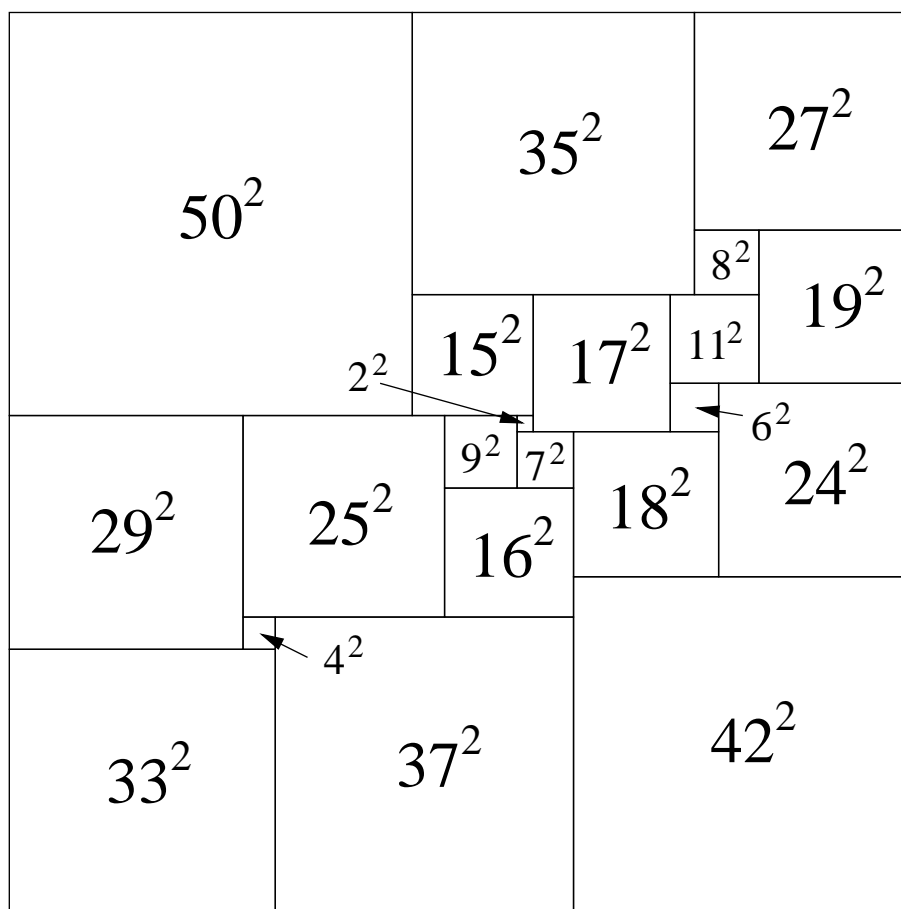


MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen

1980 begründet von Martin Mettler;

seit 2001 herausgegeben vom

Fachbereich Mathematik und Informatik

der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein





Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer *nur eine oder Teile einzelner Aufgaben* lösen kann, sollte teilnehmen; **der Gewinn eines Preises** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (**mit Lösungsweg!**) zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.) Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der
31.8. 2003.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

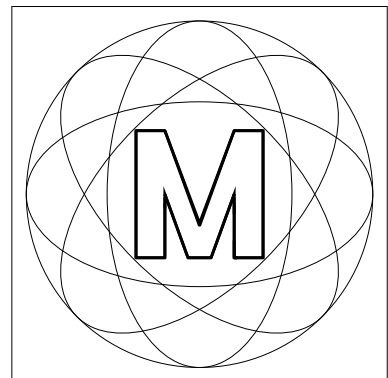
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M

Außer der Medaille mit dem goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHE-SPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion



Ein Wunderkind?

Ein Beitrag für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5-6) von Martin Mettler

Felix rühmt sich, auf Anhieb die dritte Wurzel aller Kubikzahlen bis zu 1 000 000 nennen zu können. Ist er deswegen ein Wunderkind?

Um eine Antwort zu geben, wollen wir uns die Sache mal näher anschauen:

1; 8; 27; 64; 125; 216; ... ; 1728 sind Kubikzahlen, weil

$1^3 = 1$	$4^3 = 64$	$7^3 = 343$	$10^3 = 1000$
$2^3 = 8$	$5^3 = 125$	$8^3 = 512$	$11^3 = 1331$
$3^3 = 27$	$6^3 = 216$	$9^3 = 729$	$12^3 = 1728 \dots$

Man schreibt auch $\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2^3 = 8$ ist; $\sqrt[3]{27} = 3$, weil $3^3 = 27$ ist. Genauso gilt $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{729} = 9$ und $\sqrt[3]{1728} = 12$.

Man liest dies so: „Die dritte Wurzel aus 8 ist 2; ... ; die dritte Wurzel aus 1 728 ist 12.“

Wir bemerken:

Die Kubikzahlen der einstelligen Zahlen (von 1 bis 9) sind höchstens dreistellig.

Aus den ersten 9 Beispielen ist zu ersehen, dass jede dieser Kubikzahlen eine andere Endziffer hat. Bei 1; 4; 5; 6 und 9 stimmt die Endziffer der Kubikzahl mit der Zahl überein.

Bei 2; 3; 7; 8 sind die Endziffern 8; 7; 3; 2. Diese Kombination muss sich das „Wunderkind“ allerdings merken.

Zur Bestimmung der dritten Wurzel von Zahlen mit höchstens drei Stellen, muss das „Wunderkind“ also nur auf die Endziffer der Kubikzahl schauen.

Die Kubikzahlen der zweistelligen Zahlen (von 10 bis 99) sind mindestens vierstellig und höchstens sechsstellig.

Bei Kubikzahlen mit mehr als drei Stellen geht Felix folgendermaßen vor:

Um die **Endziffer der dritten Wurzel** nennen zu können, schaut er auf die Endstelle der Kubikzahl.

Wenn zum Beispiel die letzte Stelle eine 3 ist, so ist die Endziffer der dritten Wurzel 7; ist die Endstelle der Kubikzahl 4, so ist auch die Endstelle der dritten Wurzel 4, usw.

Es ist $52^3 = 140\,608$, oder $\sqrt[3]{140\,608} = 52$.

Aus $125\,000 < 140\,608 < 216\,000$ d.h. $50^3 < 52^3 < 60^3$ folgt $50 < 52 < 60$.

Man sieht: Um die **erste** Ziffer der dritten Wurzel zu bestimmen, ist es zweckmäßig, die drei letzten Stellen der Kubikzahl wegzulassen und nachzuschauen, in welchem Bereich die übrige Zahl liegt. Drei Beispiele:

- a) Die Kubikzahl heiÙe 68 921. Die Endziffer der dritten Wurzel ist 1. Lassen wir die drei letzten Stellen weg, so erhalten wir die Zahl 68. Diese Zahl liegt zwischen $64 = 4^3$ und $125 = 5^3$.

Also ist die erste Stelle der dritten Wurzel 4. Die dritte Wurzel ist somit 41.

- b) Die Kubikzahl heiÙe 804 357. Die Endziffer der dritten Wurzel ist 3. Lassen wir die drei letzten Stellen weg, so erhalten wir die Zahl 804. Diese Zahl liegt zwischen $729 = 9^3$ und $1000 = 10^3$.

Also ist die erste Stelle der dritten Wurzel 9. Die dritte Wurzel ist somit 93.

- c) Die Kubikzahl heie 13 824. Die Endziffer der dritten Wurzel ist 4. Lassen wir die drei letzten Stellen weg, so erhalten wir die Zahl 13. Diese Zahl liegt zwischen $8 = 2^3$ und $27 = 3^3$.

Also ist die erste Stelle der dritten Wurzel 2. Die dritte Wurzel ist somit 24.

Damit können wir dich nun doch sicherlich auch zu den „Wunderkindern“ zählen?

Errata

- In MONOID-Heft Nr. 73, S.3, lautet die Lösung zur Frage „Wie viele Kaninchenpaare haben wir zu Jahresende?“ richtig so :

Am Anfang des 1. Monats (zu Jahresbeginn) haben wir 1 Paar.

Am Anfang des 2. Monats haben wir immer noch nur dieses Paar (a_1).

Am Anfang des 3. Monats haben wir 1 neugeborenes Paar, also insgesamt
 $2 = 1 + 1$ Paare (a_2).

Am Anfang des 4. Monats haben wir wiederum 1 neugeborenes Paar, also insgesamt
 $3 = 2 + 1$ Paare (a_3).

Am Anfang des 5. Monats haben wir 2 neugeborene Paare, also insgesamt
 $5 = 3 + 2$ Paare (a_4).

Am Anfang des 6. Monats haben wir 3 neugeborene Paare, also insgesamt
 $8 = 5 + 3$ Paare (a_5).

So fortfahrend, erhalten wir die Folge: 1 (Anfang 2. Monat), 2 (Anfang 3. Monat), 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 (Anfang des 12. Monats und damit am Ende des ersten Jahres).

Die Antwort muss also lauten: Zu Jahresende haben wir $a_{11} = 144$ Kaninchenpaare.

- In MONOID-Heft Nr. 73, S.5, lautet die 6. Zeile von unten richtig:

Für eine Zahl n mit k verschiedenen Primfaktoren, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ist die Anzahl der **Teiler**:

$$A(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

- In MONOID-Heft Nr. 72, Seite 17, ist in der Lösung zur Aufgabe **Gleichungspyramide** eine Ziffer zu viel angegeben. Es muss statt

$$1\ 111\ 111\ 111^2 = 12\ 345\ 678\ 900\ 987\ 654\ 321$$

$$1\ 111\ 111\ 111^2 = 1\ 234\ 567\ 900\ 987\ 654\ 321$$

heißen. Wir danken Frau Hanna Jöhlinger für diesen Hinweis.

„Aufgespiet“

Ausgerechnet Bücher sind einem Mathematik-Professor aus der kroatischen Hauptstadt Zagreb gefährlich geworden: Als der Mann vor Ostern ein Buch aus dem Regal nehmen wollte, stürzten zahlreiche weitere Exemplare auf ihn herab und klemmten ihn zwischen Bett und Regal ein. Drei Tage lang rief der Gefangene um Hilfe, ehe ihn die Nachbarn hrten. Der Professor konnte ohne Verletzungen, aber erschöpft, da er die ganze Zeit nicht getrunken und gegessen hatte, geborgen werden.

(Frankfurter Allgemeine Zeitung, Ostern 2003)

Über Teilersummen und vollkommene Zahlen

von Ekkehard Kroll

Im MONOID-Heft Nr. 73 berichtete M. Mettler über die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n . Neben der Teileranzahl interessiert aber auch die Summe der (positiven) Teiler von n , symbolisch ausgedrückt mit der Teilersummenfunktion σ (lies: sigma):

$$\sigma(n) := \sum_{t|n} t$$

So ist $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 7, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 12, \sigma(7) = 8$; generell gilt $\sigma(p) = p + 1$ für alle Primzahlen p . Auffällig ist der Fall $n = 6$; hier ergibt sich als Teilersumme von n das Doppelte von n ; lassen wir n als trivialen Teiler von sich selbst bei der Summation weg, so ist 6 die Summe seiner echten Teiler. Natürliche Zahlen mit dieser Eigenschaft heißen „vollkommen“:

Definition: Eine natürliche Zahl n heißt **vollkommen**, wenn sie die Summe ihrer echten Teiler, also $\sigma(n) = 2 \cdot n$, ist.

Ein weiteres Beispiel ist die Zahl 28:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Die nächsten beiden vollkommenen Zahlen sind 496 und 8128. Es fällt auf, dass diese Zahlen schon recht groß und gerade sind. Tatsächlich kennt man bis heute keine ungerade vollkommene Zahl. Vermutlich gibt es keine.

Dagegen kann man die geraden vollkommenen Zahlen mit Hilfe der Mersenneschen Primzahlen charakterisieren. Bereits Euklid bewies, dass jede Zahl von der Form

$$2^{p-1} \cdot (2^p - 1),$$

wobei $2^p - 1$ und folglich auch p eine Primzahl ist, vollkommen ist. Umgekehrt hat Leonhard Euler gezeigt, dass jede gerade vollkommene Zahl tatsächlich von dieser Form sein muss. Primzahlen der Form $2^p - 1$ heißen **Mersennesche Primzahlen** nach dem französischen Mathematiker und Musiktheoretiker Marin Mersenne (1588- 1648). Die ersten Mersenneschen Primzahlen sind 3, 7, 31, 127. Die zugehörigen vollkommenen Zahlen sind die schon erwähnten Zahlen 6, 28, 496 und 8128. Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Mersennesche Primzahlen gibt; damit ist auch nicht bekannt, ob es unendlich viele vollkommene Zahlen gibt. Auch wenn p eine Primzahl ist – davon gibt es zwar unendlich viele, wie schon Euklid bewies – braucht nämlich $2^p - 1$ dennoch keine Primzahl zu sein: So ist zum Beispiel $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, also eine aus zwei Primzahlen zusammengesetzte Zahl.

Satz: Eine gerade natürliche Zahl n ist genau dann vollkommen, wenn sie eine Darstellung der Form

$$n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

besitzt, wobei p und $2^p - 1$ Primzahlen sind.

Beweis:

(1) Es sei zunächst vorausgesetzt, dass $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ ist mit Primzahlen p und $2^p - 1$. Die Teiler von n sind dann die Zahlen $1, 2, 2^2, \dots, 2^{p-1}$ und die Zahlen $2^p - 1, 2 \cdot (2^p - 1), 2^2 \cdot (2^p - 1), \dots, 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Also ist

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1} + (2^p - 1) + 2 \cdot (2^p - 1) + \dots + 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = \\ &= (1 + 2^p - 1) \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}) = \\ &= 2^p \cdot (2^p - 1) = \\ &= 2 \cdot 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) = 2 \cdot n,\end{aligned}$$

wobei für die geometrische Reihe $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}$ die Formel

$$1 + q + q^2 + \dots + q^m = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

benutzt wurde.

Zahlen der Form $2^{p-1}(2^p - 1)$ mit Primzahlen p sind wegen $p \geq 2$ zwangsläufig gerade.

(2) Sei nun umgekehrt n eine gerade vollkommene Zahl. Dann wird n von 2 geteilt. Spalten wir die höchste in n als Faktor steckende Zweierpotenz, etwa 2^r , ab, so verbleibt als Komplementärteiler eine ungerade Zahl u . Es ist also

$$n = 2^r \cdot u \quad \text{mit } r \geq 1.$$

Die Teiler von n sind dann die Zahlen $2^s \cdot t$, wobei $0 \leq s \leq r$ ist und t alle Teiler von u durchläuft. Zu jedem s liefert $2^s \cdot \sigma(u)$ den zu dieser Zweierpotenz gehörenden Anteil von $\sigma(n)$. Also ist

$$\sigma(n) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^r) \cdot \sigma(u) = (2^{r+1} - 1) \cdot \sigma(u).$$

Da n als vollkommen vorausgesetzt wurde, gilt andererseits

$$\sigma(n) = 2 \cdot n = 2^{r+1} \cdot u.$$

Setzen wir beide Ergebnisse für $\sigma(n)$ gleich, so folgt:

$$(2^{r+1} - 1) \cdot \sigma(u) = 2^{r+1} \cdot u.$$

Da u und $2^{r+1} - 1$ ungerade sind, ist 2^{r+1} die genaue Zweierpotenz, die als Faktor in $\sigma(u)$ steckt. Also können wir $\sigma(u) = 2^{r+1} \cdot v$ mit ungeradem v setzen. Daraus folgt $u = (2^{r+1} - 1) \cdot v$. Wegen $2^{r+1} - 1 > 1$ sind v und $(2^{r+1} - 1) \cdot v$ schon mal zwei verschiedene Teiler von u . Ihre Summe ergibt bereits $2^{r+1} \cdot v = \sigma(u)$, also kann u keine weiteren Teiler besitzen. Daher ist $v = 1$ und $2^{r+1} - 1 = u$, wobei $2^{r+1} - 1$ eine Primzahl sein muss. Dies erfordert, dass auch der Exponent $r + 1$ selbst eine Primzahl ist; denn hätte dieser, der ja größer 1 ist, eine Zerlegung $r + 1 = a \cdot b$, in natürliche Zahlen a und b , beide größer als 1, so folgte die nicht triviale Zerlegung

$$2^{r+1} - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1),$$

und $2^{r+1} - 1$ wäre keine Primzahl. Setzen wir abschließend noch $p := r + 1$, so ist alles bewiesen.

Paulo Ribenboim stellt in seinem Buch „The **New** Book of Prime Number Records“ (Springer-Verlag New York 1996) eine Liste von 33 bekannten Primzahlen p vor, für welche die Mersenne-Zahlen $M_p = 2^p - 1$ Primzahlen sind, ergänzt durch ihre Entdecker und das Jahr der Entdeckung, das letzte 1993 mit $p = 859433$; die zugehörige Mersennesche Primzahl hat 258716 Ziffern. Wer schätzt die Stellenanzahl der entsprechenden vollkommenen Zahl ab?

Vier berühmte Konstruktionsaufgaben

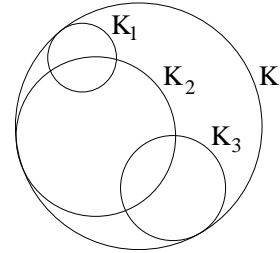
– eine Seite geometrischer Knobeleyen –

von Hartwig Fuchs

Die folgenden Konstruktionsaufgaben sollen allein mit Zirkel und unmarkiertem Lineal ausgeführt werden. Wir hoffen, dass wir viele Lösungen (also Konstruktionsbeschreibungen) erhalten – die jeweils schönste bzw. kürzeste wird in MONOID veröffentlicht.

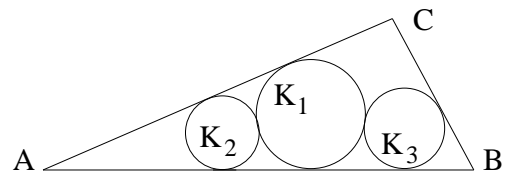
Das Problem des Apollonius (etwa 260-190 v.Chr.)

Gegeben seien drei Kreise K_1, K_2, K_3 in beliebiger Lage zueinander, z.B. so wie in der Figur. Zeichne einen Kreis K , der K_1, K_2 und K_3 berührt.



Das Problem von G.F. Malfatti (1731-1807)

Gegeben sei ein Dreieck ABC . Zeichne drei Kreise K_1, K_2, K_3 im Inneren von ABC , von denen jeder zwei Dreiecksseiten und mindestens einen der übrigen zwei Kreise berührt (vgl. Figur).

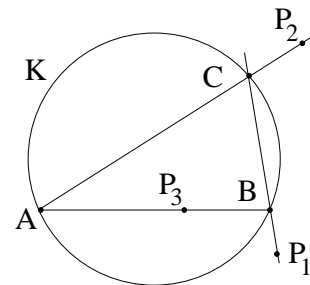


Das Problem von J. Castillon (1704-1791) und G. Cramer (1796-1863)

Gegeben seien ein Kreis K und drei Punkte P_1, P_2, P_3 , von denen keiner auf K liege.

Schreibe dem Kreis K ein Dreieck ABC so ein, dass gilt:

Alle Eckpunkte A, B und C liegen auf K , und die Geraden durch BC , durch CA , durch AB verlaufen durch P_1 bzw. durch P_2 bzw. durch P_3 (vgl. Figur).

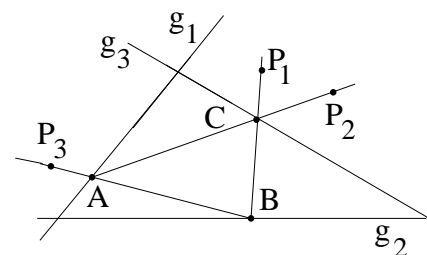


Das Problem von J. Steiner (1796-1863)

Gegeben seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 und drei Punkte P_1, P_2, P_3 , von denen keiner auf einer der drei Geraden liege.

Zeichne ein Dreieck ABC so, dass gilt:

A liegt auf g_1 , B liegt auf g_2 , C liegt auf g_3 , und die Geraden durch BC , durch CA , durch AB verlaufen durch P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 (vgl. Figur).



Heuristische Problemlösestrategien

von Jörg Wittlinger

Einleitung

Das Lösen mathematischer Probleme verlangt nach kreativen Ideen, setzt aber ebenso das durch ausdauernde Übung zu erlangende Beherrschen der erforderlichen Techniken und Kenntnisse voraus. Als Vermittler dieser antagonistisch anmutenden Fähigkeiten treten heuristische Problemlösestrategien in Erscheinung, die oftmals – trotz oder gerade der Einfachheit ihrer Prinzipien halber – einen ersten Ansatz und eleganten Lösungsweg ermöglichen.

Nachstehend sollen zur Exemplifikation möglicher Strategien drei nützliche Prinzipien anhand jeweils eines, in der ein oder anderen Form dem geneigten Leser vielleicht geläufigen, Problems kurz vorgestellt werden.

Das Schubfachprinzip

Seinen Namen verdankt dieses Prinzip der ersten bekannten expliziten Formulierung durch *P. G. L. Dirichlet* (1805–1859): *Legt man $n + 1$ Perlen in n Schubfächer, so befindet sich in wenigstens einem Schubfach mehr als eine Perle.*

Im Lichte dieser Erkenntnis betrachten wir die folgende Problemstellung aus der Feder unseres geschätzten Meisters: Einem Würfel der Kantenlänge 1 seien 126 Punkte beliebig einbeschrieben. Man weise nach, daß mindestens zwei dieser Punkte einen Abstand nicht größer als $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ voneinander besitzen.

Was zunächst vielleicht mühsame Arbeit erwarten läßt, entpuppt sich dem mit dem Schubfachprinzip ausgestatteten Le(ö)ser als Sturm im Wasserglas. Man stelle sich den Würfel der Kantenlänge 1 aus 125 Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{5}$ zusammengesetzt vor. Dann enthält wenigstens einer dieser Teilwürfel mehr als einen der einbeschriebenen Punkte. Nun entspricht der maximale Abstand zweier Punkte eines solchen Teilwürfels der Länge seiner Raumdiagonalen, mithin $\frac{1}{5}\sqrt{3}$.

Das Invarianzprinzip

Manchmal kann es nützlich sein, der unveränderlichen Größe – der *Invarianten* – einer Aufgabe besonderes Augenmerk zu schenken. So auch im nachfolgenden Beispiel: Eine Kiste Tomaten steht in der Sonne. Dabei reduziert sich der ursprüngliche Wasseranteil der Tomaten von 98 % auf nunmehr 96 %. Wieviel ihres Gesamtgewichtes haben die Tomaten eingebüßt?

Nur zu gerne würde man sich vielleicht auf die gegebenen Größen der relativen Wasseranteile stürzen ... und damit baden gehen. Denn diese beziehen sich auf unterschiedliche absolute Wasseranteile und stehen damit in keinem dienlichen Verhältnis zueinander. Unverändert aus der Strapaze hervorgegangen ist allerdings der absolute „feste“ Anteil der Tomaten, dessen Relation zum Gesamtgewicht sich von 2 % auf 4 % verdoppelt hat. Dementsprechend wiegen die Tomaten nur noch die Hälfte.

Das Symmetriezerschlagungsprinzip

So sehr den Mathematiker Symmetrien auch zu faszinieren vermögen, so kann es dennoch hilfreich sein, eine scheinbar bestehende *Symmetrie* gewaltsam zu *zerschlagen*: Unter der Voraussetzung, daß sich zwei Personen stets gegenseitig kennen oder gegenseitig fremd sind, weise man nach, daß sich unter sechs beliebig ausgewählten Menschen mindestens drei befinden, die sich kennen, oder mindestens drei befinden,

die sich fremd sind.

Wer nun vielleicht in der ebenmäßigen Betrachtung sein Glück versucht, schließlich zeichnet keinen der sechs etwas Besonderes aus, wird nur mühevoll den Erfolg finden. Also suchen wir uns ein armes Opfer und nennen es A. Dann befinden sich unter den verbliebenen fünf Personen mindestens drei, die A kennen, oder mindestens drei, denen A fremd ist. Im ersten Fall ist der Beweis geführt, wenn sich diese drei fremd sind, ansonsten kennen sich mindestens zwei davon und erfüllen mit A die Forderung, analog im zweiten Fall.

Wer hat es gemerkt? Wir haben uns nebenbei auch das Schubfachprinzip wieder zu-nutze gemacht.

Zusammenfassung

Es ist oft verblüffend, wie einfach es sein kann! Der ewige Zweifler würde vielleicht einwenden: Ja, wäre nur der rechte Trick schon vorher bekannt! Jedoch sind Zauberei und Hexenwerk gar nicht im Spiel, vielmehr existieren durchaus Strategien, die einen Zugang zu einem Problem ermöglichen können und in der Lage sind, das sprichwörtliche Herumstochern im Nebel einem gewonnenen Ansatz, mitunter sogar einem höchst eleganten Lösungsweg weichen zu lassen.

Dabei soll nicht verschwiegen werden, daß der Heuristik im Rahmen ihrer Problemlösestrategien noch weitere Prinzipien bekannt sind und nicht jedes Problem sein Geheimnis durch ihre alleinige Anwendung bereitwillig preisgibt. Dennoch verdienen sie ihren Platz im Rüstzeug des Problemlösers. So verliert gar manche Aufgabe ihren Schrecken und manche scheinbar vom Himmel fallende Lösung ihre überirdische Dimension: heureka!

Der Verfasser wünscht allen Lesern viel Spaß beim Ausprobieren und Entdecken!

* * * * *

Buchstabieren

a) Wie geht es weiter?

A E F H I
B C D G J

b) Wie könnte es noch weitergehen?

A E F H
B C D G

Lösung:

(WJB)
Bee, Cee, Dee, ...
(b) Die Buchstaben der unteren Reihe ergänzt man beim Sprechen durch „ee“:
geschrieben werden.
(a) In der oberen Reihe stehen die Buchstaben, die nur mit geraden Linien

Zerlegung von Rechtecken in Quadrate

von Hartwig Fuchs

Die Zerlegung eines Rechtecks in Quadrate scheint auf den ersten Blick ganz problemlos und daher auch keiner eingehenderen Betrachtung wert zu sein. Aber da täuscht man sich: man stößt ganz schnell auf schwierige und ungelöste Probleme.

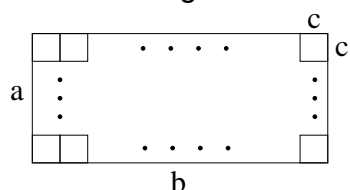
Ein Rechteck mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b und ein Quadrat mit den ganzzahligen Seitenlängen c nennen wir ein $a \times b$ -Rechteck bzw. ein $c \times c$ -Quadrat. Wir untersuchen nun – **ausschließlich für ganzzahlige Rechtecke und Quadrate** – verschiedene Zerlegungsaufgaben.

1. Zerlegung eines $a \times b$ -Rechtecks in lauter flächengleiche Quadrate

Ein $a \times b$ -Rechteck kann man in $a \cdot b$ 1×1 -Quadrate zerlegen.

Unter welchen Bedingungen ist es auch in lauter $c \times c$ -Quadrate, $c > 1$, zerlegbar?

Es sei c ein gemeinsamer Teiler von a und b , also $a = m \cdot c$ und $b = n \cdot c$.



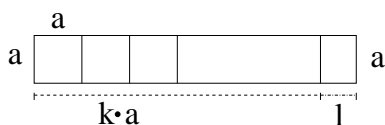
Dann ist das $a \times b$ -Rechteck in m „horizontale“ Bänder aus jeweils n $c \times c$ -Quadraten zerlegbar – und das sind $m \cdot n = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2}$ $c \times c$ -Quadrate. Somit gilt:

- (1) Es sei c ein Teiler von a und b . Dann ist das $a \times b$ -Rechteck in $\frac{ab}{c^2}$ $c \times c$ -Quadrate zerlegbar. Ist c der größte gemeinsame Teiler von a und b , dann ist $\frac{ab}{c^2}$ die kleinstmögliche Anzahl und ist $c = 1$, dann ist ab die größtmögliche Anzahl von $c \times c$ -Quadraten.

2. Zerlegung eines $a \times b$ -Rechtecks in Quadrate, von denen nur einige (nicht alle) flächengleich sind

In diesem Fall gilt:

- (2) Ein $a \times b$ -Rechteck kann stets so in Quadrate zerlegt werden, dass einige von ihnen – aber nicht alle – flächengleich sind.



Es sei $a \leq b$ und $b = k \cdot a + l$ mit $0 \leq l < a$. Dann ist das $a \times b$ -Rechteck zerlegbar in ein $a \times k \cdot a$ -Rechteck und in ein $a \times l$ -Rechteck.

Das $a \times k \cdot a$ -Rechteck kann man in k $a \times a$ -Quadrate und das $a \times l$ -Rechteck z.B. in $l \cdot a$ 1×1 -Quadrate zerlegen.

3. Zerlegung eines $a \times b$ -Rechtecks in lauter nicht flächengleiche Quadrate

Aufgabe:

Schneide aus Karopapier 9 Quadrate mit den Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 und 18 aus und setze sie zu einem Rechteck zusammen.

(Die Lösung geben wir am Ende dieses Artikels.)

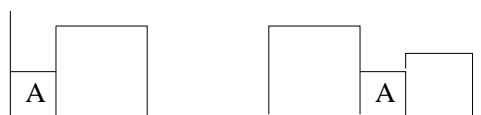
Bei dem Versuch, $a \times b$ -Rechtecke in lauter verschieden große Quadrate zu zerschneiden, stoßen wir auf so viele ungelöste Fragen, dass wir uns mit der Sache nur unter

sehr einschränkenden Bedingungen befassen können, um wenigstens kleine Erfolge zu erzielen.

Zunächst ein negatives Ergebnis:

- (3) Es ist nicht möglich ein $a \times b$ - Rechteck R in n nicht flächengleiche Quadrate zu zerlegen, wenn $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ oder 8 ist.

Wir nähern uns (3), indem wir zunächst annehmen, R sei in paarweise verschieden große Quadrate zerlegt, von denen A das kleinste sei. Für A gilt:



Ecke von R

Rand von R

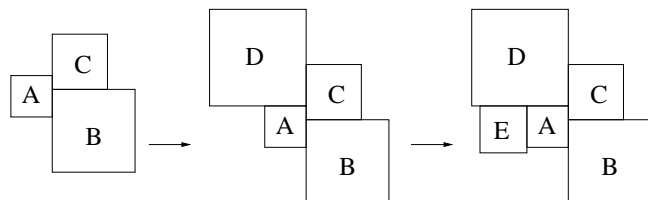
- (a) A kann nicht in einer Ecke oder am Rand des Rechtecks R liegen. Läge A in einer Ecke oder am Rand von R , dann hätte A einen bzw. zwei quadratische Nachbarn.

Das Quadrat, das oberhalb von A zu platzieren wäre, müsste offenbar kleiner als A sein, was der Definition von A widerspricht.

Für A gilt weiter:

- (b) An jeder Seite von A kann nur jeweils ein einziges Quadrat angrenzen.

Beweis:

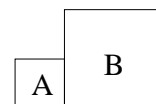


Angenommen, A hat an einer Seite zwei Nachbarquadrate B und C . Dann ist oberhalb von A ein Quadrat D anzufügen; D muss größer als A sein.

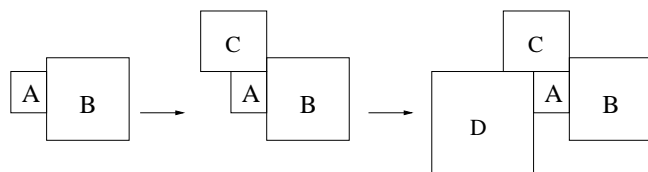
Schließlich ist links von A ein Quadrat E , das ebenfalls größer als A ist, anzuheften. Dann aber muss jedes Quadrat an der Unterseite von A kleiner als A sein. Dieser Widerspruch beweist Aussage (b).

Für A gilt ferner:

- (c) An A kann ein Quadrat B nur so wie in der nebenstehenden Figur angrenzen.



Nachweis:

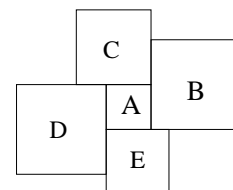


Angenommen, A und B grenzen wie in der Figur links aneinander. Dann müsste ein Quadrat C wie in der mittleren Figur und an dieses

schließlich ein Quadrat D wie in der Figur rechts angeheftet werden. Das Quadrat an der Unterseite von A wäre kleiner als A . Aus diesem Widerspruch folgt (c).

Da nun (c) für jede Seite von A gilt, folgt daraus:

- (d) Jede Zerlegung eines $a \times b$ - Rechtecks in verschieden große Quadrate enthält eine Konfiguration aus 5 Quadraten, die ein „Windrad“ bilden; das zentrale Quadrat A ist dabei das kleinste, das in der Zerlegung vorkommt.

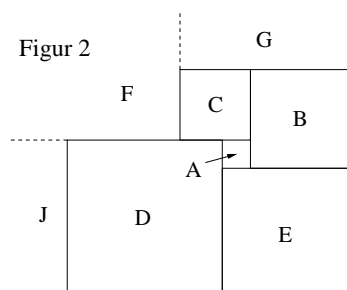
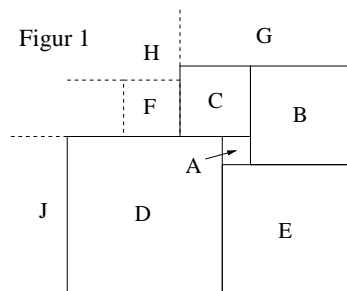


Ein Folgerung aus (d):

- (e) Die Behauptung (3) gilt offensichtlich für $n = 2, 3, 4$ und 5 .

Unser Windrad (d) hat 4 einspringende Ecken – daher hat eine Rechteckzerlegung, in der es vorkommt, mindestens 9 Quadrate. Wenn es gelingt, die Anzahl der einspringenden Ecken zu verringern, dann wird auch die Anzahl der Zerlegungsquadrate sinken.

Es gibt nun kein Windrad ohne einspringende Ecken (ein solches Windrad wäre ein in 5 Quadrate zerlegtes Rechteck – was nach (d) nicht möglich ist). Aber es gibt Windräder mit nur einer einspringenden Ecke – vgl. Figur 1. In diese einspringende Ecke fügen wir ein Quadrat F ein.



1) F sei kleiner als C (Figur 1). Dann sind mindestens 3 weitere Quadrate G, H, I erforderlich, um das Windrad zu einem Rechteck zu ergänzen – die zugehörige Rechteckzerlegung besitzt also mindestens 9 Quadrate.

2) F sei größer als C (Figur 2). Dann ist an die linke Seite von D ein Rechteck I anzuheften (I kann kein Quadrat sein, weil sonst I und D flächengleich wären. Zur Zerlegung von I sind aber – wie wir aus (e) wissen – mehr als 5 Quadrate erforderlich. Daher enthält eine Zerlegung des Rechtecks, in dem F größer als C ist, mehr als 12 Quadrate.

Aus 1) und 2) folgt:

(e) Die Behauptung (3) gilt auch für $n = 6, 7$ und 8.

Mit (d) und (e) ist (3) bewiesen.

(4) Es gibt Rechtecke, die man in 9 inkongruente Quadrate zerlegen kann.

Als „Schnittmuster“ der Zerlegung verwenden wir versuchsweise Figur 1.

Die Seitenlängen der Quadrate A, B, \dots, I bezeichnen wir mit a, b, \dots, i . Falls (4) eine Lösung hat, dann erfüllen die a, b, \dots, i die folgenden 8 Bedingungen, die man aus Figur 1 abliest:

$$\begin{array}{llll}
 c = b - a & & g = 2b - a & \text{wegen } g = b + c \\
 e = a + b & & h = 3b - 6a & \text{wegen } h = g + c - f \\
 d = 2a + b & \text{wegen } d = a + e & i = 6a + b & \text{wegen } i = f + d \\
 f = 4a & \text{wegen } f = d + a - c & b = 8a & \text{weil } i + d + e = 9a + 3b \\
 & & & \text{und } i + d + e = g + h = 5b - 7a
 \end{array}$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen jeweils b durch $8a$ und beachtet man, dass dann $e + b + g = 32a$, $i + d + e = 33a$ ist, so ergibt sich:

(5) Jedes Rechteck mit den Seitenlängen $32a$ und $33a$, $a = 1, 2, 3, \dots$ kann man nach dem Muster der Figur 1 in 9 Quadrate mit den Seitenlängen $a, b = 8a, c = 7a, d = 10a, e = 9a, f = 4a, g = 15a, h = 18a, i = 14a$ zerlegen.

Probe: Die Summe der Quadratflächen ist $a^2 + (8a)^2 + \dots + (14a)^2 = 1056a^2$; die Rechteckfläche ist $32a \times 33a = 1056a^2$.

Hinweis: für $a = 1$ erhält man aus (5) die 9 Quadrate der Aufgabe oben, die sich daher zu einem 32×33 - Rechteck zusammensetzen lassen.

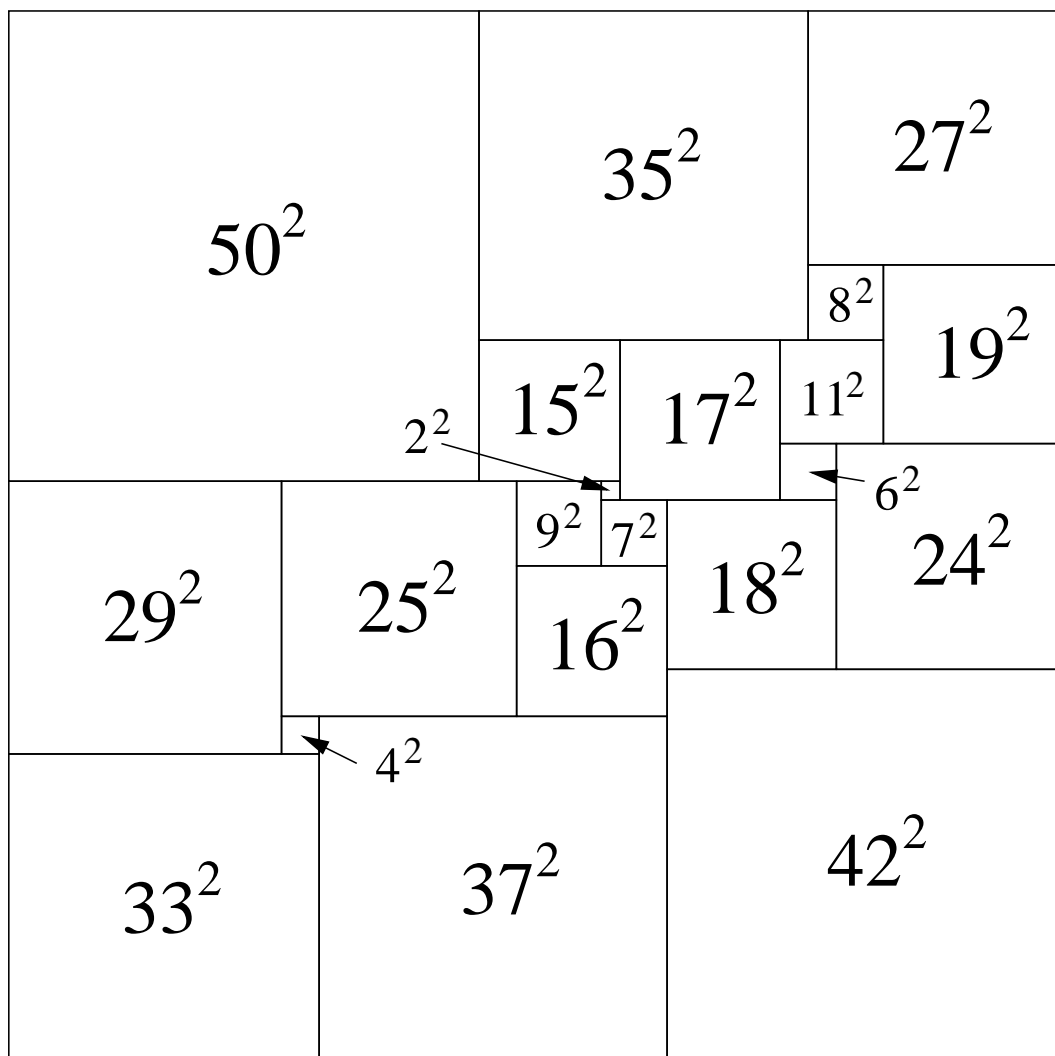
Ergänzung: Zerlegung von Quadraten in verschieden große Quadrate

Um 1930 versuchte der brillante ungarische Zahlentheoretiker Paul Erdős (1913 - 1996) auch für Quadrate Zerlegungen in lauter verschiedene ganzzahlige Quadrate zu finden.

Er stieß dabei jedoch auf so erhebliche Schwierigkeiten, dass er 1934 die Vermutung aufstellte, dass es solche Zerlegungen nicht gibt in Analogie zur Tatsache, dass ein Würfel nicht in lauter verschiedene ganzzahlige Würfel zerlegbar ist (was er beweisen konnte!).

Zwar hat der Mathematiker R.P.Sprague bereits 1935 gezeigt, dass Erdős Vermutung unzutreffend ist; aber erst 1978 gelang der Nachweis, dass man für ein zerlegbares Quadrat stets mindestens 21 verschiedene ganzzahlige kleinere Quadrate benötigt.

Die folgende Figur ist das Quadrat mit der kleinstmöglichen Seitenlänge 112, das in 21 verschiedene ganzzahlige Quadrate zerlegt ist.



Die Seite für den Computer-Fan

Wahr oder falsch?

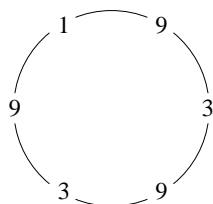
73 939 133 Wenn man bei der Zahl 73 939 133 von rechts her nacheinander
73 939 13 die jeweils letzte Ziffer wegstreicht, dann sind alle acht Zahlen
73 939 1 der Figur Primzahlen. (gefunden von H.F.)
73 939
73 93
73 9
73
7

Gleichung

Hat die Gleichung $x^2(x^2 + 1) + y^2(y^2 + 1) + z^2(z^2 + 1) = 2t^2(t^2 + 1)$ ganzzahlige
Lösungen? (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgaben aus Monoid 72

Primzahlen auf einem Kreis



Überprüfe die Behauptung:

Wenn man – mit einer beliebigen Ziffer beginnend – die 6 Ziffern der Figur in beliebiger Richtung (also gegen oder im Uhrzeigersinn) liest, dann ergibt sich jedesmal eine 6-ziffrige Primzahl.

(H.F.)

Lösung: In der Tat sind die sechs Zahlen 193 939, 939 391, 393 919, 939 193, 391 939 und 919 393 Primzahlen, wie man z.B. mit DERIVE oder einem selbst geschriebenen PASCAL-Programm schnell überprüft.

Primzahlen in einer Zahlenfolge

Man untersuche, ob es in der Zahlenfolge 1, 12, 123, 1234, 12345, ..., 123456789, 1234567891, 12345678912, ... Primzahlen gibt. (H.F.)

Lösung:

Es gibt Primzahlen in der Folge, z.B. 1234567891 und 1234567891234567891234567891; es ist aber nicht bekannt, ob es unendlich viele Primzahlen in der Folge gibt.

Hinweis: Die Aufgaben für den Computer-Fan sind meist ohne Bezug auf einen speziellen Rechner oder ein spezielles Programm oder eine spezielle Programmiersprache gestellt. Ihr könnt selbst entscheiden, für welche Teile es sich lohnt, z.B. einen Taschenrechner oder ein Computeralgebra-System (z.B. DERIVE) einzusetzen oder ein eigenes kleines Programm (z.B. in Pascal) zu schreiben.

Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: monoid@mathematik.uni-mainz.de).

Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auch Teile eingesandter Lösungen veröffentlichen können.

Ein Blick hinter die Kulissen

von Hartwig Fuchs

Ein Rechenkünstler?

Ein Mathematiklehrer trainiert mit seinen Schülern Bruchrechnung. Dazu sollen sie den Wert des Produkts

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdot \dots \cdot (?)$$

berechnen, wobei Hans die letzte Klammer selbst bestimmen darf. Hans wählt $(?) = \left(1 - \frac{1}{400}\right)$ als letzten Faktor, weil er dem Lehrer – wie er auch freimütig zugibt – eine langwierige Kontrollrechnung aufbürden will.

Der Lehrer lächelt nur und schreibt das Ergebnis umgehend auf einen verdeckten Zettel. Wie macht er das?

Der entscheidende Trick wurde bereits in MONOID 38, S. 4-5, verraten:

(T) Der Lehrer geht von einer ihm bekannten Gesetzmäßigkeit aus.

Es sei $A_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$.

Nun gilt:

$$1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}; 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3}; 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}; \dots; 1 - \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{(n-2) \cdot n}{(n-1) \cdot (n-1)}$$

$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot n}$. Folglich ist:

$$A_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Mit der Formel $A_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$ kann der Lehrer sofort hinschreiben $A_{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{20} = \frac{21}{40}$.

Ein Gedankenleser?

Ein Magier behauptet vor seinem Publikum, er könne Gedanken lesen. Zum Beweis fordert er einen Zuschauer auf, sich drei Zahlen a, b, c auszudenken – dabei darf a beliebig sein, während b um so viel kleiner als a sein soll, wie c größer als a ist – und er soll ihm den Abstand von b und c nennen. Der Zuschauer gibt diesen Abstand mit 28 an. Nun soll der Zuschauer folgende Rechnungen ausführen:

a ist mit sich selbst und b mit c zu multiplizieren und danach soll die Differenz von $a \cdot a$ und $b \cdot c$ bestimmt werden. Bevor der Zuschauer etwas sagen kann, nennt der Magier das Ergebnis – es ist 196.

Der Magier scheint tatsächlich Gedanken lesen zu können?

Der Magier verfährt nach dem Prinzip (T) (siehe oben). Er weiß: Falls b und c den Abstand $2x$ haben, dann gilt $b = a - x, c = a + x$ und $a^2 - b \cdot c = a^2 - (a - x)(a + x) = a^2 - (a^2 - x^2) = x^2$.

Da der Zuschauer die Zahl $2x$ öffentlich bekannt gibt, kennt der Magier x und er kann sofort des Zuschauers Rechenergebnis x^2 bekannt geben.

Wenn also der Zuschauer sagt, $2x$ sei 28, dann ist 196 sein Rechenergebnis.

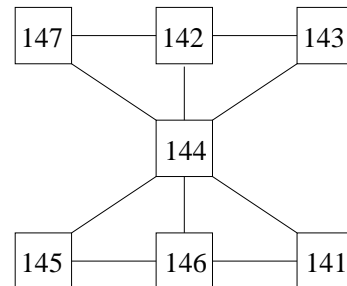
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 73

Drei Seiten für Mathis (SchülerInnen der Kl. 5 - 7)

Zahlenrätsel

Schreibe die Zahlen von 141 bis 147 so in die leeren Kästchen, dass die Summe von 3 auf einer Gerade liegenden Zahlen immer gleich ist.

(Judith Reinhardt)



Lösung: Eine Lösungsmöglichkeit findet ihr in der nebenstehenden Skizze.

Probe: Die Summe der Zahlen in jeder Richtung beträgt 432.

Mario malt

Der obere Teil der Bordwand eines auf dem Bodensee liegenden Schiffes wird von dem 168cm großen Malerlehrling gestrichen. Er steht dabei auf der (von oben gezählt) zwölften Sprosse einer Strickleiter mit 20cm Sprossenabstand 6cm über dem Wasserspiegel.



Nach einer Unterbrechung der Arbeit wegen heftigen Regens ist der Wasserspiegel des Sees um 28cm gestiegen, und es gibt jetzt 17cm hohe Wellen.

Bis zu welcher Stufe kann Mario absteigen ohne nasse Füße zu bekommen?

Lösung:

Die zwölfte Sprosse wird von den Wellen überspült, die elfte bleibt trocken, da das Schiff sich mit dem Wasserspiegel hebt.

Nochmal passende Ziffern

Der Text $SEND + MORE = MONEY$ (siehe Monoid 69) stand im Telegramm eines amerikanischen Studenten an seinen Vater. Vom Antwort-Telegramm

$$MONEY - STAYS = HERE$$

war er natürlich enttäuscht.

Auch dieser Text ergibt durch Ersetzen der Buchstaben durch Ziffern eine sinnvolle Rechnung!

(WJB)

Lösung: $41658 - 32083 = 9575$.

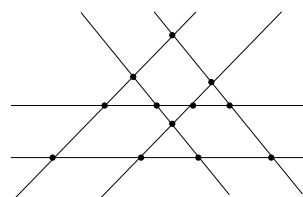
(Madeline Kohlhaas, Kl. 5f, Schule Marienberg, Neuss)

Weitere Lösung: $41658 - 39083 = 2575$

(Katharina Kirsch, Kl. 5b, Hildegardis-Gymnasium, Bingen, und Johann Kirsch, Kl. 7b, Stefan-George-Gymnasium, Bingen)

6 Geraden

Kannst du 6 Geraden so zeichnen, dass jede einzelne Gerade sich mit genau 4 der anderen Geraden schneidet? (H.F.)



Lösung:

Der Radfahrer

Als ein Radfahrer zwei Drittel seines Weges zurückgelegt hatte, platzte ein Reifen. Für den Rest des Weges brauchte er zu Fuß doppelt so viel Zeit wie für die bisherige Fahrt mit dem Rad.



Wievielmal schneller war er mit dem Rad gefahren, als er lief?

(gefunden von K.E.)

Lösung:

Der Radfahrer legte zu Fuß $\frac{1}{3}$ des Weges zurück, das heißt halb soviel, wie er gefahren war. An Zeit brauchte er doppelt so viel. Folglich war er 4mal so schnell gefahren wie er lief.

Buchstabengleichung

Ersetze in der „Gleichung“ $MATHE + IST + MEIN = LEBEN$ jeden Buchstaben durch eine Ziffer, wobei gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern zu ersetzen sind und alle Ziffern von 0, 1, 2, ..., 9 verwendet werden.

Es gibt mehrere verschiedene Lösungen. Bestimme mindestens zwei davon.

(gefunden H.F.)

Lösung:

Es gibt 9 Lösungen bei $H > S$ (die beiden zu H und S gehörigen Ziffern sind vertauschbar).

Eine vollständige Lösung lautet:

$$84763 + 157 + 8310 = 93230.$$

Für die weiteren Lösungen wird nur die „Übersetzung“ des Wortes $LEBEN$ angegeben.

31517

31715

51317

71315

41012

51812

81512

84042

Drei Freunde vor Mitternacht

Die drei Freunde Math Genie, Karl Napp und Great Clapp treffen sich regelmäßig und jeder redet über sein jeweiliges Lieblingsthema. Ihr Problem ist, dass ihre Abende immer wieder viel zu lange, bis weit nach Mitternacht dauern.

Eines Abends, um genau 22 Uhr, macht Math Genie folgenden Lösungsvorschlag: „Jeder von uns darf so **oft** reden, wie er will. Wir müssen nur darauf achten, dass jeder von uns jedes mal nur **halb so lang** redet wie sein Vorredner. Am Besten fange ich gleich an.“

Math Genie redet dann genau eine Stunde lang über seine neueste Variante des Cauchyschen Konvergenzkriteriums.

Warum ist die Sitzung tatsächlich vor 24 Uhr zu Ende, warum sind die beiden anderen sauer auf Math Genie?

Lösung:

Math Genie beendet sein Referat laut Aufgabentext um 23 Uhr, also bleibt für alle anderen Beiträge zusammen nur eine Stunde Zeit bis Mitternacht, genügend Grund zum Ärger für seine redseligen Freunde.

Wie sind nun die weiteren Redezeiten verteilt? Karl Napp darf ja nur halb so lang reden wie Math Genie, also höchstens eine halbe Stunde, Great Clapp nur höchstens die Hälfte davon. Die Redebeiträge von Karl Napp und Great Clapp dauern zusammen höchstens $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Stunden. Und so geht es immer weiter. Der nächste Beitrag darf nicht länger als $\frac{1}{8}$ Stunde sein. Die Gesamtzeit ab 23 Uhr beträgt also jetzt höchstens $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ Stunden, also immer noch weniger als eine Stunde. Setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht für die Gesamtzeit der Redebeiträge (in Stunden) nach Math Genies Referat die Folge

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots$$

Bei allen diesen Bruchzahlen ist der Zähler kleiner als der Nenner, also die Bruchzahl kleiner als 1. Das heißt aber, dass all diese Redebeiträge zusammen, gleichgültig wie viele es sind, weniger als eine Stunde benötigen, also tatsächlich vor Mitternacht zu Ende sind.

Wer sich ein bisschen mit Zweierpotenzen auskennt, bemerkt, dass alle Nenner Zweierpotenzen sind und der Zähler jeweils um 1 kleiner als der Nenner ist, das „Bildungsgesetz dieser Folge“ lautet also: $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

Wasser in Milch

Milch enthält 87% Wasser. Daraus wird durch Verdampfen ein Teil des Wassers Kondensmilch mit einem Wassergehalt von 74% hergestellt.

Wieviel Kondensmilch erhält man dabei aus 1000kg Milch?

(WJB)



Lösung:

Die Milch enthält 13% andere Inhaltsstoffe (Fett, Eiweiß, etc.); die Kondensmilch 26%. Es sind somit 13% von 1000 kg Milch soviel wie 26% von x kg Kondensmilch. Dies ergibt: $x = \frac{13}{26} \cdot 1000\text{kg} = 500\text{kg}$.

(Dies ist ein weiteres Beispiel für das Invarianzprinzip als heuristische Problemlösestrategie im Beitrag von Jörg Wittlinger, S. 7-8.)

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Familie Mayer

Als Familie Mayer ein Baby bekommt, sagt eines ihrer Zwillinge zum anderen: „Jetzt habe ich doppelt so viele Schwestern wie du!“

Wie ist dies möglich?

(WJB)



Magisches Quadrat

2000		
	2003	
2001		2006

Vervollständige zu einem magischen Quadrat!

(Es müssen also alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen dieselbe Zahl ergeben!)

(H.F.)

Werbezeitungen

Zum Verteilen von 1800 Werbezeitungen haben sich 14 Jugendliche gemeldet.

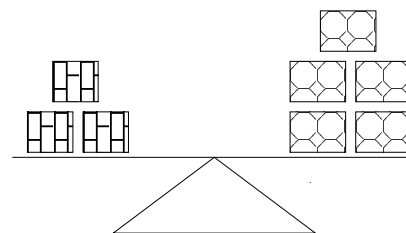
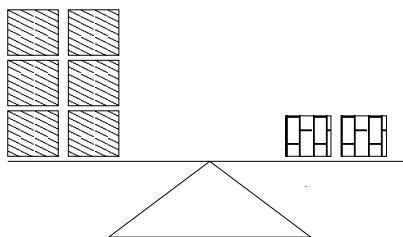
Jedes Mädchen erhält ein Packet von 120 Zeitungen und jeder Junge ein Packet von 140 Zeitungen – keine Zeitung bleibt übrig.

Wie viele Mädchen und wie viele Jungen tragen die Werbezeitungen aus?

(H.F.)



Die Waage



Jede schraffierte Kiste wiegt 5 Gramm. Wieviel wiegt eine Kiste, auf der Kreise sind?

(Judith Reinhardt)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der nächsten Seite!

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Konstruktion mit beschränkten Mitteln



Hans besitzt nur ein unmarkiertes Lineal und einen eingerosteten Zirkel. Er kann damit ein Paar sich rechtwinklig schneidender Strecken konstruieren.

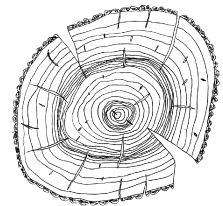
Wie macht er das?

Kannst du verschiedene Konstruktionsverfahren finden? (H.F.)

Baumringe

Ein alter Baumstumpf hat den Durchmesser von 30 cm. An den Jahresringen sieht man, dass der Baumstamm im ersten Jahr um 6 cm dicker geworden ist. Im zweiten Jahr nur noch um 3 cm, im dritten Jahr um 1,5 cm . . .

Wie alt war der Baum, als er gefällt wurde, wenn der Durchmesser des Stammes ab dem fünften Jahr immer um die gleiche Zahl weiter gewachsen ist?



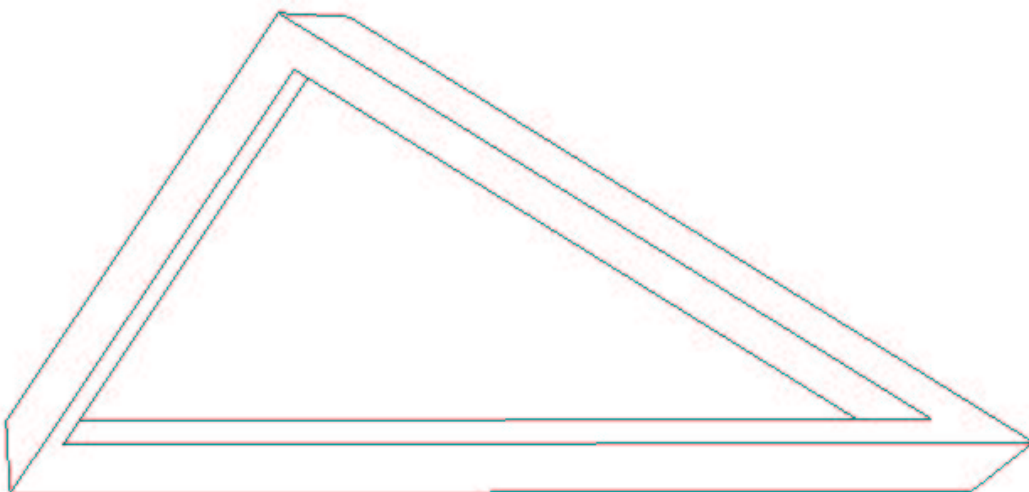
(Judith Reinhardt)

Konstruktion

Im Inneren oder auf dem Rand eines Parallelogramms $ABCD$ sei ein Punkt E gegeben. Konstruiere eine Gerade g durch E , die die Fläche von $ABCD$ halbiert.

(H.F.)

Bereits auf Seite 19 findet ihr Mathespielereien!



Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 804.

Fliesenleger Fabian soll in einem Bad eine $3m$ breite Wand bis zur Höhe von $1,50m$ neu fliesen. Der Kunde hat dafür blaue Fliesen von $15cm \times 15cm$ ausgesucht. Die Fugen sollen $2,5mm$ breit sein. Um möglichst wenige Fliesen schneiden zu müssen, überredet Fabian den Kunden dazu, genau zehn waagerechte Fliesen zu legen.

1. Wie hoch wird tatsächlich gefliest?
2. Wie viele Fliesen werden gebraucht, wie viele geschnitten?
3. Wie viel Material braucht Fabian für die Fugen, wenn diese $6mm$ tief gefüllt werden? (WJB)

Aufgabe 805.

Ein Lottospieler will jede der 49 Zahlen gleich oft spielen.

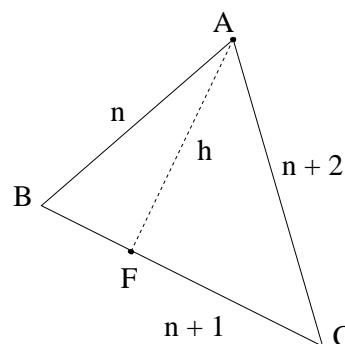
- a) In wie vielen Feldern mindestens muss er je sechs Zahlen ankreuzen?
- b) Wie kann er das zum Beispiel tun? (WJB)

Aufgabe 806.

Im spitzwinkligen Dreieck ABC seien die Seitenlängen aufeinander folgende natürliche Zahlen > 3 .

Zeige: Die auf der zweitlängsten Seite BC orthogonale Höhe h teilt BC in zwei Strecken, von denen die eine um 4 länger ist als die andere.

(H.F.)



Aufgabe 807.

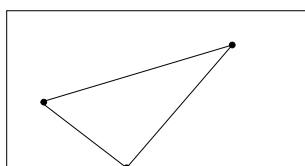
Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

Warum ist dann stets eine der Zahlen $p^n - 1, p^n + 1$ für jedes $n, n = 1, 2, 3, \dots$, durch 6 ohne Rest teilbar? (H.F.)

Aufgabe 808.

Gegeben sei ein Rechteck.

Es werde in dieses ein Dreieck gezeichnet, dessen Eckpunkte im Innern oder (auch) auf dem Rand liegen:



Welche maximale Größe kann der Flächeninhalt des Dreiecks annehmen? (WJB)

Aufgabe 809.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ mit $a > 2b > 2$ und den drei Nullstellen $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Man berechne

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\gamma - \alpha}{a}.$$

(Valentin Blomer)

Aufgabe 810.

Eine Knochelei und Rechnerei (für die Sommerferien)

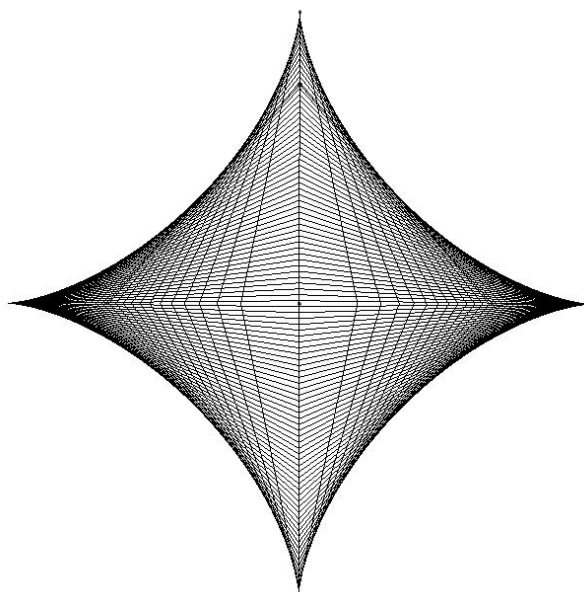
a	+	b	:	c	=	2
•		+		-		+
d	•	e	-	f	=	2
-		:		:		-
g	-	h	+	i	=	3
=		=		=		=
2	+	2	-	3	=	1

Man setze in das Gitter an Stelle der Buchstaben die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 9$ so ein, dass keine Zahl übrig bleibt und dass horizontal und vertikal nur gültige Gleichungen entstehen.

Dabei sind alle Rechnungen von links nach rechts bzw. von oben nach unten auszuführen; die Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“ soll hier nicht gelten.

Wie heißt die (einzige) Lösung?

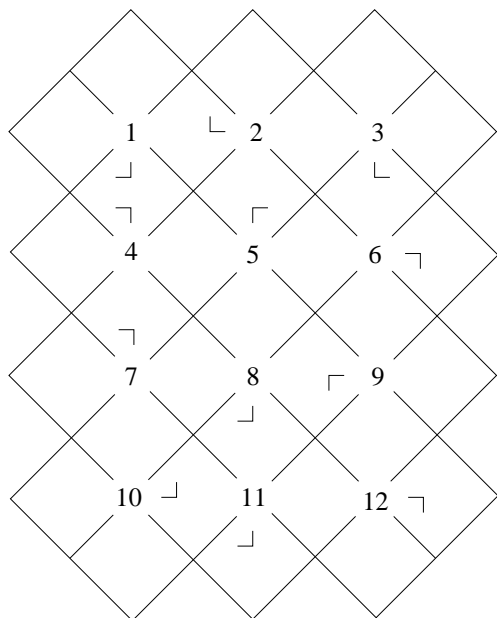
(H.F.)



Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 73

Kl. 8-13

Aufgabe 796. Zahlenrätsel



Trage um die Nummern herum 4-ziffrige natürliche Zahlen in die Felder ein, je Feld eine Ziffer; das Anfangsfeld und die Schreibrichtung sind durch einen Haken angegeben.

- 1 : $v - x$
- 2 : $v =$ Vielfaches von 383
- 3 : $w =$ kleinstmögliche Primzahl
- 4 : $7w$
- 5 : $x =$ eine in diesem Jahr häufig vorkommende Zahl
- 6 : eine 4-te Potenz
- 7 : $3y$
- 8 : $y =$ Produkt aus 5 aufeinanderfolgender Primzahlen -9
- 9 : $v : 6 + 2$
- 10 : $5w$
- 11 : Zahl mit den Teilern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- 12 : Spiegelzahl von $5w$. (H.F.)

Lösung:

- | | |
|------------------------|---|
| 1 : $v - x$ = 7189 | 2 : v = $383 \cdot 24 = 9192$ |
| 3 : w = 1009 | 4 : $7w$ = 7063 |
| 5 : x = 2003 | 6 : 7^4 = 2401 |
| 7 : $3y$ = 6903 | 8 : y = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 - 9 = 2301$ |
| 9 : $v : 6 + 2$ = 1534 | 10 : $5w$ = 5045 |
| 11 : 2520 | 12 : 5405 |

Aufgabe 797.

Ein Wanderer bricht in seinem Urlaubshotel um 14 Uhr auf, um einen benachbarten Berg zu erwandern. In der Ebene geht er mit 4 km/h; bergauf verlangsamt sich seine Geschwindigkeit auf 3 km/h. Oben angekommen macht er sich sofort auf den Rückweg mit 6 km/h bergab (und wieder 4 km/h, nachdem er in der Ebene angekommen ist). Er ist um 20 Uhr zurück beim Hotel.

- a) Wie weit ist es vom Hotel bis zum Berggipfel?
- b) Gib (mit einem Fehler von höchstens einer halben Stunde) an, wann der Wanderer den Gipfel erreicht hat.

(nach Lewis Carroll)

Lösung:

- a) Die Strecke vom Hotel zum Fuß des Berges sei x , der Weg bergauf (bzw. bergab) sei y .

Der Wanderer braucht dann $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = \frac{x+y}{2}$ Stunden.

Also muss $z = x + y = 12$ km sein.

- b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit m auf dem Weg zum Gipfel liegt zwischen 4 km/h und 3 km/h.

Die bis zum Gipfel benötigte Zeit beträgt (in Stunden):

$$t = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{x+y}{m} = \frac{12}{m}.$$

Wegen $4 > m > 3$ folgt $3 < t < 4$.

Der Wanderer kommt also zwischen 17 Uhr und 18 Uhr an. Die Angabe von 17:30 Uhr hat einen Fehler von weniger als einer halben Stunde.

Aufgabe 798.

$$\begin{array}{ll} \text{Es gilt} & (1) \\ \text{sowie} & (2) \end{array} \quad \begin{array}{l} 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \end{array}$$

Begründe:

Die Gleichungen $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ und $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ haben außer der in (1) bzw. der in (2) angegebenen keine weiteren Lösungen mit einer natürlichen Zahl x . (H.F.)

Lösung:

Aus $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ folgt $x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$ und daraus $x^2 - 2x + 1 = 4$, also $(x-1)^2 = 4$. Diese quadratische Gleichung hat nur 3 als positive Lösung.

Aus $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ folgt $x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ und daraus $2x^3 - 12x - 18 = 0$. Diese Gleichung wird von $x = 3$ erfüllt. Die linke Seite ist daher durch $x - 3$ teilbar. Nach Polynomdivision verbleibt die quadratische Gleichung $2x^2 + 6x + 6 = 0$ bzw. $x^2 + 3x + 3 = 0$. Diese Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Aufgabe 799.

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl, die genau 2003 Teiler hat. (S. Biallas)

Lösung:

Hat eine Zahl z die (eindeutige) Primfaktorzerlegung $z = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ (p_i Primzahl, $n_i \in \mathbb{N}$), dann hat die Zahl z genau m verschiedene Teiler mit $m = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$. Die in der Aufgabe gesuchte Zahl mit genau 2003 Teilern kann nur einen Primfaktor haben, da 2003 selbst eine Primzahl ist und nur als Produkt von $2003 \cdot 1$ entstehen kann.

Die gesuchte Zahl ist also eine Potenz p^{2002} mit p als Primfaktor. Da die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft gesucht wird, muss p die kleinste Primzahl, also 2, sein.

Damit ist die gesuchte Zahl 2^{2002} . Sie hat die Teiler $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2002}$.

Aufgabe 800.

Für welche $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, gibt es k unmittelbar aufeinander folgende natürliche Zahlen, deren Summe 2003 ist? (H.F.)

Lösung: Dass es überhaupt solche k gibt, sieht man schnell an der Zerlegung $2003 = 1001 + 1002$ mit $k = 2$. Weitere k gibt es nicht; denn ist $n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + k - 1) = 2003$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine gesuchte Darstellung von 2003 als Summe von k aufeinander folgenden Zahlen, so folgt:

$$k \cdot n + (1 + 2 + \dots + k - 1) = 2003,$$

also

$$k \cdot n + \frac{k(k-1)}{2} = 2003$$

oder

$$2k \cdot n + k(k-1) = 2 \cdot 2003$$

In der Zerlegung

$$k(2n + k - 1) = 2 \cdot 2003$$

steht rechts die Primfaktorzerlegung der Zahl, die auf der linken Seite vorkommt (2003 ist Primzahl!). Hierbei kann nur $k = 2$ und

$$2n + k - 1 = 2n + 1 = 2003,$$

also $n = 1001$ sein.

Weitere Lösung (von Stefanie Tiemann, Kl. 8, Gymnasium Marienberg, Neuss):

Ist k ungerade, so ist die Summe von k unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gleich k mal die mittlere Zahl. Dieser Wert ist für k größer oder gleich 2 nie 2003, da 2003 Primzahl ist. Ist k gerade, so ist die Summe gleich $k/2$ mal der Summe der kleinsten und der größten Zahl. Die Summe kann nur 2003 sein, wenn $k/2 = 1$, also $k = 2$ ist. Für $k = 2$ ist $1001 + 1002 = 2003$. Dies ist die einzige Lösung.

Aufgabe 801.

Das DIN A-System für Papier ist folgendermaßen aufgebaut:

DINA 0 ist $1m^2$, das Verhältnis der Seiten ist $\sqrt{2} : 1$. Hieraus entsteht DIN A 1 durch Halbieren der längeren Seite. Dieses Verfahren wird wiederholt; halbiert man die längere Seite von DIN A 1 so ergibt sich DIN A 2 usw. .

- Zeige, dass das Verhältnis längere Seite : kürzere Seite für jedes DIN A-Format gleich $\sqrt{2} : 1$ ist.
- Wie oft muss man halbieren, bis die Fläche kleiner ist als $1cm^2$? Welches DIN A-Format ist dies?
- Ein Stapel von 500 Blättern ist 4cm dick.
Wie dick wird der Stapel, der entsteht, wenn man ein DIN A 0 Blatt in DIN A 4 zerlegt und die Einzelblätter aufeinanderlegt? Wie dick wird er ungefähr im Fall aus Teil b)?
- Wie oft muss man mindestens schneiden, um ein DIN A 0 Blatt in DIN A 4 Blätter zu zerlegen, wenn man nie Blätter aufeinanderlegen und gleichzeitig durchschneiden darf?

TIPP zu Teil b) und c): Verwende die Näherung $2^{10} \approx 1000$.

(WJB)

Lösung:

- a) Ist die längere Seite $\sqrt{2} \cdot a$, die kürzere Seite a , so ist nach der Teilung die längere Seite a , die kürzere Seite $\frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
- b) DIN A n ist $(\frac{1}{2})^n m^2 = (10\,000/2^n) cm^2$.
Da 2^{10} knapp über 1000 liegt, ist $2^{13} = 8 \cdot 2^{10} < 10\,000$ und $2^{14} = 16 \cdot 2^{10} > 10\,000$.
Für $n = 14$ wird also $1 cm^2$ unterschritten.
- c) Der DIN A 4-Stapel enthält $2^4 = 16$ Blätter und ist daher $(16 \cdot 4/500) cm = 0,128 cm$ dick.
Der DIN A 14-Stapel enthält $2^{14} \approx 16 \cdot 1\,000$ Blatt und ist ungefähr $(4 \cdot 16\,000/500) cm = 128 cm$ dick.
- d) Bei jedem Schnitt erhöht sich die Anzahl der Teile um 1, man braucht also 15 Schnitte, bis man 16 Teile hat.

Aufgabe 802. Wahr oder falsch?

$$912\,985\,153 = 9^9 + 1^9 + 2^9 + 9^9 + 8^9 + 5^9 + 1^9 + 5^9 + 3^9?$$

Findest du weitere solche Zahlen?

(H.F.)

Hinweis: Zur Lösung lies den Artikel „Auf der Jagd nach Schwarzen Löchern für Ziffernoperatoren“, auf den Seiten 15-17.

Lösung:

Man überlegt folgendermaßen: Für eine beliebige n -ziffrige Zahl $z_n \dots z_1$ soll gelten $z_n \dots z_1 = z_n^9 + \dots + z_1^9$. Dann gilt:

$$10^{n-1} \leq z_n \dots z_1 = z_n^9 + \dots + z_1^9 \leq n \cdot 9^9,$$

woraus folgt, dass gelten muss: $10^{n-1} : n \leq 9^9$. Dies ist nur für $n \leq 11$ möglich. Es gibt also nur Lösungen $\leq 10^{10}$, und die findet ein Computer; es sind dies 0, 1, 146 511 208, 472 335 975, 534 494 836 und 912 985 153.

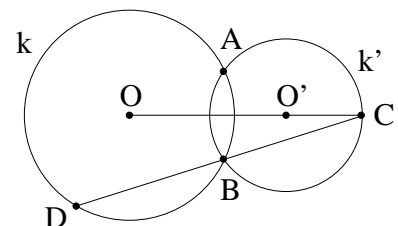
Aufgabe 803.

Gegeben seien zwei Kreise k, k' mit Mittelpunkten O, O' , die sich in A und B schneiden. Die Verlängerung der Strecke OO' schneide k' in C . Die Verlängerung der Strecke CB schneide k in D .

Gegeben sei:

$$\overline{AB} = 3, \overline{BD} = \sqrt{5}, \sin(\angle ABC) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Berechne die Radien der beiden Kreise sowie die Länge der Strecke OO' . (VB)



Lösung:

Es gilt $\cos(\angle ABD) = -\cos(\angle CBA) = -\sqrt{1 - \sin^2(\angle CBA)} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Mit dem Kosinussatz folgt:

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BD} \cos(\angle ABD) = 20 \\ &\Rightarrow \overline{AD} = 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Mit dem Sinussatz folgt:

$$\sin(\angle BDA) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \sin(\angle ABD) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \sin(\angle CBA) = \frac{3}{5}.$$

Es ist ferner: $\angle BOA = 2 \cdot \angle BDA$ (Peripheriewinkelsatz).

Sei P der Schnittpunkt von AB und OO' .

Dann ist $\angle BOP = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle BDA$, also

$$r_1 = \overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \frac{1}{\sin(\angle BOP)} = \frac{5}{2}.$$

Mit dem Kosinussatz ist:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos(\angle CBA).$$

Mit $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ folgt:

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2 \cos(\angle CBA)} = \frac{3}{2\sqrt{1 - \frac{4}{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Ferner ist $\cos(\angle PCB) = \sin(\angle CBA) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Mit dem Kosinussatz folgt:

$$\overline{O'B}^2 = \overline{O'C}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{O'C} \cdot \overline{BC} \cos(\angle PCB).$$

Mit $\overline{O'C}^2 = \overline{O'B}^2$ gilt also

$$r_2 = \overline{O'C} = \frac{\overline{BC}}{2 \cos(\angle PCB)} = \frac{15}{8}.$$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt schließlich

$$\overline{O'P}^2 = \frac{81}{64} \Rightarrow \overline{O'P} = \frac{9}{8} \text{ und } \overline{OP}^2 = 4 \Rightarrow \overline{OP} = 2, \text{ also}$$

$$\overline{OO'} = \frac{25}{8}.$$

Ein Satz von GAUSS über das regelmäßige n-Eck

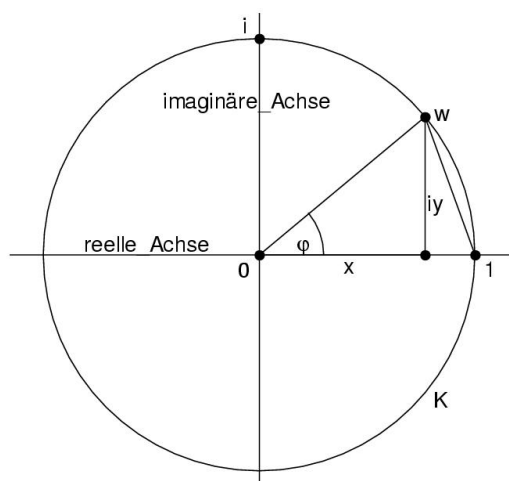
Im MONOID-Heft Nr. 72 wurde im Rahmen der Aufgabe 792 „Eine Aufgabe von C.F. Gauß“ der folgende Sachverhalt mitgeteilt:

Multipliziert man in einem regelmäßigen n -Eck vom Umkreisradius 1 die Entfernungen eines Eckpunktes von den übrigen Eckpunkten, so ergibt stets diese Zahl n .

Für $n = 4$ wurde die Richtigkeit vorgeführt, und für $n = 3$ und $n = 6$ wurde der Beweis aufgegeben; die Lösung findet ihr im MONOID-Heft Nr. 73, Seite 27. Im gleichen Heft, Seite 6-7, ist der Fall $n = 5$ ausführlich behandelt – ebenfalls mit elementargeometrischen Mitteln, in der Hauptsache durch Anwendung des Satzes von Pythagoras.

In einem Schreiben vom 24. März 2003 an die MONOID-Redaktion weist Professor Dr. Günter Pickert aus Gießen, der ein interessierter Leser der Zeitschrift MONOID ist, schon seit ihrer Gründung durch Martin Mettler vor über 22 Jahren, und dem laut eigenem Bekunden MONOID sehr gut gefällt, darauf hin, dass man den oben erwähnten Satz von Gauß mit komplexen Zahlen sehr einfach beweisen kann und dass ein Hinweis angebracht wäre, auch wenn – leider! – die komplexen Zahlen dem überwiegenden Teil der MONOID-Leserschaft unbekannt seien.

Allerdings wurde in vielen MONOID-Beiträgen immer wieder auf die große Bedeutung der komplexen Zahlen in der Mathematik (z.B. in Algebra und Geometrie) und ihren Anwendungsgebieten (z.B. in der Elektrotechnik) hingewiesen, die es rechtfertigen würde, ihnen auch im Rahmen der Schulmathematik mehr Beachtung zu schenken. Vielleicht kann daher doch manche Leserin oder mancher Leser mit den folgenden Ausführungen etwas anfangen.



Wir zeichnen um den Nullpunkt 0 der komplexen Zahlenebene einen Kreis K vom Radius 1. Dieser sogenannte Einheitskreis verläuft dann durch den Punkt 1 auf der reellen und den Punkt i auf der imaginären Achse. Der Punkt 1 sei die erste Ecke unseres, dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks und w die (entgegen dem Uhrzeigersinn) nächst gelegene Ecke. Es gilt damit $w = x + iy$ mit $x = \cos \phi$ und $y = \sin \phi$, $\phi = \frac{2\pi}{n}$, also

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Die Potenzen w^k , $k = 0, 1, \dots, n - 1$, stellen die sämtlichen n Ecken des regelmäßigen n -Ecks dar, da sich beim Potenzieren einer komplexen Zahl z der Winkel, den der Strahl $0z$ mit der reellen Achse einschließt, entsprechend dem Exponenten vervielfacht, also hier:

$$w^k = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)$$

Daher gilt:

$$(w^k)^n = w^{kn} = \cos\left(\frac{kn \cdot 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{kn \cdot 2\pi}{n}\right) = \cos(k \cdot 2\pi) + i \sin(k \cdot 2\pi) = 1$$

Das zeigt, dass die Potenzen w^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, die sämtlichen verschiedenen n -ten Einheitswurzeln und damit die Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ sind. Dieses lässt sich entsprechend in Linearfaktoren zerlegen:

$$z^n - 1 = (z - 1) \cdot (z - w) \cdot (z - w^2) \cdot \dots \cdot (z - w^{n-1})$$

Die Division durch $z - 1$ liefert (solange $z \neq 1$ ist):

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = (z - w) \cdot (z - w^2) \cdot \dots \cdot (z - w^{n-1})$$

Andererseits folgt aus

$$z^n - 1 = (z - 1) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$$

nach Division durch $z - 1$ (immer noch unter der Voraussetzung $z \neq 1$):

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$$

Setzen wir beide Ausdrücke für $\frac{z^n - 1}{z - 1}$ gleich,

$$(z - w) \cdot (z - w^2) \cdot \dots \cdot (z - w^{n-1}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$$

und lassen wir darin unter Wahrung der Gleichheit nun z gegen 1 gehen (dies ist erlaubt, das es sich auf beiden Seiten um Polynome, also stetige Funktionen handelt), so folgt:

$$(1 - w) \cdot (1 - w^2) \cdot \dots \cdot (1 - w^{n-1}) = n$$

Gehen wir zu den Beträgen über und beachten wir dabei, dass der Betrag eines Produktes komplexer Zahlen gleich dem Produkt ihrer Beträge ist und dass sich an der positiven Zahl n auf der rechten Seite nichts ändert,

$$|1 - w| \cdot |1 - w^2| \cdot \dots \cdot |1 - w^{n-1}| = n$$

so steht auf der linken Seite gerade das Produkt der Abstände $|1 - w^k|$ der ersten Ecke 1 von den übrigen $n - 1$ Ecken w^k , $k = 1, \dots, n - 1$, des regulären n -Ecks.

Dass wir bei unserem Ansatz den Punkt 1 auf der reellen Achse zur ersten Ecke unseres n -Ecks gemacht haben, ist keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn wenn wir in der vorletzten Gleichung beide Seiten mit $(w^k)^{n-1}$ multiplizieren, wobei wir links die $(n - 1)$ -fache Potenz w^k gleichmäßig auf die $n - 1$ Faktoren des Differenzenproduktes verteilen, erhalten wir die Gleichung

$$(w^k - w^{k+1}) \cdot (w^k - w^{k+2}) \cdot \dots \cdot (w^k - w^{k+n-1}) = n \cdot (w^k)^{n-1}.$$

Gehen wir nun wieder zu den Beträgen über, wobei wegen $|w| = 1$ auch $|(w^k)^{n-1}| = 1$ ist, so steht in der Formel

$$|w^k - w^{k+1}| \cdot |w^k - w^{k+2}| \cdot \dots \cdot |w^k - w^{k+n-1}| = n$$

auf der linken Seite gerade das Produkt der Abstände der Ecke w^k von den übrigen $n - 1$ Ecken des regulären n -Ecks; denn die Menge $\{w^{k+1}, w^{k+2}, \dots, w^{k+n-1}\}$ stellt – nur in anderer Reihenfolge – die Gesamtheit aller von w^k verschiedenen Ecken des regelmäßigen n -Ecks dar. (E.K.)

Was man aus dem Sieb des Erathostenes alles lernen kann

von Valentin Blomer

In der letzten Folge haben wir gezeigt, dass die Reihe der reziproken Primzahlen divergiert, und auch die asymptotische Beziehung

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x \quad (1)$$

festgestellt. Viel interessanter wäre es jedoch, die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$ asymptotisch zu bestimmen, also obige Summe ohne das Gewicht $\frac{1}{p}$ auszuwerten. Das erweist sich als sehr viel schwieriger. Bereits Gauß vermutete

$$\pi(x) = \#\{\text{Primzahlen zwischen 1 und } x\} \sim \frac{x}{\log x}. \quad (2)$$

Tschebyscheff konnte mit elementaren Methoden 1852 immerhin

$$\frac{x}{10 \log x} \leq \pi(x) \leq \frac{10x}{\log x}$$

zeigen. Die Beziehung (3.2), der sogenannte *Primzahlsatz*, wurde schließlich 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin gezeigt und benötigt viele gute und tiefliegende Ideen. Inzwischen gibt es einfachere Beweise, doch ist keiner von ihnen wirklich leicht zugänglich. Plausibel kann einem der Primzahlsatz z.B. auch dadurch erscheinen, dass er (3.1) impliziert (was wir hier nur grob andeuten): Gibt es zwischen 1 und x etwa $x/\log x$ Primzahlen, so ist die n -te Primzahl etwa von der Größenordnung $n \log n$. Damit folgt:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \approx \sum_{n=2}^{x/\log x} \frac{1}{n \log n} \approx \int_2^{x/\log x} \frac{1}{t \log t} dt \approx \log \log \frac{x}{\log x}.$$

Durch das Gewicht $\frac{1}{p}$ geht jedoch Information verloren, so dass man umgekehrt aus (3.1) nicht auf (3.2) schließen kann. Einen recht naiven Ansatz, Primzahlen zu finden, liefert das Sieb des Eratosthenes. Wir wollen sehen, wie gut wir dieses Verfahren quantitativ auswerten können, um einen ersten Schritt in Richtung des Primzahlsatzes zu machen. Sicherlich sind außer 2 alle Primzahlen ungerade. Zwischen 1 und x gibt es $\lfloor x/2 \rfloor$ gerade Zahlen, also ist $\pi(x) \leq x - \lfloor x/2 \rfloor + 1$. Ebenso können wir auch die $\lfloor x/3 \rfloor + 1$ durch drei teilbaren Zahlen außer 3 abziehen. Doch Vorsicht! Auf diese Art haben wir bereits alle durch 6 teilbaren zweimal abgezogen. Wir können aber schreiben

$$\pi(x) \leq x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor.$$

Jetzt können wir auch die durch 5 teilbaren Zahlen noch abziehen. Dabei haben wir die durch 10 und durch 15 teilbaren Zahlen zweimal abgezogen, diese sollten wir also wieder dazuzählen. Was ist jetzt mit den durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbaren Zahlen? Wir haben sie dreimal abgezogen (den sie sind ja insbesondere durch 2, 3 und 5 teilbar)

und dreimal addiert (denn sie sind auch durch 6, 10 und 15 teilbar). Da aber durch 30 teilbare Zahlen niemals prim sind, dürfen wir sie getrost noch einmal abziehen und erhalten:

$$\pi(x) \leq x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + 3 + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{30} \right\rfloor.$$

Wir setzen dieses Verfahren für alle Primzahlen bis zu einer noch zu bestimmenden Schranke z fort und erhalten:

$$\pi(x) \leq x - \sum_{p \leq z} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor + \pi(z) + \sum_{p_1 < p_2 \leq z} \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_2} \right\rfloor - \sum_{p_1 < p_2 < p_3 \leq z} \left\lfloor \frac{x}{p_1 p_2 p_3} \right\rfloor \pm \dots \quad (3)$$

Dies können wir nur auswerten, wenn wir die Gauß-Klammer weglassen. Das liefert für jeden Summanden einen Fehler von höchstens 1. Wie viele Summanden gibt es auf der rechten Seite von (3)? Jede der $\pi(z)$ Primzahlen $p \leq z$ hat genau die zwei Möglichkeiten, im Nenner aufzutauchen oder nicht, so dass wir genau $2^{\pi(z)}$ Summanden haben. Durch Weglassen der Gauß-Klammer wird die rechte Seite also höchstens um $2^{\pi(z)}$ kleiner. Das liefert

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq x - \sum_{p \leq z} \frac{x}{p} + \sum_{p_1 < p_2 \leq z} \frac{x}{p_1 p_2} - \sum_{p_1 < p_2 < p_3 \leq z} \frac{x}{p_1 p_2 p_3} \pm \dots + \pi(z) + 2^{\pi(z)} \\ &= x \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \pi(z) + 2^{\pi(z)}, \end{aligned} \quad (4)$$

denn durch Ausmultiplizieren des Produkts in der zweiten Zeile erhält man wieder obige Summe. Nun gilt wegen $\log(1 - y) < -y$ für $y > 0$

$$\log \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p \leq z} \log \left(1 - \frac{1}{p}\right) < - \sum_{p \leq z} \frac{1}{p} \leq -\frac{1}{2} \log \log z$$

(siehe Monoid 73, Seite 36 Gleichung (5)), also

$$\prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq e^{-\frac{1}{2} \log \log z} = \frac{1}{\sqrt{\log z}}.$$

Wir wählen nun z.B. $z = \sqrt{\log x}$ und schätzen in (4) noch $\pi(z)$ durch z ab (es gibt ja nicht mehr Primzahlen als Zahlen) und erhalten

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log x}} + \sqrt{\log x} + 2\sqrt{\log x}.$$

Die letzten beiden Terme sind (für große x) viel kleiner als der erste (wieso?), so dass für genügend große x folgt:

$$\pi(x) \leq 2 \frac{x}{\sqrt{\log \log x}}.$$

Das ist natürlich viel schwächer als (2) und lässt vermuten, wie schwer es ist, den echten Primzahlsatz zu beweisen. Weil aber $\sqrt{\log \log x}$ unbeschränkt ist, folgt immerhin die gar nicht offensichtliche Tatsache, dass es keine noch so kleine reelle Zahl $\eta > 0$ gibt mit $\pi(x) \approx \eta x$ für große x , oder etwas lax ausgedrückt: *Nur 0 Prozent aller Zahlen*

sind Primzahlen!

Zum Schluss unseres kleinen Ausflugs in die spannende Welt der Primzahlen noch ein kurzer Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen:

Als n -te Fermatzahl bezeichnet man die Zahl $F_n = 2^{2^n} + 1$. Dann gilt:

$$F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{k-1} = F_k - 2. \quad (5)$$

Das ist für $k = 1$ klar, denn $F_0 = 3 = 5 - 2 = F_1 - 2$. Ist die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen, so gilt mithilfe der dritten Binomischen Formel

$$(F_0 \cdot \dots \cdot F_{k-1}) \cdot F_k = (F_k - 2)F_k = (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1) = 2^{2^{k+1}} - 1 = F_{k+1} - 2.$$

Aus der Produktformel (5) folgt nun, dass zwei verschiedene Fermatzahlen F_ℓ, F_k keinen gemeinsamen Primteiler haben können: Nehmen wir etwa $\ell < k$ an, so ist F_ℓ einer der Faktoren in der linken Seite der Gleichung (5). Ginge also ein Primfaktor p in F_k und F_ℓ auf, so müßte er auch in dem letzten verbleibenden Summanden der Gleichung (5), nämlich der 2, aufgehen. Alle Fermatzahlen sind aber ungerade, und wir sind bei einem Widerspruch angekommen, mit anderen Worten: Zwei beliebige Fermatzahlen sind stets teilerfremd.

Da jede Fermatzahl (wie überhaupt jede Zahl) aber wenigstens einen Primfaktor haben muß, und dieser in keiner größeren Fermatzahl jemals wieder auftauchen kann, gibt es unendlich viele Primzahlen!

* * * * *

Drei Beispiele zu: **Mathematik und Literatur** aufgestöbert von Hartwig Fuchs

Gewissheit gibt allein die Mathematik.
Aber leider streift sie nur den Oberrock der Dinge.

Wilhelm Busch

Les mathématiques desèchent le coeur.
(Mathematik trocknet das Herz aus.)

Gustave Flaubert: Dictionnaire des idées reçues

„Setze auseinander, was zu beweisen sei;
zeige, wie man es beweisen müsse,
und behaupte sodann, es sei bewiesen.“

William Hamilton: Parliamentary Logic, Paragraph 416 – 417; London 1808

Widersprüche

Beweisen kann man lernen

von Hartwig Fuchs

Aussagen:

Die Mathematik ist eine logische Struktur, deren Bausteine Aussagen sind, die in einer Umgangssprache (z.B. dem Deutschen) formuliert sind. Da nun

– einerseits die Vorstellungen, die wir mit Wörtern der Umgangssprache verbinden, meist nicht scharf umrissen oder sogar mehrdeutig sind und zudem die Umgangssprache einem fortwährenden Umwandlungsprozess unterworfen ist

– und andererseits die Mathematik präzise Festlegung von Inhalten und Verwendungsweisen von Wörtern verlangt, um Missverständnisse oder sogar Schlimmeres zu verhindern, bedarf es einer Klärung dessen, was eine mathematische Aussage ist.

Unter einer **mathematischen Aussage** wollen wir einen aus inhaltlich genau festgelegten Wörtern grammatisch richtig gebildeten Satz verstehen, der einen Sachverhalt mit Bezug zur Mathematik beschreibt, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er besteht oder nicht besteht.

Aussagen in diesem Sinne sind zum Beispiel:

17 ist eine Primzahl; Für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geq 0$; $1 \cdot 1 = 2$.

Keine Aussagen dagegen sind Sätze wie zum Beispiel:

π ist cool!; Hast du einen Beweis gefunden?

Eine Aussage behauptet also das Bestehen oder Nichtbestehen eines Sachverhalts.

Wenn der behauptete Sachverhalt besteht, dann sagt man:

Die Aussage ist **wahr**; im entgegengesetzten Fall heißt sie **falsch**.

Auf diese Weise wird jeder Aussage ein Wahrheitswert zugeordnet.

- (1) Eine mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch – ein Drittes gibt es nicht (tertium non datur).

Es gibt eine unüberschaubare Vielfalt von Wegen, auf denen man die Frage nach dem Wahrheitswert einer Aussage (Behauptung) beantworten kann – der Mathematiker spricht dabei von einem **Beweis** oder einer **Widerlegung**. Manchmal ist die Wahrheitswertzuordnung ganz problemlos, etwa bei der Aussage: 101 und 103 sind ein Primzahlzwilling; manchmal erfordert sie ungewöhnlich verwickelte und langwierige Überlegungen wie z.B. beim Satz von Fermat: $x^n + y^n = z^n, n > 2$ hat keine natürlichen Lösungszahlen x, y, z – für den ein Beweis erst nach fast 300 Jahren Bemühung gelang. Ein weiteres Beispiel ist die Goldbach-Vermutung von 1742: Jede gerade Zahl > 5 ist die Summe zweier Primzahlen – für die man bis heute weder einen Beweis noch eine Widerlegung finden konnte. Dennoch sind die Mathematiker überzeugt, dass eines Tages das Problem gelöst wird.

Es kann sogar vorkommen, dass eine Entscheidung darüber, welcher Wahrheitswert einer Aussage zuzuordnen ist, überhaupt nicht möglich ist.

Beispiel 1

A sei die Aussage: Dieser Satz A ist falsch.

Falls A wahr ist, dann sagt A wahrheitsgemäß aus, dass A falsch ist.

Falls A falsch ist, dann ist das, was A aussagt, falsch; und das bedeutet, dass A nicht falsch sondern wahr ist.

Wir haben somit gefunden, dass A sowohl wahr als auch falsch sein muss.

Das aber ist unvereinbar mit (1).

Ausweg aus diesem Dilemma: Alle Aussagen, die mit (1) unvereinbar sind, werden aus der Mathematik ausgeschlossen.

Verneinte Aussagen

Um die Beschreibung A eines Sachverhalts zu verneinen, fügt man in der Aussage A an der richtigen Stelle das Wort „nicht“ ein. Die so **verneinte Aussage** (Negation von A) wird mit $\neg A$ bezeichnet.

Beispiel 2

Aussage A : 17 ist Primzahl

Aussage B : $17 = 18$

Aussage $\neg A$: 17 ist nicht Primzahl

Aussage $\neg B$: $17 \neq 18$

Nach diesem Beispiel liegt es auf der Hand, wie man den Wahrheitswert einer verneinten Aussage $\neg A$ festsetzt:

- (2) Wenn die Aussage A wahr ist, dann ist die verneinte Aussage $\neg A$ falsch;
wenn A falsch ist, dann ist $\neg A$ wahr.

Widersprüche

Beispiel 3

Für die letzte Gleichung der Umformungskette

$$1 + \frac{4x - 26}{17 - x} = \frac{3x - 9}{12 - x} \Rightarrow \frac{(17 - x) + (4x - 26)}{17 - x} = \frac{3x - 9}{12 - x} \Rightarrow \frac{3x - 9}{17 - x} = \frac{3x - 9}{12 - x} \text{ gilt:}$$

da die Zähler übereinstimmen, müssen auch die Nenner gleich sein. Also ist $17 - x = 12 - x$, woraus $17 = 12$ folgt.

Das Ergebnis des Beispiels 3 ist nicht akzeptabel, stellt es doch einen schwerwiegenden Verstoß gegen die Regel (2) dar. Gemäß ihrer Herleitung (sie ist fehlerfrei!) ist die Aussage A : $17 = 12$ als wahr zu betrachten – zugleich wissen wir aber, dass die verneinte Aussage $\neg A$: $17 \neq 12$ wahr ist.

Ein solches Vorkommnis nennt man einen **Widerspruch**.

Man sagt auch: A und $\neg A$ **widersprechen sich**.

Unter Bezug auf die Regel (2) beschreibt man einen Widerspruch auch so:

- (3) Die Aussagen A und $\neg A$ stellen einen Widerspruch dar, wenn sie beide zugleich wahr sind.

Die Logiker haben nun folgendes wichtige Ergebnis bewiesen: Die in der Mathematik üblichen logischen Systeme sind **widerspruchsfrei** und das heißt: aus der Anwendung logischer Regeln kann kein Widerspruch entstehen.

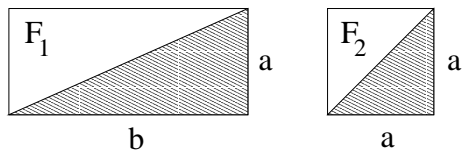
Wie aber kommt es dann überhaupt zu Widersprüchen? Ganz einfach durch fehlerhaftes Arbeiten beim Beweisen: Falsche Voraussetzungen oder ungültige Schlussfolgerungen führen zu widersprüchlichen Aussagen. Dazu zwei Beispiele:

Nochmals Beispiel 3 (fehlerhafte Schlussfolgerung)

Der Schluss „Da die Zähler übereinstimmen, müssen auch die Nenner gleich sein“ ist falsch sobald $3x - 9 = 0$ ist. Tatsächlich ist $x = 3$ Lösung der Ausgangsgleichung und daher gilt $3x - 9 = 0$ – und so ergibt der falsche Schluss die widersprüchliche Aussage: $12 = 17$.

Konsequenz: Die ganze Herleitungskette in Beispiel 3 wird für ungültig erklärt; damit tritt der Widerspruch gar nicht erst auf. Und so verfährt man mit allen Beweisen, die fehlerhafte Schlüsse aufweisen.

Beispiel 4 (falsche Voraussetzung)



Für die Flächen F_1, F_2 der schraffierten Dreiecke gilt

$$(a) \quad F_1 = \frac{1}{2}ab, \quad F_2 = \frac{1}{2}a^2$$

Daraus folgt

$$(b) \quad F_1 \neq F_2 \text{ für } a \neq b.$$

Wir versuchen nun, (b) aus der gewiss falschen Voraussetzung $1 \cdot 1 = 2$ herzuleiten. Es seien a, b positive reelle Zahlen mit $a \neq b$.

(c) Aus $1 \cdot 1 = 2$ folgt

$$1 \cdot 1 \cdot (a^2 - ab) = 2 \cdot (a^2 - ab) = 2a^2 - 2ab = (a^2 - 2ab) + a^2.$$

(d) Aus dem Assoziativgesetz der Multiplikation folgt

$$1 \cdot 1 \cdot (a^2 - ab) = 1 \cdot (1 \cdot (a^2 - ab)) = 1 \cdot (a^2 - ab) = a^2 - ab = (a^2 - 2ab) + ab.$$

Ein Vergleich von (c) und (d) zeigt, dass $(a^2 - 2ab) + a^2 = (a^2 - 2ab) + ab$ und somit $a^2 = ab$ ist. Wegen (a) gilt daher

(e) $F_1 = F_2$ für $a \neq b$.

Mit der falschen Voraussetzung $1 \cdot 1 = 2$ ergibt sich so der Widerspruch, dass sowohl $F_1 \neq F_2$ als auch $F_1 = F_2$ ist.

Konsequenz: Der gesamte „Beweis“ (c) – (e) wird als ungültig verworfen; damit entsteht die widersprüchliche Aussage (e) erst gar nicht.

Aber nicht immer verfährt man so – vgl. dazu den letzten Absatz.

Widersprüche erzeugen immer neue Widersprüche und so könnten sie letztendlich ganze mathematische Theorien zerstören. Dazu betrachten wir

Nochmal Beispiel 4

Aus der Aussage (e) des Beispiels 4 ergibt sich mittels (a), dass für $a \neq b$ gilt:

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2, \text{ woraus } a = b \text{ folgt. Also:}$$

Zwei verschieden lange Strecken sind gleich lang – Widerspruch! Oder:

Zwei verschiedene reelle Zahlen sind gleich – Widerspruch!

Eine Geometrie und eine Arithmetik, in der solche Aussagen gültig wären, sind mathematisch sinnlos.

Die Mathematiker haben also alle Gründe, dafür zu sorgen, dass sich Widersprüche nicht durch fehlerhaftes Arbeiten in ihren Theorien „einnisten“.

Und doch: clevere Mathematiker konnten auch so gefährlichen Objekten, wie es Widersprüche offensichtlich sind, noch eine nützliche Seite abgewinnen: Sie haben aus ihnen hochwirksame Beweisinstrumente entwickelt – z.B. Widerlegungsverfahren für quantifizierte Aussagen und indirekte Beweise – doch davon später mehr.

„Genau!“ – „Zu genau?“

Ein Volkswirt, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug durch Schottland. Da sehen sie eine schwarzgefleckte Kuh auf der Weide stehen. „Ah“, sagt der Volkswirt, „in diesem Land sind alle Kühe schwarzgefleckt.“ Daraufhin sagt der Physiker: „Nein, man kann nur feststellen, dass diese Kuh schwarzgefleckt ist.“

Der Mathematiker wendet dagegen ein: „Nein, auch das kann man nicht sagen! Wir wissen nur, dass die uns zugewandte Seite dieser Kuh schwarzgefleckt ist.“

Mitteilungen der Redaktion

1. Für ein **Monoid-Abo** gibt es zwei Wahlmöglichkeiten: Entweder eine Bestellung entsprechend dem **Kalenderjahr** oder eine Bestellung entsprechend dem **Schuljahr**. So können Neueinsteiger nach den Sommerferien ihr Abo mit dem aktuellen September-Heft beginnen und dann weitere drei Monoid-Ausgaben beziehen.
2. **ACHTUNG: Auch die Punktezahlung wird umgestellt!** Die Grundlage der diesjährigen Preisvergabe am **15. November** im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium in Alzey bilden die Ausgaben Dezember 2002 (MONOID Nr. 72) bis Juni 2003 (MONOID Nr. 74). Die Anpassung erfolgt danach aber an das Schuljahr. D. h. die neuen Klassen können direkt mit dem September-Heft (MONOID Nr. 75) starten und bis zum Juni-Heft (MONOID Nr. 78) sammeln.
3. In diesem Heft erscheint ein Artikel von **Jörg Wittlinger**, einem ehemaligen MONOIDaner und Preisträger des Goldenen M, jetzt Student an der Universität Bonn (wittlinger@uni-bonn.de).
4. Bereits auf dem eingelegten Blatt im MONOID-Heft Nr. 73 haben wir mitgeteilt, dass **Kerstin Bauer** vom Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern (MSS 13), Gewinnerin des Goldenen M 2001, Bundessiegerin 2002 im **Bundeswettbewerb Mathematik** wurde. In der Pressemitteilung Nr. 66/2003 vom 06.05.2003 des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) sind die 11 Bundessieger Mathematik 2002 und Kerstin Bauer als einzige (!) Bundessiegerin aufgeführt. Insgesamt 2.006 Schülerinnen und Schüler haben beim Bundeswettbewerb Mathematik 2002 teilgenommen. Der Staatssekretär im BMBF, Uwe Thomas, bezeichnete in seiner Laudatio die Mathematik als „die faszinierende Kunst des Denkens“ und darüber hinaus auch als einen „Schlüsselfaktor für unsere wirtschaftliche Leistung und Wettbewerbsfähigkeit auf den Weltmärkten“. Der Bundeswettbewerb Mathematik helfe, sagte Thomas, Gelerntes aus dem Schulunterricht selbstständig zu vertiefen und mathematisches Denken zu trainieren. „Wer im Rahmen dieses bundesweiten, mehrstufigen Wettbewerbs weiterkommt, der hat sich mit Leistungen qualifiziert, die international zur Spitze gehören“, lobte der Staatssekretär. Nach einem Beschluss der Kultusministerkonferenz von 1997 kann durch einen Sieg im Wettbewerb die Abiturnote um bis zu 60 Punkte verbessert werden.
5. Vom 10. bis 13. März 2003 veranstaltete der Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz die 3. Runde des Landeswettbewerbs Mathematik Rheinland-Pfalz, für die sich 30 Schüler und Schülerinnen qualifiziert hatten, darunter erstmals zwei Schülerinnen aus Ägypten, nämlich Sarah Sherif Adly Raafat und Mary Safwat Aziz Attia von der Deutschen Schule der Borromäerinnen in Kairo bzw. Alexandria. Nach der Eröffnung durch den Landeswettbewerbsleiter, StD Rüdiger May, überreichte Bildungsministerin Doris Ahnen die Urkunden und Preise. Diese wurden ergänzt durch je ein Jahresabonnement von MONOID. Gesponsert wurden Preise, Veranstaltung und Rahmenprogramm (darunter ein Besuch im Mainzer Kabarett „Unterhaus“ und ein Kinobesuch) von der Firma Sparkassen-Informatik-Services West (SWEST), einem Dienstleistungszentrum, dessen Angebotspalette (auch an Berufsmöglichkeiten für Schul- und Hochschulabsolventen) von den Mitarbeitern von SWEST unter Leitung von Dr. Kaiser in einer halbtägigen Veranstaltung im Schloss Waldhausen bei Mainz vorgestellt wurde.

Das mathematische Programm in der Universität Mainz umfasste vier Veranstaltungsböcke von teils Vortrags- teils Workshop-Charakter:

Unendlich und noch viel unendlicher – Welche Zahlen können wir abzählen?
(Prof. Dr. Volker Bach)

Perspektive (Prof. Dr. Christina Birkenhake und Tanja Löhr)

Kryptografie – einst und heute (Prof. Dr. Theo de Jong)

Dynamische Geometrie (Dr. Ekkehard Kroll und Oliver Labs)

Von Studierenden der Fachschaft beigesteuert wurde ein bunter Abend mit Knobelaufgaben und einem Video über studentisches Leben an der Uni Mainz.

Die TeilnehmerInnen der 3. Runde 2003:

Lena Altherr (Mainz); Johanna Barth (Oppenheim); Christoph Bayer (Mainz); Thomas Bläsius (Trier); Daniela Bleh (Kaiserslautern); Andreas Dixius (Trier); Christoph Eberhardt (Bad Bergzabern); Yaschar Fahimi-Zand (Wittlich); A. Hammerschmidt (Mainz); Edith Hoffmann (Wittlich); Michael Iselborn (Ludwigshafen); Peter Kahr (Neuwied); Timo Keller (Pirmasens); Martin Maur (Bad Neuenahr-Ahrweiler); Maximilian Merkert (Kaiserslautern); Udo Muttray (Mainz); Andreas Nink (Westerburg); Annika Radau (Kaiserslautern); Lukas Ristau (Birkenfeld); Robert Rockenfeller (Neuwied); Kirsten Schmalhofer (Kaiserslautern); Kerstin Schönung (Neustadt/Weinstraße); Florian Schwahn (Worms); Kirstin Walter (Trier); Carsten Weichhold (Mainz); Sebastian Wild (Neustadt/Weinstraße); Ann-Kathrin Zerjeski (Oppenheim); Tiezhing Zhang (Landau); Sarah Sherif Adly Raafat (Kairo); Mary Safwat Aziz Attia (Alexandria).

6. Am 14.03.2003 wurde in Gießen das von Prof. Dr. A. Beutelspacher - einem „alten“ Freund und Förderer von MONOID - initiierte Mathematik-Mitmach-Museum „**Mathe-matikum**“ um weitere Ausstellungsräume erweitert: Im 2. Obergeschoss erwarten die Besucher(innen) Experimente zu Zahlen (z.B. zum goldenen Schnitt und zu Geheimcodes), zur Symmetrie (Spiegelexperimente und Puzzles) und zur Geschichte (Pythagoras und Quadratpuzzles).

7. An dem **Schülertag 2003** am 11. Juni in Mainz, zu dem der Verein der Freunde der Mathematik an der JoGu-Universität auch im MONOID-Heft Nr. 73 eingeladen hatte, nahmen etwa 400 Schülerinnen und Schüler aus Rheinland-Pfalz und Hessen teil. Das Programm, das je einen Vortrag aus der Mathematik und Informatik (in der Mathematik mit Übungen – als Vorgeschmack auf später) sowie einen Film der Fachschaft über das (mathematik-)studentische Leben bot, wurde – den ersten Reaktionen nach – fast durchgehend sehr positiv aufgenommen. Eine Unterstützung der Arbeit des Vereins, z. B. durch den Beitritt ehemaliger StudentInnen, wäre hoch willkommen. Hier der Internet-Kontakt: freunde@mathematik.uni-mainz.de und <http://www.mathematik.uni-mainz.de/Freunde>

Ekkehard Kroll

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 15.2.2003)

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:

Kl. 5: Laura Brückbauer 8, Lisa Simon 7, Joscha Wagner 9, Osan Ylmaz 4;

Kl. 6: Sandra Erat 9, Dorothee Fister 22, Claudia Heiss 10, Johanna Mees 12, Sabine Oßwalt 11, Franziska Schmitt 8, Annett Stellwagen 13, Vanessa Stübchen 5;

Kl. 7: Markus Bassermann 16, Johannes Merz 25;

Kl. 8: Meike Fluhr 14;

Kl. 10: Marc Schöfer 8;

Kl. 11: Manuel Ross 21;

Kl. 13: Aaron Breivogel 18.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:

Kl. 6: Johannes Fiebig 10, Felix Liebrich 24, Lisa Mettler 16, Carolin Morlock 10, Nina Rein 4, Susanne Rogge 8, Inga Wellstein 13, Rebecca Zimmer 18;

Kl. 9: Marc Rein 7;

Kl. 10: Gregor Dschung 8.

Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):

Kl. 6: Thomas Geiß 22;

Kl. 9: Lorenz Diener 21, Jens Palkowitsch 7, Stefan Tran 37.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 7: Christian Behrens 14.

Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):

Kl. 7: Marco Eifert 4, Manuel Giebel 5, Vanessa Lenk 7, Anna-Lena Litz 4, Maximilian Michel 10, Christian Munkel 14, Sophia Nophut 3, Stephanie Wiegand 4;

Kl. 8: Simon Frydrych 5.

Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 4: Laura Mettler 15.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):

Kl. 8: Katharina Dahlem 1, Julia Dick 7, Cornelius Doll 1, Christina Gonera 4, Theresia Krischke 1, Thomas Pahl 2, Phillip Ries 7, Christopher Schmitt 2, Christopher Schnee 1.

Kelkheim/Taunus, Eichendorfschule (Betreuender Lehrer Herr Marsen):

Kl. 7: Pascal Freund 10, Franziska Löw 6, Isabell Peyman 9, Sonja Sauckel-Plock 11, Anne-Marie Schwörer 9.

Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium (Betreuender Lehrer David Brungs):

Kl. 6: Marius Rackwitz 3.

Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:

Kl. 7: Katharina Kober 14;

Kl. 9: Judith Reinhardt 15, Adriana Spalwiz 9.

Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 12: Steffen Biallas 26.

Magdeburg: Kl. 7: Saskia Thiele 8.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):

Kl. 7: Regina Friedmann 9, Natalie Geiß 17, Julia Heeß 16, Helena Schweizer 16.

Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):

Kl. 5: Madeline Kohlhaas 16;

Kl. 6: Hannah Rautenberg 5;

Kl. 7: Annika Kohlhaas 21;

Kl. 8: Annika Sonnenberg 19, Stefanie Tiemann 35.

Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):

Kl. 7: Martin Jöhlinger 14.

Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):

Kl. 5: Max Behrent 5, Larissa Habel 14, Patricia Kuther 4, Patricia Limpert 7, Sarah Rosengarten 9, Katrin Schlemm 12, Sophia Waldvogel 7, Valentin Walther 5;

Kl. 6: Carolin Dossmann 14, Elham Quiami 8, Katarina Radenovic 14, Marco Radenovic 13, Daniela Schüler 6, Annkatrin Weber 16;

Kl. 7: Stefan Albert 11;

Kl. 8: Julian Scherr 4;

Kl. 9: Simon Batis 14.

Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium: Kl. 11: Alexander Hillert 26.

Siegburg, Anno-Gymnasium: Kl. 9: Jan B. Boscheinen 10.

Speyer, Friedrich-Magnus-Schwerd Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Karmann): Kl. 7: Oliver Queisser 6, Benjamin Schuler 8.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):

Kl. 5: Sarah Breunich 4, Lisa Engel 5, Jonathan Orschiedt 5, Sophie Schäfer 1;

Kl. 6: Kurosch Habibi 12, Carolin Roßbach 7, Charlotte Schitter 9, Pascal Stichler 11;

Kl. 7: Julia Jung 10, Sarah Tröbs 19;

Kl.10: Verena Prägert 14.

Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium:

Kl. 8: Christine Biedinger 8; **Kl. 11:** Catherina Wirtz 11.

Inhalt

An die Le(ö)ser	2
Martin Mettler: Ein Wunderkind?	3
Ekkehard Kroll: Über Teilersummen und vollkommene Zahlen	5
Hartwig Fuchs: Vier berühmte Konstruktionsaufgaben	7
Jörg Wittlinger: Heuristische Problemlösestrategien.	8
Hartwig Fuchs: Zerlegung von Rechtecken in Quadrate	10
Die Seite für den Computer-Fan	14
Hartwig Fuchs: Ein Blick hinter die Kulissen	15
Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 73	16
Neue Mathespielereien	19
Neue Aufgaben	21
Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 73	23
Ekkehard Kroll: Ein Satz von GAUSS über das regelmäßig n-Eck.	28
Valentin Blomer: Was man aus dem Sieb des Erathostenes alles lernen kann	30
Hartwig Fuchs: Widersprüche	33
Mitteilungen der Redaktion	36
Rubrik der Löser(innen)/ Stand 15.2.2002	38

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

Mitglieder: Dr. Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr. Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber

Ehrenmitglied: Martin Mettler

Monoidaner: Markus Bassermann, Gregor Dschung, Johannes Fiebig, Meike Fluhr, Armin Holschbach, Felix Liebrich, Isabelle Merker, Manuel Ross und Rebecca Zimmer

Korrekturen und Layout: Katrin Elter **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen.**

Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

**Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Ostringen.**

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz,
55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389

e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: <http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid>