und so kann man an dieser Stelle schon folgende Prognose wagen:
Sollte bis zum Jahr 2050 tatsächlich ein Roboter-Fußball-Team gegen den menschlichen Fußball-Weltmeister gewinnen, dann wird die Mathematik einen entscheidenden Anteil an diesem Erfolg haben.

Mathematische Lese-Ecke – Lesetipps zur Mathematik

Peter Baptist: Pythagoras und kein Ende?

Der Satz des Pythagoras gehört zu den wenigen mathematischen Erkenntnissen, an die sich die meisten Menschen auch nach ihrer Schulzeit noch erinnern. Eine weitere Besonderheit ist die Tatsache, dass für diesen mathematischen Lehrsatz über 350 verschiedene Beweise bekannt sind. Alles das macht neugierig darauf, mehr über den Lehrsatz, aber auch über seinen Namensgeber Pythagoras von Samos zu erfahren.

Das Buch „Pythagoras und kein Ende?“ von Peter Baptist aus der leider nur zwei verschiedene Bände umfassenden Reihe *„Lesehefte Mathematik“* des Klett-Verlages übernimmt die Vermittlung dieser Hintergründe auf eine spannende und in sich abgerundete Art und Weise.

Neben einigen allgemeinen mathematikhistorischen Hinweisen beleuchtet der Autor im ersten Kapitel auch die öffentliche Wirkungsgeschichte des wohl einzigen mathematischen Lehrsatzes, der es außer auf Briefmarken und zum Thema eines Bühnenstückes auch in die Schokoladenwerbung geschafft hat.
Das zweite und dritte Kapitel spekulieren über die Entstehungsgeschichte und stellen verschiedene Beweise des Satzes von Pythagoras vor.
Im vierten Kapitel zeigt Peter Baptist dann Verbindungen zwischen Pythagoras und Thales, Ptolemaios sowie Fibonacci auf.
Das fünfte und letzte Kapitel verdeutlicht dann mögliche Verallgemeinerungen des Lehrsatzes und macht neugierig darauf, sich weitergehend damit zu beschäftigen.

Eine Schülerbeurteilung des Buches kommt zu dem folgenden Ergebnis:
„In diesem Buch wird die Mathematik unglaublich leicht verständlich und spannend dargelegt. Nicht einen Moment lang verliert man die Lust am Lesen. Mathe ist auf einmal interessant und aufregend. Wie in der Einleitung schon steht, Mathe mal ganz anders und nicht so trocken wie im Schulunterricht.“

Fazit: „Pythagoras und kein Ende?“ ist ein absolut lesenswertes Buch für alle die, die mehr über die Entstehung der von Menschen gemachten Wissenschaft Mathematik im Allgemeinen und über die mathematikgeschichtliche Entwicklung des Satzes von Pythagoras im Besonderen erfahren wollen.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Peter **Baptist**: Pythagoras und keine Ende?
Klett 1997, ISBN 3-12-720040-4, 151 Seiten, 11,50 €

Art des Buches:	Sachbuch über Mathematikgeschichte
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 15 Jahren

Weitere spannende Lesetipps findet man zusammen mit ausführlichen, von Schülerinnen und Schülern des Frauenlob-Gymnasiums Mainz erstellten Rezensionen vom 16. Mai bis zum 17. Oktober in der *Mathematischen Lese-Ecke* der Ausstellung *Mathematik be-greifen* im Naturhistorischen Museum Mainz.

Martin Mattheis

Ein Besuch im Mathematikum in Gießen mit zwei sechsten Klassen

von Peter Batzer

Der Tag im März 2004 begann bereits mit einer Besonderheit: Ausschlafen an einem Schultag. Wir trafen uns erst um 10.15 Uhr im Bahnhof Wiesbaden und erreichten Gießen mit einmal Umsteigen in Frankfurt um die Mittagszeit. Um 17 Uhr kamen wir wieder zurück.

Statt Eintrittskarten im Mathematikum gab es dort Eintrittsbänder, die sicher noch in einigen Kinderzimmern als Erinnerung hängen. Für Souvenirjäger gibt es im Museumsshop neben Büchern auch allerlei günstige Geschenke mit mathematischem Hintergrund zu erwerben. Die Cafeteria bietet neben Eis, kalten und warmen Getränken auch Kuchen an, aber leider keine warmen Speisen. Vielleicht kommt das ja auch noch.

Wir stellten unsere Taschen in einen riesigen, abschließbaren Quader und begaben uns zur Einführung ins zweite Obergeschoss, wo uns von einem Museumsmitarbeiter das **Möbiusband** vorgestellt wurde. Zur Demonstration verwendete er ein Eintrittsband, das er absichtlich falsch zusammen klebte und anschließend sogar noch der Länge nach zerschnitt. Nach dieser Einführung von ca. 15 Minuten Dauer gingen die Schülerinnen und Schüler in kleinen Gruppen durch das Museum. Ich selbst ging gezielt auf einzelne Gruppen zu, wenn diese an einem Exponat standen und von ihrer Freiheit, damit zu arbeiten, nicht so recht Gebrauch zu machen wussten.

Besonderes Interesse fand der **Faxenspiegel**. Zwei Schülerinnen beschrieben ihn: „Es ist ein kurzer Spiegel an einem langen angebracht. Man stellt sich an das Ende des langen Spiegels und streckt zum Beispiel die linke Hand aus, so dass sie auf dem kürzeren Spiegel zu sehen ist. Nun spiegelt sich die Hand auch auf dem langen Spiegel wieder und die Hand ist auf beiden Spiegeln gut zu sehen. Nach diesem Schema kann man noch viele, viele andere Sachen ausprobieren, dabei kann man tolle „Faxen" machen. Aus diesem Grund heißt der Spiegel auch „Der Faxenspiegel"." Zwei andere notierten: „Man muss sich mit dem (rechten) Fuß auf ein Brett stellen, das linke Bein ausstrecken und dann schwebt man."

Über die **Kugelbahnen** schrieben zwei Jungen: „Es sind zwei Bahnen, die eine Bahn geht gerade runter, die andere geht im Bogen runter. Die (Kugel auf der) zweiten Bahn ist schneller, weil ihre Startbeschleunigung größer ist." Die Meinungen darüber, welche Kugel als erste unten ankommt, waren, als ich den Schülern den Versuch vorstellte, übrigens sehr geteilt.

Eine andere Schülerin beschrieb die **Riesenseifenblase**: „Mit der richtigen Menge Schwung und Behutsamkeit ist man für einen Moment in einer Riesenseifenblase gefangen."

Großes Interesse fanden auch die **Weltkarte** mit Entwicklung der Weltbevölkerung und **Lights On**. Hier sind im inneren Kreis Lampen, im äußeren Kreis vor jeder Lampe ein Schalter angeordnet. Mit einem Schalter kann man immer nur die Lampen nebenan ein- oder ausschalten, nie die eigene. Ziel ist es, durch geschicktes Betätigen der Schalter alle Lampen ein- oder auszuschalten.

Seit meinem letzten Besuch im Sommer 2003 wurde das Museum um einen großen Ausstellungsraum und um eine Reihe von Exponaten erweitert. Die Fenster im Treppenhaus beherbergen jetzt die **Graphen einiger Funktionen** aus Metall. Ein neues Exponat, das allerdings alle dreißig Minuten vollautomatisch läuft, ist die **Kugelmaschine**, an der Decke des neuen Ausstellungsraumes. **Auf den Blickpunkt kommt es an**, wenn man die eigentlich parallel verlaufenden Modelleisenbahnschienen in einiger Entfernung zusammen laufen sieht. **Paraboloid** und **Hyperboloid** können in schnell drehbaren Glaszylindern erzeugt werden. Die **Platonischen Körper** wurden in ein Computerquiz integriert. Beim musikalischen Würfelspiel spielt der Computer immer noch **Mozart** nach einem Zufallsgenerator. Die umgekehrten **Türme von Hanoi** heißen Türme von Ionah.

Hinweise für Kolleginnen und Kollegen:
Das Hessenticket ermöglicht ab 9 Uhr eine Bahnfahrt zum Preis von 25 Euro für fünf Personen für Hin- und Rückfahrt innerhalb von Hessen, jedoch nicht in Fernzügen. In Gießen ist der Fußweg sehr kurz. Schulklassen müssen im Mathematikum unbedingt angemeldet werden. Erfahrungsgemäß sind (Nach-)Mittagstermine nicht so gefragt. Eine Besuchsdauer von zwei Zeitstunden ist mit Ausnahme der Oberstufe sinnvoll. Der Eintrittspreis für Schüler beträgt 4 Euro.

Mathematikum   Liebigstraße 8   35390 Gießen
Tel. 0641-9697970   Fax 0641-97269420

`info@mathematikum.de`   `http://www.mathematikum.de`

Ich habe das Mathematikum auch schon mit meinen beiden Söhnen, die damals in die 2. und 3. Klasse gingen, besucht. Ich denke, es ist in jeder Jahrgangsstufe oder Altersstufe einen Besuch wert und kann von Schülern ohne an Reiz zu verlieren, auch nach einigen Jahren wieder besucht werden. Mit zunehmendem Alter der Schüler, insbesondere in der gymnasialen Oberstufe, kann natürlich mehr auf den theoretischen Hintergrund der Exponate eingegangen werden. Für die jüngeren Klassen sollte der spielerische Umgang mit den Exponaten im Vordergrund stehen. Nicht ohne Grund handelt es sich beim Mathematikum um das erste mathematische Mitmachmuseum der Welt. Und dieses Angebot zum Handeln sollte gerade in der Mathematik angenommen werden. Ich halte es für sinnvoll, aber keinesfalls unbedingt erforderlich, wenn die Schüler von einem Mathematiklehrer begleitet werden.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Das vorliegende MONOID-Heft (Nr. 78) ist das letzte im Schuljahr 2003/04. Wer sein Abonnement nach dem Schuljahr gerichtet hat und es im Schuljahr 2004/05 fortsetzen möchte, sollte an die rechtzeitige Überweisung des Abo-Beitrages denken (8 Euro auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000). Die Punkte aus den Aufgaben dieses Heftes (letzter Abgabetermin für die Lösungen: 15. September 2004) gehen als letzte in die Bewertungsliste für die Preisvergabe 2004 ein. Die **Monoid-Feier** findet am **27. November 2004** im Atrium („Alte Mensa“) der **Universität Mainz** statt.

2. Wie seit dem MONOID-Heft 76 legen wir diesem Heft und auch den künftigen Heften kein Löserblatt mehr bei, sondern verweisen auf die aktuelle Rubrik im Internet unter `http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`. Nach wie vor erscheint aber im Folgeheft die komplette Liste vom vorausgegangenen Vierteljahr, so in diesem Heft die Löserliste vom 30.03.2004.

3. Am 24. März 2004 haben die sechzehn Siegerinnen und Sieger des Bundeswettbewerbs Mathematik 2003 in Köln ihre Preise entgegen genommen. Von ihnen erhielten sechs zusätzlich den diesjährigen Sonderpreis des Bundesministeriums für Bildung und Forschung dafür, dass sie den Wettbewerb zum wiederholten Male gewonnen hatten. Unter ihnen befand sich **Kerstin Bauer**, Gewinnerin des Goldenen M 2001. Die MONOID-Redaktion gratuliert nochmals sehr herzlich.

4. Von Herrn **Arndt Miltner**, Hanfgraben 69, 74343 Sachsenheim, erhielten wir den Beitrag „Der Turm von Heilbronn". Herr Miltner ist Mathematiklehrer an der Freien Waldorfschule Heilbronn und gibt mit seinem Beitrag einige Anregungen aus dem Unterricht an die MONOID-Leserinnen und -Leser weiter.

5. In den MONOID-Heften 67 und 68 war mit dem Beitrag „Automaten und Monoide" von Andrea Krol schon einmal die Informatik vertreten. Nun setzt sich **Dr. Peter Dauscher**, wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Informatik unseres Fachbereichs, mit dem Verhältnis „Künstliche Intelligenz und Mathematik?" auseinander. (`dauscher@informatik.uni-mainz.de`)

6. Seine Eindrücke von einem „Besuch im *Mathematikum* in Gießen mit zwei sechsten Klassen" schildert uns **Peter Batzer**; er ist Lehrer an der Oranienschule in Wiesbaden.

7. Der Leiter des Mathematikums Gießen, **Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher**, hielt am 16. Mai 2004 im Naturhistorischen Museum Mainz den Festvortrag „Denk ich an Mathe in der Nacht . . . " zur Eröffnung der Ausstellung „**mathematik be-greifen**" – einer Ausstellung zum Mitmachen, Staunen, Entdecken, Erkennen und Weiterdenken, konzipiert und gestaltet vom Pädagogischen Zentrum Bad Kreuznach, das in Zusammenarbeit mit Schulen, Ausbildungszentren und Firmen die Exponate geschaffen hat. Der Fachbereich Mathematik und Informatik begleitet die Ausstellung mit einer Vortragsreihe „Faszination Mathematik – Ein Blick in die Geschichte" über Mathematikerinnen und Mathematiker, ihr Leben und ihre Arbeit und natürlich über Mathematik. Alle Vorträge finden dienstags, von 19 bis 20 Uhr, im Naturhistorischen Museum Mainz, Reichklarastraße 10, statt; der Besuch ist kostenfrei. Die Termine: 25.5., 8.6., 22.6., 6.7., 13.7., 14.9., 21.9., 28.9., 5.10. Weitere Informationen unter:

`www.mathematik-begreifen.de`
`www.mathematik.uni-mainz.de`

8. Bis zum nächsten Heft im September wünscht die Redaktion allen MONOID-Leserinnen und Lesern: Schöne Sommerferien!

Ekkehard Kroll

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 30.03.2004)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Ramona Friedrich 9, Alexander Heiss 16, Philipp Mayer 9, Daniel Schwind 16;
Kl. 6: Laura Brückbauer 11, Patrick Marx 13, Jaqueline Mechsner 7, Jonathan Peters 32, Arne Siefkes 6, Lisa Simon 40, Joscha Wagner 16, Benedikt Werner 4, Ozan Yilmaz 5, Julia Zech 12;
Kl. 7: Janina Braun 6, Dorothee Fister 6, Claudia Heiss 26, Johanna Mees 12, Vanessa Nagel 6, Sabine Oßwalt 19;
Kl. 8: Patricia Kastner 26, Johannes Merz 41;
Kl. 9: Markus Bassermann 36; **Kl. 12:** Manuel Ross 30.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 5: Laura Mettler 27, Désirée Schalk 35, Johanna Stimm 6;
Kl. 7: Victoria Andreä 21, Felix Liebrich 39, Lisa Mettler 41, Richard Nixdorf 12, Nina Rein 10, Konstantin Wüst 20, Rebecca Zimmer 15; **Kl. 9:** Marc Rein 14.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):
Kl. 7: Thomas Geiß 50; **Kl. 10:** Stefan Tran 50.

Jens Senger 18.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 8: Christian Behrens 51, Martin Alexander Lange 29.

Ansbach, Gymnasium Carolinum: Kl. 5: Sieglinde Holzknecht 7; **Kl. 9:** Arnulf Holzknecht 7.

Bad Homburg: Kl. 9: Laura Biroth 42.

Bingen, Hildegardis-Gymnasium: Kl. 6: Katharina Kirsch 39.

Bingen, Stefan-George-Gymnasium: Kl. 8: Johann Kirsch 33.

Boppard, Kant-Gymnasium: Kl. 9: Thomas Klauer 10.

Calw-Stammheim,Maria von Linden-Gymnasium: Michael Nothacker 8.

Duderstadt, Eichsfeld-Gymnasium: Kl. 12: Sebastian Gutknecht 17, Manuel M. 24.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):
Kl. 7: Anne Gutberlet 23; **Kl. 8:** Christian Münkel 21.

Eutin, Johann-Heinrich-Voß-Gymnasium: Kl. 12 Lars Imsdahl 16.

Ginsheim, IGS Mainspitze: Kl. 7 Jennifer Saul 20.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):
Kl. 5: Anastasia Popova 1, Lea Schmitz 3;
Kl. 6: Corinna Dinges 23, Laura Herborn 4, Carolin Klein 22, Hannah Meilinger 26, Tatjana Mendt 21, Katharina Schmidt 5, Andreas Weimer 27, Johannes Weimer 23;
Kl. 7: Theresa Becker 2, Marina Bernikowa 2, Sarah Bieser 3, Jonathan Bös 2, Vanessa Faber 2, Jonas Fischer 6, Andreas Foltyn 3, Josephine Jordan 5, Alessandra Kremer 1, Cathrin Reusch 3, Andre Schardt 4, Adrian Schmidt 1, Lara Schneider 5, Simon Theis 1, Christian Wappler 2;
Kl. 9: Lena Bertram 3, Carina Czarnrtzki 2, Julia Dick 1, Theresa Krischke 11, Marcus Weidenfeller 5.

Halberstadt: Kl. 7: Robert Hesse 37.

Heidelberg, Englisches Institut: Nadia Rauh 12.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuende Lehrer: Gerd Weber, Christoph Straub):
Kl. 6: Karin Emil 36, Marina Morad 38;
Kl. 8: Alia el Bolock 22, Nadia Abou Shadi 8;
Kl. 9: Lauren Emil 34, Nadine Issa 26, Mariette Michael 10, Mireille Micher 10, Miriam Morad 31, Iman Tarek 20.

Kelkheim/Taunus, Eichendorffschule (Betreuende Lehrer Herr Marsen, Herr Ackermann): Kl. 8: Isabell Peyman 21, Sonja Sauckel-Plock 16, Viola Sommer 4.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium: Kl. 6: Marius Rackwitz 3.

Landau, Max-Sievogt-Gymnasium: Kl. 10: Christina Flörsch 8.

Laufen, Rottmayr-Gymnasium: Kl. 9: Maximilian Mühlbacher 17.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:
Kl. 8: Katharina Kober 25; **Kl. 9:** Christoph Karg 15; **Kl. 10:** Claudia Mack 24, Judith Reinhardt 38, Jonas Weber 7.

Magdeburg, Werner-von-Siemens-Gymnasium: Kl. 9: Sebastian Schulz 15.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 7: Christopher Ölmüller 5.

Mainz, Schlossgymnasium: Kl. 13: Stephan Holzer 61.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):
Kl. 8: Maike Bäcker 21, Natalie Geiß 16, Michaela Schuster 9, Helena Schweizer 9.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):
Kl. 5: Claudia Däschner 10, Vivien Kohlhaas 22, Lea Krause 8, Nora Mollner 14, Daria Schymczyk 4; **Kl. 6:** Madeline Kohlhaas 33; **Kl. 7:** Hannah Rautenberg 19;
Kl. 8: Annika Kohlhaas 38, Miriam Menzel 30;
Kl. 9: Anika Sonnenberg 22, Stefanie Tiemann 68.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger): Kl. 8: Martin Jöhlinger 34.

Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):
Kl. 6: Larissa Habbel 12, Patricia Kuther 5, Patricia Limpert 12, Sarah Rosengarten 16, Katrin Schlemm 15, Viktoria Schreiber 8, Sophia Waldvogel 10;
Kl. 7: Annkatrin Weber 47, Mirella Rechinti 1;
Kl. 9: Sebastian Eckart 11; **Kl. 10:** Simon Bats 18.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (Betreuender Lehrer Herr Meixner):
Kl. 5: Philip Dahnen 8 , Matthias Monschau 3, Jan Radermacher 4;
Kl. 6: Michael Monschau 5, Felix Schmitt 12;
Kl. 7: Keven Runge 12, Tobias Wallek 23;
Kl. 10: Dominik Schellberg 4, Paul W. Schnabel 4.

Siegburg, Anno-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hachtel):
Kl. 8: Franziska Groß 4; **Kl. 10:** Jan B. Boscheinen 36.

Speyer, Friedrich-Magnus-Schwerd Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Karmann): Kl. 7: Melanie Zickgraf 12.

Speyer, Kolleg: Kl. 12: Tina Hartmann 6.

Tegernsee, Gymnasium: Kl. 9: Juliane Oberwieser 9.

Weisenheim am Berg, Regionale Schule: Kl. 7: Marc Andre Biehl 7.

Weiterstadt: Kl. 3: Alexandra Einicke 9.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):
Kl. 6: Geraldine Arning 6, Sarah Breunich 8, Lisa Engel 12, Julia Krebs 9, Louisa Linn 6, Lisa Schwarz 3, Philipp Thau 10; **Kl. 7:** Kurosch Habibi 13;
Kl. 8: Julia Jung 25, Sarah Tröbs 27; **Kl.11:** Verena Prägert 32.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium: Kl. 8: Charlotte Capitain 40.

Gymnasium Wolfen-Stadt: Kl. 13: Martin Radloff 13.

Worms, Eleonoren-Gymnasium: Kl. 7: Moritz Maurer 16.

MONOID Jahrgang 24 Heft 78 Juni 2004

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Dr. Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr.Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Ehrenmitglied: Martin Mettler
Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Meike Fluhr, Armin Holschbach, Felix Liebrich, Isabelle Merker, Manuel Ross und Rebecca Zimmer
Korrekturen und Layout: Jens Mandavid **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339 oder -26107; Fax -24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid