

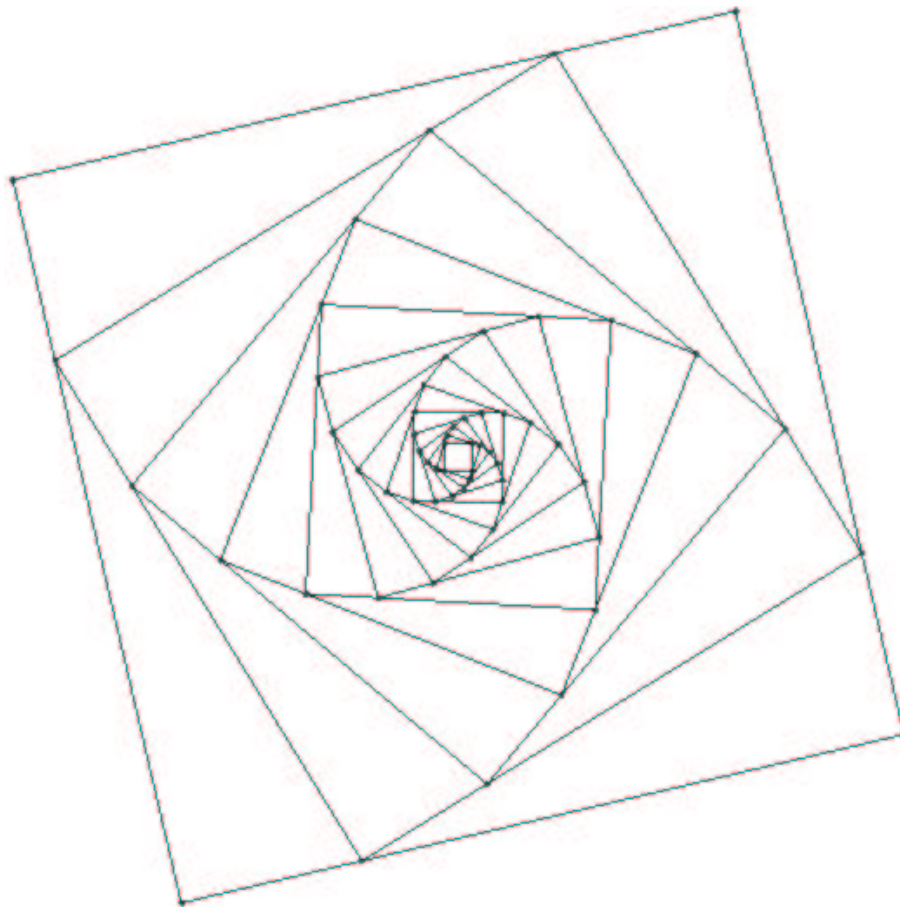
Jahrgang 23

Heft 75

September 2003

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein



Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer *nur eine oder Teile einzelner Aufgaben* lösen kann, sollte teilnehmen; **der Gewinn eines Preises** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (**mit Lösungsweg!**) zu den NEUEN AUFGABEN, zur „Seite für den Computer-Fan“ und zur Rubrik „Wer forscht mit?“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern!)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen zu den Mathespielereien, den Neuen Aufgaben und der Computeraufgabe ist der

15.11. 2003.

(Für die Bearbeitung der „mathematischen Entdeckungen“ und des Themas „Wer forscht mit?“ habt ihr bis Ende des Schuljahres Zeit.)

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.

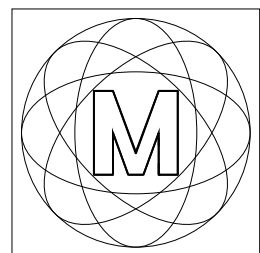
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis: **Das Goldene M**

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:

Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.



Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Ein Ausflug in die Welt der großen Zahlen

Quadrillionen und Quadrilliarden

Ein Beitrag für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5-6) von Martin Mettler

Neulich fragte der Showmaster einer Quizshow den Kandidaten, wieviele Nullen denn die Hundert habe. Nach einem verwunderten Zögern kam die richtige Antwort „2“. Erneut fragte der Quizmaster, wieviele Nullen denn die Tausend habe. Jetzt kam die Antwort „3“ prompt. Aber dann kam die Frage: „Und wie steht es mit der Quadrillion?“ Da konnte der Kandidat nur antworten: „Damit bin ich im Moment leider überfragt. . .“

Tja, wie ist es denn nun mit den . . . illionen? Wir wollen ein bisschen über den Rahmen der Tausend oder gar der Million hinausblicken.

Aus der Schule ist den meisten Monoidanerinnen und Monoidanern bekannt:

ein Tausend	= 1 000	= 10^3	hat 3 Nullen;
eine Million	= 1 000 · 1 000		
	= 1 000 000	= 10^6	hat 6 Nullen;
ein Billion	= 1 000 000 · 1 000 000		
	= 1 000 000 ²	= 10^{12}	hat 12 Nullen;
eine Trillion	= 1 000 000 · 1 000 000 · 1 000 000		
	= 1 000 000 ³	= $(10^6)^3 = 10^{18}$	hat 18 Nullen;
eine Quadrillion	= 1 000 000 ⁴	= $(10^6)^4 = 10^{24}$	hat 24 Nullen.

Wenn wir die Vorsilben beachten, können wir eine Logik entdecken, denn „bi“ bedeutet 2, „tri“ bedeutet 3, „quad“ bedeutet 4, „quint“ bedeutet 5, usw.

(Wer ein Instrument spielt, kennt diese Begriffe vielleicht auch aus der Musik. Zum Beispiel werden Tonabstände mit „Quarte“, „Quinte“, „Sexte“ usw. bezeichnet.)

Wir wissen, dass die Million 6 Nullen hat, und folgern daraus, dass die Billion $2 \cdot 6 = 12$ Nullen, die Trillion $3 \cdot 6 = 18$ Nullen, die Quadrillion $4 \cdot 6 = 24$ Nullen, die Quintillion $5 \cdot 6 = 30$ Nullen, die Sextillion $6 \cdot 6 = 36$ Nullen, die Septillion $7 \cdot 6 = 42$ Nullen, die Oktillion $8 \cdot 6 = 48$ Nullen und die Nonillion $9 \cdot 6 = 54$ Nullen hat.

Bemerkung:

Oft werden die großen Zahlen nicht beim Namen genannt, sondern sie werden in der Exponentialschreibweise angegeben. Der Vorteil dieser Schreibweise ist, dass man die Anzahl der Nullen direkt ablesen kann.

1 Tausend	=	= 10^3 ,	also 3 Nullen;
1 Million	=	= 10^6 ,	also 6 Nullen;
1 Milliarde	= 1 000 Millionen	= $10^3 \cdot 10^6 = 10^9$,	also 9 Nullen;
1 Billiarde	= 1 000 Billionen	= $10^3 \cdot 10^{12} = 10^{15}$,	also 15 Nullen;
1 Trilliarde	= 1 000 Trillionen	= $10^3 \cdot 10^{18} = 10^{21}$,	also 21 Nullen;
1 Quadrilliarde	= 1 000 Quadrillionen	= $10^3 \cdot 10^{24} = 10^{27}$,	also 27 Nullen.

Anmerkung:

In den englischsprachigen Ländern gelten andere Vereinbarungen. Dort gilt:

1 Billion	= 1 Milliarde	= 1 000 Millionen	= $10^3 \cdot 10^6 = 10^9$;
1 Trillion	= 1 000 Billionen	= 10^{12} ;	
1 Quadrillion	= 1 000 Trillionen	= 10^{15}	usw.

Hättest Du es gewusst?

Was ist Tristram Shandy's Paradoxie?

von Hartwig Fuchs

In den Jahren 1759–1767 veröffentlichte der Ire Laurence Sterne seinen 9-bändigen damals und auch heute noch berühmten höchst skurrilen Roman „The Life and Opinions of Tristram Shandy, Gentleman“, in dem der Held der Geschichte sein eigenes Leben erzählt. Der autobiographische Bericht ist aber alles andere als chronologisch aufgebaut, und er wird fortlaufend unterbrochen durch Einschübe von Anekdoten, Fabeln, Reiseberichten, pseudowissenschaftlichen Diskussionen, . . . Dies führt dazu, dass Tristram Shandy schließlich ein ganzes Jahr benötigt, nur um den ersten Tag seines Daseins zu beschreiben, so dass er im 13. Kapitel des 4. Buches fröhlich bemerkt:

- (1) Wenn ich an meiner Biographie im gleichen Tempo weiterarbeite wie bisher, dann wird die Zeit, die ich zur Beschreibung meiner gelebten Tage brauche, von Tag zu Tag jeweils um ein Jahr länger – in meiner Biographie werde ich daher nicht über die ersten Säuglingsmonate hinauskommen.

Da hat er Recht! Aber es gibt einen „Ausweg“, den der englische Logiker und Mathematiker Bertrand Russell (1872–1970) mit **Tristram Shandy's Paradoxie** gefunden hat.

- (2) Wenn man annimmt, dass Tristram Shandy ewig lebt – was man bei einer Romanfigur getrost schon mal annehmen darf – dann wird er sein Leben Tag für Tag vollständig beschreiben können, auch wenn die Kluft zwischen Lebenszeit und Beschreibenszeit täglich größer wird.

Wie das? – wird man fragen.

G. Cantor, der Begründer der Mengenlehre, hat eine Sichtweise in die Mathematik eingeführt, durch die Größenvergleiche unendlicher Mengen möglich werden. Das folgende Beispiel soll Cantors Vorgehen erläutern und insbesondere klären, wann zwei unendliche Mengen „gleich groß“ sind.

Es sei N_1 die Menge der natürlichen Zahlen und N_2 die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Wir schreiben N_1 und N_2 so untereinander:

$$\begin{array}{ccccccccc} N_1 : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \dots & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\ N_2 : & 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

An dieser Anordnung erkennt man, dass jede Zahl aus N_1 in N_2 eine (und nur eine!) Partnerzahl $n \cdot 2$ hat. Umgekehrt hat auch jede Zahl $m \cdot 2$ aus N_2 genau eine Partnerzahl m in N_1 .

- (3) Im Sinne dieser (umkehrbar eindeutigen) Zuordnung sind nach Cantor die Menge N_1 der natürlichen Zahlen und ihre echte Teilmenge N_2 der geraden natürlichen Zahlen gleich groß (Cantor sagt dafür auch „gleich mächtig“).

Wir haben Schwierigkeiten, (3) zu akzeptieren, weil unsere Anschauung geneigt ist, Eigenschaften von endlichen Mengen unbedenklich auf unendliche Mengen zu übertragen und daher die Teilmenge N_2 als „kleiner“ als die Menge N_1 anzunehmen. Die Mengenlehre hat aber gezeigt, dass wir uns bei unendlichen Mengen nicht auf die

Anschauung verlassen dürfen, weil wir uns sonst leicht in anschaulichen **Paradoxien des Unendlichen** wie (2) oder (3) unlösbar verstricken.

Zurück zu (2):

Die Überlegungen zu (3) zeigen den Weg, wie man Tristram Shandy's Paradoxie in der Sprache der Mengenlehre auflösen kann.

Es gilt nämlich: Die Mengen $N_1 = 1, 2, 3, \dots$ und $N_{365} = 1 \cdot 365, 2 \cdot 365, 3 \cdot 365, 4 \cdot 365, \dots$ sind gleich groß, wie man aus der folgenden Zuordnungstabelle abliest.

N_1 :	1	2	3	4	5	. . .
	↓	↓	↓	↓	↓	. . .
N_{365} :	$1 \cdot 365$	$2 \cdot 365$	$3 \cdot 365$	$4 \cdot 365$	$5 \cdot 365$. . .

Beschreibt nun N_1 eine Menge von unendlich vielen aufeinander folgenden Tagen und N_{365} eine Menge von unendlich vielen aufeinander folgenden Jahren, dann folgt aus der gleichen Größe von N_1 und N_{365} :

Zu jedem Tag n in Tristram Shandys Leben gibt es genau ein Jahr $n \cdot 365$, in dem er den Tag n beschreiben wird – also gilt (2).

Anhang über Hilberts paradoxes Hotel

Von David Hilbert (1862 – 1943) stammt ein weiteres schönes Beispiel für eine anschauliche Paradoxie des Unendlichen, die mit der Paradoxie des Tristram Shandy eng verwandt ist, **Hilberts paradoxes Hotel**:

- (4) In einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die alle von Gästen belegt sind, findet sich dennoch immer ein freies Zimmer für einen weiteren Gast; ja, es finden sich sogar noch unendlich viele freie Zimmer für unendlich viele zusätzliche Gäste.

Wie ist das möglich?

Die Zimmer in Hilberts Hotel seien mit $1, 2, 3, \dots$ nummeriert. Um dem zuletzt angekommenen Reisenden im völlig ausgebuchten Hotel ein freies Zimmer anbieten zu können, bittet der Hoteldirektor jeden Gast, aus seinem Zimmer in ein Zimmer mit einer um 1 höheren Nummer umzuziehen.

Belegte Zimmer vor dem Umzug:	1	2	3	4	5	. . .
	↘	↘	↘	↘	↘	. . .
Belegte Zimmer nach dem Umzug :	.	2	3	4	5	. . .

Da die Mengen $1, 2, 3, \dots$ und $2, 3, 4, \dots$ gleich groß sind, hat jeder der alten Gäste nach dem Umzug ein Zimmer, und zugleich bleibt das Zimmer 1 für den neuen Gast frei.

Selbst wenn ein Bus mit unendlich vielen neuen Gästen bei dem voll belegten Hilbert-Hotel vorfährt, kann der Hoteldirektor für jeden von ihnen ein freies Zimmer beschaffen – und zwar so: Er bittet jeden der alten Gäste aus seinem Zimmer n in das Zimmer $2n$ umzuziehen.

Belegte Zimmer vor dem Umzug:	1	2	3	. . .
	↘	↘	↘	. . .
Belegte Zimmer nach dem Umzug :	.	2	. 4	. 6 . . .

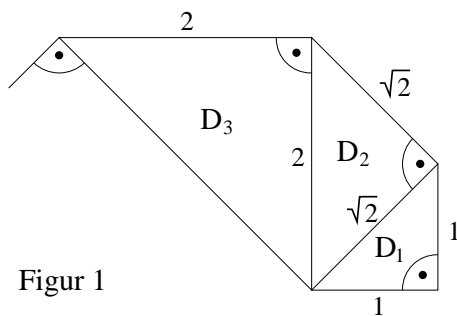
Wieder sind die Mengen $1, 2, 3, \dots$ und $2, 4, 6, \dots$ gleich groß – vgl. (3) – so dass jeder der alten Gäste nach dem Umzug ein Zimmer hat, und für die unendlich vielen neuen Gäste stehen die unendlich vielen freien Zimmer mit ungerader Nummer zur Verfügung.

Zyklische geometrische Konstruktionen

von Harwig Fuchs

Welche grundlegende Eigenschaft müssen die Konstruktionen besitzen, damit sie die nachfolgenden geometrischen Gebilde erzeugen können?

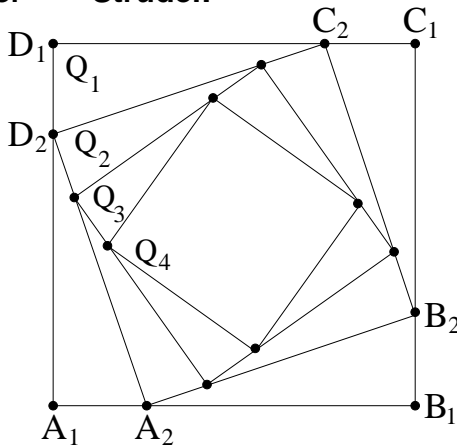
Die \triangle – Spirale:



Figur 1

Es sei D_1 ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck der Kathetenlänge $L_1 = 1$. Seine Hypotenuse der Länge $L_2 = \sqrt{2}$ sei die Kathete eines zweiten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks D_2 , dessen Hypotenuse der Länge $L_3 = 2$ nun ihrerseits Kathete eines Dreiecks D_3 sei, usw. – vgl. Figur 1.

Der \square – Strudel:



Figur 2

Es sei Q_1 das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$. Auf den Seiten von Q_1 konstruiert man die Punkte A_2, B_2, C_2, D_2 , durch die die Seiten jeweils im Verhältnis $1 : 3$ geteilt werden. Die Verbindungsstrecken dieser vier Punkte bilden das Quadrat Q_2 . Ganz entsprechend erhält man die Quadrate Q_3, Q_4 , usw. – vgl. Figur 2.

Wir haben es in beiden Beispielen mit einer Konstruktion K zu tun, welche an einer geometrischen Figur F_1 ausgeführt zu einer Figur F_2 führt, auf die man ihrerseits wieder K anwenden kann, usw. So entsteht, wenn man sich K beliebig oft ausgeführt denkt, eine beliebig lange Kette von Figuren F_1, F_2, F_3, \dots .

In einer solchen Kette können alle Elemente voneinander verschieden sein – wie es z.B. bei den Ketten D_1, D_2, D_3, \dots und Q_1, Q_2, Q_3, \dots der Fall ist (siehe oben).

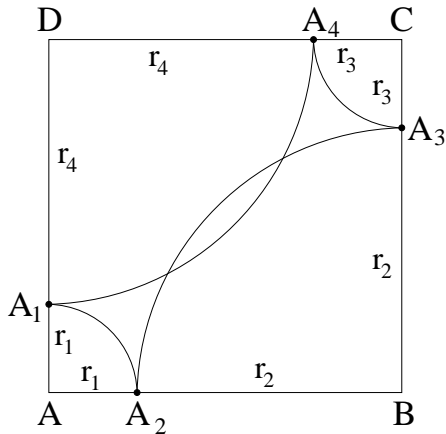
Was aber passiert, wenn eine Figur F_i mit einer späteren Figur $F_j, i < j$, übereinstimmt, also $F_j = F_i$ ist?

Wir klären die Situation an einem Diagramm für $F_j = F_i$:

$$F_1 \xrightarrow{K} F_2 \xrightarrow{K} \dots \xrightarrow{K} F_i \xrightarrow{K} F_{i+1} \xrightarrow{K} \dots \xrightarrow{K} F_{j-1} \xrightarrow{K} F_j = F_i$$

Die Konstruktion K ergibt hier nicht, wie bei der \triangle – Spirale oder dem \square – Strudel, eine nicht-abbrechende „lineare“ Kette von Figuren. Sie führt vielmehr in eine „Schleife“, in der die Figuren $F_i, F_{i+1}, \dots, F_j = F_i$ immer wiederholt werden; man sagt: K ist **zyklisch**. Solche Konstruktionsprozesse wollen wir – wie angekündigt – an zwei elementaren Vertretern betrachten.

Kreisbögen im Quadrat:



Figur 3

Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ und darin der Viertelkreis $V_1 = A_1AA_2$ mit Radius $r_1 = |AA_1|$.

Konstruiere nun die Viertelkreise $V_2 = A_2BA_3$ mit $r_2 = |BA_2|$, sowie $V_3 = A_3CA_4$ mit $r_3 = |CA_3|$ und schließlich $V_4 = A_4DA_5$. Wegen $r_3 = r_1$ und $r_4 = r_2$ folgt, dass $A_5 = A_1$ ist.

Im nächsten Konstruktionsschritt ergibt sich wieder V_1 , danach V_2 , usw. – d.h. unser Konstruktionsprozess ist zyklisch mit einer Schleife aus den Figuren V_1, V_2, V_3, V_4 .

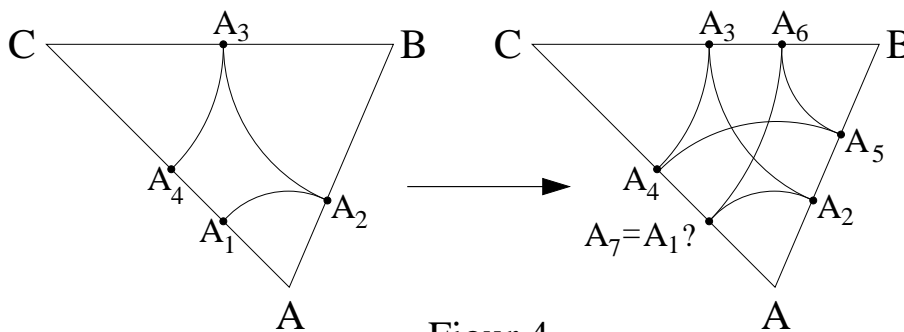
Kreisbögen im Dreieck:

Der gleiche Konstruktionsprozess wie im vorangegangenen Beispiel soll diesmal an einem Dreieck durchgeführt werden.

Gegeben seien also ein Dreieck ABC mit $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CA| = c$ sowie ein beliebiger Punkt A_1 auf CA .

Konstruiere mit dem Radius $r_1 = |A_1A|$ den Kreisbogen A_1A_2 um A .

Wiederhole diese Konstruktion von B aus mit dem Radius $r_2 = |A_2B|$ und schließlich von C aus mit dem Radius $r_3 = |A_3C|$ usw. – vgl. Figur 4.



Figur 4

Die Zeichnung legt die Frage nahe: Gilt nach dem 6. Konstruktionsschritt tatsächlich $A_7 = A_1$ oder ist nur auf Grund der Zeichenungenauigkeiten scheinbar $A_7 = A_1$?

Wir klären das Problem, indem wir den Konstruktionsprozess rechnerisch verfolgen.

Es sei $r_1 = |A_1A|$ mit $r_1 < a, b, c$. Dann gilt:

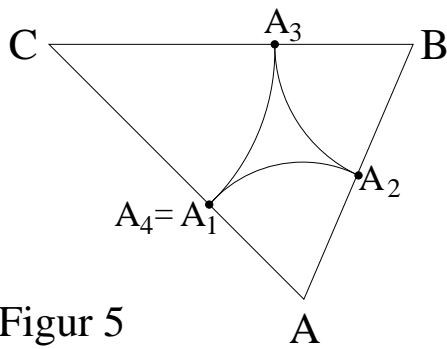
$$\begin{aligned} r_2 &= |A_2B| = a - r_1; & r_3 &= |A_3C| = b - r_2 = b - a + r_1; \\ r_4 &= |A_4A| = c - r_3 = c - b + a - r_1; & r_5 &= |A_5B| = a - r_4 = b - c + r_1; \\ r_6 &= |A_6C| = b - r_5 = c - r_1. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt: $|A_7A| = c - r_6 = c - (c - r_1) = r_1 = |A_1A|$.

Wegen $|A_7A| = |A_1A|$ ist daher $A_7 = A_1$.

Der Konstruktionsprozess ist also zyklisch und i.A. von der Länge 6.

(Wie verläuft der Konstruktionsprozess, wenn man z.B. $r_1 < a, c$, aber $r_1 > b$ voraussetzt?)



Figur 5

Wir betrachten den Sonderfall in Figur 5.

Wählt man $r_1 = (a + c - b)/2$, dann ist

$r_2 = a - r_1 = (a + b - c)/2$ und

$r_3 = b - r_2 = (b + c - a)/2$.

Folglich ist

$|A_4A| = c - r_3 = (a + c - b)/2 = r_1 = |A_1A|$.

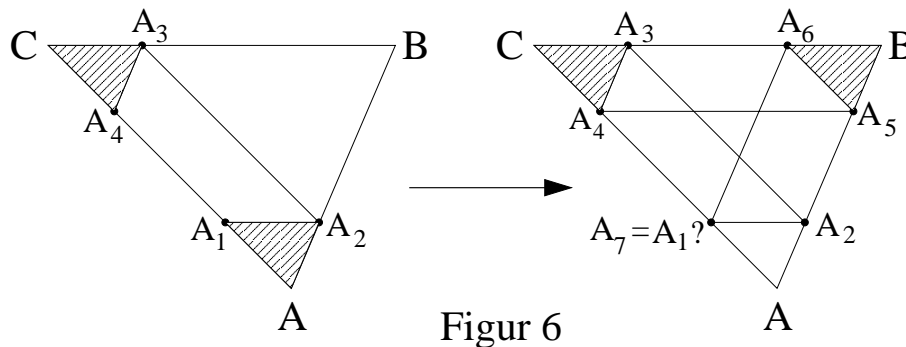
Aus $|A_4A| = |A_1A|$ folgt $A_4 = A_1$, und der Konstruktionsprozess mit $r_1 = (a + c - b)/2$ ist zyklisch von der Länge 3.

Wir wenden uns nun einem anderen Typ eines Konstruktionsprozesses zu, den wir „Strecken im n -Eck“ nennen wollen.

Strecken im Dreieck:

Gegeben seien ein Dreieck ABC mit $|AB| = a$, $|BC| = b$ und $|CA| = c$ sowie ein beliebiger Punkt A_1 auf CA .

Konstruiere die Strecke A_1A_2 , die zu BC parallel ist, dann die zu AC parallele Strecke A_2A_3 und die zu BA parallele Strecke A_3A_4 , usw. – vgl. Figur 6.



Figur 6

Nachdem A_2 , A_3 und A_4 konstruiert sind, sind die Dreiecke A_1AA_2 und CA_4A_3 kongruent (Begründung?). Nach der Konstruktion von A_5 , A_6 und A_7 sind die Dreiecke CA_4A_3 und A_6A_5B sowie die Dreiecke A_6A_5B und A_7AA_2 kongruent. Daraus folgt die Kongruenz von $\triangle A_1AA_2$ und $\triangle A_7AA_2$, folglich die Gleichheit von A_1 und A_7 . Somit ist der Konstruktionsprozess zyklisch mit der Länge 6.

Sonderfall: Wählt man A_1 so auf CA , dass $|AA_1| = c/2$ ist, dann gilt nach dem 3. Konstruktionsschritt: $|CA_4| = c/2$, woraus $A_4 = A_1$ folgt; der Konstruktionsprozess ist also jetzt zyklisch mit der Länge 3.

Überlege nun einmal selbst, wie die Konstruktionen bei einem beliebigen n -Eck, $n > 3$, verlaufen!

Versuche selbst, interessante zyklische Prozesse zu erfinden und uns dann davon zu berichten.

Erratum:

In MONOID-Heft NR. 74, S.7, muss die Angabe der Lebensdaten von G. Cramer korrekt lauten: 1704 – 1752.

Mittlerer Abstand und mittlere Größe von Primzahlen

von Hartwig Fuchs

Die Primzahlen – wir bezeichnen sie nach wachsender Größe geordnet mit $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$, also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{2003} = 17417$ – bilden eine wahrlich „gesetzlose Bande“ in der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen: sie treten in \mathbb{N} so regellos auf, dass man bis heute keine Möglichkeit gefunden hat, die Größe einer Primzahl p_n für beliebiges, insbesondere großes n anzugeben. Auch ihre Position hinsichtlich ihrer Primzahlnachbarn p_{n-1} und p_{n+1} kann im Allgemeinen nicht bestimmt werden. Zwar werden Primzahlen seltener, wenn man in höhere Regionen von \mathbb{N} vorstößt, und entsprechend findet man häufig größere Primzahl-freie Intervalle (wir nennen sie kurz: **Lücken**) – ja, es gibt sogar beliebig große Lücken, wenn nur n genügend groß ist.

Aber daraus zu schließen, dass die Abstände zwischen benachbarten Primzahlen, z.B. p_n und p_{n+1} mit wachsendem n immer größer werden, ist falsch:

Auch die Längen der einzelnen Lücken verändern sich ohne erkennbare Regel.

Beispiel:

Die Länge der Primzahl-freien Lücke (=Abstand) zwischen den Primzahlen p_n und p_{n+1} bezeichnen wir mit $|p_n, p_{n+1}|$;

$|0, p_1|$ sei die Länge der Lücke zwischen 0 und der Primzahl $p_1 = 2$. Wir setzen dann:

$$(1) \quad |p_n, p_{n+1}| = p_{n+1} - p_n, \quad n \geq 1, \quad \text{und} \quad |0, p_1| = 2.$$

Danach ist etwa $|2, 3| = 1, |3, 5| = 2, |13, 17| = 4$ und $|396\,733, 396\,833| = 100$.

Ist p_n die größte Primzahl $\leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 1 = n! + 1$, n beliebig groß, dann ist sogar $|p_n, p_{n+1}| \geq n - 2$.

Denn für die zwischen $n! + 1$ und $n! + n + 1$ liegenden Zahlen gilt: $n! + 2$ ist durch 2, $n! + 3$ ist durch 3, \dots , $n! + n$ ist durch n teilbar und somit ist $n! + n + 1 \leq p_{n+1}$.

Aber es gibt auch – vermutlich – immer wieder Lücken der Länge 2; etwa für den Primzahlzwilling $10^{12} + 9650 \pm 1$ ist $|10^{12} + 9649, 10^{12} + 9651| = 2$.

Und doch haben Mathematiker eine gewisse Gesetzmäßigkeit im „Chaos der Primzahlabstände“ entdeckt und mit ihrer Hilfe eine Möglichkeit gefunden, die **Größe einer Primzahl** p_n wenigstens **abzuschätzen**, wenn man sie schon nicht exakt bestimmen kann, weil sie zu weit „hinten“ in der Reihe der natürlichen Zahlen liegt.

Zwischen der Größe einer Primzahl p_n und bestimmten Primzahlabständen besteht ein einfacher Zusammenhang. Es gilt

$$(2) \quad p_n = |0, p_1| + |p_1, p_2| + \dots + |p_{n-1}, p_n|.$$

Der Nachweis von (2) ergibt sich sofort aus (1):

$$|0, p_1| + |p_1, p_2| + |p_2, p_3| + \dots + |p_{n-1}, p_n| = (p_1 - 0) + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \dots + (p_n - p_{n-1}) = p_n.$$

Also ist p_n die Summe der ersten n Primzahlabstände – $|0, p_1|$ als „Primzahlabstand“ mitgezählt!

Wir entwickeln nun die entscheidende Idee, die wohl auf den Primzahl-begeisterten C. F. Gauss zurückgeht, welche die Größe einer Primzahl abzuschätzen gestattet.

Beispiel:

a) Für $p_5 = 11$ gilt nach (2)

$$p_5 = |0, 2| + |2, 3| + |3, 5| + |5, 7| + |7, 11| = 11 = 5 \cdot 2, 2. \text{ Damit ist}$$

$$d_5 := \frac{|0, 2| + |2, 3| + |3, 5| + |5, 7| + |7, 11|}{5} = 2, 2,$$

das arithmetische Mittel (der Durchschnitt) der ersten 5 Primzahlabstände.

b) Für $p_{10} = 29$ gilt nach (2)

$$p_{10} = |0, 2| + |2, 3| + \dots + |23, 29| = 29 = 10 \cdot 2, 9, \text{ und } d_{10} := \frac{1}{10} p_{10} = 2, 9 \text{ ist die}$$

durchschnittliche Größe der ersten 10 Primzahlabstände.

c) für eine beliebige Primzahl p_n folgt aus (2):

$$(3) \quad d_n := \frac{|0, p_1| + |p_1, p_2| + |p_2, p_3| + \dots + |p_{n-1}, p_n|}{n} = \frac{p_n}{n}.$$

Halten wir gemäß (3) fest:

$$(4) \quad p_n = n \cdot d_n.$$

Dies ist ein sehr wichtiger Zusammenhang zwischen der Größe der Primzahl p_n und dem arithmetischen Mittel der ersten n Primzahlabstände:

Wenn man d_n exakt oder auch nur näherungsweise kennt, dann ist auch p_n exakt bzw. zumindest angenähert angebar.

An dieser Stelle kommt C. F. Gauß mit seinem untrüglichen Gespür für Zahl-Beziehungen und mit seiner immensen Rechenerfahrung ins Spiel.

Gauß fand – wohl um 1791 – durch Inspektion langer Primzahlreihen eine Näherungsformel für die durchschnittlichen Primzahlabstände d_n und zwar ohne, dass er dazu auch nur eine einzige Primzahl p_n kennen musste!

Der Satz von Gauß:

$$(5) \quad d_n \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ für große } n; \text{ das heißt:}$$

Die Differenz zwischen dem exakten d_n und der Summe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ist klein, wenn n sehr groß ist.

Die Längen der Lücken zwischen den Primzahlen p_n und p_{n+1} mögen sich im einzelnen in noch so chaotischer Weise bei wachsendem n verändern, im Mittel gleicht sich das nach (5) aus:

Die durchschnittliche Lückenlänge wächst mit wachsendem n an, weil $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ offensichtlich mit wachsendem n größer wird.

Folgerung aus (4) und (5):

$$(6) \quad p_n \approx n \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \text{ für große } n; \text{ das heißt:}$$

Die Differenz zwischen der Primzahl p_n und $n \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ ist klein im Vergleich zu p_n , wenn n groß ist.

Mit (6) ist nunmehr die Möglichkeit gegeben, zumindest Näherungsaussagen über die Größe von Primzahlen – insbesondere von solchen, die außerhalb der Rechenreichweite liegen – zu machen.

Die mit der Gaußschen Näherungsformel (6) erzielbare „Genauigkeit“ belegt die folgende Tabelle:

n	2	3	4	5	10	20	100	1000
$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$	1,50	1,83	2,08	2,28	2,93	3,60	5,19	7,49
$d_n = \frac{1}{n}p_n$	1,5	1,67	1,75	2,20	2,90	3,55	5,41	7,92
p_n	3	5	7	11	29	71	541	7919
$n \cdot (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$	3	5,5	8,3	11,4	29,2	71,9	519	7485

Gauß hat den Satz (5) nicht bewiesen. Das gelang erst 1896 Hadamard und de la Vallée Poussin mittels mathematischer Hochtechnologie. Einen elementaren Beweis – den die Mathematiker über 200 Jahre lang gesucht hatten – fand 1942 Erdős und unabhängig von ihm auch Selberg.

Mit (5) und (6) kann man die zu Anfang gemachten Feststellungen relativieren: Wenn auch die Größen und die Abstände von Primzahlen p_n **im einzelnen** von einem n zum anderen n sich völlig regellos verändern, so unterliegen sie jedoch **im (statistischen) Mittel** einer beweisbaren Gesetzmäßigkeit.

Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion

1. Zum neuen Schuljahr wünschen wir allen Schülerinnen und Schülern, Lehrerinnen und Lehrern unter unseren MONOID-Lesern einen guten Start! Mit diesem Septemberheft beginnt auch die Puntkezählung für das Lösen der MONOID-Aufgaben neu. Grundlage für die Preisvergabe im Jahr 2004 sind dann die Erfolge beim Lösen dieser Aufgaben und derjenigen aus den Folgeheften bis einschließlich dem Juni-Heft 2004 (MONOID Nr. 78).

2. Die Grundlage der diesjährigen Preisvergabe bilden die Punkte vom Dezember-Heft 2002 (MONOID Nr. 72) bis zum Juni-Heft 2003 (MONOID Nr. 74) (s. Beilage). **Die Preisvergabefeier findet am 29. November 2003 im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey, Frankenstraße 17, statt (Beginn: 10.30 Uhr).** (ACHTUNG! Der im letzten Heft angekündigte Termin 15. November musste wegen einer anderen unaufschiebbaren Schulfest verlegt werden.)

3. In diesem Heft erscheint ein Artikel von **Christian Meyer** über RoboCup, der Fußball-WM für Computerprogramme und Roboter. Grundlage für die Entwicklung solcher autonomen Roboter sind Methoden der *Künstlichen Intelligenz*, die gerade auch an Mathematikerinnen und Mathematiker spannende Herausforderungen stellt. Christian Meyer, der bereits zum MONOID-Heft Nr. 73 einen Beitrag über die Catalán-Zahlen beigesteuert hat, ist Diplom-Mathematiker und Mitarbeiter in unserem Fachbereich und hier über die Anschrift der MONOID-Redaktion erreichbar.

4. Zum Schluss noch eine dringende Bitte: **Teilt uns eventuelle Adressänderungen unbedingt mit!** Die Post sucht nicht lange nach eurer neuen Anschrift, sondern schickt die Hefte einfach an uns zurück mit dem Vermerk „Empfänger unter der angegebenen Anschrift nicht zu ermitteln“. Fünf Hefte sind so beim letzten Versand wieder bei uns gelandet, und die Adressaten warten vielleicht heute noch auf ihr Exemplar. Schade!

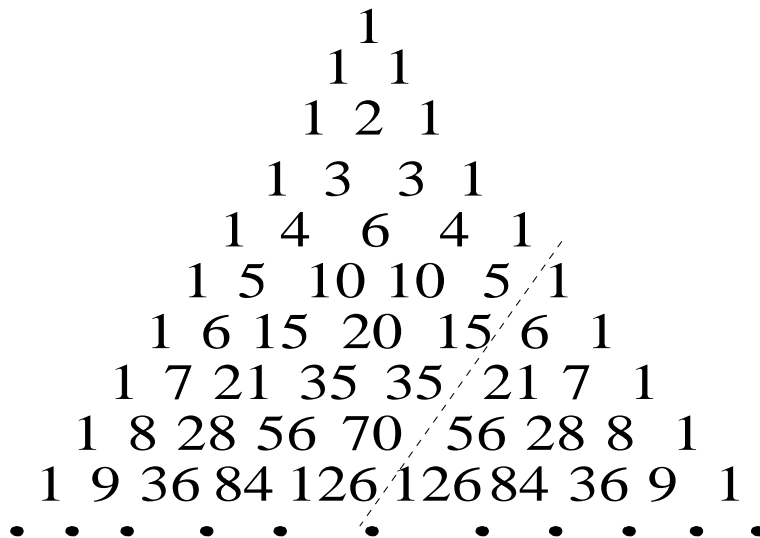
Ekkehard Kroll

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Am Anfang aller Mathematik steht die Neugier, und die führt zu Entdeckungen von Eigenschaften geometrischer Figuren oder von Zahlen. Die Frage, ob das, was man da gefunden hat, zufällig so ist oder ob es einen logischen Grund dafür gibt, lässt den Wunsch nach einem Beweis entstehen – und schon befindet man sich in der Mathematik.

Deshalb möchten wir unsere Mathis-Leserinnen und Leser – und natürlich auch Fortgeschrittene – zu einer Expedition in ein besonderes Zahlenreich verführen, wo sich mathematische Entdeckungen zu Hauf machen lassen.

Wir betrachten das nachfolgende Zahlendreieck, das man sich beliebig fortgesetzt denken kann.



Hierbei ist jede Zahl (außer den Randzahlen 1) die Summe der beiden Zahlen, die eine Zeile höher schräg über ihr stehen; z.B. ist $126 = 56 + 70$.

Dieses Zahlendreieck ist schon sehr alt, denn es kommt bereits in der chinesischen Mathematik vor. In Europa wurde es erstmals 1529 publiziert: M. Stifel (1487? – 1567) und F. Tartaglia (1499 – 1557) kannten es.

Heute nennt man dieses Zahlendreieck das **Pascalsche Dreieck** zu Ehren des brillanten Mathematikers und Philosophen Blaise Pascal (1623 – 1662), der es in seiner Schrift „Abhandlung über das arithmetische Dreieck“ ausführlich untersuchte; er beweist 19 Sätze im Zusammenhang mit dem Zahlendreieck, sagt aber auch, dass es viel mehr Eigenschaften hat, als er beschrieben hat. „Es ist erstaunlich, was sich alles noch entdecken lässt. Jeder sollte es mal selbst versuchen!“

Diese Aufforderung Pascals geben wir uneingeschränkt an unsere Leserinnen und Leser weiter!

Zuvor aber soll uns eine kleine Kostprobe davon überzeugen, dass sich die Mühe lohnen könnte!

Potenzen von 2

Die Summe aller Zahlen in der n -ten Zeile, $n \geq 0$, ist stets 2^n (die Zeilenzählung beginnt mit 0; setze $2^0 = 1$).

Beispiel: Für $n = 6$ ist $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$.

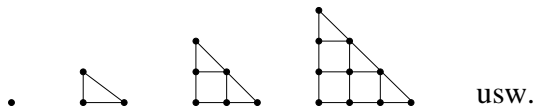
Primzahlen

Alle Zahlen (außer 1) in der p -ten Zeile (und nur in ihr) sind durch p teilbar, sobald p eine Primzahl ist.

Beispiel: In der 7. Zeile sind 7, 21 und 35 jeweils durch 7 teilbar.

Dreieckszahlen

Die Zahlen 1, 3, 6, 10, ... in der 3. Diagonalen von rechts oben nach links unten sind die sogenannten Dreieckszahlen – vgl. Figur.



Quadratzahlen

In der 3. Diagonalen von rechts oben nach links unten – nämlich 1, 3, 6, 10, ... – könnte gelten: Die Summe zweier diagonal benachbarter Zahlen ist eine Quadratzahl (Beweis?).

Beispiel: $1 + 3 = 2^2$; $3 + 6 = 3^2$; $6 + 10 = 4^2$; ...

Aber auch für Fortgeschrittene hält das Pascalsche Dreieck – neben den allgemein bekannten Anwendungen in der Kombinatorik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Polynomentwicklung (z.B. $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + y^6$) usw. – noch manche Überraschung bereit. Hier ein Beispiel:

Kreisgebiete

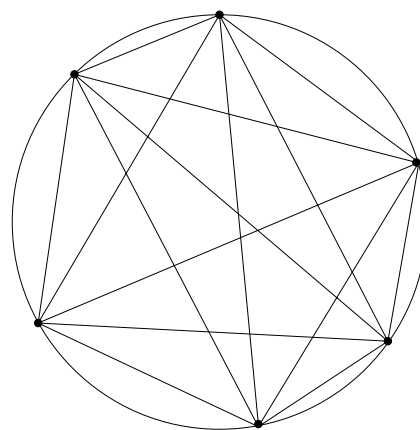
Für n Punkte, $n = 1, 2, 3, \dots$ auf einer Kreislinie ist die Maximalzahl der Gebiete, in die die Kreisscheibe durch Verbinden von je zwei Punkten zerlegt wird, in der Tabelle für kleine n angegeben:

Anzahl der Punkte	1	2	3	4	5	6	7	...
Anzahl der Gebiete	1	2	4	8	16	31	57	...

gemäß der Anzahlformel $n + \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$.

Die Zahlen der Tabelle kann man aber auch im Pascalschen Dreieck finden! Zeichne wie im Zahlendreieck angedeutet – zwischen die 5. und die 6. Diagonale eine Gerade. Die Summe aller Zahlen der n -ten Zeile (die 1. Zeile ist jetzt 1) von links bis zur schrägen Geraden ergibt die maximale Zahl von Kreisgebieten bei n Punkten.

Beispiel: Bei 7 Punkten gibt es maximal $1 + 6 + 15 + 20 + 15 = 57$ Gebiete.



Auch die Fibonacci-Zahlen sind im Pascalschen Dreieck versteckt! Wer findet sie?

Nun warten wir auf die Mitteilung von Entdeckungen interessanter Eigenschaften am Pascalschen Dreieck. (H.F.)

Die Seite für den Computer-Fan

$\pi = 3,14159265358979323846 \dots$

Jedes Jahr werden neue Rekorde bei der Berechnung von Nachkommastellen der Zahl π aufgestellt – heute ist man schon bis hoch in die Milliarden gelangt.

Das war nur mit leistungsfähigen Computern und ganz ausgeklügelten, hocheffizienten Algorithmen in annehmbarer Zeit machbar.

Von dem folgenden schlichten Programm behaupten wir, dass es recht wirkungsvoll ist: Bei jedem Durchlauf der Schleife wird die Anzahl bereits vorhandener exakter Stellen, grob angenähert, verdoppelt.

Wie viele exakte Stellen hat man nach 10 Durchläufen? (H.F.)

Startwerte: $A = E = 1$ $B = 1:\sqrt{2}$ $C = 1:4$	$D := A$ $A := \frac{A+B}{2}$ $B := \sqrt{BD}$ $C := C - E \cdot (A - D)^2$ $E := 2 \cdot E$ Print $\frac{(A+B)^2}{4 \cdot C}$
---	---

Lösung der Computer-Aufgaben aus Monoid 73

Bilde für beliebige, aber feste natürliche Zahl $k \geq 1$ die drei Zahlen l, m und n nach dem folgenden Schema:

$$k \xrightarrow{+1} l \xrightarrow{\cdot k} m \xrightarrow{+1} n$$

Zwischen den vier Zahlen k, l, m und n besteht eine bemerkenswerte Gleichung.

Kannst du sie – nach Analyse einiger Beispiele – angeben? (H.F.)

Lösung:

Es ist $l = k + 1$, $m = l \cdot k = (k + 1)k$ und $n = k(k + 1) + 1$.

Für k, l, m, n gilt: $k^2 + l^2 + m^2 = n^2$, denn $l^2 = k^2 + 2k + 1$, $m^2 = k^2(k + 1)^2$ und $n^2 = k^2(k + 1)^2 + 2k^2 + 2k + 1$, woraus folgt:

$$m^2 + l^2 + k^2 = k^2(k + 1)^2 + k^2 + 2k + 1 + k^2 = n^2.$$

Anmerkung: Da die Typen für l und 1 in der Aufgabenstellung nur schwer zu unterscheiden waren, haben manche Löser(innen) l zu m addiert (statt 1); wenn damit richtig gerechnet worden war, wurde das Ergebnis auch akzeptiert.

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: monoid@mathematik.uni-mainz.de). Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auf interessante Lösungen eingehen können.

Mathis' Olympiade

In dieser MONOID-Nummer beginnen wir eine neue Rubrik, in der wir Aufgabenbeispiele aus früheren Mathematik-Olympiaden für die Klassen 5 bis 7, also für Mathis, vorstellen – zur Information und als Anreiz, sich daran zu versuchen.

Ein Beispiel für Klasse 5: Aufgabe 350524 (MO 1995/96, 2.Stufe)

Frank nimmt in jede Hand eine Anzahl Kugeln, keine Hand bleibt leer. Er verrät: „In einer Hand habe ich eine gerade Anzahl Kugeln, in der anderen Hand eine ungerade Anzahl.“

Michael sagt: „Multipliziere die Anzahl der Kugeln in der linken Hand mit 4, die Anzahl der Kugeln in der rechten Hand mit 5 und nenne die Summe dieser beiden Produkte!“

- Wie kann man, wenn die Summe genannt wird, mit Sicherheit die Aussage erhalten, in welcher Hand die gerade und in welcher Hand die ungerade Anzahl Kugeln ist?
- Wie kann man, wenn die Summe 60 genannt wird, mit Sicherheit die beiden Anzahlen der Kugeln herleiten, die Frank in der linken Hand und in der rechten Hand hat?

Ein Beispiel für Klasse 6: Aufgabe 350632 (MO 1995/96, 3.Stufe)

Eine Wiese ist 10 800 Quadratmeter groß. Drei Bauern überlegen, wie sie die Wiese mähen wollen. Bauer *A* würde sie in 3 Stunden mähen, wenn er es allein tun müsste, Bauer *B* in 4 Stunden, Bauer *C* in 6 Stunden.

- Sie beschließen dann aber, gleichzeitig zu mähen, so dass sie bei geschickter Aufteilung der Wiese gleichzeitig fertig werden können. Wie viel Zeit würden sie hierzu brauchen?
- Nachdem sie zu dritt die Hälfte der Wiese gemäht haben, muss jedoch Bauer *B* aufhören. Wieviel Zeit brauchen nun noch *A* und *C*, bis die Wiese fertig gemäht ist?

Ein Beispiel für Klasse 7: Aufgabe 350712 (MO 1995/96, 1.Stufe)

Ermittle alle diejenigen geordneten Tripel (p_1, p_2, p_3) von Primzahlen p_1, p_2, p_3 , welche die Gleichung $p_1 \cdot (p_3 - p_2) = 195$ erfüllen!

Und nun viel Spaß und gutes Gelingen!

(Die Aufgaben und Lösungen der Mathematik-Olympiaden werden herausgegeben vom Amt für Schule Hamburg und „Mathematikolympiaden e.V.“, Rostock, im HEREUS Verlag, Mühlenstraße 107, 21509 Glinde.)

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 74

Drei Seiten für Mathis (SchülerInnen der Kl. 5 - 7)

Familie Mayer

Als Familie Mayer ein Baby bekommt, sagt eines ihrer Zwillinge zum anderen: „Jetzt habe ich doppelt so viele Schwestern wie du!“

Wie ist dies möglich?

(WJB)



Lösung:

Die Zwillinge sind ein Junge und ein Mädchen. Das Neugeborene ist ein Mädchen.

Magisches Quadrat

2000	2004	2005
2008	2003	1998
2001	2002	2006

Vervollständige zu einem magischen Quadrat!

(Es müssen also alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen dieselbe Zahl ergeben!)

(H.F.)

Werbezeitungen

Zum Verteilen von 1800 Werbezeitungen haben sich 14 Jugendliche gemeldet.

Jedes Mädchen erhält ein Paket von 120 Zeitungen und jeder Junge ein Paket von 140 Zeitungen – keine Zeitung bleibt übrig.

Wie viele Mädchen und wie viele Jungen tragen die Werbezeitungen aus?

(H.F.)



Lösung:

Man gebe jedem Jugendlichen 120 Zeitungen – damit haben die Mädchen die ihnen zugedachten Zeitungen erhalten. Die restlichen Zeitungen müssen in 6 Paketen zu 20 Zeitungen aufgeteilt werden, damit man jedem Jungen 140 Zeitungen geben kann. Somit sind es 6 Jungen; die übrigen 8 Jugendlichen sind Mädchen.

Die Waage



Jede schraffierte Kiste wiegt 5 Gramm. *Wieviel wiegt eine Kiste, auf der Kreise sind?*

(Judith Reinhardt, Geschwister Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:

Eine Kiste mit kreisförmigem Muster wiegt $9gr$. Denn die schraffierten Kisten auf der linken Schale der ersten Waage wiegen zusammen $6 \cdot 5gr = 30gr$, also müssen die Kisten mit Kästchenmuster auf der rechten Schale je $30gr : 2 = 15gr$ wiegen. Auf der zweiten Waage liegen links dann $3 \cdot 15gr = 45gr$, die sich gleichmäßig auf die fünf mit Kreisen verzierten Kisten verteilen müssen: $45gr : 5 = 9gr$.

Konstruktion mit beschränkten Mitteln



Hans besitzt nur ein unmarkiertes Lineal und einen eingestellten Zirkel. Er kann damit ein Paar sich rechtwinklig schneidender Strecken konstruieren.

Wie macht er das?

Kannst du verschiedene Konstruktionsverfahren finden? (H.F.)

Lösung:

Man macht sich leicht klar, dass folgende Figuren mit Lineal und eingestelltem Zirkel konstruierbar sind:

- (1) eine Raute;
- (2) ein Halbkreis samt Durchmesser;
- (3) ein beliebiger Winkel α und sein Nebenwinkel $\alpha - 180^\circ$.

Für diese Figuren gilt nun:

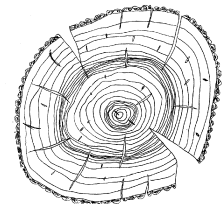
- (1) die Diagonalen der Rauten sind orthogonal;
- (2) die Verbindungsstrecken eines beliebigen Punktes auf dem Halbkreis mit den Endpunkten des Durchmessers sind orthogonal.
- (3) die Halbierenden der Winkel α und $\alpha - 180^\circ$ sind orthogonal.

Da nun die Diagonalen in (1), die Verbindungsstrecken in (2) und die Halbierenden in (3) allesamt mit Lineal und eingestelltem Zirkel konstruierbar sind, hat Hans mindestens drei Konstruktionsmöglichkeiten für zwei orthogonale Strecken.

Baumringe

Ein alter Baumstumpf hat den Durchmesser von 30 cm. An den Jahresringen sieht man, dass der Baumstamm im ersten Jahr um 6 cm dicker geworden ist, im zweiten Jahr nur noch um 3 cm, im dritten Jahr um 1,5 cm ...

Wie alt war der Baum, als er gefällt wurde, wenn der Durchmesser des Stammes ab dem fünften Jahr immer um die gleiche Zahl weiter gewachsen ist?



(Judith Reinhardt, Geschwister Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Lösung:

Vom Enddurchmesser ziehen wir die jährlichen Zunahmen des Durchmessers ab:

$$\begin{aligned}
30\text{cm} - 6\text{cm} &= 24\text{cm}, \\
24\text{cm} - 3\text{cm} &= 21\text{cm}, \\
21\text{cm} - 1,5\text{cm} &= 19,5\text{cm}, \\
19,5\text{cm} - 0,75\text{cm} &= 18,75\text{cm}, \\
18,75\text{cm} - 0,375\text{cm} &= 18,375\text{cm}.
\end{aligned}$$

Im fünften Jahr ist der Baum um 0,375 cm in der Breite gewachsen. Um diese Zahl wächst er jetzt weiter. Subtrahiere nun so lange 0,375 cm, bis die Null erreicht wird. Wenn man von 18,375 erneut 0,375 abzieht, erhält man 18. Jetzt ist der Baum 6 Jahre alt. 18 ist durch 0,375 teilbar und ergibt $18 : 0,375 = 48$.

Damit ist der Baum $48 + 6 = 54$ Jahre alt.

Konstruktion

Im Inneren oder auf dem Rand eines Parallelogramms $ABCD$ sei ein Punkt E gegeben. Konstruiere eine Gerade g durch E , die die Fläche von $ABCD$ halbiert.

(H.F.)

Lösung:

F sei der Schnittpunkt der Diagonalen von $ABCD$.

Die Gerade durch E und F löst die Aufgabe.

Begründung:

Aus der Figur liest man ab (\cong bedeutet: kongruent; $|\Delta_1|$ bedeutet: Fläche von Δ_1):

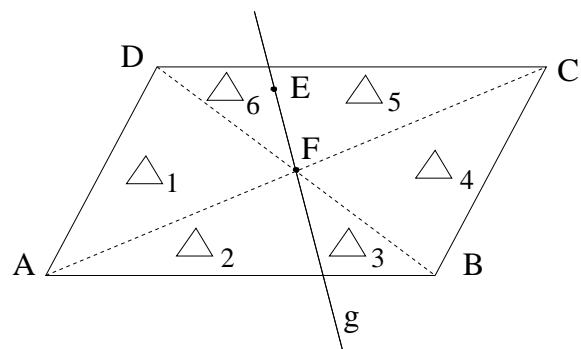
$$\Delta_1 \cong \Delta_4 \Rightarrow |\Delta_1| = |\Delta_4|;$$

$$\Delta_2 \cong \Delta_5 \Rightarrow |\Delta_2| = |\Delta_5|;$$

$$\Delta_3 \cong \Delta_6 \Rightarrow |\Delta_3| = |\Delta_6|.$$

Aus $|\Delta_1| + |\Delta_2| + |\Delta_6| = |\Delta_4| + |\Delta_5| + |\Delta_3|$ folgt, dass g die Fläche von $ABCD$ halbiert.

(H.F.)



Arme Mutter Erde

Größenwahnsinnige Architekten planen, noch in diesem Jahr auf der Erde eine riesengroße Steinmauer, die sogar die Chinesische Mauer weit übertreffen soll, rund um den 40.000km langen Äquator zu bauen. Nach Plan soll 1km der Steinmauer dabei genau 10 Tonnen wiegen.

Mit welchem Gewicht wird die Erde also zusätzlich belastet werden?

(Stefan Tran)

Lösung:

belastet. Im Klartext heißt das: Die Erde wird mit *keinem* zusätzlichen Gewicht kommen. Da wir erst im Jahre 2003 sind und die Anschaffung von Stoffen oder gar Besiedlung fremder Planeten ein Millionen Lichjahre entfernter Traum ist, müssen die Rohstoffe für den Bau der Steinmauer wohl oder übel von der Erde selbst kommen.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Familie Schmitt

Die ältesten Kinder der Familie Schmitt sind die achtjährigen Zwillinge Claudia und Julia. Jede von ihnen hat eine Schwester und zwei jüngere Brüder.

Wie viele Kinder haben die Schmitts?

(WJB)

Die vier Schiffe

In einem Hafen hatten vier Schiffe festgemacht. Am Montag, dem 3. Januar 2000, verließen sie gleichzeitig den Hafen.

Es ist bekannt, dass das erste Schiff alle 4 Wochen in diesen Hafen zurückkehrt, das zweite alle 8 Wochen, das dritte alle 12 Wochen und das vierte alle 16 Wochen.

Wann trafen alle Schiffe das erste Mal wieder in diesem Hafen zusammen?

(gefunden K.E.)

Die vietnamesische Fliege

Dieses – allein von der Aufgabenstellung her – sehr schwierige und äußerst langwierige Rätsel stammt aus meinem Heimatland Vietnam:

Auf dem berühmtesten Fluss Song Huong, dem Parfümfluss, der durch die alte Kaiserstadt Huo fließt, befinden sich am oberen Flusslauf eine schnittige Jacht und am unteren ein traditionelles Fischerboot, die aufeinander zufahren. Die Jacht fährt dabei mit einer Geschwindigkeit von 13km/h ; das Boot ist 9km/h schnell. Von dem Deck der Jacht startet nun eine kleine Fliege und flattert mit 24km/h geradewegs zum Fischerboot. Dort angekommen, macht sie sich sofort wieder auf den Rückweg. So fliegt sie also immer hin und her. Als zusätzliche Schwierigkeit muss noch erwähnt werden, dass die Fliesgeschwindigkeit des Flusses 1km/h beträgt. Nach genau 25min seit dem Beginn ihrer Rundflüge macht es BUMM! und die Fliege wird von den beiden Booten zerquetscht.

Wie viele Kilometer flog die Fliege insgesamt, ausgehend von ihrem Start bei der Jacht, bis zu ihrem Tod?

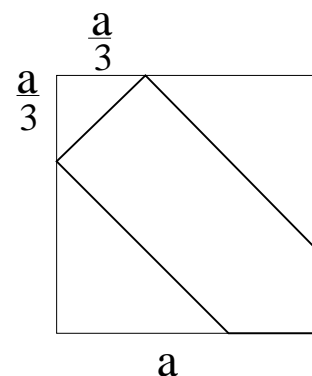
(Stefan Tran, Leibniz-Gymnasium Östringen)

Der Rasen und Mr. Grasy

Mr. Grasy hat sich einen neuen Rasenmäher geleistet. Freudig erregt fährt er damit einfach quer über seine (ziemlich kleine) quadratische Rasenfläche mit einer Seitenlänge $a = 9\text{m}$.

- Berechne, wie viel m^2 er mit seinem neuen Rasenmäher bereits jetzt gemäht hat.
- Löse die Aufgabe a) für eine beliebige Seitenlänge a .

(WK)



Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

M & M

X bunte M & Ms werden in eine Kiste gegeben. Der Deckel wird geschlossen und die Kiste geschüttelt. 50 % der M & Ms liegen so, dass das „M“ sichtbar ist. Diese dürfen gegessen werden. Jetzt wird die Kiste erneut geschüttelt, und es ist wieder bei 50 % der verbliebenen M & Ms das „M“ sichtbar.

Bei 5 % aller M & Ms ist das „M“ abgescuert und nicht sichtbar. Nach dem dritten Schütteln der Kiste sind noch 25 M & Ms enthalten.



Wie viele M & Ms waren zu Anfang in der Kiste und bei wie vielen ist das „M“ nicht sichtbar gewesen?

(Judith Reinhardt, Geschwister Scholl-Gymnasium Ludwigshafen)

Wie funktioniert das?

Denke dir eine natürliche Zahl $Z \geq 1$, multipliziere sie mit 50, addiere 987 und verdopple dann die Summe; addiere nun 29 und subtrahiere dein (vierstelliges) Geburtsjahr.

Das Ergebnis deiner Rechnung sei A .

Die beiden letzten Ziffern von A geben dein Alter (in Jahren) an! (H.F.)

Wahr oder falsch?

Jede Quadratzahl (das ist das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n) hat eine ungerade Anzahl von Teilern. (H.F.)

Bereits auf Seite 19 findet ihr Mathespielereien!

An alle Freunde und Förderer von MONOID:

Einladung zur MONOID-Preisvergabefeier

am 29. November 2003

im Elisabeth-Langgässer- Gymnasium Alzey, Frankenstraße 17, 55232 Alzey.
(Beginn: 10.30 Uhr)

(Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch schriftlich eingeladen.)

(Aus schulinternen Gründen musste der zunächst für den 15. November vorgesehene Termin auf den 29. November verschoben werden.)

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 811. Zylindrisches

In einem Kreiszyylinder mit dem Durchmesser 10mm und der Höhe 12cm aus leichtem Holz ist an einem Ende eine Bleikugel so eingelassen, dass er im Wasser aufrecht steht. In einem See ist der Zylinder zu $\frac{3}{5}$ seiner Höhe unter Wasser.

Um wieviel steigt der Wasserspiegel in einem Glaszylinder von 12mm Durchmesser, wenn wir den Holzzylinder darin schwimmen lassen? (WJB)

Aufgabe 812. Konstantin und die Busse

Die Busse einer Linie von L nach G und zurück fahren alle 10 Minuten. Sie begegnen sich an der Haltestelle "Schule". Eines Tages beschließt der in G wohnende Schüler Konstantin bei schönem Wetter zu Fuß nach Hause zu gehen. Er verlässt die Schule gleichzeitig mit einem Buspaar. Nach $7\frac{1}{2}$ Minuten begegnet ihm zum ersten Mal ein Bus. Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit der Busse und die von Konstantin jeweils konstant sind.

a) Wann wird Konstantin zum ersten Mal von einem Bus überholt?

Wir nehmen weiter an, die Entfernungen LS und SG seien gleich und jeder Busfahrer habe in G, aber nicht in H, 10 Minuten Pause. Konstantin wird unterwegs von insgesamt 5 Bussen überholt. Der sechste Bus kommt gleichzeitig mit ihm in G an.

b) Wie viele Busse hat die Verkehrsgesellschaft eingesetzt?

c) Wie lange braucht Konstantin für den Heimweg?

d) Wie vielen Bussen begegnet Konstantin? Zähle dabei den Bus mit, der G gerade verlässt, wenn Konstantin dort ankommt.

(WJB/ Teil a) nach Lewis Carroll)

Aufgabe 813. Lottospieler

Ein Spieler verwettet in 5 Wochen beim Lotto 465 Euro.

In jeder Woche verspielt er 11 Euro mehr als in der Vorwoche.

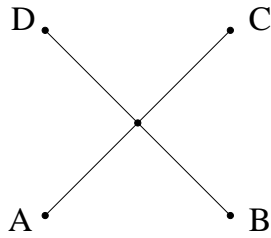
Wieviel hat er in der ersten und in der fünften Woche verspielt? (H.F.)

Aufgabe 814. Spiel mit Primzahlen

Wähle eine Primzahl p mit $p > 3$. Quadriere p und addiere 16. Dividiere das Ergebnis durch 12. Dabei bleibt immer der Rest 5.

Kannst du dieses Phänomen erklären? (VB)

Aufgabe 815. Kurze Wege



Die Punkte A, B, C, D seien Eckpunkte eines Quadrats. Durch die sich kreuzenden Strecken AC und BD ist jeder der Punkte A, B, C, D von jedem anderen Punkt aus erreichbar.

Kannst du ein kürzeres A, B, C, D verbindendes Wegenetz angeben? (H.F.)

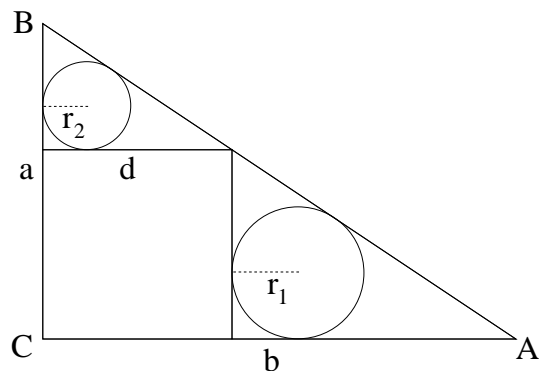
Aufgabe 816. Von Rechtecken und Quadraten

Unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat die größte Fläche. Beweise diese Aussage ohne die Verwendung der Differentialrechnung. (WJB)

Aufgabe 817.

In ein rechtwinkliges Dreieck ABC wird zunächst ein Quadrat wie in der Abbildung angegeben eingeschrieben. Danach wird in die verbleibenden kleinen rechtwinkligen Dreiecke jeweils ein Kreis eingeschrieben.

Man ermittle die Längen der Quadratseite d und der Kreisradien r_1 und r_2 in Abhängigkeit von den Katheten a und b .



(Steffen Biallas, Albert–Einstein–Gymnasium Magdeburg)



Ein Politiker, der einen Flug antreten muss, erkundigt sich bei einem Mathematiker, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Bombe im Flugzeug ist. Der Mathematiker rechnet eine Woche lang und verkündet dann: „Die Wahrscheinlichkeit ist ein Zehntausendstel!“

Dem Politiker ist das noch zu hoch, und er fragt den Mathematiker, ob es nicht eine Methode gibt, die Wahrscheinlichkeit zu senken. Der Mathematiker verschwindet wieder für eine Woche und hat dann die Lösung. Er sagt:

“Nehmen Sie selbst eine Bombe mit! Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Bomben an Bord sind, ist dann das Produkt $(1/10\ 000) \cdot (1/10\ 000) =$ Eins zu Hundertmillionen. Damit können Sie beruhigt fliegen!“

gefunden in:

Friedrich Wille, Humor in der Mathematik, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1992



Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 74

Kl. 8-13

Aufgabe 804.

Fliesenleger Fabian soll in einem Bad eine $3m$ breite Wand bis zur Höhe von $1,50m$ neu fliesen. Der Kunde hat dafür blaue Fliesen von $15cm \times 15cm$ ausgesucht. Die Fugen sollen $2,5mm$ breit sein. Um möglichst wenige Fliesen schneiden zu müssen, überredet Fabian den Kunden dazu, genau zehn waagerechte Reihen von Fliesen zu legen.

1. Wie hoch wird tatsächlich gefliest?
2. Wie viele Fliesen werden gebraucht, wie viele geschnitten?
3. Wie viel Material braucht Fabian für die Fugen, wenn diese $6mm$ tief gefüllt werden? (WJB)

Lösung:

zu 1.:

Unterhalb jeder waagerechten Reihe (auch beim Übergang zum Boden) entsteht eine Fuge. Die Höhe ergibt sich also aus 10 Fliesenbreiten und 10 Fugenbreiten: $10 \cdot 15cm + 10 \cdot 2,5mm = 152,5cm$.

zu 2.:

Fugenlos bräuchte man 20 Fliesen pro Reihe. Mit 19 Fliesen deckt man (bei 20 Fugen) nur $19 \cdot 15cm + 20 \cdot 0,25cm = 290cm$ ab; man braucht also noch eine geschnittene Fliese und eine 21ste Fuge. Damit braucht man insgesamt 200 Fliesen, von denen 10 geschnitten werden.

zu 3.:

Zehn waagerechte Fugen von je $3m$ Länge und 21 senkrechte von $152,5cm$ Länge ergibt eine Gesamtfugenlänge von $6202,5cm$. Dabei sind pro „Schnittpunkt“ zwischen waagerechter und senkrechter Fuge $0,25cm$ doppelt gerechnet. Solche Schnittpunkte gibt es $21 \cdot 10 = 210$ mal. Die wahre zu berücksichtigende Fugenlänge ist also $6202,5cm - 210 \cdot 0,25cm = 6150cm$. Diese multiplizieren wir mit der Breite $0,25cm$ und der Tiefe $0,6cm$ und erhalten so die benötigte Menge von $922,5cm^3$.

Aufgabe 805.

Ein Lottospieler will jede der 49 Zahlen gleich oft spielen.

- a) In wie vielen Feldern mindestens muss er je sechs Zahlen ankreuzen?
- b) Wie kann er das zum Beispiel tun? (WJB)

Lösung:

- a) Da 49 und 6 teilerfremd sind, ist es unmöglich, mit weniger als 49 Feldern (d.h. $49 \cdot 6$ Kästchen) auszukommen.

b) Zum Beispiel 49 Felder der Reihe nach mit (spaltenweise zu lesen!)

1,	2,	...	44,	45,	46,	47,	48,	49
2,	3,	...	45,	46,	47,	48,	49,	1
.
.
6,	7,	...	49,	1,	2,	3,	4,	5

oder je 6 mal (1, 2, 3, 4, 5, 6), (7, 8, 9, 10, 11, 12), ..., (37, 38, 39, 40, 41, 42)
und zusätzlich

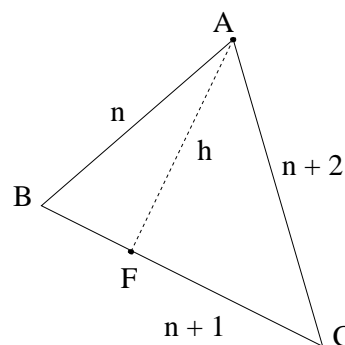
(43, 44, 45, 46, 47, 48)	(43, 44, 45, 46, 47, 49)
(43, 44, 45, 46, 49, 48)	(43, 44, 45, 49, 47, 48)
(43, 44, 49, 46, 47, 48)	(43, 49, 45, 46, 47, 48)
(49, 44, 45, 46, 47, 48).	

Aufgabe 806.

Im spitzwinkligen Dreieck ABC seien die Seitenlängen aufeinander folgende natürliche Zahlen > 3 .

Zeige: Die auf der zweitlängsten Seite BC orthogonale Höhe h teilt BC in zwei Strecken, von denen die eine um 4 länger ist als die andere.

(H.F.)



Lösung:

Es ist $|BF| = k \cdot (n + 1)$ und $|FC| = (1 - k)(n + 1)$, k eine positive Zahl unterhalb 1.

Für die rechtwinkligen Dreiecke ABF und FCA gilt:

$$(k(n + 1))^2 = n^2 - h^2 \quad \text{und} \quad ((1 - k)(n + 1))^2 = (n + 2)^2 - h^2 \quad \text{oder}$$

$$k^2(n + 1)^2 = n^2 - h^2 \quad \text{und} \quad (1 - 2k + k^2)(n + 1)^2 = n^2 + 4n + 4 - h^2.$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung erhält man

$$(1 - 2k)(n + 1)^2 = 4n + 4 \quad \text{und daher} \quad (1 - 2k) \cdot (n + 1) = 4.$$

Damit gilt:

$$|FC| - |BF| = (1 - k)(n + 1) - k(n + 1) = (1 - 2k)(n + 1) = 4.$$

Aufgabe 807.

Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

Warum ist dann stets eine der Zahlen $p^n - 1, p^n + 1$ für jedes $n, n = 1, 2, 3, \dots$, durch 6 ohne Rest teilbar? (H.F.)

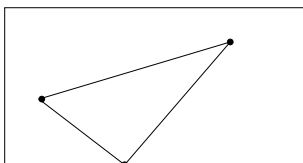
Lösung:

Von den drei aufeinander folgenden Zahlen $p^n - 1, p^n, p^n + 1$ sind $p^n - 1$ und $p^n + 1$ Vielfache von 2, da p^n ungerade ist. Ferner ist eine der Zahlen $p^n - 1, p^n, p^n + 1$ ein Vielfaches von 3; p^n ist es nicht. Also ist eine der Zahlen $p^n - 1, p^n + 1$ ein Vielfaches von 3. Als gerade Zahl ist sie daher auch ein Vielfaches von 6.

Aufgabe 808.

Gegeben sei ein Rechteck.

Es werde in dieses ein Dreieck gezeichnet, dessen Eckpunkte im Innern oder (auch) auf dem Rand liegen:

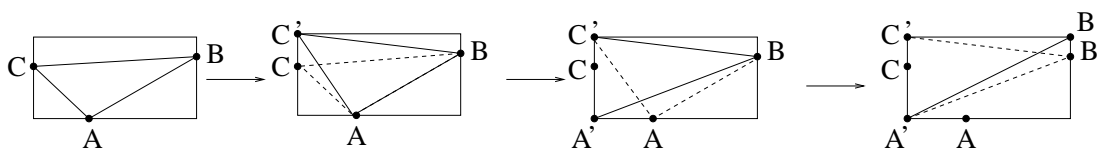


Welche maximale Größe kann der Flächeninhalt des Dreiecks annehmen? (WJB)

Lösung:

Die maximale Größe des Flächeninhalts des Dreiecks beträgt die Hälfte der Rechtecksfläche. Begründung:

1. Liegt mindestens eine Ecke eines Dreiecks im Inneren des Rechtecks, so lässt sich das Dreieck vergrößern, indem man diese Ecke senkrecht zur gegenüberliegenden Seite auf den Rand verschiebt.
2. Liegen zwei Ecken auf der gleichen Rechtecksseite, so vergrößert sich der Flächeninhalt des Dreiecks, indem man diese Ecken in die Ecken des Rechtecks schiebt. Ist die dritte Ecke nicht auf der gegenüberliegenden Seite, so lässt sich das Dreieck vergrößern, indem man sie dorthin schiebt.
3. Liegen die Ecken auf drei verschiedenen Rechtecksseiten wie im Bild, so vergrößert man wie folgt:



Verschiebe zuerst C nach C' ; dadurch vergrößert sich die Dreiecksfläche, weil sich bei gleichbleibender Grundseite AB die Höhe des Dreiecks über AB als dem Abstand des Punktes C von AB vergrößert. Dann verschiebe A in die Ecke A' (dabei vergrößert sich die Höhe über BC') und schließlich B in die Ecke B' , wobei sich die Höhe über $A'C'$ nicht mehr ändert. Die Fläche des Dreiecks $A'B'C'$ beträgt ersichtlich die Hälfte der Fläche des Rechtecks.

Aufgabe 809.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ mit $a > 2b > 2$ und den drei Nullstellen $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Man berechne

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\gamma - \alpha}{a}.$$

(Valentin Blomer)

Lösung:

Wir untersuchen zunächst, wie sich die Lage der Nullstellen mit wachsendem a (ungefähr) verhält.

Es gilt: $f'(x) = 3x^2 - 2ax$ und $f''(x) = 6x - 2a$. Also ist $f'(x) = 0$ für $x = 0$ oder $x = \frac{2}{3}a$.

Wegen $f''(0) = -2a < 0$ und $f''(\frac{2}{3}a) = 2a > 0$ (da a positiv ist), hat f also ein Maximum bei $(0, b)$ und ein Minimum bei $(\frac{2}{3}a, b - \frac{4a^3}{27})$.

Nach Voraussetzung ist $b > 0$ und $b - \frac{4a^3}{27} < 0$. Wegen $f(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ liefert der Zwischenwertsatz:

$$\alpha < 0, \quad 0 < \beta < \frac{2}{3}a, \quad \gamma > \frac{2}{3}a.$$

Insbesondere gibt es tatsächlich drei Nullstellen.

Nun gilt: $f(-a^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{a} - a^{\frac{1}{3}} + b < 0$ für genügend große a ; also folgt: $-a^{-\frac{1}{3}} < \alpha$.

Insgesamt: Aus $a \rightarrow \infty$ folgt $\alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty$. Nach dem Satz von Vieta ist $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = a$, also

$$\frac{\gamma - \alpha}{a} = \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\gamma - \alpha}{\alpha - \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} + \gamma} = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 1.$$

Aufgabe 810. Eine Knochelei und Rechnerei (für die Sommerferien)

a	+	b	:	c	=	2
·		+		-		+
d	·	e	-	f	=	2
-		:	:			-
g	-	h	+	i	=	3
=		=		=		=
2	+	2	-	3	=	1

Man setze in das Gitter an Stelle der Buchstaben die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 9$ so ein, dass keine Zahl übrig bleibt und dass horizontal und vertikal nur gültige Gleichungen entstehen.

Dabei sind alle Rechnungen von links nach rechts bzw. von oben nach unten auszuführen; die Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“ soll hier nicht gelten.

Wie heißt die (einzige) Lösung? (H.F.)

Lösung:

Aus dem Raster liest man unter Beachtung des Textes ab:

$$\begin{array}{ll} (1) & a + b = 2c \\ (2) & d \cdot e = 2 + f \leq 11 \\ (3) & g - h + i = 3 \\ (4) & a \cdot d = 2 + g \leq 11 \\ (5) & b + e = 2h \\ (6) & c - f = 3i \leq 6 \end{array}$$

1. Überlegung: Sei a gerade

Aus (1) $\Rightarrow b$ gerade; (5) $\Rightarrow e$ gerade; (2) $\Rightarrow f$ gerade; (4) $\Rightarrow g$ gerade.

Dies ist ein Widerspruch, denn es gilt:

(7) Unter den Zahlen $1, 2, 3, \dots, 9$ gibt es 4 gerade und 5 ungerade Zahlen.

Somit ist

(8) a ungerade; (1) $\Rightarrow b$ ungerade; (5) $\Rightarrow e$ ungerade.

2. Überlegung: Welchen Wert hat d ?

2.1 Es sei $d \geq 4$; wegen (8) ist e ungerade. Wäre $e \geq 3$, so folgte aus (2):

$11 \geq d \cdot e \geq 4 \cdot e \geq 12$. Somit muss $e = 1$ sein.

Aus (4) $\Rightarrow 11 \geq d \cdot a \geq 4 \cdot a$. Da a ungerade, muss $a = 1$ sein.

Der Fall $d \geq 4$ ist auszuschließen wegen $e = a = 1$ – vgl. Voraussetzung.

2.2 Es sei $d = 3$; wegen (8) sind e und a ungerade; aus (2) $\Rightarrow 11 \geq 3 \cdot e \Rightarrow e = 1$ oder $e = 3$, aber $e = 3$ ist wegen $d = 3$ auszuschließen;
 aus (4) $\Rightarrow 11 \geq 3 \cdot a \Rightarrow a = 1$ oder $a = 3$. Wieder ist $a = 3$ auszuschließen.
 Somit ist $e = a = 1$, was nach Voraussetzung nicht möglich ist. Also $d \neq 3$.

2.3 Es sei $d = 1$; wegen (8) ist $e \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Aber $e \neq 1$, weil sonst $d = e$ wäre.

Für $e = 3$ (bzw. 5, 7 oder 9) ist wegen (2) $f = 1$ (bzw. 3, 5 oder 7); aus (4) $\Rightarrow g$ ungerade.

Somit haben wir mit a, b, e, d, f, g 6 ungerade Zahlen im Widerspruch zu (7).

2.4 Aus 2.1 bis 2.3 folgt, dass nur für $d = 2$ eine Lösung möglich ist. Wegen (2) gilt $e \leq 5$. Da e ungerade ist, gilt $e \in \{1, 3, 5\}$.

Für $e = 5$ wäre $f = 8$ nach (2); dann aber ist (6) unerfüllbar, weil $c - 8 = 1$ sein muss wegen $c \leq 9$.

Für $e = 1$ folgte aus (2): $2 \cdot 1 = 2 + f$, also $f = 0$; Widerspruch.

Somit muss $e = 3$ sein, damit es eine Lösung geben kann.

Für $e = 3$ folgt aus (2): $f = 4$. Für (6) ergibt sich damit einerseits $c - 4 \leq 5$, andererseits ist $c - 4 = 3i$. Also ist $i = 1$, $c = 7$.

Aus (1) ergibt sich nun wegen $c = 7$:

$a + b = 14$. Das ist bei ungeradem b nur möglich für $b = 5$ oder $b = 9$.

Für $b = 5$ ist $a = 9$: aus (4) folgt dann $g > 10$. Widerspruch.

Sei $b = 9$. Dann ist $a = 5$ wegen (1); aus (4) $\Rightarrow g = 8$; aus (3) ergibt sich $h = 6$.

Mit $a = 5, b = 9, c = 7, d = 2, e = 3, f = 4, g = 8, h = 6, i = 1$ ist die einzige Lösung gefunden.



„Wie nennt man das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser?!“

„Mein Gott, Käpt'n! Das sind π - Raten!“

Wer forscht mit?

Problem 1:

Im Unterricht beschäftigen wir uns mal wieder mit dem Satz des Pythagoras, wobei uns besonders die Dreiecke interessieren, deren Seitenlängen durch natürliche Zahlen ausgedrückt werden können. Wir konnten leicht zeigen, dass es nur ein einziges Dreieck gibt, dessen Seitenlängen durch 3 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ausgedrückt werden können, nämlich das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5.

Nun stellt jemand die Frage, ob es vielleicht mehr Dreiecke gibt, wenn nur die beiden Katheten aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind! Mit Computerhilfe fanden wir noch die folgenden pythagoreischen Zahlentripel, die der obigen Bedingung genügen:

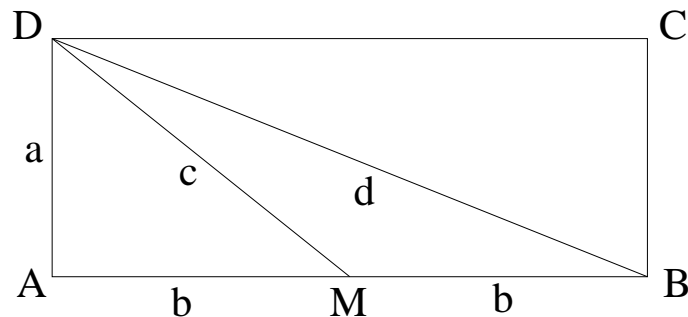
20	21	29
119	120	169
696	697	985

Gibt es noch mehr solcher Zahlentripel? Gibt es womöglich unendlich viele?

Vielleicht weiß jemand etwas darüber oder kann etwas herausfinden, das uns weiterhilft?

Problem 2:

Weiter suchen wir ein Rechteck mit der Eigenschaft, dass die Längen a, b, c und d natürliche Zahlen sind.



Hier soll M der Mittelpunkt der Strecke AB sein.

Wir vermuten, dass es ein solches Rechteck nicht gibt. *Wer weiß Genaueres?*

(Christoph Sievert, Bornheim)

* * * Erinnerung * * *

Alle Monoidaner und Monoidanerinnen seien an **Monoid 72** erinnert, denn dort findet ihr in der Rubrik **Wer forscht mit?** auf **Seite 8** eine Problemstellung von Valentin Blomer, der noch immer auf eure Mithilfe wartet.

Vielleicht fällt euch zu der einen oder anderen Frage ja etwas ein!

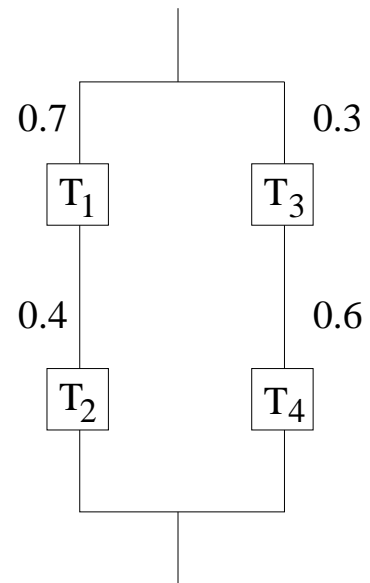
Viel Spaß beim Forschen wünscht euch eure MONOID-Redaktion!

Wo steckt der Fehler?

von Attila Furdek

Ein altes Gerät besteht aus vier Bauteilen T_1, T_2, T_3 und T_4 , die mit den Wahrscheinlichkeiten $0.7, 0.4, 0.3, 0.6$ funktionieren. Das Gerät besteht also aus einer Parallelschaltung, jeder Teil der Parallelschaltung aus einer Reihenschaltung. Die Reihenschaltung funktioniert, wenn beide Bauteile funktionieren; die Parallelschaltung funktioniert, wenn mindestens eine Bauteilgruppe funktioniert.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A : Das Gerät funktioniert.



1. Lösungsweg:

Wir arbeiten mit den Pfadregeln.

$$P(A) = 0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 = 0.46$$

$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4$

Antwort: Das Gerät funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit von **0.46**.

2. Lösungsweg:

Wir wenden den Additionssatz und den Multiplikationssatz an.

$$\begin{aligned} P(A) &= P((T_1 \cap T_2) \cup (T_3 \cap T_4)) \\ &= P(T_1 \cap T_2) + P(T_3 \cap T_4) - P((T_1 \cap T_2) \cap (T_3 \cap T_4)) \\ &= P(T_1) \cdot P(T_2) + P(T_3) \cdot P(T_4) - P(T_1) \cdot P(T_2) \cdot P(T_3) \cdot P(T_4) \\ &= 0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 - 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = 0.4096 \end{aligned}$$

Antwort: Das Gerät funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit von **0.4096**.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch!

Wo steckt der Fehler?

(Die Auflösung findet ihr in MONOID 76.)

Die Funktion $f(x) = 10 \cdot e^{-x/10} \cdot \sin x$

von Martin Mettler

Die Funktion ist nicht gerade, nicht ungerade und nicht periodisch. Also untersuchen wir sie auf ihrem ganzen **Definitionsbereich** $D_f = \mathbb{R}$.

Die 1. Ableitung $f'(x) = e^{-x/10} \cdot (-\sin x + 10 \cdot \cos x)$ hat Nullstellen bei $-\sin x + 10 \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow -\tan x + 10 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 10 \Leftrightarrow x = k\pi + \alpha$, wobei $\alpha = \arctan 10 \approx 1,47$.

Auf dem Intervall $[-10, 10]$ zum Beispiel hat $f(x)$ folgende Extremstellen:

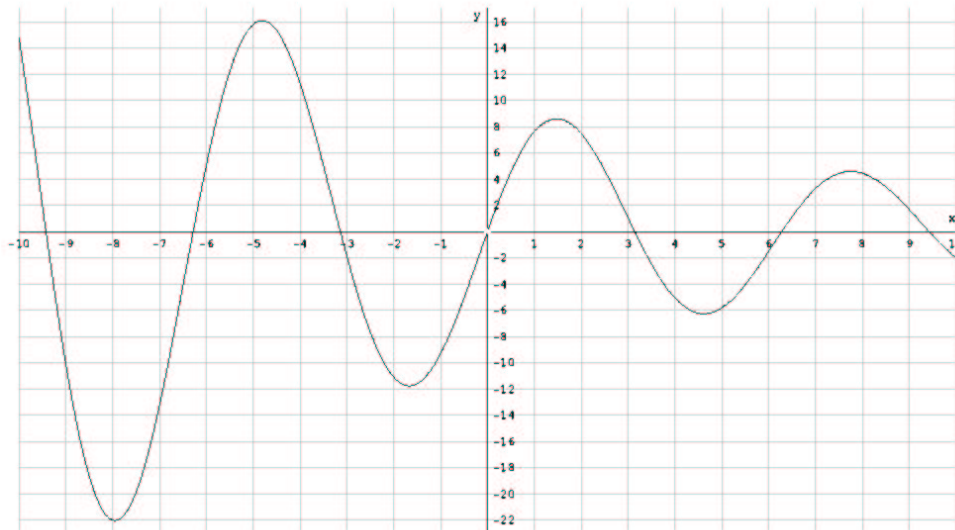
$$-3\pi + \alpha \approx -8; -4,8; -1,7; 1,5; 4,6; 7,8 \approx 2\pi + \alpha.$$

Die 2. Ableitung $f''(x) = e^{-x/10} \cdot (-\frac{99}{10} \sin x - 2 \cdot \cos x)$ hat Nullstellen bei

$$-99 \sin x - 20 \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{20}{99} \Leftrightarrow x = k\pi + \beta, \text{ wobei } \beta = \arctan(-\frac{20}{99}) \approx -0,2 \text{ ist.}$$

Auf dem Intervall $[-10, 10]$ hat $f(x)$ folgende Wendestellen:

$$-3\pi + \beta \approx -9,6; -6,5; -3,3; -0,2; 2,9; 6,1; 9,2 \approx 3\pi + \beta.$$



Verhalten der Funktion an den Rändern von D_f und Asymptoten:

Wegen $|\sin x| < 1$ ist $|f(x) - 0| = 10 \cdot e^{-x/10} \cdot |\sin x| < 10 \cdot e^{-x/10}$.

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} (10 \cdot e^{-x/10}) = 0$ ist, ist auch $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

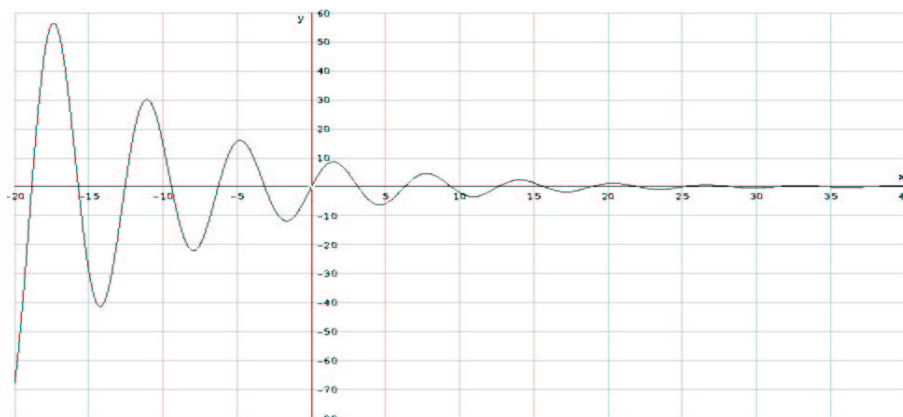
Es wäre $\lim_{x \rightarrow -\infty} (10 \cdot e^{-x/10} \cdot \sin x) = \lim_{u \rightarrow \infty} (-10 \cdot e^{u/10} \cdot \sin u)$.

Aber die Funktion $g(u) := -10 \cdot e^{u/10} \cdot \sin u$ hat keinen Grenzwert für $u \rightarrow \infty$.

Also existiert $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nicht.

Demnach ist $y = 0$ horizontale Asymptote, aber nur für $x \rightarrow \infty$. Diese Asymptote schneidet eigentlich die Kurve in unendlich vielen Punkten, die umso dichter liegen, je größer x wird, aber es ist doch $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0) = 0$.

Also, Vorsicht mit der intuitiven Beschreibung der Asymptote als Gerade, an die sich die Kurve im Unendlichen schmiegt! Unsere Kurve „schmiegt“ sich nicht sanft an die x -Achse, sondern sie „drängelt“ sich an sie ran, bald von der einen, bald von der anderen Seite.



Wir betrachten noch die Funktion $h(x) := 10 \cdot e^{-x/10}$.

Die Gleichung $f(x) = h(x)$ führt zur einfachen Gleichung $\sin x = 1$.

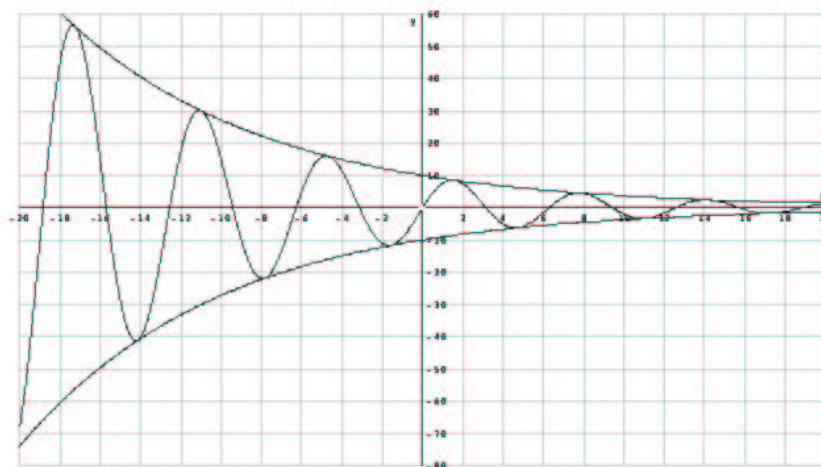
Diese wird erfüllt für alle $x = 2k\pi + (\pi/2)$.

Demnach haben die Funktionsgraphen G_f und G_h zum Beispiel auf dem Intervall $[-12, 12]$ näherungsweise an folgenden Stellen gemeinsame Punkte (es sind Berührungspunkte wegen $f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$): $-11; -4, 7; 1, 6; 7, 9$.

Ist $i(x) := -h(x)$, so ist offenbar G_i symmetrisch zu G_h in bezug auf die x -Achse, so dass sich eine weitere Untersuchung erübrigt.

Die Gleichung $f(x) = i(x)$ führt zu $\sin x = -1$, was für alle $x = 2k\pi - (\pi/2)$ erfüllt ist. Demnach hat G_f mit G_i auf dem Intervall $[-12, 12]$ näherungsweise an folgenden Stellen gemeinsame Punkte (es sind Berührungspunkte wegen $f(x) \geq i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$): $-7, 9; -1, 6; 4, 7; 11$.

In der folgenden Abbildung sehen wir die Graphen von f, h und i in demselben Achsenkreuz. Die Graphen von h und i umhüllen den Graph von f und werden daher **Umhüllende** genannt.



Wer denkt beim Betrachten dieser Abbildung nicht ungewollt an irgendeine gedämpfte Schwingung?

Widerlegung quantifizierter Aussagen

Beweisen kann man lernen

von Hartwig Fuchs

Quantifizierte Aussagen

Ein großer Teil der mathematischen Sätze handelt von Objekten \mathcal{O} , denen eine Eigenschaft E zu- oder abgesprochen wird.

Häufig sind diese Sätze „**quantifiziert**“, d.h. sie sind mit Angaben über die Anzahl der Objekte \mathcal{O} versehen, für die die Aussage gelten soll.

Typische Beispiele für quantifizierte Sätze sind:

Nichtexistenzaussage A : Es gibt **kein** Objekt \mathcal{O} mit der Eigenschaft E .

Eindeutigkeitsaussage B : Es gibt **genau ein** Objekt \mathcal{O} mit der Eigenschaft E .

Allaussage C : **Jedes** Objekt \mathcal{O} besitzt die Eigenschaft E .

Gegenbeispiele

Wenn quantifizierte Sätze wie A, B oder C behauptet werden, dann kann man sie bereits dann als falsch nachweisen, falls man auch nur ein einziges Objekt \mathcal{O}^* vorzeigen kann, für das gilt:

Im Fall A : \mathcal{O}^* besitzt die Eigenschaft E ; damit ist die Negation $\neg A$ von A wahr.

$\neg A$: Es gibt mindestens ein Objekt \mathcal{O} mit der Eigenschaft E (nämlich \mathcal{O}^*).

Im Fall B : \mathcal{O}^* besitzt die Eigenschaft E und ist von \mathcal{O} verschieden; d.h. $\neg B$ ist wahr.

$\neg B$: Es gibt kein oder mehr als ein Objekt \mathcal{O} mit der Eigenschaft E .

Im Fall C : \mathcal{O}^* besitzt nicht die Eigenschaft E ; damit ist die Aussage $\neg C$ wahr.

$\neg C$: Nicht jedes Objekt \mathcal{O} besitzt die Eigenschaft E .

Man sagt in solchen Fällen: Die Behauptung A bzw. B oder C wird durch **ein Gegenbeispiel** – nämlich \mathcal{O}^* – **widerlegt**.

Dass ein einziges Objekt \mathcal{O}^* tatsächlich A (und analog auch B und C) widerlegt, ergibt sich so:

Durch \mathcal{O}^* wird $\neg A$ (lies: nicht A) als wahre Aussage erwiesen. Dann aber kann nicht zugleich auch A wahr sein – denn sonst hätte man den Widerspruch, dass A und $\neg A$ beide wahr sind. Aber das ist nach den Regeln der Logik ausgeschlossen (vgl. MONOID 74, S.33–35).

Also bleibt nur die Möglichkeit: A ist falsch.

Dieses Widerlegungsverfahren für quantifizierte Aussagen demonstrieren wir an ein paar Beispielen.

Quadratzahlen

Im Zahlenpaar (x, y) seien x und y ganze Zahlen. Die Summe $x^2 + 2xy + y^2$ ist wegen $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ stets eine Quadratzahl.

Daher liegt folgende Behauptung A nahe:

A : **Es gibt kein** Zahlenpaar (x, y) mit ganzen Zahlen x, y , für das die Summe $x^2 + 3xy + y^2$ eine Quadratzahl ist.

Es lohnt sich nicht, nach einem Beweis von A zu suchen. Denn mit ein wenig Geduld findet man ein Gegenbeispiel (x, y) mit $x = 3, y = 7$ für A .

Es ist nämlich $3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 7 + 7^2 = 11^2$.

Somit gilt

$\neg A$: Es gibt **mindestens ein** (= nicht kein) ganzzahliges Paar (x, y) , so dass $x^2 + 3xy + y^2$ eine Quadratzahl ist.

Aus der Wahrheit von $\neg A$ folgt, dass A falsch sein muss und somit A widerlegt ist.

Polignacs Behauptung

A. de Polignac stellte 1848 die Behauptung auf:

B : **Es gibt nur eine einzige** ungerade Zahl zwischen 4 und $3 \cdot 10^6$, nämlich 959, die sich nicht als eine Summe $p + 2^n$, p eine Primzahl und $n \geq 1$, schreiben lässt.

Es ist nicht nötig, für alle Zahlen z , $4 < z < 3 \cdot 10^6$, $z \neq 959$, nach einer Darstellung $z = p + 2^n$ zu suchen (z.B. mit einem Computer). Untersucht man nämlich der Reihe nach die Differenzen $127 - 2^n$, $1 \leq n \leq 6$, so ist keine dieser Zahlen eine Primzahl.

Damit ist 127 ein Gegenbeispiel für B ; es gilt also $\neg B$, und das zeigt, dass B falsch ist.

Hegels Irrtum

G. W. F. Hegel (1770–1831), der große Philosoph und Logiker, „bewies“ 1809 in seiner Arbeit „De orbitis planetarum“ (Über die Umlaufbahn der Planeten) zur Erlangung eines Univeritätslehrstuhls die Behauptung

B : **Es gibt nur** (die damals bekannten) **sieben** Planeten.

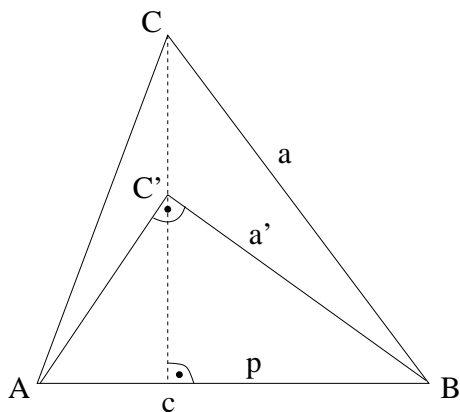
Hegels Beweis von B muss falsch sein, denn 45 Jahre später wurde B durch ein erstes Gegenbeispiel widerlegt:

J. G. Galle (Berlin) entdeckte 1848 einen achten Planeten, den Neptun, dem 1930 ein weiteres Gegenbeispiel, der von C. W. Tombaugh gefundene neunte Planet Pluto, folgte.

Ein neuer Kathetensatz

Im Dreieck ABC (vgl. Figur) sei p die Länge der orthogonalen Projektion der Seite BC mit $|BC| = a$ auf die Seite AB mit $|AB| = c$.

Behauptung C : **Für alle** Dreiecke ABC mit der Basis AB gilt: $a^2 = c \cdot p$.



Es ist überflüssig, nach einem Beweis für C zu suchen, denn es gibt unendlich viele Gegenbeispiele für C , von denen bereits eines genügt, um C zu widerlegen.

Für das rechtwinklige Dreieck ABC' gilt zunächst tatsächlich wie behauptet: $(a')^2 = c \cdot p$ (Kathetensatz).

Für ein anderes Dreieck ABC mit z.B. $a > a'$ ist jedoch: $a^2 > (a')^2 = c \cdot p$, also $a^2 > c \cdot p$, womit C widerlegt ist.

Paradox ist ...

... wenn der Lehrer mit einem spitzen Bleistift einen stumpfen Winkel zeichnet.

(Nach K. Krainer: „Gewinkeltes“)

42. Mathematik-Olympiade 2002/2003 – Bundesrunde

Einer der Koordinatoren der Mathematik-Olympiaden ist StD Wilfried Heuser aus Trier, zuständig für die Klassenstufen 9 und 10. Er teilt uns mit:

„Vom 22. bis 25. Juni 2003 nahm unsere Landesdelegation an der Bundesrunde der Mathematik-Olympiade 2003 in Bremen teil. Die Mitglieder kommen aus dem Teilnehmerkreis der 3. Runde des Mathematikwettbewerbs Rheinland-Pfalz und haben sich in einem zusätzlichen Auswahlverfahren qualifiziert. Sie haben ein großes Potential, aber ein erhebliches Erfahrungsdefizit: Die Teilnehmenden aus den neuen und einigen alten Bundesländern haben die Möglichkeit, ab Klasse 5 in jedem Jahr 3 oder 4 Stufen der Olympiade zu durchlaufen und besitzen dadurch eine enorme Erfahrung mit Wettbewerbsklausuren, während rheinland-pfälzische Olympioniken im Rahmen des Landeswettbewerbs nur einmal in der 8. Klasse eine Wettbewerbsklausur geschrieben haben. Unter diesen Umständen haben wir mit einem dritten Preis für **Martin Montag**, Klasse 11 (Peter-Wust-Gymnasium Wittlich), und Anerkennungen für **Kerstin Bauer**, Klasse 13, und **Maximilian Merkert**, Klasse 9 (beide Hohenzollern-Gymnasium Kaiserslautern) ein achtbares Ergebnis erzielt. Besonders erfreulich ist, dass Maximilian Merkert zusätzlich mit einem Sonderpreis für eine herausragende Problemlösung ausgezeichnet wurde.“

Hier nun die Sonderpreisaufgabe und die Lösung von Maximilian Merkert:

Aufgabe 420946 (Klasse 9, 2. Tag):

ABC sei ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden durch A mit der Seite BC . Ferner seien folgende Bezeichnungen gewählt:

$$|AB| = c, \quad |AC| = b, \quad |AD| = w, \quad |BD| = v, \quad |CD| = u.$$

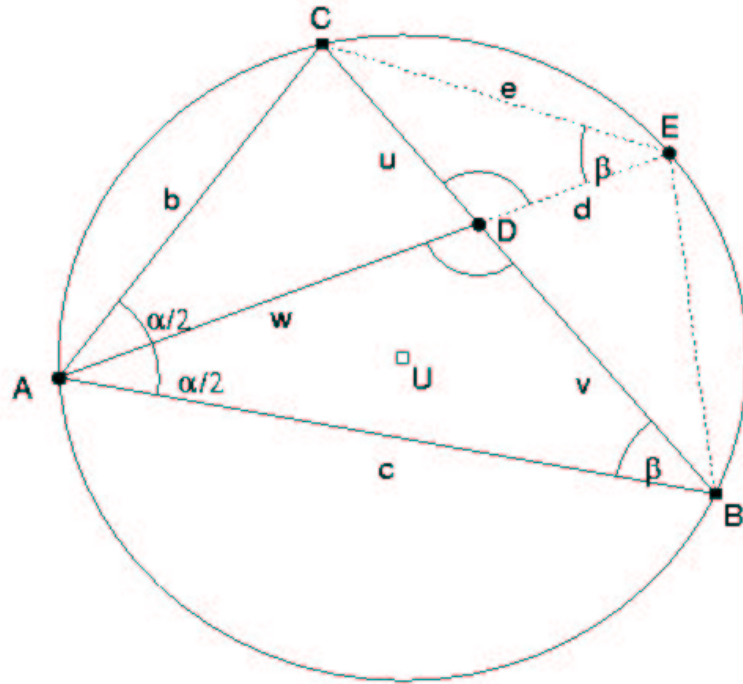
Zeigen Sie, dass dann $w^2 = (b + u)(c - v)$ gilt.

Lösung (Maximilian Merkert, Hohenstaufen–Gymnasium Kaiserslautern):

Ich habe den Umkreismittelpunkt (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) und den Umkreis des Dreiecks ABC konstruiert. Den Umkreismittelpunkt habe ich U genannt, den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Umkreis E , die Strecke $|DE|$ d und die Strecke $|EC|$ e (siehe Abbildung).

Nach dem Peripheriewinkelsatz ($ABEC$ ist ein Sehnenviereck) sind die Winkel $\beta = \angle(CBA)$ und $\angle(CEA)$ gleich groß.

- (1) Die Dreiecke ABD und AEC haben 2 gleiche Winkel ($\alpha/2$ und β) und sind somit ähnlich.
- (2) Außerdem sind auch die Dreiecke ABD und DEC ähnlich (gemeinsamer Winkel β , und die an D grenzenden Winkel sind gleich groß, weil sie Scheitelwinkel sind).



Es gilt wegen (1):

$$\frac{b}{w} = \frac{w+d}{c}$$

Und es gilt wegen (2):

$$\frac{u}{d} = \frac{w}{v} \quad | \cdot vd \Rightarrow uv = wd \quad | : w \Rightarrow \frac{uv}{w} = d.$$

Der Wert $\frac{uv}{w}$ wird nun für d in die obere Gleichung eingesetzt:

$$\frac{b}{w} = \frac{w + (uv/w)}{c} \quad | \cdot wc \Rightarrow bc = w^2 + uv \quad | - uv \Rightarrow bc - uv = w^2.$$

Wegen (1) gilt außerdem:

$$\frac{b}{e} = \frac{w}{v} \quad | \cdot ev \Rightarrow bv = we \quad | : w \Rightarrow \frac{bv}{w} = e.$$

Wegen (2) gilt:

$$\frac{e}{c} = \frac{d}{v}.$$

Für e wird nun der Wert $\frac{bv}{w}$ und für d der Wert $\frac{uv}{w}$ (s.o.) in die Gleichung eingesetzt:

$$\frac{(bv/w)}{c} = \frac{(uv/w)}{v} \quad | \cdot w \Rightarrow \frac{bv}{c} = \frac{uv}{v} \Rightarrow \frac{bv}{c} = u \quad | \cdot c$$

$$\Rightarrow bv = uc \quad | - bv \Rightarrow 0 = uc - bv.$$

Das wird in die Gleichung $bc - uv = w^2$ (s.o.) eingesetzt:

$$\Rightarrow bc - uv + (uc - bv) = w^2$$

$$\Rightarrow bc - bv + uc - uv = w^2$$

$$\Rightarrow b(c - v) + u(c - v) = w^2$$

$$\Rightarrow (b + u)(c - v) = w^2$$

q.e.d.



RoboCup

von Christian Meyer



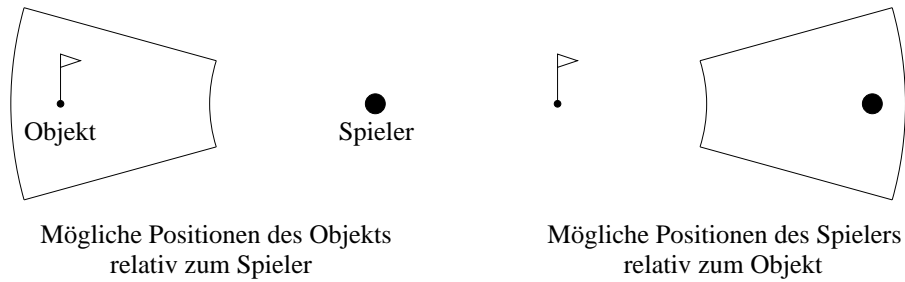
Seit 1997 findet einmal im Jahr die Weltmeisterschaft im Roboterfußball, genannt RoboCup, statt, an der Teams von Universitäten aus der ganzen Welt teilnehmen. Es gibt verschiedene Ligen: In der *Small Size League* spielen Roboter mit einem Durchmesser von etwa 10 cm auf einem Feld von der Größe einer Tischtennisplatte. In der *Middle Size League* sind die Roboter schon etwa 50 cm groß und das Spielfeld etwa 6 Meter lang. In der *Sony Legged League* spielen die Roboterhunde *Aibo* von Sony, die man auch als „elektronisches Haustier“ kaufen kann. In all diesen Ligen besteht ein Team aus drei bis fünf Robotern. Natürlich wäre es schön, mit 11 Robotern zu spielen, aber das wäre natürlich sehr viel aufwändiger und teurer. Damit trotzdem „richtiger“ Fußball gespielt werden kann, gibt es schließlich noch die *Simulation League*. Hier spielen keine „echten“ Roboter, sondern sie werden im Computer simuliert. Ein Spiel kann man sich dann auf dem Bildschirm anschauen. Dabei könnte man leicht den Eindruck bekommen, dass man so etwas ähnliches wie ein Computerspiel vor sich hat. Das ist aber nicht der Fall! Jeder simulierte Roboter ist ein eigenes Computerprogramm und muss seine eigenen Entscheidungen treffen, während bei modernen Fußball-Computerspielen nur ein Programm alle Spieler wie Marionetten bewegt.

Warum möchte man überhaupt mit Robotern Fußball spielen? Das ist natürlich nicht das eigentliche Ziel! Es gibt aber viele wichtige Aufgaben für autonome (das heißt selbständig entscheidende) Roboter, die man nur ungern von Menschen durchführen lassen möchte, zum Beispiel das Räumen von Minenfeldern, die Reinigung von Abwasserkanälen oder Bergung von Verschütteten in Erdbebengebieten. Man hat jetzt zunächst einmal Fußball als Testfeld gewählt, weil man dabei sehr gut Techniken zur Kommunikation der Roboter untereinander entwickeln kann und die zu lösenden Probleme im Wesentlichen die gleichen sind wie bei den oben genannten Aufgaben (zum Beispiel Bestimmen des eigenen Standorts, Finden der Teammitglieder, Kommunikation, Planung und Strategie). Fußball hat darüber hinaus Wettbewerbscharakter: Es ist einfach zu sehen, wer von zwei Teams das bessere ist, nämlich der Gewinner! Außerdem macht es natürlich Spaß!

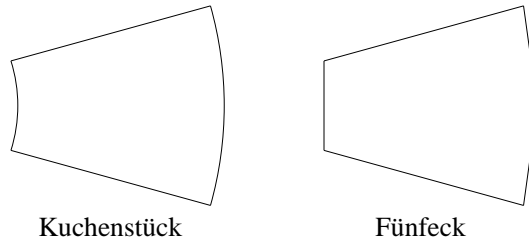
Am Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz gibt es seit 1998 ein Team, das in der Simulationsliga mitspielt, die *Mainz Rolling Brains*. Wir haben seitdem an allen Weltmeisterschaften (in Paris, Stockholm, Melbourne, Seattle, Fukuoka und Padua) und seit 2001 auch an den German Open in Paderborn teilgenommen. Die Teammitglieder sind Studenten und Mitarbeiter, die zusätzlich zu ihren normalen Aufgaben am Team arbeiten. In der Informatik in Mainz wird RoboCup außerdem als wichtige „Testplattform“ für die aktuelle Forschung eingesetzt.

Um einen Eindruck von den bei RoboCup zu lösenden Aufgaben zu bekommen, wollen wir jetzt noch ein Problem untersuchen, das sich in der Simulationsliga stellt, nämlich die Bestimmung des eigenen Standortes auf dem Feld. Ein Spieler hat sozusagen „Augen“, das heißt, er bekommt mitgeteilt, welche Objekte er in welcher Entfernung und unter welchem Winkel sieht. Dabei sind beide Angaben aber sehr ungenau, und zwar um so ungenauer, je weiter das Objekt entfernt ist. Der Spieler kann also, wenn er ein Objekt sieht (zum Beispiel den Ball), dessen Lage relativ zu ihm nur auf ein

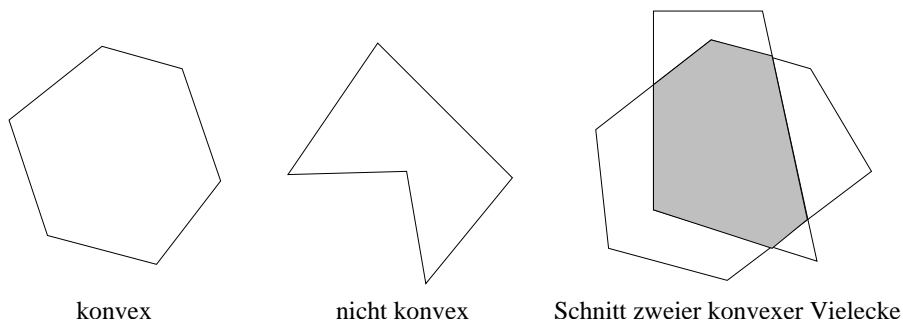
„abgebissenes Kuchenstück“ eingrenzen. Kennt er aber umgekehrt die genaue Lage des Objekts (zum Beispiel, weil das Objekt unbeweglich ist, wie etwa die Eckfahnen oder die Torpfosten), kann er seine eigene Position bis auf ein solches „Kuchenstück“ einschätzen. Im Bild sieht man diese Situation dargestellt.



Sieht der Spieler mehr als ein unbewegliches Objekt (was meistens der Fall ist, da es relativ viele Fahnen am Spielfeldrand gibt), so kann er jedem dieser Objekte ein „Kuchenstück“ zuordnen, in dem seine eigene Position liegen muss. Also liegt seine Position im Durchschnitt aller Kuchenstücke, und wenn dieser Durchschnitt klein ist, kann der Spieler seine Position ziemlich genau bestimmen. Aber wie berechnet man den Durchschnitt? Dazu kann man ein Kuchenstück durch ein Fünfeck annähern.



Dieses Fünfeck ist *konvex*, das heißt, zu je zwei Punkten in seinem Inneren liegt auch die Verbindungslinie wieder im Fünfeck. Wenn man zwei konvexe Vielecke schneidet, bekommt man wieder ein konvexes Vieleck. (Der Beweis ist einfach: Seien A und B die beiden Vielecke, und seien x und y zwei Punkte aus dem Durchschnitt $A \cap B$. Weil x und y auch in A liegen, ist die Verbindungslinie zwischen ihnen auch in A enthalten, weil A konvex ist. Weil auch B konvex ist, liegt sie auch in B , also auch in $A \cap B$. Also ist $A \cap B$ konvex.)



Jetzt benötigt man „nur“ noch eine Methode, den Durchschnitt zweier konvexer Vielecke (mit dem Computer) zu berechnen, und kann dann nach und nach alle Vielecke miteinander schneiden.

Wer sich näher über RoboCup informieren (und Bilder der Roboter sehen) möchte, kann dies im Internet unter www.robocup.de tun. Die Homepage der Mainz Rolling Brains ist www.rollingbrains.de. Man kann sich auch Spiele der Simulationsliga von 2003 anschauen. Die Adresse ist www.uni-koblenz.de/~fruit/orga/rc03/. Dazu benötigt man den Macromedia Flash Player.

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 2.6.2003)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:

Kl. 5: Laura Brückbauer 8, Jonathan Peters 10, Lisa Simon 7, Joscha Wagner 9, Osan Ylmaz 4;

Kl. 6: Sandra Erat 9, Dorothee Fister 22, Claudia Heiss 16, Daniela Hottenbacher 7, Sina Lelle 7, Johanna Mees 19, Kristina Müller 11, Vanessa Nagel 18, Sabine Oßwalt 24, Franziska Schmitt 16, Annett Stellwagen 20, Vanessa Stübchen 5;

Kl. 7: Patricia Kastner 21, Johannes Merz 51;

Kl. 8: Markus Bassermann 31, Meike Fluhr 14;

Kl. 10: Marc Schöfer 8;

Kl. 11: Manuel Ross 42;

Kl. 13: Aaron Breivogel 18.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:

Kl. 6: Johannes Fiebig 24, Felix Liebrich 45, Lisa Mettler 36, Carolin Morlock 10, Nina Rein 4, Susanne Rogge 8, Inga Wellstein 13, Rebecca Zimmer 37;

Kl. 9: Marc Rein 7;

Kl. 10: Gregor Dschung 21.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):

Kl. 6: Thomas Geiß 48;

Kl. 9: Lorenz Diener 32, Jens Palkowitsch 7, Stefan Tran 75.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 7: Christian Behrens 39.

Bingen, Hildegardis-Gymnasium: Kl. 5: Katharina Kirsch 25.

Bingen, Stefan-George-Gymnasium: Kl. 7: Johann Kirsch 25.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):

Kl. 7: Marco Eifert 4, Manuel Giebel 8, Vanessa Lenk 7, Anna-Lena Litz 4, Maximilian Michel 14, Christian Munkel 27, Sophia Nophut 3, Laura Wiegand 4;

Kl. 8: Simon Frydrych 5.

Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 4: Laura Mettler 27.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):

Kl. 5: Emine Isikhan 2, Tatjana Meudt 3;

Kl. 7: Lutz Brozsio 1;

Kl. 8: Corina Czarnrtzki 5, Katharina Dahlem 1, Julia Dick 7, Cornelius Doll 1, Christina Gonera 4, Theresia Krischke 1, Thomas Pahl 5, Phillip Ries 7, Christopher Schmitt 3, Nils Schaa 1, Christopher Schnee 1, Jonas Weyer 1.

Halberstadt: Kl. 6: Robert Hesse 16.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (Betreuender Lehrer Gerd Weber):

Kl. 10: Sarah Sherif 8.

Kaiserslautern, Burggymnasium:

Kl. 8: Eduard Bierich 3, Stefan Bohnert 3, Kerstin Bonfice 3, Simon Gockel 1, Daniela Jung 3, Christian Klingkowski 3, Carolin Leppla 3, Vladimir Paska 1,

Tobias Porr 3, Christoph Raum 1, Nicole Reinartz 3, Nathalie Swords 3, Anna Weber 3, Anna Woskoboynikow 3, Jonathan Zorner 3.

Kelkheim/Taunus, Eichendorfschule (Betreuender Lehrer Herr Marsen):

KI. 7: Clarissa Dux 13, Pascal Freund 10, Franziska Löw 6, Isabell Peyman 15, Sonja Sauckel-Plock 22, Anne-Marie Schwörer 9, Viola Sommer 4.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium (Betreuender Lehrer David Brungs):

KI. 6: Marius Rackwitz 3.

Landau, Max-Slevogt-Gymnasium: KI. 9: Christina Flörsch 9.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:

KI. 7: Katharina Kober 36; **KI. 8:** Christoph Karg 16;

KI. 9: Judith Reinhardt 24, Adriana Spalwicz 19.

Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: KI. 12: Steffen Biallas 44.

Magdeburg: KI. 7: Saskia Thiele 8.

Mainz, Gutenberg-Gymnasium: KI. 11: Moritz Priesterroth 15.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):

KI. 7: Regina Friedmann 9, Natalie Geiß 28, Julia Heeß 16, Helena Schweizer 16.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

KI. 5: Saya Fukuda 6, Madeline Kohlhaas 37, Isabelle Lau 5;

KI. 6: Hannah Rautenberg 5;

KI. 7: Annika Kohlhaas 45, Miriam Menzel 22;

KI. 8: Annika Sonnenberg 36, Stefanie Tiemann 72.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger): KI. 7: Martin Jöhlinger 30.

Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):

KI. 5: Max Behrent 5, Larissa Habel 26, Patricia Kuther 4, Patricia Limpert 7, Sarah Rosengarten 16, Katrin Schlemm 12, Sophia Waldvogel 7, Valentin Walther 5;

KI. 6: Carolin Dossmann 14, Elham Quiami 8, Katarina Radenovic 14, Marco Radenovic 13, Daniela Schüler 6, Annkatrin Weber 31;

KI. 7: Stefan Albert 25; **KI. 8:** Julian Scherr 4; **KI. 9:** Simon Bats 36.

Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium: KI. 11: Alexander Hillert 53.

Siegburg, Anno-Gymnasium: KI. 6: Michael Kißener 8; **KI. 7:** Franziska Groß 11; **KI. 9:** Jan B. Boscheinen 34.

Speyer, Friedrich-Magnus-Schwerd Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Karman):

KI. 7: Oliver Queisser 15, Benjamin Schuler 20.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):

KI. 5: Sarah Breunich 15, Lisa Engel 10, Rebecca Gehm 13, Louisa Linn 11, Jonathan Orschiedt 5, Sophie Schäfer 1, Lisa Schwarz 4;

KI. 6: Katharina Dietz 6, Kuroschi Habibi 12, Carolin Roßbach 7, Charlotte Schitter 9, Pascal Stichler 11;

KI. 7: Julia Jung 21, Sarah Tröbs 41;

KI.10: Verena Prägert 30.

Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium:

KI. 8: Christine Biedinger 8; **KI. 11:** Catherina Wirtz 25.

Inhalt

An die Le(ö)ser	2
Martin Mettler: Ein Ausflug in die Welt der großen Zahlen	3
Hartwig Fuchs: Was ist Tristram Shandy's Paradoxie?	4
Hartwig Fuchs: Zyklische geometrische Konstruktionen	6
Hartwig Fuchs: Mittlerer Abstand und mittlere Größe von Primzahlen	9
Mitteilungen von Herausgeber und Redaktion	11
Mathis machen mathematische Entdeckungen	12
Die Seite für den Computer-Fan	14
Mathis' Olympiade	15
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 74	16
Neue Mathespielereien	19
Neue Aufgaben	21
Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 74	23
Wer forscht mit?	28
Attila Furdek: Wo steckt der Fehler?	29
Martin Mettler: Die Funktion $f(x) = 10 \cdot e^{-x/10} \cdot \sin x$	30
Hartwig Fuchs: Widerlegung quantifizierter Aussagen.	32
42. Mathematik-Olympiade 2002/2003 - Bundesrunde	34
Christian Meyer: RoboCup	36
Rubrik der Löser(innen)/ Stand 15.2.2002	38

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

Mitglieder: Dr. Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr. Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Ehrenmitglied: Martin Mettler

Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Meike Fluhr, Armin Holschbach, Felix Liebrich, Isabelle Merker, Manuel Ross und Rebecca Zimmer

Korrekturen und Layout: Katrin Elter **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen.**

Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

**Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.**

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz,
55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389

e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>