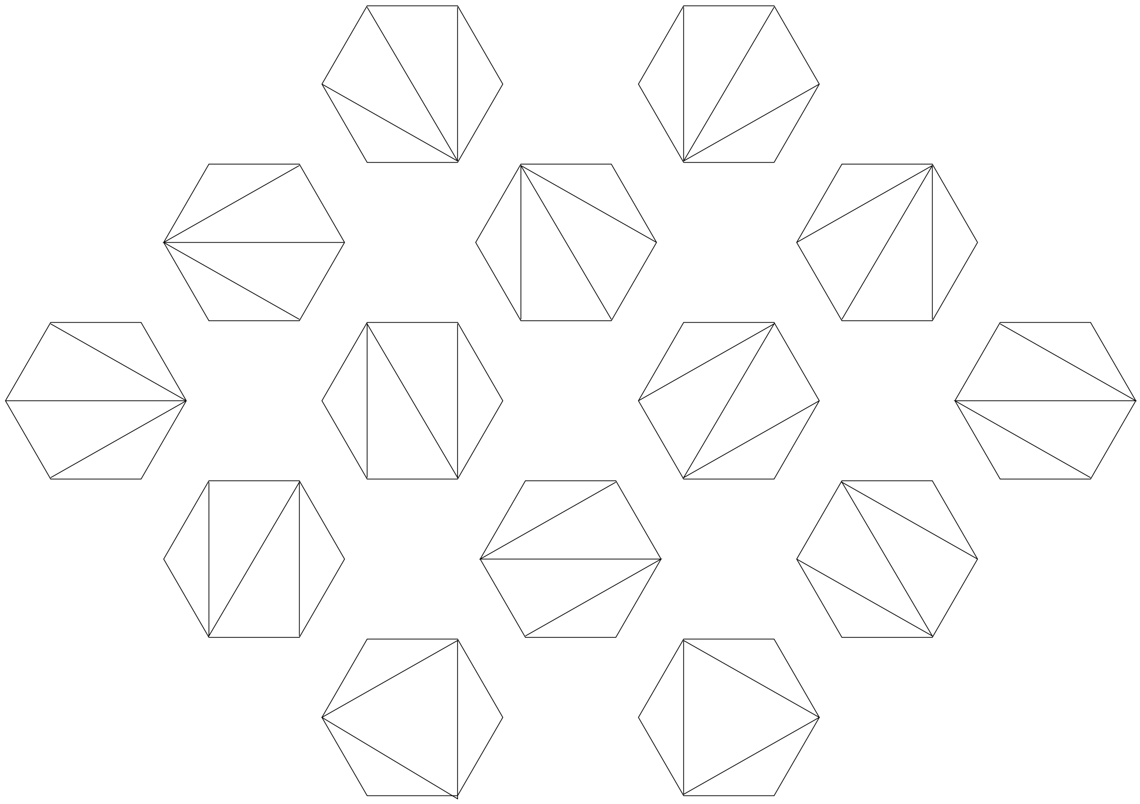
Jahrgang 23 Heft 73 März 2003

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)
Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15.05. 2003.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

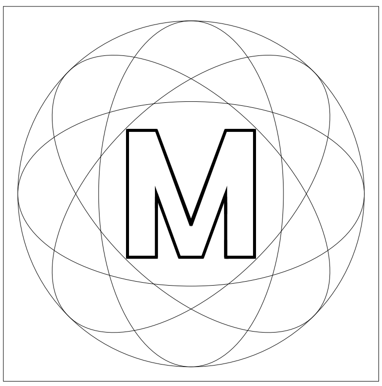
Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

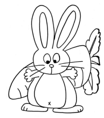
Das Goldene M



Außer der Medaille mit dem goldenen M, die ihr Aussehen im letzten Jahr gewandelt hat, gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Das Kaninchenproblem



Anfang des 13. Jh. lebte in Pisa – der Stadt mit dem bekannten schiefen Turm – der berühmte Mathematiker Leonardo Pisano, alias Fibonacci (der Sohn von Bonaccio). Er ist der Autor eines Buches über den Abakus "Incipit **liber abaci** compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano" (erschienen 1202 und überarbeitet 1228), eins der ersten Bücher mit vollständigen Kenntnissen über die Arithmetik und Algebra im damaligen Europa, das über Jahrhunderte die Werke der Nachkommen beeinflusste, bis hin zu Euler, in seiner Algebra 1768. In "Liber abaci" wurde auch das folgende, so genannte, "Kaninchenproblem" behandelt, das zu der, heute nach Fibonacci benannten, rekursiven Zahlenfolge führt:

Annahmen:

- Jedes Kaninchenpaar liefert einen monatlichen Zuwachs von einem Paar.
- Jedes neugeborene Paar wird nach einem Monat fortpflanzungsfähig.
- Zu Beginn des Jahres haben wir ein neugeborenes Kaninchenpaar.

Wie viele Kaninchenpaare haben wir zu Jahresende?

Lösung:

Am Anfang des 1. Monats (zu Jahresbeginn) haben wir 1 Paar (a_1).
Am Anfang des 2. Monats haben wir immer noch nur dieses Paar (a_1).
Am Anfang des 3. Monats haben wir 1 neugeborenes Paar, also insgesamt

$$2 = 1 + 1 \text{ Paare } (a_2).$$

Am Anfang des 4. Monats haben wir wiederum 1 neugeborenes Paar, also insgesamt

$$3 = 2 + 1 \text{ Paare } (a_3).$$

Am Anfang des 5. Monats haben wir 2 neugeborene Paare, also insgesamt

$$5 = 3 + 2 \text{ Paare } (a_4).$$

Am Anfang des 6. Monats haben wir 3 neugeborene Paare, also insgesamt

$$8 = 5 + 3 \text{ Paare } (a_5).$$

So fortfahrend, erhalten wir die Folge: 1 (Anfang 2. Monat), 2 (Anfang 3. Monat), 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 (Anfang des 12. Monats und damit am Ende des ersten Jahres).

Zu Jahresende haben wir also $a_{11} = 144$ Kaninchenpaare.
Wir bemerken, dass

$$a_1 = 1, \; a_2 = 2, \; a_3 = a_2 + a_1, \; a_4 = a_3 + a_2, \; a_5 = a_4 + a_3, \text{ usw..}$$

Jedes weitere Glied der Folge ist gleich mit der Summe der beiden vorangehenden Glieder.

Eine solche Art der Definition einer Zahlenfolge wird **rekursiv** (zurückgreifend auf Bekanntes) genannt. Dabei werden ein oder mehrere Startglieder genannt und die Regel, nach welcher ein Glied auf Grund der vorhergehenden berechnet wird.
Wählen wir nun $a_0 = 1$, so kann man a_2 bereits nach der angegebenen Regel aus a_0 und a_1 berechnen. Somit kann man die **Fibonacci-Folge** folgendermaßen definieren:

$$a_0 = 1, \; a_1 = 1, \; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Es ist die Zahlenfolge $1; 1; 2; 3; 5; 8; \ldots$ (MM)

Die Anzahl der Teiler einer gegebenen Zahl

Ein Bericht für Mathis (Schülerinnen und Schüler der Kl. 5 - 7)

von Martin Mettler

Vor Kurzem bat mich meine Enkelin Lisa zu überprüfen, ob sie ihre Hausaufgaben richtig gelöst hatte. Die Aufgaben bestanden darin, von verschiedenen gegebenen Zahlen alle Teiler aufzuschreiben.
Als ich ihr auf Anhieb sagte, bei welchen Zahlen sie nicht alle Teiler aufgelistet hatte, fragte sie misstrauisch: „Wie kannst du so schnell wissen, ob ich irgendwelche Teiler vergessen habe?“
Ich antwortete: „Es gibt eine Formel zur Bestimmung der Anzahl der Teiler!“
Diese Formel will ich nun ein einigen Beispielen erläutern.

Beispiel 1: Wir betrachten die Zahl $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.
Die Teiler dieser Zahl sind: $1, 2^1, 2^2$ und 2^3, d.h. $1, 2, 4$ und 8.
Wir bemerken: Zu jeder der drei Hochzahlen $1, 2, 3$ gehört ein Teiler. Hinzu kommt noch die Zahl 1 als Teiler. Insgesammt sind das $3 + 1 = 4$ Teiler.

Beispiel 2: Die Teiler der Zahl $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ sind: $1, 5^1, 5^2$, d.h. $1, 5$ und 25.
Wir bemerken: Zu jeder der zwei Hochzahlen $1, 2$ gehört ein Teiler. Hinzu kommt noch die Zahl 1 als Teiler. Insgesammt sind das $2 + 1 = 3$ Teiler.

Beispiel 3: Die Teiler der Zahl $7 = 7^1$ sind: 1 und 7^1. Also haben wir $1 + 1 = 2$ Teiler.

In allen drei Beispielen hatten wir Zahlen, die je einen einzigen Primfaktor enthalten. Die Anzahl der Teiler war jeweils die größte auftretende Hochzahl vergrößert um 1.

Es gilt also:
Besitzt eine Zahl n einen einzigen Primfaktor p zur Hochzahl h, d.h. $n = p^h$, so ist die Anzahl ihrer Teiler $A = h + 1$.

Beispiel 4: Wir betrachten nun die Zahl $200 = 2^3 \cdot 5^2$.
Die Teiler dieser Zahl sind $1, 2, 4$ und 8 (wegen 2^3), dann $1, 5, 25$ (wegen 5^2), dann aber auch $2 \cdot 5 = 10, 2 \cdot 25 = 50$, $4 \cdot 5 = 20$ und $4 \cdot 25 = 100$, sowie $8 \cdot 5 = 40$ und $8 \cdot 25 = 200$.

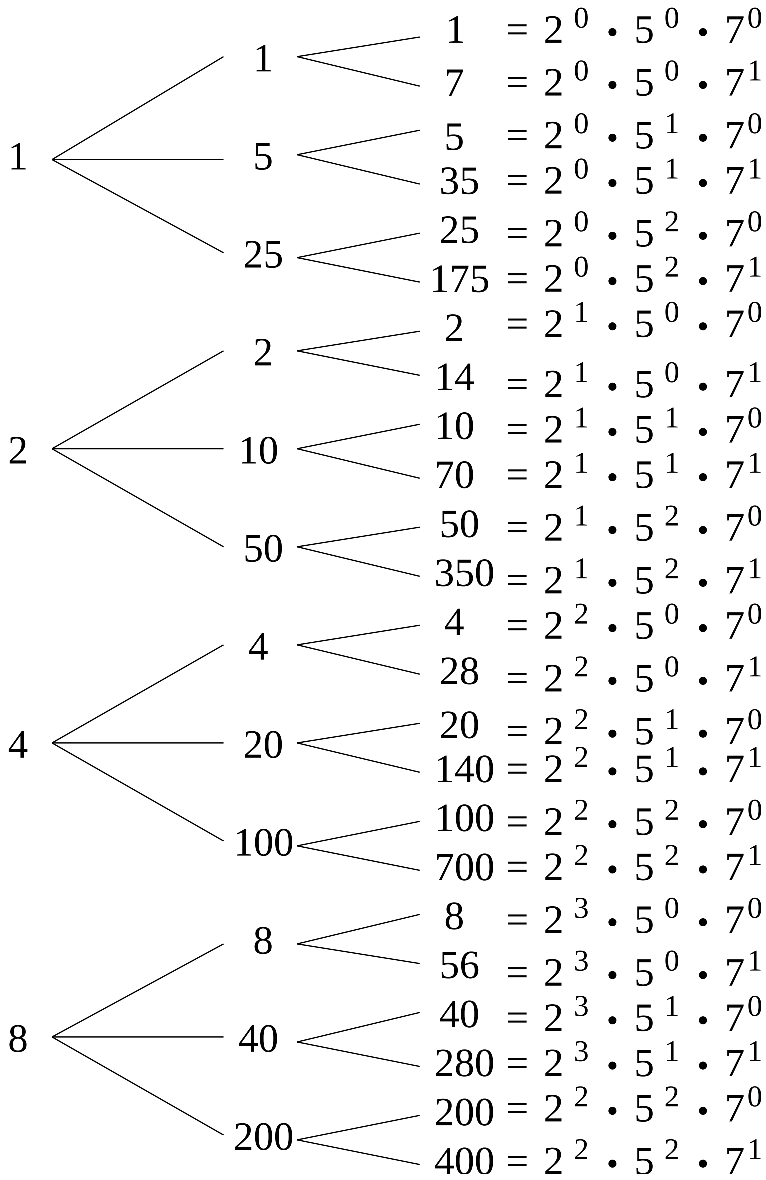
Um eine systematische Übersicht über alle Teiler zu erhalten, stellt man ein Teilerdiagramm auf. Für die Zahl 200 findet ihr es in Gestalt der beiden ersten Spalten auf der nächsten Seite. Zunächst betrachtet man die Teiler, die aus 2^3 entstehen und multipliziert diese mit den möglichen Kombinationen, die aus dem Faktor 5^2 hinzukommen. Ausgehend von $2^0 = 1$ findet man so die weiteren Teiler $2^0 \cdot 5^0 = 1, 2^0 \cdot 5^1 = 5$ und $2^0 \cdot 5^2 = 25$.

Insgesammt haben wir also $4 \cdot 3 = 12$ Teiler.
Für die Anzahl der Teiler gilt die Formel: $(3 + 1) \cdot (2 + 1)$.

Im Allgemeinen gilt:
Ist $n = p^h \cdot q^i$, wobei p und q Primfaktoren sind, so ist die Anzahl der Teiler

$$\mathbf{A(n) = (h + 1) \cdot (i + 1)}.$$

Beispiel 5: Wir betrachten die Zahl $1\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.
Die Teiler dieser Zahl stehen in der rechten Spalte des Baumdiagramms.



Zu jeder der 12 Zahlen der mittleren Spalte gehören zwei Zahlen der dritten Spalte. Insgesammt haben wir also $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Teiler.

Im Allgemeinen gilt:
Die Anzahl der Teiler einer Zahl $n = p^x \cdot q^y \cdot r^z$, mit drei Primfaktoren p, q, r ist:

$$\mathbf{A(n) = (x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1)}.$$

Für eine Zahl n mit k Primfaktoren, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ist die Anzahl der Teiler:

$$A(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Beispiel:
Die Zahl $51\,499\,800 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 17^2$ hat
$A(51\,499\,800) = (3+1) \cdot (4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 360$ Teiler.

Das regelmäßige Fünfeck

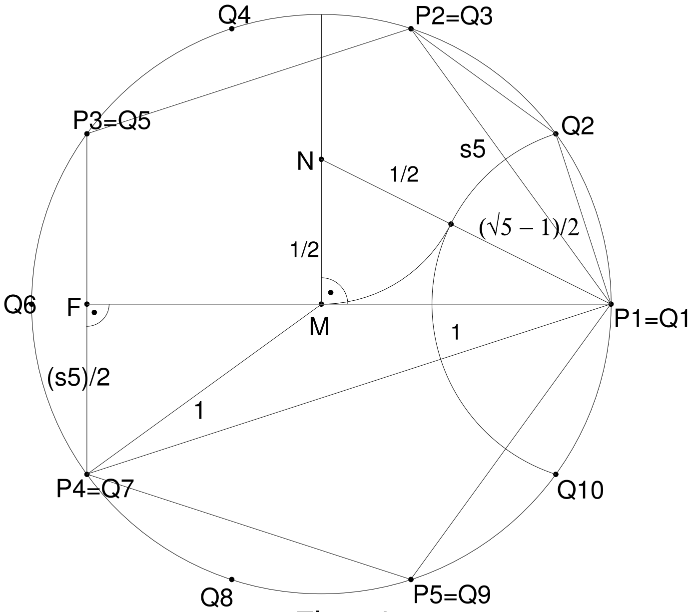
von Ekkehard Kroll

Im MONOID-Heft Nr. 72, Aufgabe 792, wurde der folgende Satz des berühmten Mathematikers Carl Friedrich Gauß (1777-1855) mitgeteilt:

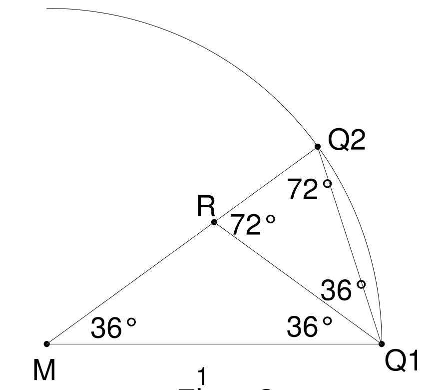
Das Produkt der Entfernungen eines Eckpunktes eines regelmäßigen n-Ecks vom Umkreisradius 1 von den übrigen Eckpunkten ergibt stets diese Zahl n.

Für $n = 4$ war die Richtigkeit vorgeführt worden, und für $n = 3$, $n = 6$ und vielleicht auch für $n = 5$ solltet ihr selbst den Beweis finden. Die Lösung für die Fälle $n = 3$ und $n = 6$ stehen auf Seite 27; auf den Fall $n = 5$ soll hier eingegangen werden.

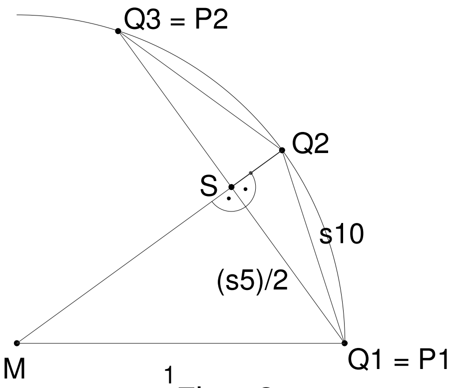
Ein regelmäßiges Fünfeck kann leicht durch Überspringen jeder zweiten Ecke eines regelmäßigen Zehnecks von gleichem Umkreisradius (hier $= 1$) erhalten werden; dessen Seitenlänge lässt sich mit Zirkel und Lineal nach folgender Methode konstruieren (Figur 1):



Figur 1



Figur 2



Figur 3

In dem Kreis um M mit Radius 1 zeichnen wir nach Wahl des Punktes Q_1 auf der Kreislinie das rechtwinklige Dreieck NMQ_1. Dann schlagen wir einen Kreis um N vom Radius $\frac{1}{2}$; sein Schnittpunkt mit der Hypotenuse hat nach dem Satz von Pythagoras von Q_1 den Abstand $(\sqrt{5}-1)/2$, was der Länge s_{10} der Seite Q_1Q_2 des regelmäßigen Zehnecks entspricht; denn wenn man in dessen gleichschenkligem Bestimmungsdreieck MQ_1Q_2 (Figur 2) die Winkelhalbierende des Winkel $\angle MQ_1Q_2$ mit der Seite MQ_2 im Punkt R schneidet, erhält man zwei weitere gleichschenklige Dreiecke, nämlich $\triangle MQ_1R$ und $\triangle Q_1Q_2R$, woraus $|MR| = |Q_1R| = |Q_1Q_2| = s_{10}$ folgt. Da auf Grund übereinstimmender Winkel die Dreiecke MQ_1Q_2 und Q_1Q_2R ähnlich sind, gilt

$$s_{10} = |Q_1Q_2| : 1 = |Q_2R| : |Q_1Q_2| = (1 - S_{10}) : s_{10},$$

also $s_{10}^2 = 1 - s_{10}$, woraus sich $s_{10} = (\sqrt{5} - 1)/2$ ergibt.
Wenden wir den Satz des Pythagoras nacheinander auf die rechtwinkligen Dreiecke MQ_1S und Q_1Q_2S an (Figur 3), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= {s_5}^2/4 + |MS|^2 = {s_5}^2/4 + (1 - |SQ_2|)^2 = {s_5}^2/4 + 1 - 2|SQ_2| + |SQ_2|^2 = \\ &= {s_5}^2/4 + 1 - 2|SQ_2| + ({s_{10}}^2 - {s_5}^2/4) \quad = 1 - 2|SQ_2| + {s_{10}}^2, \end{aligned}$$

also ${s_{10}}^2 = 2|SQ_2| = 2\sqrt{{s_{10}}^2 - {s_5}^2/4}$ und somit ${s_5}^2 = {s_{10}}^2(4 - {s_{10}}^2)$, folglich

$$s_5 = s_{10}\sqrt{4 - {s_{10}}^2}.$$

Setzen wir hierin die Formel für $s_{10} = (\sqrt{5} - 1)/2$ ein, so erhalten wir schließlich:

$$s_5 = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})/4} = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})/2}.$$

Damit ist $|P_1P_2| = |P_1P_5| = s_5$ bekannt. Um $|P_1P_3| = |P_1P_4|$ zu berechnen, wenden wir den Satz von Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke MFP_4 und P_1FP_4 an. Es ist

$$|MF| = \sqrt{1 - {s_5}^2/4} = \sqrt{1 - (10 - 2\sqrt{5})/16} = \sqrt{1 - (5 - \sqrt{5})/8},$$

somit $\qquad |P_1F| = |P_1M| + |MF| = 1 + \sqrt{1 - (5 - \sqrt{5})/8}$

und daher $\qquad |P_1P_4|^2 = (1 + \sqrt{1 - {s_5}^2/4})^2 + {s_5}^2/4 = 2 + 2\sqrt{1 - {s_5}^2/4}$

$$= 2(1 + \sqrt{s - {s_5}^2/4}) = 2(1 + \sqrt{1 - (5 - \sqrt{5})/8}).$$

Für das gesuchte Abstandsprodukt folgt nun aus diesen Formeln:

$$\begin{aligned} |P_1P_2||P_1P_3||P_1P_4||P_1P_5| &= |P_1P_2|^2|P_1P_4|^2 = (5 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{1 - (5 - \sqrt{5})/8} = \\ &= 5 - \sqrt{5} + (5 - \sqrt{5})\sqrt{3 - \sqrt{5}}/2\sqrt{2} = 5, \end{aligned}$$

da $x := (5 - \sqrt{5})\sqrt{3 + \sqrt{5}} > 0$ und $x^2 = (30 - 10\sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 10(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 40$, also $x = 2\sqrt{2}\sqrt{5}$.

2003 als Dreierkombinationen

Stefanie Tieman von der Marienberg Schule aus Neuss hat zur Aufgabe „Drei in 2003“ auf der **Seite zum Neuen Jahr** im MONOID-Heft Nr. 72 eine Lösung mit neun 3en gefunden. Der gefundene Ausdruck lautet:

$$(3 + 3)(333) + 3 + 3 - \frac{3}{3} = 2003.$$

Wenn die Fakultät erlaubt ist, gibt es sogar eine Lösung mit sieben 3en:

$$3!(333) + 3! - \frac{3}{3} = 2003.$$

Mathematik-Wettbewerb Rheinland-Pfalz, 2. Runde 2003

Aufgabe 1:
Die Tabelle zeigt den Beginn einer Aufzählung von Brüchen:

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	...
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	...

a) Beschreibe das hier angewandte Aufzählungsverfahren.

b) Bestimme die Nummer n mit $b_n = \frac{200}{3}$ und

c) den Bruch mit der Nummer 2003.

Aufgabe 2:
Andreas, Bastian, Christine und Denise, deren Familiennamen in anderer Reihenfolge Engler, Fuchs, Gerber, Hilgers lauten, gehen in die Klasse 3, 4, 5 bzw. 6 ihrer Schule. Bei der letzten Klassenarbeit im Fach Mathematik haben sie die Punktzahlen 55, 60, 65 und 70 erreicht.
Bestimme aus den folgenden Angaben Klasse, Punktzahl, Vor- und Familiennamen der vier und fasse das Ergebnis in einer Tabelle zusammen.

(a) Gerber ist in einer höheren Klasse als Hilgers.

(b) Die Jungen erzielten zusammen mehr Punkte als die Mädchen.

(c) Der Schüler bzw. die Schülerin aus der 3. Klasse hatte die höchste Punktzahl erreicht.

(d) Als Andreas und Hilgers ihre Punktzahlen mit der eines dritten dieser vier Schüler verglichen, erklärten sie: „Wenn jeder von uns seine Klassennummer mit seiner Punktzahl multipliziert, dann überschreitet jeder von uns die Zahl 260. Bei diesem dritten Schüler aber ist das Produkt gleich 260.“

(e) Bei einem Schachtunier spielte Bastian gegen Engler. Außerdem gewann Denise gegen Hilgers.

Aufgabe 3:
Ein Punkt P liegt zwischen den Schenkeln eines spitzen Winkels mit dem Scheitelpunkt S.

a) Konstruiere eine Gerade g durch den Punkt P, so dass gilt: g schneidet die Schenkel des Winkels in den Punkten Q bzw. R, und P halbiert die Strecke $\overline{QR}$.

b) Begründe: Jedes Dreieck, das von einer anderen Geraden durch P abgeschnitten wird, hat einen größeren Flächeninhalt als das Dreieck SRQ.

Aufgabe 4:

a) Ermittle alle zweiziffrigen natürlichen Zahlen, für die gilt: die um 1 vergrößerte Summe der Quadrate ihrer Ziffern ist gleich der Zahl selbst.

b) Begründe: Keine natürliche Zahl mit drei Ziffern kann mit der um 1 vergrößerten Summe ihrer Ziffernquadrate übereinstimmen.

Eine rein tabellarische Auflistung gilt nicht als Lösung.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Die Brüche sind sortiert:

1. aufsteigend nach der Summe von Zähler und Nenner (im Folgenden ZNS genannt),

2. innerhalb der Brüche mit gleicher ZNS aufsteigend nach dem Zähler.

b) In der Klasse der Brüche mit der ZNS s kann der Zähler die Werte $1, 2, \ldots, s-1$ annehmen. Also hat sie $s-1$ Elemente. Deshalb werden für die Brüche mit den ZNS $2, 3, \ldots, s$ insgesamt $1+2+\cdots+(s-1) = \frac{1}{2} \cdot (s-1) \cdot s$ Nummern benötigt.

Für die Brüche vor der ZNS 203 benötigt man $\frac{1}{2} \cdot 201 \cdot 202 = 20\,301$ Nummern.

Also hat $\frac{200}{3}$ die Nummer $20\,301 + 200 = 20\,501$.

c) Die größte ZNS s mit $\frac{1}{2} \cdot (s-1) \cdot s < 2003$ ist 63, denn $\frac{1}{2} \cdot 62 \cdot 63 = 1\,953$ und $\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 = 2\,016$.

Demnach steht an der Stelle 2003 der 50. Bruch mit der ZNS 64.

Das ist der Bruch $\dfrac{50}{14}$.

Lösung zu Aufgabe 2:

(1) Aus (d) folgt: Wegen $260 : 65 = 4$ hat der Schüler bzw. die Schülerin aus der 4. Klasse die Punktzahl 65 erreicht.

(2) Aus (c) folgt: Der Schüler bzw. die Schülerin aus der 3. Klasse hat die Punktzahl 70 erreicht.

(3) Aus (d) folgt: Wegen $3 \cdot 70 = 210 < 260$, $4 \cdot 65 = 260{,}5 \cdot 55 = 275 > 2604$ ist Andreas entweder Schüler der 5. Klasse oder der 6. Klasse bzw. Hilgers gehört entweder zur 6. Klasse oder zur 5. Klasse.

(4) Aus (a) folgt: Gerber gehört zur 6. Klasse, Hilgers zur 5. Klasse; deshalb hat Gerber nach (d) den Vornamen Andreas.

(5) Aus (e) folgt: Bastian heißt nicht Engler, Denise heißt nicht Hilgers.

(6) Aus (b) folgt: Da die beiden Schüler oder Schülerinnen aus den Klassen 5 und 6 zusammen $60 + 55 = 115$ Punkte erreichten, können es nicht zwei Jungen sein, denn $115 < 65 + 70 = 135$. Folglich besucht ein Mädchen Klasse 5. Das kann nach (5) nur Christine sein; sie hat also nach (4) den Nachnamen Hilgers.

(7) Folglich heißt wegen (e) Bastian mit Nachnamen Fuchs, Denise Engler.

(8) Wegen (b) können die beiden Jungen nur 60 und 70 bzw. 65 und 70 Punkte haben. Da Andreas nach (4) in der 6. Klasse ist, hat er nach (1), (2) 60 Punkte. Also hat Bastian 70 Punkte.

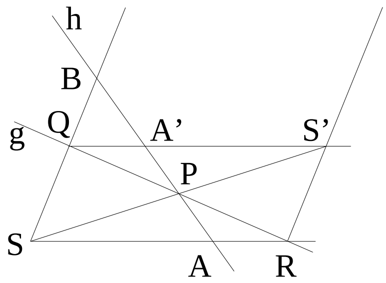
(9) Nach (1), (4) hat Christine also 55 Punkte, Denise 65 Punkte.

(10) Folglich ist nach (1) Bastian in Klasse 3, Denise in Klasse 4.

Vorname	**Nachname**	**Klasse**	**Punktzahl**
Andreas	Gerber	6	60
Bastian	Fuchs	3	70
Christine	Hilgers	5	55
Denise	Engler	4	65

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Man spiegelt den Scheitel S an P und zeichnet durch den Bildpunkt S' die Parallelen zu den beiden Schenkeln. Es entsteht ein Parallelogramm $SRS'Q$. Da P die Diagonale SS' halbiert, halbiert P auch die Diagonale QR und daher ist QR die gesuchte Gerade.



b) Zeichne eine von g verschiedene Gerade h durch P, welche die Schenkel des Winkels in A bzw. B schneidet. Dabei soll zunächst A zwischen R und S liegen. Die Parallele zu RS durch Q schneidet die Gerade h in A'. Die Dreiecke ARP und $A'QP$ sind kongruent. Das Dreieck PBQ ist um den Flächeninhalt des Dreiecks $A'BQ$ größer als das Dreieck ARP. Daher ist auch das Dreieck SRQ größer als das Dreieck SAB. Falls A nicht zwischen R und S liegt, ergibt sich eine entsprechende Lösung für B, weil dann der Punkt B zwischen Q und S liegt.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $10a + b$ sei die zweiziffrige Zahl.

Wäre $10a + b = a^2 + b^2 + 1$, so hätte man $a \cdot (10 - a) = b^2 - b + 1$.

Aus der Tabelle

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b^2 - b + 1$	1	1	3	7	13	21	31	43	57	73

ersieht man:

Nur bei $b = 5$ läßt sich $b^2 - b + 1$ in der Form $a \cdot (10 - a)$ schreiben, nämlich für $a = 3$ oder $a = 7$. Also kommen nur 35 und 75 in Frage. Die Probe zeigt, dass diese Zahlen auch tatsächlich Lösungen sind.

b) Man betrachtet eine dreistellige Zahl mit dem Wert $100a + 10b + c$.

Annahme: Wäre $100a + 10b + c = a^2 + b^2 + c^2 + 1 \Rightarrow a \cdot (100 - a) + b \cdot (10 - b) = c^2 - c + 1$.

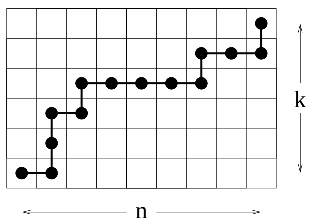
Nun gilt $a \cdot (100 - a) \geq 1 \cdot (100 - 9) = 91$ sowie $b \cdot (10 - b) \geq 10 - b \geq 1$, aber $c^2 - c + 1 \leq c^2 + 1 \leq 82$.

Dies ist ein Widerspruch, also ist die Annahme nicht möglich.

Catalán-Zahlen

von Christian Meyer

Wir wollen eine Folge von Zahlen kennenlernen, die nach dem Mathematiker **E. Ch. Catalán** (1814-1894) benannt ist. Sein Name tauchte schon in Heft 71 auf, wo darüber berichtet wurde, dass die **Catalánsche Vermutung** inzwischen bewiesen ist. Diese Vermutung hat aber nichts mit unserem Thema zu tun.
Wir starten mit folgendem Problem: Wieviele Möglichkeiten gibt es, auf einem Schachbrett mit $n \times k$ Feldern vom linken unteren Feld auf das rechte obere Feld zu gelangen, wenn man in jedem Schritt nur ein Feld nach rechts oder ein Feld nach oben gehen darf?



Man muss also insgesamt $n+k-2$ Schritte machen, nämlich $n-1$ nach rechts und $k-1$ nach oben. Die einzelnen Wege unterscheiden sich nur dadurch, wann genau man die $k-1$ Schritte nach oben macht. Die Anzahl aller erlaubten Wege entspricht also gerade der Anzahl der Möglichkeiten, aus $n+k-2$ Elementen $k-1$ Stück auszuwählen, also dem **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n+k-2}{k-1}.$$

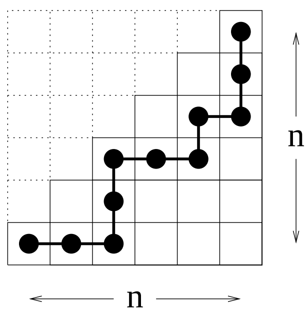
Zur Erläuterung: Der Binomialkoeffizient zu a und b (sprich "a über b" oder "b aus a") gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer a-elementigen Menge b Elemente auszuwählen. Er lässt sich berechnen durch

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!},$$

wobei $a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ die **Fakultät** von a ist, also das Produkt aller Zahlen von 1 bis a.
Wenn wir uns auf ein quadratisches Schachbrett beschränken (also $n = k$), gibt es

$$\binom{2(n-1)}{n-1}$$

verschiedene Wege. Wieviele Wege gibt es aber, die **auf oder unter der Diagonalen** bleiben?



Die Antwort ist

$$\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1},$$

also gerade der n-te Bruchteil aller Wege. Das ist gar nicht so leicht zu beweisen, aber Ihr dürft es natürlich gerne versuchen! Die Zahl

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$$

wird jedenfalls die $n-1$-te **Catalán-Zahl** genannt. Die ersten Catalán-Zahlen (beginnend mit C_0) sind also

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \ldots$$

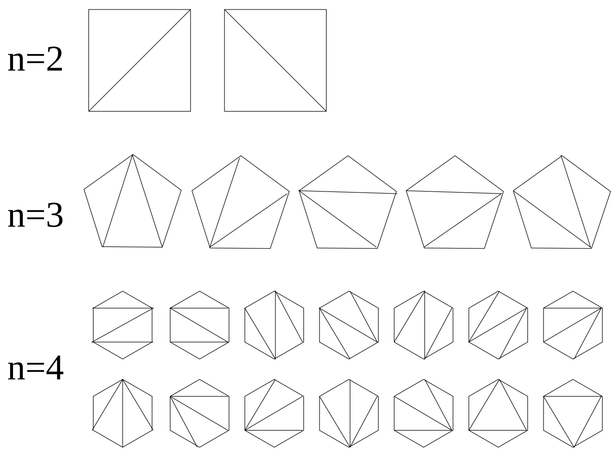
Das Faszinierende an den Catalán-Zahlen ist, dass sie noch zahlreiche weitere Interpretationen haben. So ist C_n die Anzahl aller zulässigen Klammerungen mit n öffnenden und n schließenden Klammern (eine Klammerung ist zulässig, wenn beim Durchlauf von links nach rechts immer mindestens so viele Klammern geöffnet wie geschlossen sind). Zum Beispiel ist

$$(\,)\,(\,(\,)\,(\,)\,)\,(\,(\,(\,)\,)\,)$$

eine zulässige Klammerung mit 7 öffnenden und 7 schließenden Klammern.

Der Zusammenhang zu den Wegen, die unter der Diagonalen liegen, ist nicht schwierig zu sehen: Eine geöffnete Klammer entspricht einem Schritt nach rechts, eine geschlossene einem Schritt nach oben. Die Bedingung, dass der Weg auf oder unter der Diagonalen bleibt, entspricht der Forderung, dass immer mehr Klammern geöffnet als geschlossen sind.

Eine weitere Interpretation von C_n ist die Anzahl der Möglichkeiten, wie man ein reguläres $(n+2)$-Eck in n Dreiecke unterteilen kann:



Noch ein Trick zur Berechnung von Catalán-Zahlen: In Monoid 71 wurde (in einem Artikel über die Moser-Folge) das **Pascalsche Dreieck** vorgestellt, in dem jede Zahl die Summe der beiden diagonal über ihr stehenden Zahlen ist. Tatsächlich stehen in diesem Dreieck gerade alle Binomialkoeffizienten! Etwas ähnliches (eine Art "halbes" Pascalsches Dreieck) kann man aufstellen, um die Catalán-Zahlen auszurechnen:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 2 & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 2 \\
 & & & 1 & & 4 & & 5 & \\
 & & 1 & & 5 & & 9 & & 5 \\
 & 1 & & 6 & & 14 & & 14 & \\
1 & & 7 & & 20 & & 28 & & 14
\end{array}
$$

In diesem Dreieck ist ebenfalls jede Zahl die Summe der beiden diagonal über ihr stehenden Zahlen, nur die Zahlen auf der Senkrechten werden einfach von links oben übertragen. Auf diese Weise entstehen auf der Senkrechten genau die Catalán-Zahlen! Übrigens haben alle Zahlen in diesem Dreieck eine Interpretation. Wer hat eine Idee? (Tipp: Was könnte es mit dem Zählen von Wegen zu tun haben?)

$*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$ $*$

Primzahlen und Märchen

Die Zahl 2003 ist eine **Primzahl**, das Jahr 2003 also ein **Primjahr**. Und sollte wider Erwarten das Primjahr nicht ein besonder schönes Jahr werden, so ist es doch einzigartig. Denn es hat – so die Informatiker der Universität Kaiserslautern – einen besonderen Bezug zur **Märchensammlung** von Tausendundeiner Nacht.
Teilt man eine ganze Zahl, die kein Vielfaches von 2003 ist, durch 2003, dann ergibt sich ein Dezimalbruch mit einer Periode von 1001 Ziffern. Offensichtlicher kann die Verbindung nicht sein.
Damit nicht genug. Wer die 1 durch 2003 teilt, erhält eine Periode, in der jede Zahl 100 Mal vorkommt – mit Ausnahme der 3, die 114 Mal, und der 6, die 87 Mal vorkommt. Teilt man die 2 durch 2003, dann kehrt sich das Vorkommen der 3 und der 6 um, während alle anderen Zahlen wiederum 100 Mal auftreten.
Bei solchen Zahlenspielen denkt der Leser unwillkürlich an **Pisa** sowie die Mathematik- und die Lesekomptetenz der Schüler. Das Primjahr wäre wie kein anderes geeignet, die Wissbegierde mit Zahlenspielereien anzustacheln und mit den hinreißenden Geschichten aus Tausendundeiner Nacht die Lesefähigkeit zu schulen sowie die Phantasie zu beflügeln. Fächerübergreifend.
Die Gelegenheit sollte das Bildungsministerium nicht ungenützt verstreichen lassen, denn ein **Primjahr** mit dieser Periodenlänge wird die Menschheit nach Erkenntnis aus Kaiserslautern möglicherweise nicht noch einmal erleben – zumindest nicht die heute lebende. (nach: Allgemeine Zeitung Mainz, vom 28.12.2002)

Die Seite für den Computer-Fan

Bilde für beliebige, aber feste natürliche Zahl $k \geq 1$ die drei Zahlen l, m und n nach dem folgenden Schema:

$$k \xrightarrow{+1} l \xrightarrow{\cdot k} m \xrightarrow{+1} n$$

Zwischen den vier Zahlen k, l, m und n besteht eine bemerkenswerte Gleichung.
Kannst du sie – nach Analyse einiger Beispiele – angeben? (H.F.)

Lösung der Computer-Aufgaben aus Monoid 71

Spiegelungen

Eine 7-ziffrige Zahl $a\,bcd\,efg$ hat die Teiler 13, 19, 77; die zugehörige Spiegelzahl $g\,fed\,cba$ hat die gespiegelten Teiler 31, 91, 77.

Wie heißt die Zahl und ihre Spiegelzahl?

Gibt es mehr als eine Lösung? (gefunden: H.F.)

Lösung:

Es gibt folgende Lösungen:

$1\,179\,178$ und $8\,719\,711$; $3\,347\,344$ und $4\,437\,433$;
$3\,594\,591$ und $1\,954\,953$; $3\,898\,895$ und $5\,988\,983$;
$5\,819\,814$ und $4\,189\,185$.

Beachte: Da $13, 19, 77$ paarweise teilerfremd sind, muss $a\,bcd\,efg$ durch das Produkt $13 \cdot 19 \cdot 77$ teilbar sein. Dagegen wird $g\,fed\,cba$ druch $31, 91, 77$ bereits geteilt, wenn $31 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 31\,031$ diese Zahl teilt.

Zahlenfolge

Gegeben ist die Zahlenfolge $3, 31, 331, 3\,331, \ldots, 333\,331, \ldots,$ deren Bildungsgesetz man sofort erkennt.

a) Untersuche für die ersten neun Zahlen der Folge, ob sie allesamt Primzahlen sind.

b) Falls du in der Folge eine Nicht-Primzahl findest, kannst du dann auch noch die nächstgrößere Nicht-Primzahl in der Folge angeben? (H.F.)

Lösung:

a) $333\,333\,331 = 17 \cdot 19\,607\,843$ ist erste Nicht-Primzahl.

b) Gleich die zehnte Zahl:

$$\begin{aligned} 3\,333\,333\,331 &= 673 \cdot 4\,952\,947 \\ 33\,333\,333\,331 &= 307 \cdot 108\,577\,633 \\ 333\,333\,333\,331 &= 19 \cdot 83 \cdot 211\,371\,803 \\ 3\,333\,333\,333\,331 &= 523 \cdot 3\,049 \cdot 2\,090\,353 \end{aligned}$$

Auf der Jagd nach Schwarzen Löchern für Ziffernoperatoren

von Hartwig Fuchs

Ein punktförmiges Schwarzes Loch

Das Zahlenuniversum $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sei der Wirkungsbereich (Definitionsmenge) eines **Operators V**, der so funktioniert:

Von einer Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$ zählt V sämtliche Ziffern sowie speziell die geraden und die ungeraden Ziffern und benutzt die Zählergebnisse in dieser Reihenfolge als die Ziffern einer neuen Zahl N_1.

Beispiel: $N_0 = 22\,333\,444\,555 \longrightarrow N_1 = 1156$.

Aus N_1 konstruiert V dann ebenso eine Zahl N_2, daraus $N_3 \ldots$ usw. Zu jeder Startzahl N_0 gibt es also eine V-Kette:

(1) $$N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_t \longrightarrow N_{t+1} \longrightarrow \ldots$$

Beispiel mit den Startzahlen $11, 321, 6\,555$:

$$\begin{tikzcd} & & & & 321 \arrow[dl] & \\ 11 \arrow[r] & 202 \arrow[r] & 330 \arrow[r] & 312 & & \\ & & & & 413 \arrow[ul] & 6555 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

In diesem Beispiel deutet sich schon das Unerwartete an:

(2) Jede Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$ wird von V in die Zahl 312 „hineingezogen".

(3) Eine Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$, die in 312 „hineingeraten" ist, kann diese nie wieder „verlassen", d.h. es gilt $312 \longrightarrow 312 \longrightarrow 312 \longrightarrow \ldots$

Wegen (2) und (3) nennen wir 312 ein **punktförmiges Schwarzes Loch** für V.

Beweis von (2):

$a)$ Wir zeigen zunächst: Zu jeder Startzahl $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 \geq 1\,000$ gibt es in der V-Kette (1) eine Zahl N_t, so dass gilt:

(4) $N_0 > N_1 > N_2 > \cdots > N_t \geq 1\,000 > N_{t+1}$.

$(4')$ Anschaulich: V bewirkt, dass die unendliche Menge $\mathbb{N}$ zunächst „zusammenschrumpft" zu der endlichen Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 999\}$.

Beweis von (4):

Sei N_0 n-ziffrig, $n \geq 4$, also $N_0 \geq 1\,000$. Falls $n < 10$ ist, dann hat N_0 höchstens 9 Ziffern, von denen höchstens 9 gerade sowie höchstens 9 ungerade sind.

Also ist $N_1 < 999$ und (4) trifft zu für $t = 0$, weil $N_0 \geq 1\,000 > N_1$ ist.

Falls $10^m \leq n < 10^{m+1}$ ist, $m = 1, 2, 3, \ldots$, dann hat N_0 höchstens $10^{m+1} - 1$ Ziffern und höchstens ebenso viele gerade sowie ungerade Ziffern. Weil nun $10^{m+1} - 1$ in dezimaler Schreibweise genau $m + 1$ Ziffern hat, besitzt N_1 höchstens $3 \cdot (m + 1)$ Ziffern. Nun ist aber $3 \cdot (m + 1) < 10^m$ für $m = 1, 2, 3 \ldots$, so dass N_1 weniger als 10^m, dagegen N_0 mindestens 10^m Ziffern hat.

Folglich ist $N_0 > N_1$.

Falls jetzt $1\,000 > N_1$ ist, dann gilt (4) für $t = 0$.

Falls aber $N_1 \geq 1\,000$ ist, dann führt man für N_1 die gleichen Überlegungen durch wie für N_0, und man erhält eine Zahl N_2 mit $N_1 > N_2$ usw. absteigend, bis schließlich (4) bewiesen ist.

$b)$ Zu jeder Startzahl N_0 mit $0 \leq N_0 \leq 999$, gibt es eine

(5) V-Kette $N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow 312$ bzw. $N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow 330 \longrightarrow 312$

$(5')$ Anschaulich: V bewirkt, dass sich die Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ in maximal 3 Schritten auf das Schwarze Loch 312 „zusammenzieht".

Beweis von (5):

Da N_0 höchstens 3-ziffrig ist, muss N_1 3-ziffrig sein, $N_1 = z_1 z_2 z_3$ mit $z_1 = 1, 2, 3$ und $z_2 + z_3 = z_1$; aus diesen Bedingungen folgt: $N_1 = 330, 321, 312, 303, 220, 211, 202, 110, 101$.

Für jede dieser 9 Zahlen außer 220 und 202 gilt: $N_1 \longrightarrow 312$; ferner:

$$\begin{matrix} 220 \searrow & & \\ & 330 \longrightarrow & 312. \\ 202 \nearrow & & \end{matrix}$$

Mit (4) und (5) ist (2) bewiesen und durch $(4')$ und $(5')$ veranschaulicht.

Ein Paar punktförmiger Schwarzer Löcher

Das Zahlenuniversum $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ sei der Wirkungsbereich eines **Operators U**: Von einer Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$ zählt U zuerst die Ziffern, dann die durch 3 teilbaren und zuletzt die nicht durch 3 teilbaren Ziffern und verwendet die Zählergebnisse in dieser Reihenfolge als die Ziffern einer neuen Zahl N_1. Aus N_1 konstruiert U analog eine Zahl N_2 usw., und so ergibt sich eine U-Kette

(1) $$N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow N_t \longrightarrow N_{t+1} \longrightarrow \dots$$

Für jede Startzahl $N_0 \geq 1\,000$ beweist man dann ähnlich wie bei V, dass zu (1) eine Ungleichungskette (4) mit einem $t \geq 0$ gehört. Ein eventuelles Schwarzes Loch für U muss daher ≤ 999 sein.

Überprüfe nun selbst die Behauptung:

Für U gibt es ein **Paar punktförmiger Schwarzer Löcher**: 312 und 330.

Beispiele: $0 \longrightarrow 110 \longrightarrow 312$ $$\begin{matrix} 13 \searrow & & & \\ & 211 \longrightarrow & 303 \longrightarrow & 330 \\ 79 \nearrow & & & \end{matrix}$$

Ein Schwarm punktförmiger Schwarzer Löcher

Auf der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ legen wir die **Operatoren Q und P** so fest: Für eine feste Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = z_1 z_2 \dots z_n$ in Ziffernschreibweise, $n \geq 1$, sei

$Q : N_0 = z_1 z_2 \dots z_n \longrightarrow N_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ (Quersumme von N_0),

$P : N_0 = z_1 z_2 \dots z_n \longrightarrow N_1 = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$ (Querprodukt von N_0).

Auch zu Q und P können Q-Ketten und P-Ketten wie in (1) konstruiert werden.

Beispiele:

Q: $746 \longrightarrow 17 \longrightarrow 8$

P: $168 \longrightarrow 48 \longrightarrow 32 \longrightarrow 6$

Für die Operatoren Q und P gilt: Zu jeder Zahl $N_0 \geq 10$ gibt es eine Q-Kette (1) sowie eine P-Kette (1), so dass

(6) $$N_0 > N_1 > \dots > N_t \geq 10 > N_{t+1} \text{ für ein } t \geq 0.$$

Wir beweisen (6) nur für P:

Für jedes $n \geq 2$ gilt: $10^{n-1} > 9^{n-1}$. Daher ist für N_0:

$N_0 = z_1 z_2 \dots z_n \geq z_1 \cdot 10^{n-1} > z_1 \cdot 9^{n-1} \geq z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = N_1$. Also ist $N_0 > N_1$. Entweder ist nun $10 > N_1$, und man hat (6), oder man zeigt (so wie bei N_0), dass $N_1 > N_2$ usw. absteigend, bis (6) bewiesen ist.

Aus (6) folgt für Q und für P, dass man für sie Schwarze Löcher nur unterhalb von 10 finden kann.

Da für 1-ziffrige Zahlen N_0 bei Q und bei P gilt: $N_0 \longrightarrow N_0$, ist jede Zahl < 10 ein Schwarzes Loch. Also: Q und P besitzen beide den gleichen **Schwarm punktförmiger Schwarzer Löcher**, nämlich $1, 2, \ldots, 9$.

Ein kreisförmiges Schwarzes Loch

Der auf $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ definierte **Operator T** zählt bei einer Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$ zuerst die Ziffern, dann die durch 6 teilbaren und schließlich die nicht durch 6 teilbaren Ziffern, und diese Zählergebnisse bilden in dieser Reihenfolge die Ziffern einer neuen Zahl N_1. Wie oben beim Operator V beweist man: Zu jeder Startzahl $N_0 \geq 1\,000$ gibt es eine T-Kette (1) mit der Eigenschaft (4), d.h. jede T-Kette muss die Zahl $1\,000$ „unterschreiten “, so dass es Schwarze Löcher nur unterhalb von $1\,000$ geben kann. Überprüfe nun selbst: Es gibt keine punktförmigen Schwarzen Löcher für T.
Dagegen hat T (genau) einen neuartigen Typ eines Schwarzen Lochs, den wir **kreisförmig** nennen wollen: es handelt sich um den Zyklus:
$312 \longrightarrow 303 \longrightarrow 312 \longrightarrow 303 \longrightarrow \ldots.$

$$\text{Beispiel:} \quad \begin{tikzcd} 606 \arrow[r] & 330 \arrow[r] & 312 \arrow[r, bend right] & 303 \arrow[l, bend right] & 211 \arrow[l] & 65 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ein Zoo von Schwarzen Löchern

Der **Operator R** wird für jede Zahl N_0 aus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $N_0 = z_1 z_2 \ldots z_n, n \geq 1$, so definiert: R : $\quad N_0 = z_1 z_2 \ldots z_n \longrightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \cdots + z_n^3 = N_1$.

$$\text{Beispiele:} \quad \begin{tikzcd} 371 \arrow[r] & 3^3 + 7^3 + 1^3 = 371 \arrow[loop right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 133 \arrow[r] & 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55 \arrow[r] & 5^3 + 5^3 = 250 \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

Behauptung:
Zu jeder Startzahl $N_0 \geq 10^4$ gibt es eine T-Kette (1) mit der Eigenschaft
$(7) \qquad N_0 > N_1 > \cdots > N_t \geq 10^4 > N_{t+1}$ für ein $t \geq 0$.
Beweis:
Es sei $N_0 \geq 10^4$. Wegen $10^{n-1} > n \cdot 9^3$ für $n \geq 5$ gilt
$N_0 = z_1 z_2 \ldots z_n \geq 10^{n-1} > n \cdot 9^3 \geq z_1^3 + z_2^3 + \cdots + z_n^3 = N_1$ und somit $N_0 > N_1$. Nun schließt man von N_1 aus ganz analog weiter wie oben beim Operator V, bis sich schließlich (7) ergibt.
Aus (7) folgt: Schwarze Löcher für R kann es nur unterhalb von 10^4 geben. Mit einem Computerprogramm findet man sie alle. Es sind
6 punktförmige Schwarze Löcher: $0, 1, 153, 370, 371, 407$ und
4 kreisförmige Schwarze Löcher:

$$\begin{tikzcd} 244 \arrow[r, bend right] & 136 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 919 \arrow[r, bend right] & 1459 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 133 \arrow[r] & 55 \arrow[r] & 250 \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 217 \arrow[r] & 352 \arrow[r] & 160 \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

Ein Kriterium für eine erfolgreiche Jagd nach Schwarzen Löchern

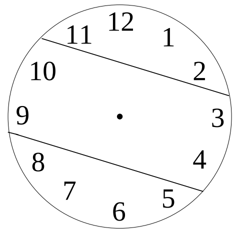
Es sei O ein auf $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ erklärter Operator mit Werten in $\mathbb{N}$. Eine Suche nach **allen** Schwarzen Löchern von O wird dann erfolgreich sein, wenn jede T-Kette $N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_t \longrightarrow N_{t+1} \longrightarrow \ldots$ die folgende Eigenschaft besitzt: $N_0 > N_1 > N_2 > \cdots > N_t \geq C > N_{t+1}$, wobei C eine feste Zahl ist, die von jeder T-Kette also irgendwann einmal unterschritten wird. Dann braucht man nämlich nach Schwarzen Löchern für O nur in der endlichen Menge $\{0, 1, 2, \ldots, C - 1\}$ zu suchen – und das lässt sich (im Prinzip zumindest) mit einem Computer erledigen. Die oben definierten Operatoren V, U, Q, P, T, R erfüllen allesamt dieses Erfolgskriterium.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 72

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Die Uhr

Zeichne 2 Strecken mit den Endpunkten auf dem Kreis so in die Uhr ein, dass die Summe der Zahlen in jedem Teil der Uhr gleich ist. (Judith Reinhardt)



Lösung:
Die Strecken liegen parallel und unterteilen die Uhr in genau 3 Teile, in denen die Summe jeweils 26 beträgt. Die Summe aller Zahlen der Uhr (von 1 bis 12) beträgt 78. Mit 2 Strecken kann ich die Uhr in maximal 4 Teile unterteilen. Dies geht aber nicht genau auf (19,5). Also müssen es 3 Teile mit der Summe 26 sein.

Fällt Freddy?

a) Freddy soll eine Glühbirne einschrauben. Er stellt fest, dass jeder Stuhl, auf den er sich dazu stellen will, wackelt. Dann findet er einen dreibeinigen Hocker. Dieser wackelt nicht. – *Warum ist das so?*

b) Daraus, dass dreibeinige Hocker nicht wackeln können, schließt Freddy, dass er sich auf den Hocker stellen kann ohne das Risiko, dass dieser kippt und er fällt. *Ist dieser Schluss richtig?* (WJB)

Lösung:

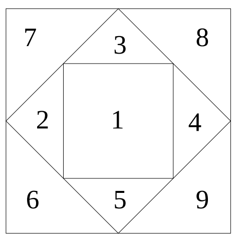
a) Die „Fußpunkte“ der drei Beine liegen in einer Ebene. Wenn der Hocker im Raum steht, ist dies die Boden-Ebene.

b) Wenn die Sitzplatte des Hockers größer ist als das von den Fußpunkten gebildete Dreieck, kann sich Freddy so stellen, dass der Schwerpunkt nicht über dem Dreieck liegt. In diesem Fall kippt der Hocker.

Schwierige Babys
Im Zoo wurden vor kurzem 9 Giraffen-Babys geboren. Sie sitzen noch in einem gemeinsamen Quadrat als Gehege. (3 in einer Reihe, 3 Reihen). Jedes soll aber sein eigenes, kleines Gehege erhalten.
Wie viele neue Quadrate muss man in das ursprüngliche Quadrat mindestens bauen, um für jede Giraffe ein eigenes Gehege zu schaffen? (Felix Liebrich)

Lösung:

Wie in der Skizze dargestellt, benötigt man 2 neue Quadrate, deren Seitenmitten immer die Ecken des jeweils kleineren Quadrats sind.



Kreisteilung

Zeichne einen Kreis vom Radius r um den Mittelpunkt M.

a) Kannst Du nun allein mit dem Zirkel die Fläche dieses Kreises in 6 gleich große Flächenstücke unterteilen?

(Konstruktionsbeschreibung und Lösungsfigur angeben!)

b) Kannst Du allein mit dem Zirkel die Fläche dieses Kreises auch in 12 gleich große Flächenstücke zerlegen?

(Auch hier Konstruktionsbeschreibung und Lösungsfigur angeben!)

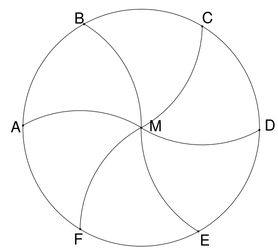
(H.F.)

Lösung:

zu a) Wähle einen beliebigen Punkt A auf dem gezeichneten Kreis mit Radius r und trage von A aus 5 Mal den Radius r auf dem Kreis ab – man erhält die Punkte B, C, D, E, F.

Zeichne nun den Bogen MB des Kreises vom Radius r um A, sodann den Bogen MC des Kreises vom Radius r um B, usw. .

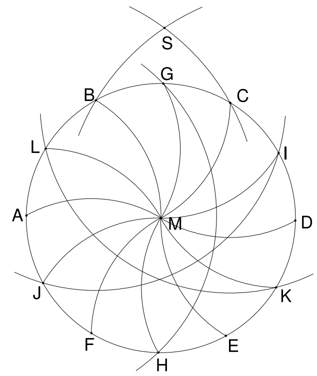
Man erhält so die abgebildete Lösungsfigur.



zu b) Wende auf die im Teil a) erhaltene Figur das Verfahren zu Lösung von "Napoleons Problem" aus MONOID-Heft Nr.70 an:

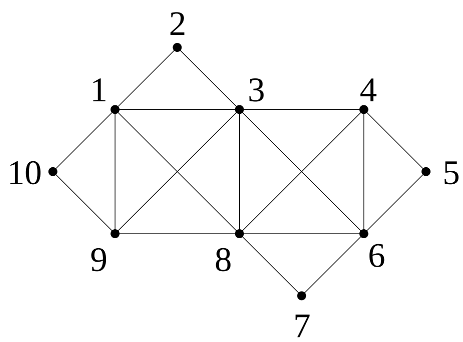
Kreis um A mit Radius $|AC|$ und Kreis um D mit Radius $|DB| = |AC|$ schneiden sich in S.

Kreis um A mit Radius $|MS|$ liefert die Schnittpunkte G und H, die Mitte der Kreisbögen BC und EF; die Kreise B und C mit dem Radius $|MS|$ liefern die restlichen Punkte. Nun wieder die Bögen MB, MG, MC, …, MA eintragen!



Eine schwierige Reise

Kannst du diese Figur mit einem Bleistift in einem Zug (ohne Absetzen) nachzeichnen, ohne irgendeine Linie doppelt zu zeichnen?
(Eckpunkte und Kreuzungspunkte dürfen mehrmals durchlaufen werden.) (H.F.)



Lösung:

Eine mögliche Lösung lautet zum Beispiel:
1 - 3 - 4 - 5 - 6 - 8 - 9 - 1 - 2 - 3 - 6 - 7 - 8 - 1 - 10 - 9 - 3 - 8 - 4 - 6.

In der Spielbank

Meine Arbeitskollegen meinten, Ernst Müller sollte kein schlechtes Beispiel geben, indem er sein Kind (verbotenerweise) mit in die Spielbank nimmt. Aber **Patricia ist kein Kind mehr**: Ein Jahr, bevor sie volljährig wurde, war ich dreimal so alt wie Patricia. Meine Frau ist drei Jahre jünger als ich und jetzt (2002) doppelt so alt, wie Patricia.

Wie alt bin ich? (WJB)

Lösung:

Als Patricia 17 war, war ich 51. Also ist der Altersunterschied zu mir 34 und deshalb zu meiner Frau 31. Also muss Patricia jetzt 31 Jahre, meine Frau 62 Jahre und ich **65** Jahre alt sein.

Honigbienen

Bei den Honigbienen entstehen die Königinnen und die Arbeiterinnen aus befruchteten Eiern, haben also zwei Eltern, eine Königin und eine Drohne. Die männlichen Drohnen entstehen aus unbefruchteten Eiern, haben also nur eine Mutter, keinen Vater.

a) Wie viele Großeltern, Urgroßeltern hat eine Drohne? Wie viele Vorfahren vor 5 Generationen?

b) Ist V_n die Anzahl der Vorfahren vor n Generationen, so lässt sich mit $V_0 = 1$ (die Drohne selbst), $V_1 = 1$ (ihre Mutter) die Anzahl V_{n+2} berechnen aus V_{n+1} und V_n. Wie ist dies möglich?

Anmerkung: Bei der Berechnung soll der "Ahnenschwund", – d.h. die Möglichkeit, dass mehrere Bienen einer Generation gleiche Vorfahren haben, – nicht berücksichtigt werden. (gefunden von WJB)

Lösung:

a) Durch Betrachten des Stammbaums sieht man direkt, dass eine Drohne 2 Großeltern, 3 Urgroßeltern und 8 Vorfahren von 5 Generationen hat.

   Dies ergibt sich auch aus Teil b).

b) K_n und D_n seien die Anzahlen der Königinnen und der Drohnen vor n Generationen. K_{n+2} ist die Anzahl der Mütter der V_{n+1} Bienen in der $n+1$-ten Vorfahrgeneration, also $K_{n+2} = V_{n+1}$. D_{n+2} ist die Anzahl der Väter der K_{n+1} Königinnen der $n+1$-ten Vorfahrgeneration, also $D_{n+2} = K_{n+1}$.

   Mit $K_{n+1} = V_n$ ergibt sich insgesammt

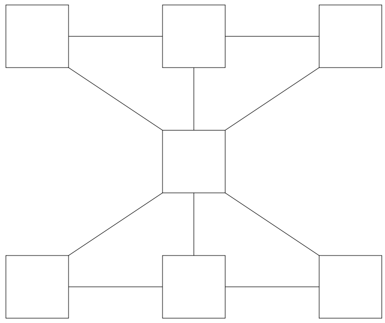
$$V_{n+2} = K_{n+2} + D_{n+2} = V_{n+1} + K_{n+1} = V_{n+1} + V_n.$$

   Die Beziehung $V_0 = 1, V_1 = 1, V_{n+2} = V_{n+1} + V_n$ definieren gerade die bekannte Fibonacci-Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Zahlenrätsel



Schreibe die Zahlen von 141 bis 147 so in die leeren Kästchen, dass die Summe von 3 auf einer Gerade liegenden Zahlen immer gleich ist.
(Judith Reinhardt)

Mario malt

Der obere Teil der Bordwand eines auf dem Bodensee liegenden Schiffes wird von dem $168cm$ großen Malerlehrling gestrichen. Er steht dabei auf der (von oben gezählt) zwölften Sprosse einer Strickleiter mit $20cm$ Sprossenabstand $6cm$ über dem Wasserspiegel.

Nach einer Unterbrechung der Arbeit wegen heftigen Regens ist der Wasserspiegel des Sees um $28cm$ gestiegen und es gibt jetzt $17cm$ hohe Wellen.
Bis zu welcher Stufe kann Mario absteigen ohne nasse Füße zu bekommen?

Nochmal passende Ziffern
Der Text $SEND + MORE = MONEY$ (siehe Monoid 68) stand im Telegramm eines amerikanischen Studenten an seinen Vater. Vom Antwort-Telegramm

$$MONEY - STAYS = HERE$$

war er natürlich enttäuscht.
Auch dieser Text ergibt durch Ersetzen der Buchstaben durch Ziffern eine sinnvolle Rechnung! (WJB)

6 Geraden
Kannst du 6 Geraden so zeichnen, dass jede einzelne Gerade sich mit genau 4 der anderen Geraden schneidet? (H.F.)

Weitere Mathespielereien findest du auf der nächsten Seite.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Der Radfahrer

Als ein Radfahrer zwei Drittel seines Weges zurückgelegt hatte, platzte ein Reifen. Für den Rest des Weges brauchte er zu Fuß doppelt so viel Zeit wie für die bisherige Fahrt mit dem Rad.

Wievielmal schneller war er mit dem Rad gefahren, als er lief?

(gefunden von K.E.)

Buchstabengleichung

Ersetze in der „Gleichung“ $MATHE + IST + MEIN = LEBEN$ jeden Buchstaben durch eine Ziffer, wobei gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern zu ersetzten sind und alle Ziffern von $0, 1, 2 \ldots, 9$ verwendet werden.

Es gibt mehrere verschiedene Lösungen.

Bestimme mindestens zwei davon. (H.F.)

Drei Freunde vor Mitternacht

Die drei Freunde Maht Genie, Karl Napp und Great Clapp treffen sich regelmäßig und jeder redet über sein jeweiliges Lieblingsthema. Ihr Problem ist, dass ihre Abende immer wieder viel zu lange, bis weit nach Mitternacht dauern.

Eines Abends, um genau 22 Uhr, macht Math Genie folgenden Lösungsvorschlag: „Jeder von uns darf so **oft** reden, wie er will. Wir müssen nur darauf achten, dass jeder von uns jedes mal nur **halb so lang** redet wie sein Vorredner. Am Besten fange ich gleich an.“

Math Genie redet dann genau eine Stunde lang über seine neueste Variante des Causchyschen Konvergenzkriteriums.

Warum ist die Sitzung tatsächlich vor 24 Uhr zu Ende, warum sind die beiden anderen sauer auf Math Genie?

Wasser in Milch

Milch enthält 87% Wasser. Daraus wird durch Verdampfen ein Teil des Wassers Kondensmilch mit einem Wassergehalt von 74% hergestellt.

Wieviel Kondensmilch erhält man dabei aus 1000kg Milch?

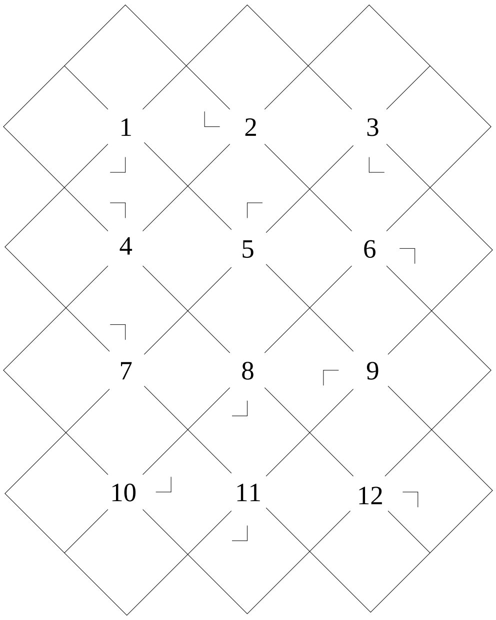
(WJB)

Bereits auf Seite 19 findest du weitere Mathespielereien.

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 796. Zahlenrätsel



Trage um die Nummern herum 4-ziffrige natürliche Zahlen in die Felder ein, je Feld eine Ziffer; das Anfangsfeld und die Schreibrichtung sind durch einen Haken angegeben.

1	:	$v - x$
2	:	$v =$ Vielfaches von 383
3	:	$w =$ kleinstmögliche Primzahl
4	:	$7w$
5	:	$x =$ eine in diesem Jahr häufig vorkommende Zahl
6	:	eine 4-te Potenz
7	:	$3y$
8	:	$y =$ Produkt aus 5 aufeinanderfolgender Primzahlen -9
9	:	$v : 6 + 2$
10	:	$5w$
11	:	Zahl mit den Teilern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
12	:	Spiegelzahl von $5w$. (H.F.)

Aufgabe 797.

Ein Wanderer bricht in seinem Urlaubshotel um 14 Uhr auf, um einen benachbarten Berg zu erwandern. In der Ebene geht er mit 4 km/h; bergauf verlangsamt sich seine Geschwindigkeit auf 3 km/h. Oben angekommen macht er sich sofort auf den Rückweg mit 6 km/h bergab (und wieder 4 km/h, nachdem er in der Ebene angekommen ist). Er ist um 20 Uhr zurück beim Hotel.

a) Wie weit ist es vom Hotel bis zum Berggipfel?

b) Gib (mit einem Fehler von höchstens einer halben Stunde) an, wann der Wanderer den Gipfel erreicht hat. (nach Lewis Carroll)

Aufgabe 798.

Es gilt (1) $\quad 3^2 + 4^2 = 5^2$

sowie (2) $\quad 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

Begründe:

Die Gleichungen $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ und $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ haben außer der in (1) bzw. der in (2) angegebenen keine weiteren Lösungen mit einer natürlichen Zahl x. (H.F.)

Aufgabe 799.

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl, die genau 2003 Teiler hat.

(Steffen Biallas)

Aufgabe 800.
Für welche $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, gibt es k unmittelbar aufeinander folgende natürliche Zahlen, deren Summe 2003 ist? (H.F.)

Aufgabe 801.
Das DINA-System für Papier ist folgendermaßen aufgebaut:
DINA 0 ist $1m^2$, das Verhältnis der Seiten ist $\sqrt{2} : 1$. Hieraus entsteht DINA 1 durch Halbieren der längeren Seite. Dieses Verfahren wird wiederholt; halbiert man die längere Seite von DINA 1 so ergibt sich DINA 2 usw. .

a) Zeige, dass das Verhältnis längere Seite : kürzere Seite für jedes DINA-Format gleich $\sqrt{2} : 1$ ist.

b) Wie oft muss man halbieren, bis die Fläche kleiner ist als $1cm^2$? Welches DINA-Format ist dies?

c) Ein Stapel von 500 Blättern ist 4cm dick.

   Wie dick wird der Stapel, der entsteht, wenn man ein DINA 0 Blatt in DINA 4 zerlegt und die Einzelblätter aufeinanderlegt? Wie dick wird er ungefähr im Fall aus Teil b)?

d) Wie oft muss man mindestens schneiden, um ein DINA 0 Blatt in DINA 4 Blätter zu zerlegen, wenn man nie Blätter aufeinanderlegen und gleichzeitig durchschneiden darf?

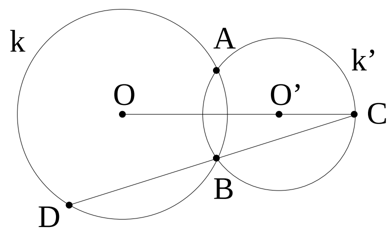
TIPP zu Teil b) und c): Verwende die Näherung $2^{10} \approx 1\,000$. (WJB)

Aufgabe 802. Wahr oder falsch?
$912\,985\,153 = 9^9 + 1^9 + 2^9 + 9^9 + 8^9 + 5^9 + 1^9 + 5^9 + 3^9$?
Findest du weitere solche Zahlen? (H.F.)
Hinweis: Zur Lösung lies den Artikel „Auf der Jagd nach Schwarzen Löchern für Ziffernoperatoren“ auf den Seiten 15-17.

Aufgabe 803.
Gegeben seien zwei Kreise k, k' mit Mittelpunkten O, O', die sich in A und B schneiden. Die Verlängerung der Strecke OO' schneide k' in C. Die Verlängerung der Strecke CB schneide k in D.

Gegeben sei:
$\overline{AB} = 3$, $\overline{BD} = \sqrt{5}$, $\sin(\angle ABC) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Berechne die Radien der beiden Kreise sowie die Länge der Strecke $\overline{OO'}$. (VB)



Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 72

Kl. 8-13

Aufgabe 789. Ernst Müller in Baden-Baden

Nach seinem hohen Gewinn in der Spielbank Wiesbaden (vgl. Monoid 69, Seite 19) leistet sich Ernst Müller einen Ausflug nach Baden-Baden, begleitet von seiner Tochter Patricia. Sie besuchen die dortige Spielbank mit einem Anfangskapital von je $10\,000$ Euro.

Herr Müller und Patricia setzen in jedem Spiel genau die Hälfte des Kapitals, das ihnen gerade zur Verfügung steht (im ersten Spiel also $5\,000$ Euro). Ernst Müller spielt wie in Wiesbaden ein Spiel, bei dem sich sein Einsatz verdreifacht. Patricia ist mutiger und spielt eine Variante, bei der zwar die Gewinnwahrscheinlichkeit geringer ist, aber im Gewinnfall der 5fache Einsatz ausbezahlt wird.

Nach jeweils drei Spielen haben Vater und Tochter zusammen $27\,500$ Euro. Wie oft hat Patricia gewonnen? (WJB)

Lösung:

Bei jedem Gewinn verdoppelt, bei jedem Verlust halbiert sich das Vermögen von Ernst Müller. Nach E Gewinnen (und deshalb $3-E$ Verlusten) hat er also $2^E \cdot (\frac{1}{2})^{3-E} = 2^{2E-3}$ mal $10\,000$ Euro. Entsprechend verdreifacht sich Patricias Vermögen im Gewinnfall. Sie hat nach P Gewinnen also $3^P \cdot (\frac{1}{2})^{3-P} = \frac{6^P}{8}$ mal $10\,000$ Euro . In beiden Fällen kommt es auf die Reihenfolge von Gewinnen und Verlusten nicht an.

Überprüfen der 16 möglichen Fälle $E \in \{0,1,2,3\}$ und $P \in \{0,1,2,3\}$ ergibt, dass das Gesamtvermögen von $27\,500$ Euro, also der Faktor $2^{2E-3} + \frac{6^P}{8} = 2{,}75 = \frac{11}{4}$ dann, aber auch nur dann erreicht wird, wenn $P = 1$ und $E = 2$, also Patricia einmal und Ernst zweimal gewinnt.

Aufgabe 790.

Die Erde hat einen Umfang von $40\,000$ km. Ein Flugzeug kann Sprit für $20\,000$ km tanken. Es existiert nur ein Flughafen; Flugzeuge können untereinander in der Luft ohne Verlust Sprit austauschen und auch ohne Zeitverlust am Flughafen neuen Sprit tanken.

Wie viele Flugzeuge benötigt man mindestens, damit ein Flugzeug die Erde ohne Zwischenlandung umrunden und auch alle Hilfsflugzeuge wieder den Flughafen erreichen können. (gefunden von Kerstin Bauer)

Lösung:

Man benötigt 3 Flugzeuge und 5 Tankladungen Sprit:

Flugzeug A sei das Flugzeug, das die Erde umrundet, B und C seien Hilfsflugzeuge.

A, B und C fliegen gemeinsam los. C gibt nach $5\,000$ km an A und B jeweils Sprit für $5\,000$ km ab und kehrt mit dem Rest zum Flughafen zurück. Nach weiteren $5\,000$ km gibt B den übernommenen Sprit für $5\,000$ km weiter an A und fliegt zurück. Mit dem zusätzlich geladenen Sprit kommt A $30\,000$ km weit. Nun fliegt B die $10\,000$ km A entgegen, übergibt A Sprit für $5\,000$ km und beide nähern sich dem Flughafen auf

$5\,000$ km. C fliegt ihnen entgegen, übergibt jedem Flugzeug Sprit für $5\,000$ km und alle 3 Flugzeuge kehren zurück.

Beweis, dass es mit weniger als 3 Flugzeugen nicht geht:

Ein Flugzeug allein kann die Weltumrundung nicht schaffen, da der Sprit nur für den halben Flug reicht.

Fliegen zwei Flugzeuge los, so muss das Hilfsflugzeug nach spätestens $\frac{20\,000}{3}$ km, max. $\frac{1}{3}$ seines Sprits abgeben und kehrt dann zurück. Bei früherer Spritabgabe kann das Flugzeug, das die Erde umrundet, wegen der begrenzten Tanklast weniger aufnehmen, später kann das Hilfsflugzeug für jeden mehr geflogenen km Sprit für 2 km weniger abgeben, also ein Verlust. Das Flugzeug, das die Erde umrundet, kommt damit $20\,000$ km + $\frac{20\,000}{3}$ km $< 30\,000$ km weit.

Da es noch mehr als $10\,000$ km vom Flughafen entfernt ist, kann es von einem Hilfsflugzeug allein nicht mehr erreicht werden. Also braucht man mindestens drei Flugzeuge.

Aufgabe 791.

Der Vorstandschef eines großen Konzerns tritt am Ende des Jahres vor seine Mitarbeiter und sagt:

"Die Summe der Bilanzen an jeweils fünf aufeinanderfolgenden Monaten in diesem Jahr ist stets positiv!"

Können die Mitarbeiter daraus schließen, dass der Konzern in diesem Jahr Gewinn erwirtschaftet hat?

Wenn nein, wie hoch kann der Verlust höchstens sein?

Was wäre, wenn der Vorstandschef statt "aufeinanderfolgend" das Wort "beliebig" genommen hätte? (VB)

Lösung:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ die Bilanzen der 12 Monate, so zeigt das Beispiel

$$a_1 = a_6 = a_{11} = -K$$
$$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{12} = \frac{K+1}{4},$$

dass die Summe jeweils fünf aufeinanderfolgender Bilanzen 1 sein kann, aber die Jahresbilanz

$$-3K + \frac{9}{4}K + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}K + \frac{9}{4}$$

mit wachsendem K beliebig verlustreich werden kann.

Hätte der Chef von jeweils 5 beliebigen Monaten gesprochen, so wäre

$$5\sum_{j=1}^{12} a_j = \sum_{j=1}^{5} a_j + \sum_{j=6}^{10} a_j + (a_{11} + a_{12} + a_1 + a_2 + a_3) + \sum_{j=4}^{8} a_j + (a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_1) + \sum_{j=2}^{6} a_j + \sum_{j=7}^{11} a_j + (a_{12} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \sum_{j=5}^{9} a_j + (a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_1 + a_2) + \sum_{j=3}^{7} a_j + \sum_{j=8}^{12} a_j > 0,$$

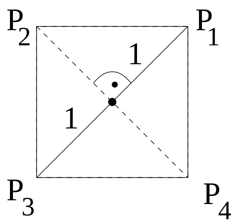
die Gesamtbilanz also stets positiv. (Hinweis für die Mittelstufe: $\sum_{j=m}^{n} a_j$ bedeutet $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$.)

Aufgabe 792. Eine Aufgabe von C.F. Gauß

C.F. Gauß hat 1811 in seiner Arbeit ”Summierung gewisser Reihen von besonderer Art” den folgenden geometrischen Sachverhalt mitgeteilt:

Für ein regelmäßiges n-Eck mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \dots, P_n$ und dem Umkreisradius der Länge 1 hat das Produkt der Längen aller Strecken $\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}, \dots, \overline{P_1P_n}$ den Wert n.

Beispiel: $n = 4$



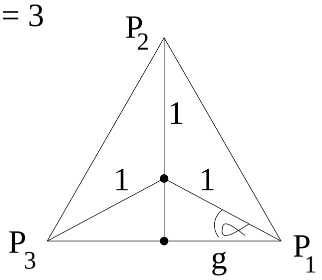
Im Quadrat $P_1P_2P_3P_4$ gilt:
$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{2}$
$|\overline{P_1P_3}| = 2$
$|\overline{P_1P_4}| = \sqrt{2}$
Somit $|\overline{P_1P_2}| \cdot |\overline{P_1P_3}| \cdot |\overline{P_1P_4}| = 4$.

Finde nun selbst Beweise für $n = 3$ (gleichseitiges Dreieck) und für $n = 6$ (regelmäßiges Sechseck).

Vielleicht findest du auch einen Beweis für $n = 5$? (H.F.)

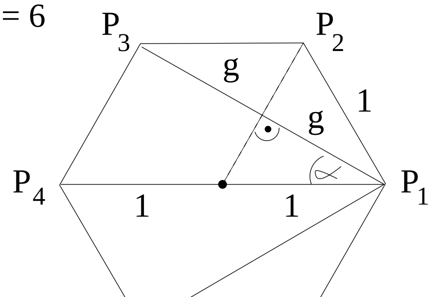
Lösung:

n = 3



$\alpha = 30° \Rightarrow g = \cos 30° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow |\overline{P_1P_3}| = \sqrt{3}$.
Ebenso $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{3}$.
Somit $|\overline{P_1P_2}| \cdot |\overline{P_1P_3}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

n = 6

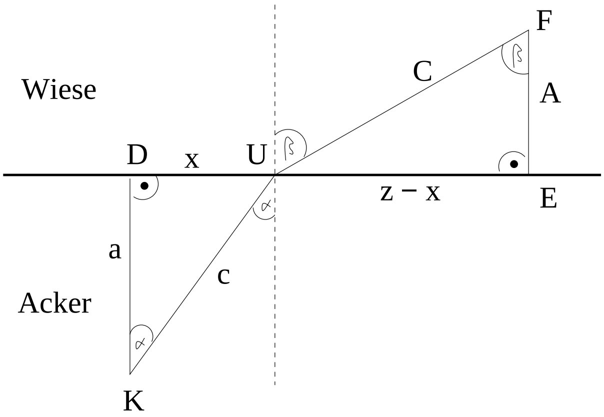


$\alpha = 30° \Rightarrow g = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow |\overline{P_1P_3}| = \sqrt{3}$.
Ebenso $|\overline{P_1P_5}| = \sqrt{3}$.
Somit
$|\overline{P_1P_2}| \cdot |\overline{P_1P_3}| \dots |\overline{P_1P_6}| = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = 6$.

Den Beweis der Behauptung von Gauß für den Fall $n = 5$ findet ihr im Artikel „Das reguläre Fünfeck“ auf Seite 6 dieses Heftes.

Aufgabe 793. Karl klaut Kirschen

Kirschendieb Karl muss vom Kirschbaum K fliehen. Sein Fahrrad steht bei F. Auf dem Acker kommt er mit Geschwindigkeit v voran, auf der angrenzenden Wiese mit der doppelten Geschwindigkeit $2v$.



Wie muss er den Punkt U, d.h. den Winkel α bzw. β, wählen, um sein Fahrrad *auf dem schnellsten Weg* zu erreichen?

(WJB)

Lösung:
$|\overline{KD}| = a, |\overline{FE}| = A$ und $|\overline{DE}| = z$ sind fest. Wir bestimmen die benötigte Zeit als Funktion von $|\overline{DU}| = x$ unter Berücksichtigung von $c^2 = a^2 + x^2$ und $C^2 = A^2 + (z-x)^2$:

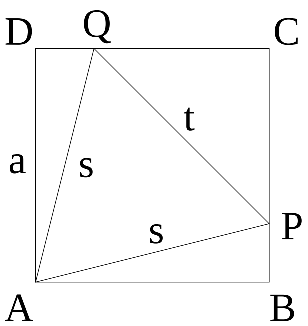
$$T(x) = \frac{c}{v} + \frac{C}{2v} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{A^2+(z-x)^2}}{2v}$$

Ableiten ergibt:

$$T'(x) = \frac{1}{v} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{2v} \cdot \frac{-2(z-x)}{2\sqrt{A^2+(z-x)^2}} = \frac{1}{v}(\frac{x}{c} - \frac{z-x}{2C})$$

Nullsetzen der Ableitung führt zu $\frac{x}{c} = \frac{z-x}{2C}$, d.h. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(\beta)$.
Wegen $T''(x) = \frac{1}{v}(\frac{1}{c} + \frac{1}{2C}) > 0$ wird T tatsächlich minimal.
Karl muss also den Punkt U so anpeilen, dass $|\overline{DU}| = x = \frac{z}{1+\frac{2C}{c}}$ bzw. $\sin\alpha = \frac{x}{c} = \frac{z}{c+2C}$ ist. Damit ist $\sin\beta = 2\sin\alpha = \frac{2z}{c+2C}$.

Aufgabe 794. Dreieck im Quadrat



Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge a.
Behauptung B: Man kann in das Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so wie in der Figur (mit der Diagonale AC als Symmetrieachse) einzeichnen.
Hinweis: Verwende das Rückschluss-Verfahren aus dem Artikel „Der Rückschluss“, Seite 32-36, und gehe von der Annahme B sei wahr, also $t = s$ aus. (H.F.)

Lösung:
Um einen Beweisansatz zu finden, gehen wir zunächst von der Annahme aus, dass B wahr sei.
Aus dieser Annahme folgt:

(1) $s = t$ (vgl. Figur) und somit

(2) $s^2 = t^2$

Für die Dreiecke ABP und PCQ gilt nach Pythagoras, $|\overline{BP}| = |\overline{QD}| =: b$ gesetzt:

(3) $s^2 = a^2 + b^2$ und $t^2 = (a-b)^2 + (a-b)^2$

Daraus ergibt sich mit (2)

(4) $a^2 + b^2 = 2(a-b)^2 = 2a^2 - 4ab + 2b^2$, also

(5) $b^2 - 4ab + a^2 = 0$, woraus folgt

(6) $b = a(2-\sqrt{3})$; denn $b = a(2+\sqrt{3})$ kommt nicht in Betracht wegen $a(2+\sqrt{3}) > a$.

Wenn wir nun entsprechend (6) die Punkte P und Q so wählen, dass $|\overline{BP}| = |\overline{QD}| = b = a(2-\sqrt{3})$ ist, können wir damit die Behauptung B beweisen:
Denn aus $b = a(2-\sqrt{3})$ folgt der Reihe nach, dass (5) und (4), danach (3) mit $s^2 = a^2(8-4\sqrt{3})$, $t^2 = a^2(8-4\sqrt{3})$, dann (2) und schließlich (1) gelten. Mit (1) ist B bewiesen.

Aufgabe 795. Primzahlen-Folge
Man beweise die Behauptung
B: In der Folge $g_n = \sqrt{24n+1}, n = 1, 2, 3, \dots$, kommen alle Primzahlen ≥ 5 vor.
Hinweis: Man verwende, dass in der Folge $h_t = 6t \pm 1, t = 1, 2, 3, \dots$ alle Primzahlen ≥ 5 enthalten sind.
Zur Lösung benutze man das Rückschluss-Verfahren aus dem Artikel „Der Rückschluss“, Seite 32-36. (H.F.)

Lösung:
Wegen des Hinweises genügt es, folgende Behauptung B^* zu beweisen:
B^*: Eine Teilfolge von g_n stimmt mit der Folge h_t überein.
Zum Beweis von B^* trifft man zunächst die Annahme: B^* sei wahr.
Dann gibt es zu jedem $t, t = 1, 2, 3, \dots$ zwei Zahlen n_t, so dass gilt:

(1) $\sqrt{24n_t + 1} = 6t \pm 1, t = 1, 2, 3, \dots$

Wie heißen die Zahlen n_t, die (1) erfüllen? Aus (1) folgt

(2) $24n_t + 1 = (6t \pm 1)^2 = 36t^2 \pm 12t + 1$, also

(3) $n_t = \dfrac{36t^2 \pm 12t}{24} = \dfrac{1}{2}t(3t \pm 1), t = 1, 2, 3, \dots$.

Aus (3) folgt nun: Die Teilfolge $g_{n_t} = \sqrt{12t(3t \pm 1) + 1}$ von g_n enthält alle Primzahlen ≥ 5.
Denn aus (3) folgt (2) und aus (2) folgt (1), und (1) bedeutet: es gilt B^*.
Damit ist dann auch B bewiesen.

Bundeswettbewerb Mathematik 2002

Aufgabe 1 der 2. Runde:
Ein Kartenstapel, dessen Karten von 1 bis n durchnummeriert sind, wird gemischt. Nun wird wiederholt die folgende Operation ausgeführt:
Wenn an der obersten Stelle die Karte mit der Nummer k liegt, dann wird innerhalb der obersten k Karten die Reihenfolge umgekehrt.
Man beweise, dass nach endlich vielen solcher Operationen die Karte mit der Nummer 1 oben liegt.

Lösung von Kerstin Bauer:
Bezeichnungen:
$K(i)$ die nach Schritt i entstandene Konfiguration (Anordnung der Karten)
$S(i)$ die Nummer der obersten Karte bei der Konfiguration $K(i)$.

Beh.1: $K(p) = K(q) \Rightarrow K(q + r)$ für alle $r \geq 0$.
Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Eigenschaft, dass die auf eine Konfiguration $K(i)$ folgende Konfiguration $K(i + 1)$ ausschließlich durch $K(i)$ bestimmt ist.

Beh.2: Es gibt Zahlen p, q mit $p < q$ und $K(p) = K(q)$.
Beweis: Es gibt nur $n!$ Möglichkeiten der Anordnung der n Karten, also muss sich spätestens nach $n!$ Schritten eine Konfiguration wiederholen.

Beh.3: Ist $S(i) = p$, so stimmen $K(i)$ und $K(i + 1)$ ab der Position $p + 1$ überein.
Beweis: Folgt offensichtlich aus der Aufgabenstellung, da bei diesem Übergang nur die obersten p Karten in ihrer Anordnung geändert werden.

Es sei nun $p < q$ mit $K(p) = K(q)$ und $M = max\{S(i) | p \leq i \leq q\}$; d.h. M ist die maximale Kartennummer, die bei dem mit $K(p)$ beginnenden Zyklus nach oben kommt.

Behauptung: $M = 1$.
Beweis (indirekt): Annahme: $M > 1$.
Es sei nun r die kleinste Zahl $\geq p$ mit $S(r) = M$; d.h. $r = p + t$ mit $t \geq 0$ und sei s die kleinste Zahl $> r$ mit $S(s) = M$. Eine solche Zahl s existiert, da (nach Beh.1) $M = S(r) = S(p + t) = S(q + t)$ gilt. Weiterhin ist $s > r + 1$, da beim Übergang $K(r) \rightarrow K(r + 1)$ die Karte M an die Position $M > 1$ gelangt und somit $S(r + 1) \neq M$ gilt.
Es gilt offensichtlich nach Definition von r und s

$$S(i) < M \text{ für } r < i < s; \text{ d.h. } m = max\{S(i) | r < i < s\} < M.$$

Insbesondere stimmen wegen Beh.3 alle Konfigurationen $K(i), r < i < s$, ab der Position $m + 1$ und somit insbesondere wegen $M > m$ ab der Position M überein.
Da beim Übergang $K(r) \rightarrow K(r + 1)$ die Karte M an die Position M gelangt ist und da $S(i) \leq m < M$ für alle i mit $r + 1 \leq i \leq s - 1$ gilt, liegt sie bei er Konfiguration $K(s - 1)$ ebenfalls noch an dieser Stelle. Wegen $r < s - 1$ und somit $S(s - 1) \leq m < M$ gelangt aber die auf Position M liegende Karte M beim Übergang $K(s - 1) \rightarrow K(s)$ nicht an die Spitze des Stapels; d.h. $S(s) \neq M$. *Widerspruch zu* $S(s) = M$ *!*
Also ist $M = S(r) = 1$; d.h. die Karte 1 kommt nach einer endlichen Zahl von Zügen nach oben.

Bundeswettbewerb Mathematik 2003

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

Aufgabe 1
Gegeben seien sechs aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Man beweise, dass es eine Primzahl gibt, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist.

Lösung
Sind die sechs Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ gegeben, so ist die Primzahl 5 Teiler genau einer dieser Zahlen. Seien nun sechs aufeinander folgende ganze Zahlen gegeben, die alle größer als 1 sind. Genau drei dieser sechs aufeinander folgenden Zahlen sind ungerade; die Absolutbeträge der Differenzen von je zwei dieser Zahlen sind 2 oder 4. Da ungerade Zahlen nur ungerade Teiler haben, müssen die drei ungeraden Zahlen paarweise teilerfremd sein. Weil keine der ungeraden Zahlen gleich 1 ist, existieren drei paarweise verschiedene ungerade Primzahlen, die Teiler genau einer der drei Zahlen sind; die größte dieser Primzahlen sei p. Da $p \geq 7$ gelten und die Differenz von Vielfachen von p durch p teilbar sein muss, enthalten die sechs aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen höchstens ein (und damit genau ein) Vielfaches von p. □

Aufgabe 2
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die jede der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y \tag{2.1}$$
$$y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z \tag{2.2}$$
$$z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x \tag{2.3}$$

Hinweis: Es reicht nicht, lediglich Lösungen anzugeben, es muss auch bewiesen werden, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Lösung
Das Gleichungssystem der Aufgabenstellung lässt sich äquivalent in

$$(x-4)^2 \cdot (x+4) = y+4 \tag{2.4}$$
$$(y-4)^2 \cdot (y+4) = z+4 \tag{2.5}$$
$$(z-4)^2 \cdot (z+4) = x+4 \tag{2.6}$$

umformen. Hieraus sieht man sofort: $(x, y, z) = (-4, -4, -4)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems. Durch sukzessives Einsetzen folgt außerdem: Ist das Tripel (x, y, z) eine Lösung des Gleichungssystems, in der eine der Variablen den Wert -4 annimmt, d.h. für die $(x+4) \cdot (y+4) \cdot (z+4) = 0$, so gilt notwendigerweise $(x, y, z) = (-4, -4, -4)$.
Sei nun (x, y, z) eine Lösung des Gleichungssystems mit $(x+4) \cdot (y+4) \cdot (z+4) \neq 0$. Wir multiplizieren die Gleichungen (2.4), (2.5), (2.6) und erhalten, dass solche Lösungen des Gleichungssystems notwendigerweise die Gleichung

$$(x-4)^2 \cdot (x+4) \cdot (y-4)^2 \cdot (y+4) \cdot (z-4)^2 \cdot (z+4) = (y+4) \cdot (z+4) \cdot (x+4),$$

bzw., nach Kürzen mit $(x+4)\cdot(y+4)\cdot(z+4)$, die Gleichung

$$(x-4)^2\cdot(y-4)^2\cdot(z-4)^2=1 \tag{2.7}$$

erfüllen müssen. Da für ganze Zahlen x, y, z die Terme $(x-4)^2$, $(y-4)^2$, $(z-4)^2$ nicht negative ganze Zahlen sind, muss jeder dieser Terme den Wert 1 annehmen, um (2.7) zu erfüllen: Die Lösungsmenge von (2.7) sind also die Tripel (x,y,z) mit $x,y,z\in\{3,5\}$. Aus dem Gleichungssystem (2.4), (2.5), (2.6) folgt aber zudem für jedes Tripel (x,y,z) mit $((x-4)^2,(y-4)^2,(z-4)^2)=(1,1,1)$, dass $x=y=z$ gelten muss, um das Gleichungssystem zu erfüllen.
Damit haben wir bewiesen: Genau die Tripel

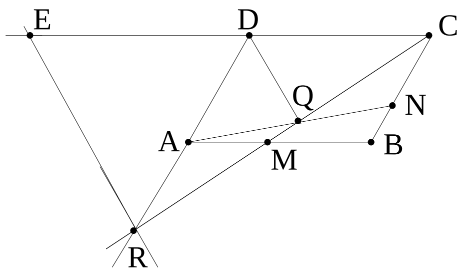
$$(x,y,z)\in\{(-4,-4,-4),(3,3,3),(5,5,5)\}$$

erfüllen die Gleichungen (2.1), (2.2), (2.3). □

Aufgabe 3
In einem Parallelogramm $\square ABCD$ werden auf den Seiten AB und BC die Punkte M und N so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AM und NC gleich lang sind. Die Schnittpunkt der Strecken AN und CM wird mit Q bezeichnet. Man beweise, dass DQ den Winkel $\measuredangle ADC$ halbiert.

Lösung

Über die Bezeichnungen der Aufgabenstellung hinaus führen wir die folgenden Bezeichnungen ein (siehe Skizze): R sei der Schnittpunkt von (CM) mit (AD). Außerdem wählen wir E auf (CD) so, dass (RE) parallel zu (DQ) ist.



Wir behaupten zunächst, dass der Punkt Q die Seite RC im $\triangle RCD$ im Verhältnis der angrenzenden Seiten RD und DC teilt. Auf Grund des zweiten Strahlensatzes gelten die Verhältnisse $RD:DC=RA:AM$ und $RA:NC=RQ:QC$. Hieraus ergibt sich auf Grund der Voraussetzung $AM=NC$ die Gleichungskette

$$RD:DC=RA:AM=RA:NC=RQ:QC, \tag{3.1}$$

was unsere Behauptung beweist.
Hieraus folgt, dass DQ den Winkel $\measuredangle ADC$ halbiert: Denn auf Grund des ersten Strahlensatzes und (3.1) gilt $ED:DC=RQ:QC=RD:DC$, also $ED=RD$. Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ERD$ sind also die Basiswinkel gleich: $\measuredangle RED=\measuredangle DRE$. Damit folgt durch Betrachtung von Stufen- bzw. Wechselwinkeln an den Parallelen (RE) und (DQ), dass

$$\measuredangle QDC=\measuredangle RED=\measuredangle DRE=\measuredangle RDQ=\measuredangle ADQ,$$

das heißt, dass, wie behauptet, DQ den Winkel $\measuredangle ADC$ halbiert. □

Aufgabe 4
Man gebe alle positiven ganzen Zahlen an, die sich nicht in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen lassen, wobei a und b positive ganze Zahlen sind. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung

Genau die positiven ganzen Zahlen 1 und $2+2^k$ für alle $k \geq 0$ lassen sich *nicht* in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ mit positiven ganzen Zahlen a und b darstellen.

Wir beweisen zunächst, dass für jede positive ganze Zahl b die Zahlenpaare b und $b+1$ bzw. $b(b+1)$ und $2b+1$ jeweils relativ prim zueinander sind, das heißt,

$$\mathrm{ggT}(b, b+1) = 1, \tag{4.1}$$
$$\mathrm{ggT}(b(b+1), 2b+1) = 1. \tag{4.2}$$

Denn jeder gemeinsame Teiler von b und $b+1$ muss auch $(b+1)-b=1$ teilen; das beweist (4.1). Jeder gemeinsame Teiler von b und $2b+1$ muss auch $2b+1-2b=1$ teilen und kann daher nur 1 sein. Analog muss jeder gemeinsame Teiler von $b+1$ und $2b+1$ auch $2(b+1)-(2b+1)=1$ teilen und kann daher nur 1 sein. Damit können auch $b(b+1)$ und $2b+1$ keine anderen gemeinsamen Teiler als 1 haben; das beweist (4.2).

Seien positive ganze Zahlen a, b so gewählt, dass die Summe $s := \frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ eine positive ganze Zahl ist. Dann ist auch $(b+1)\cdot s-(a+1) = \frac{a}{b}\cdot(b+1)$ eine positive ganze Zahl, und aus dem Term auf der rechten Seite folgt wegen (4.1), dass a ein Vielfaches von b, $\frac{a}{b}$ also eine positive ganze Zahl und insbesondere $\frac{a}{b} \geq 1$ ist. Sind nun $\frac{a}{b}$ und s ganze Zahlen, so ist auch $\frac{a+1}{b+1} = s-\frac{a}{b}$ eine positive ganze Zahl, also insbesondere $\frac{a+1}{b+1} \geq 1$. Es folgt also, dass notwendigerweise $s \geq 1+1=2$. Die Zahl 1 lässt sich somit nicht in der in der Aufgabenstellung beschriebenen Form darstellen. Es ist außerdem $s=2$ genau dann, wenn $a=b$.

Wir können also für die folgende Untersuchung, welche positiven ganzen Zahlen größer als 2 sich nicht in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen lassen, ohne Einschränkung $a \neq b$ voraussetzen. Wir beweisen, dass keine Zahl der Form $2+2^k$, für ein $k \geq 0$, in der erwähnten Form darstellbar ist. Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass positive ganze Zahlen a und b existieren, so dass

$$2^k = \frac{a}{b}-1+\frac{a+1}{b+1}-1 = \frac{a-b}{b}+\frac{a-b}{b+1} = \frac{(a-b)(2b+1)}{b(b+1)}.$$

Die Gleichungskette besagt, dass der Bruch $\frac{(a-b)(2b+1)}{b(b+1)}$ eine positive ganze Zahl ist. Wegen (4.2) muss die Zahl $a-b$ ein Vielfaches von $b(b+1)$ und damit $\frac{a-b}{b(b+1)} =: \ell$ eine positive ganze Zahl sein. Wir erhalten damit aus der obigen Gleichungskette $2^k = \ell\cdot(2b+1)$ — ein Widerspruch, weil $2b+1$ ungerade ist.

Umgekehrt gilt: Alle positive ganzen Zahlen, die nicht gleich 1 oder von der Form $2+2^k$ für ein $k \geq 0$ sind, lassen sich in der Form $2+n(2m+1)$ mit ganzen Zahlen $n \geq 0$ und $m \geq 1$ schreiben. Wir setzen $b=m \geq 1$ und $a = nm(m+1)+m \geq 1$ und erhalten die Gültigkeit der Darstellung

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1} = \frac{nm(m+1)+m}{m}+\frac{nm(m+1)+m+1}{m+1} = n(m+1)+1+nm+1$$
$$= 2+n(2m+1). \qquad \square$$

V.P.

Eulers Beitrag

von Valentin Blomer

Dass es unendlich viele Primzahlen gibt, wußte schon Euklid, und der wunderschöne Beweis steht im MONOID-Heft 70. Die Unendlichkeit der Primzahlen hat die Mathematiker aber auch später noch fasziniert, und es gibt viele weitere Beweise, von denen ich noch zwei in den nächsten beiden Folgen vorstellen möchte. Wie Euklids Beweis machen sie natürlich auch von der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung Gebrauch.

Eulers Beweis. Von Leonhard Euler stammt folgender Beweis: Wir wählen uns einen reellen Parameter $s > 0$ und betrachten das über irgendeine Menge $\mathcal{P}$ von Primzahlen p erstreckte Produkt

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad . \tag{1}$$

Die Frage, ob das Produkt stets konvergiert, stellen wir noch einen Moment zurück. Auf jeden Fall aber können wir jeden einzelnen Faktor $(1 - \dfrac{1}{p^s})^{-1}$ in diesem Produkt wegen $|\frac{1}{p^s}| < 1$ in eine geometrische Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots . \tag{2}$$

Wieso? Für eine reelle Zahl x mit $|x| < 1$ betrachten wir die endliche Reihe $S = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Dann gilt

$$(1 - x)S = 1 + x + \ldots + x^n - (x + x^2 + \ldots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Wegen $|x| < 1$ konvergiert x^{n+1} gegen 0 für $n \to \infty$, also gilt für die unendliche Reihe nach Division durch $(1 - x)$:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x}.$$

Dies liefert (2) mit $x = \frac{1}{p^s}$. Die Nenner der rechten Seite von (2) sind offenbar genau die s-ten Potenzen aller durch p teilbaren Zahlen. Was passiert nun, wenn man für zwei verschiedene p_1, p_2 zwei solche Reihen ausmultipliziert, also

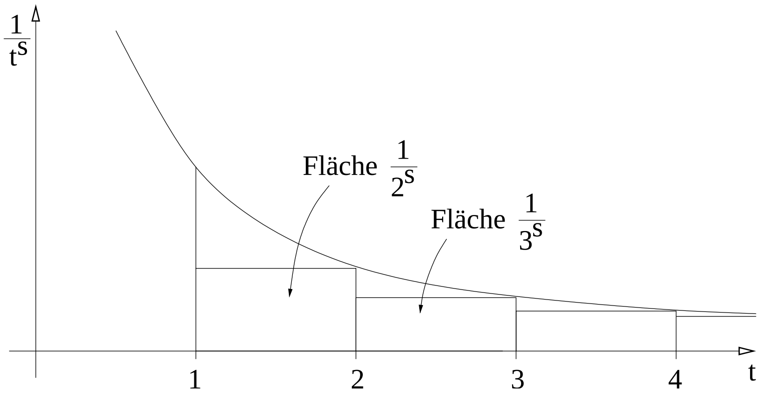
$$\left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \ldots\right)$$

bildet? Dann entsteht eine längere Reihe, deren Nenner genau die s-ten Potenzen der Zahlen sind, die durch p_1 oder p_2 teilbar sind. Multiplizieren wir also das Produkt (1) aus, entsteht die Reihe $\sum \dfrac{1}{n^s}$, wobei über alle n summiert wird, die nur Primteiler aus $\mathcal{P}$ haben. Wenn nun $\mathcal{P}$ die Menge *aller* Primzahlen ist, dann wird natürlich über alle n summiert, und wir erhalten die vollständige Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{3}$$

Das geht allerdings nur für $s > 1$, denn dann ist die Reihe konvergent. Es gilt nämlich (s. Abb.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = 1 + \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_1^{\infty} = 1 + \frac{1}{s-1}.$$



Damit muss auch das Produkt (1) konvergent sein.

Wir nehmen nun an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, etwa P Stück. Dann gilt für $s > 1$ einerseits

$$\prod_{\text{alle } p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)^P = 2^P$$

Andererseits ist dies jedoch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt = \frac{1}{s-1}.$$

Wählt man nun s genügend nahe an 1, kann man immer erreichen, dass $\frac{1}{s-1}$ größer als 2^P wird, und das ist ein Widerspruch.

Naja, wird jetzt vielleicht der eine oder andere denken, was soll ich mit diesem komplizierten Beweis von Euler voller dubioser Rechnungen, wenn Euklids Beweis doch viel einfacher ist? Der wichtige mathematische Gedanke an Eulers Beweis ist die Betrachtung der Ausdrücke (1) mit $\mathcal{P} = \{$alle Primzahlen$\}$ und (3) und die Beobachtung, dass aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung beide gleich sind. Man kann übrigens auch umgekehrt schließen: Gilt für alle $s > 1$ stets $(2) = (3)$, so folgt daraus die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.
Die Reihe (3) als eine Funktion von s wird traditionell als (Riemann'sche) Zeta-Funktion bezeichnet:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Die vorangegangenen Überlegungen zeigen: In dieser einen Funktion ist die wesentliche Information über die Arithmetik der natürlichen Zahlen codiert, nämlich die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Zusammenhang zwischen der additiven Struktur (3) und der multiplikativen Struktur (1) auf den natürlichen Zahlen. Damit weiß diese Funktion auch (fast) alles über die arithmetische Struktur der Primzahlen. Das ist keineswegs übertrieben. Zum Beispiel kann man allein aus dem Studium der Zeta-Funktion den berühmten Primzahlsatz herleiten: *Die Anzahl der Primzahlen zwischen 1 und x verhält sich für große x asymptotisch wie $\frac{x}{\log x}$.*

Aus dem Euler'schen Beweisgang können wir die Unendlichkeit der Primzahlen noch etwas quantifizieren: Sei $x \geq 2$ gegeben und $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen $\leq x$. Wir wählen $s = 1$ und erhalten:

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \sum \frac{1}{n},$$

wobei rechts über die n summiert wird, deren sämtliche Primteiler in $\mathcal{P}$ sind. Das sind sicher alle Zahlen von 1 bis x. Also folgt

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \geq \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x. \tag{4}$$

Eine einfache Kurvendiskussion zeigt nun $\log \frac{1}{1-y} < 2y$ für $y \in [0, 1/2]$. Wenden wir nun auf beiden Seiten von (4) den Logarithmus an, erhalten wir

$$\log \log x \leq \log \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \sum_{p \leq x} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \leq 2 \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}. \tag{5}$$

Da $\log \log x$ mit wachsendem x unbeschränkt ist, haben wir folgendes erstaunliche Ergebnis erhalten: *Die Summe über alle reziproken Primzahlen divergiert!* Eine etwas genauere Untersuchung zeigt sogar die asymptotische Beziehung

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x.$$

Natürlich divergiert diese Reihe unvorstellbar langsam; um etwa die Zahl 5 (!) zu überschreiten, muss man mehr als 10^{35} reziproke Primzahlen aufsummieren. Bräuchte man für eine Million Additionen eine Sekunde, wäre man etwa 10^{20} Jahre beschäftigt - das sind etwa eine Milliarde Weltalter. Von dem berühmten englischen Mathematiker Hardy stammt daher der Ausspruch: Die Unendlichkeit beginnt, wenn $\log \log x$ groß wird...

Übrigens: Untersuchungen an Primzahlen stehen im Zentrum mathematischer Forschung. Vor kurzem haben drei indische Mathematiker einen Durchbruch in der Zahlentheorie erzielt und einen deterministischen und effizienten Algorithmus entwickelt, der Primzahleigenschaft testet. Das löst das am Ende des letzten Artikels (MONOID 72, „Große Primzahlen und schnelle Algorithmen ") angesprochene Problem.

Erratum

- In MONOID-Heft Nr. 72, S.30, sehen die Ungleichungen (2) richtig so aus:

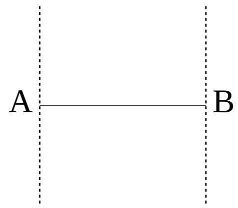
$$a^2 > b^2 + c^2, \qquad b^2 > a^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad c^2 > a^2 + b^2.$$

Sind alle Dreiecke stumpfwinklig?

von Wolfgang J. Bühler

Der Beitrag „Sind typische Dreiecke spitzwinklig?“aus Monoid 72 stellte in den Modellen 3 bis 5 verschiedene Methoden dar, mit Hilfe derer ein Dreieck „zufällig“konstruiert wird.
Die beiden zuerst vorgestellten Modelle dagegen – insbesondere das auf Lewis Caroll zurück gehende – gehen anders vor. Hier tritt die Bedingung auf, dass eine der beiden Seiten als bekannt vorausgesetzt wird.
Kurz nach Fertigstellung des Beitrages für Monoid 72 nahm ich einen Artikel von R. Falk und E. Samuel-Cahn zur Kenntnis, der in der für Lehrer gedachten Zeitschrift *Stochastik in der Schule* [Bd.22,' Heft 2 (2002),33-36] veröffentlicht wurde. Hier wird diese Methode ad absurdum geführt.

Die Autoren betrachten – wie Lewis Caroll – die Seite AB des Dreiecks als gegeben und wählen C zufällig in der Ebene.



Dann hat das Dreieck ABC einen stumpfen Winkel bei A, wenn C in der Halbebene links von A liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällig gewählte Punkte links von A liegt, muss offensichtlich gleich der Wahrscheinlichkeit sein, dass er rechts von A liegt, also gleich $\frac{1}{2}$.
Das entsprechende gilt selbstverständlich für die Ecke B. Da kein Dreieck zwei stumpfe Winkel hat, dürfen wir die beiden Wahrscheinlichkeiten addieren und erhalten so

$$P(\text{ Dreieck ist stumpfwinklig }) = P(\text{ stumpfwinklig bei } A) + P(\text{ stumpfwinklig bei } B) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Folglich ist jedes Dreieck stumpfwinklig.

Dieses absurde und zunächst verwirrende Ergebnis entsteht durch die Annahme, es gebe eine über die Ebene gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Nur dann wäre der Schluss berechtigt, man müsse jeder Halbebene die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zuordnen. Dass die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung über die Ebene E zu Widersprüchen führt, sieht man auch so: Zerlegt man die Ebene in gleich breite Streifen $S_1, S_2, S_3, \ldots$, so muss man jedem dieser Streifen die gleiche Wahrscheinlichkeit p zuordnen. Damit hat man dann

$$1 = P(E) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + \cdots = p + p + p + \ldots,$$

was für kein p erfüllbar ist.

R. Falk und Samuel-Cahn haben mich inzwischen auf eine Veröffentlichung von S. Portnoy (A Lewis Caroll Pillow Problem: Probability of an Obtuse Triangle. Statistical Science Vol.9 (1994), 279-284) aufmerksam gemacht, in der das Problem, wie man hier und in ähnlichen Situationen den Begriff „gleichwahrscheinlich“ festlegen sollte, mit anspruchsvollen mathematischen Methoden diskutiert wird. Dabei zeigt sich, dass man den Wert $\frac{3}{4}$ als den am ehesten plausiblen Wert dafür ansehen kann, dass ein zufällig gewähltes Dreieck stumpfwinklig ist.

Der Unmöglichkeitsbeweis
Beweisen kann man lernen

von Hartwig Fuchs

In der Mathematik gibt es zahlreiche Probleme, um deren Lösung man sich – manchmal Jahrhunderte lang! – bemühte, bis sich dann schließlich herausstellte: ihre „Lösung“ besteht in dem Nachweis, dass sie unlösbar sind.
Solche Nachweise werden **Unmöglichkeitsbeweise** genannt.

Der vermutlich älteste Unmöglichkeitsbeweis ist uns von Hippasos (etwa 450 v. Chr.) überliefert: er zeigte mit Hilfe eines regelmäßigen Fünfecks, dass die Zahlen unmöglich sämtlich rational sein können. Dagegen konnte das verwandte Problem, das die alten Kulturen (Babylonier, Ägypter, Chinesen, Griechen und Römer) sich stellten, nämlich den Wert von π als Bruchzahl anzugeben, erst durch den Unmöglichkeitsbeweis von C.L.F. Lindemann (1852-1939) im Jahre 1882 „gelöst“ werden.
Es gibt eine lange Liste von zum Teil berühmten Problemen, deren „Lösung “ im Nachweis ihrer Unlösbarkeit besteht – wir nennen nur einige geometrische Aufgabenstellungen. Konstruktion (allein mit Zirkel und Lineal) einer Winkeldreiteilung, der Verdopplung eines Würfels, eines zu einem Kreis flächengleiches Quadrat, eines regelmäßigen $7-$ Ecks, $9-$ Ecks, $11-$ Ecks, $\ldots$.
Im Folgenden sollen nun einige leicht nachvollziehbare Beispiele von Unmöglichkeitsbeweisen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik vorgeführt werden.

Ein Schachbrett-Problem

Ein Springer soll auf einem Schachbrett von einer Ecke zur diagonal gegenüber liegenden Ecke so gezogen werden, dass jedes Feld des Schachbrettes genau einmal besetzt wird.

„Lösung“:

(1) Zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder haben die gleiche Farbe.

(2) Bei jedem Springerzug wechselt die Farbe des jeweils besetzten Feldes.

(3) Es sind 63 Züge des Springers erforderlich.

Aus (2) und (3) folgt: das Startfeld und das Zielfeld des Springers haben verschiedene Farben. Das aber ist nach (1) unmöglich.
Damit ist gezeigt: die Aufgabe ist unlösbar.

Das Cantorsche Diagonalverfahren

Die reellen Zahlen aus dem Intervall $(0;1)$ sollen in einer Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ angeordnet werden.

„Lösung“:

(1) Jede reelle Zahl r aus $(0;1)$ kann man als einen unendlichen Dezimalbruch $r = 0,r_1r_2r_3\ldots$ mit Ziffern $r_1, r_2, r_3, \ldots$ schreiben; zum Beispiel, wenn wir $0,72$ als $0,71999\ldots$ schreiben.

(2) Angenommen, die reellen Zahlen aus $(0;1)$ können in einer Folge F angeordnet werden; diese Folge F sei

$$\begin{aligned} z_1 = & \; 0, z_1' z_2' z_3' \dots \\ z_2 = & \; 0, z_1'' z_2'' z_3'' \dots \\ z_3 = & \; 0, z_1''' z_2''' z_3''' \dots \\ & . \\ & . \\ & . \end{aligned}$$

Halten wir fest:

(3) In F komme jede reelle Zahl aus $(0;1)$ vor.

Wir definieren nun eine reelle Zahl $x = 0, x_1' x_2'' x_3''' \dots$ auf folgende Weise: Die Ziffer vor dem Komma ist 0; die erste Ziffer x_1' nach dem Komma sei 1, wenn z_1 die erste Ziffer $z_1' \neq 1$ hat, und sie sei 2, wenn $z_1' = 1$ ist.
Die zweite Ziffer x_2'' nach dem Komma sei 1, wenn z_2 die zweite Ziffer $z_2'' \neq 1$ hat, und sie sei 2, wenn $z_2'' = 1$ ist; usw.
Für die so festgelegte reelle Zahl $x = 0, x_1' x_2'' x_3''' \dots$ aus lauter Nachkommaziffern 1 oder 2 gilt:

(4) x liegt im Intervall $(0;1)$.

(5) x ist verschieden von jeder der Zahlen $z_1, z_2, z_3, \dots$ – denn x unterscheidet sich von z_1 in der ersten Stelle nach dem Komma, von z_2 in der zweiten Stelle nach dem Komma, usw;

Mit (4) ist x eine reelle Zahl aus $(0;1)$, die wegen (5) nicht in der Folge F vorkommt. Das widerspricht (3) und (2).
Damit ist die eingangs gestellte Aufgabe unlösbar.

Das Diagonalverfahren, das in der Diskussion der Grundlagen der Mathematik eine wichtige Rolle als Beweisverfahren spielt, ist nach seinem Entdecker, dem Begründer der Mengenlehre **Georg Cantor** (1845-1918) benannt.

Eine Rechteckszerlegung
Man zerlege ein Rechteck in drei flächengleiche Dreiecke.

„Lösung“:

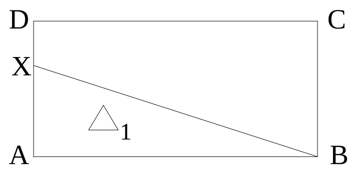
(1) Ein Rechteck $R = ABCD$ sei in drei flächengleiche Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ zerlegt.

Dann gilt, wenn $|R|, |\Delta_1|$ usw. die Fläche von R, von Δ_1 usw. bezeichnet:

(2) $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta_3| = \frac{1}{3}|R|$.

Da jeder Eckpunkt von R zugleich auch Eckpunkt von mindestens einem der Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sein muss, gilt:
Eines der drei Dreiecke hat zwei Eckpunkte, die zugleich Eckpunkte von R sind. Dies eine Dreieck sei Δ_1 mit den Eckpunkten A und B; der dritte Eckpunkt sei X.

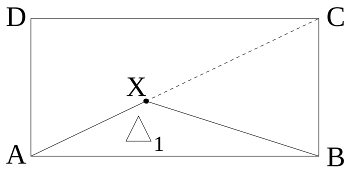
1. X liege auf dem Rand von R.
   1.1 X liege in der Strecke AD. Dann sind zwangsläufig $\Delta_2 = BDX, \Delta_3 = BCD$ oder $\Delta_2 = CDX, \Delta_3 = BCX$. In beiden Fällen ist $|\Delta_3| = \frac{1}{2}|R|$ und (2) ist unerfüllbar (falls X in der Strecke BC liegt, geht man analog vor).



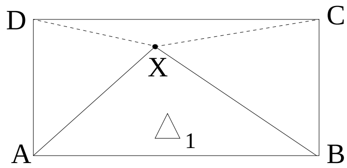
1.2 X liege in der Strecke CD oder es sei $X = C$ oder $X = D$. Dann gilt: $|\Delta_1| = \frac{1}{2}|R|$ und (2) ist unerfüllbar.

2. X liege im Innern von R.

2.1 Falls X auf der Diagonalen AC (bzw. BD) liegt, dann sind Δ_2 und Δ_3 festgelegt: $\Delta_2 = BCX$, $\Delta_3 = ACD$ (bzw. $\Delta_2 = DAX$, $\Delta_3 = BCD$), und es ist jeweils $|\Delta_3| = \frac{1}{2}|R|$. Also ist (2) unerfüllbar.



2.2 Falls X nicht auf einer der Diagonalen AC oder BD liegt, dann ist die Figur „R ohne Δ_1“ offenbar nicht in zwei Dreiecke zerlegbar.



Insgesammt ergibt sich: die Annahme (1) kann nicht zutreffen. Die „Lösung“ lautet also:

Das Zerlegungsproblem ist **unlösbar** – ein Ergebnis, das anschaulich sicher als paradox erscheinen muss.

Bemerkung
Die Nachweise der Unlösbarkeit der oben angegebenen Probleme sind Beispiele für Unmöglichkeitsbeweise. Mit ihnen ist in ausreichendem Umfang demonstriert: Unmöglichkeitsbeweise stellen keine besondere Beweistechnik dar – es ist die mathematische Situation, die einen Beweis zu einem Unmöglichkeitsbeweis macht.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

MONOID-Preisträger 2002

Das „Goldene M“: Steffen Biallas
Sonderpreis: Gregor Dschung
1. Preis: Kerstin Bauer, Aaron Breivogel, Dominik Kraft, Felix Liebrich, Judith Reinhardt, Stefanie Tiemann, Stefan Tran und Annkatrin Weber.
2. Preis: Markus Bassermann, Christian Behrens, Meike Fluhr, Alexander Hillert, Katharina Höveler, Julia Jung, Isabelle Merker, Lisa Mettler, Anett Stellwagen und Sarah Tröbs.
3. Preis: Stefan Albert, Carolin Dossmann, Hannah Hauser, Claudia Heiss, Annika Johann, Katharina Kober, Annika Kohlhaas, Johanna Mees, Johannes Merz, Lena Müller, Nina Rein, Susanne Rogge, Adriana Spalwisz, Catherina Wirtz und Rebecca Zimmer.
MONOID-Jahresabonnement 2003: Marcel Ackermann, Laura Cohnitz, Annika Fetzer, Johannes Fiebig, Madeleine Fister, Thomas Geiß, Carolin Hernandez-Sanches, Martin Jöhlinger, Laura Mettler, Carolin Morlock, Christian Münkel, Sabine Oßwalt, Verena Prägert, Marc Rein, Christina Simon und Robert Vogt.
MONOID-Stein für unsere neuen Löser und Löserinnen aus den 5. Klassen:
Lisa Engel, Sarah Rosengarten und Joscha Wagner.

Das „Goldene M“, der Sonderpreis und die ersten, zweiten und dritten Preise wurden vom Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet.

Schülertag 2003 in Mainz

Liebe Schülerinnen und Schüler,

auch in diesem Jahr findet wieder ein Schülerinformationstag des Fachbereichs Mathematik und Informatik der Universität Mainz für die 12. Klassen (und interessierte 11. Klassen) in Zusammenarbeit mit dem Verein Freunde der Mathematik in Mainz statt.

An diesem Tag, dem **11. Juni 2003** (Mittwoch in der Pfingstwoche), wird Euch ein Einblick in das Studium geboten. Natürlich wird einiges Mathe-spezifisch sein, aber auch für diejenigen, die sich nicht für Mathe oder Informatik (als Studienfach) interessieren, ist ein Besuch an der Uni sicher informativ. Ihr seid also recht herzlich eingeladen, Euch die Uni Mainz und den Fachbereich Mathematik und Informatik mal genauer anzuschauen.

Ein kleiner Überblick über das vorläufige Programm:

9:00	Begrüßung
9:15	Vorstellung der Mathematik
10:30	Einteilung in Übungsgruppen
11:00	Übungen im Stil einer Mathematikübung. Diese werden von Studierenden gehalten, die Euch auch gerne Fragen zum Studium beantworten.
12:00	Mittagspause
13:00	Vorstellung der Informatik
14:00	Film der Fachschaft Mathematik
15:00	Kaffee und Kuchen

Wir bitten um rechtzeitige Anmeldung zum Schülertag! Ihr könnt Euch sowohl alleine als auch als Gruppe anmelden. Und zwar unter Angabe der Teilnehmerzahl (getrennt nach Schülern und eventuellen Betreuern) und einer Postadresse für die Anmeldebestätigung und weitere Informationen bei (am schnellsten und bequemsten per E-Mail):

Anschrift: Freunde der Mathematik
an der Johannes Gutenberg-Universität e.V.
Fachbereich Mathematik und Informatik
55099 Mainz

E-Mail: `freunde@mathematik.uni-mainz.de`

Homepage: `www.mathematik.uni-mainz.de/Freunde`

Rubrik der Löser und Löserinnen

(Stand: 3.12.2002)

♢ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

■ **Kl. 5:** Joscha Wagner 20;
■ **Kl. 6:** Ina Ebling 15, Claudia Heiss 31, Daniela Hottenbacher 19, Sina Lelle 12, Johanna Mees 33, Larissa Nickel 6, Sabine Oßwalt 21, Franziska Schmitt 21, Annett Stellwagen 46;
■ **Kl. 7:** Daniel Faber 18, Johann Kirsch 18, Johannes Merz 35;
■ **Kl. 8:** Markus Bassermann 59, Matthias Eberle 7, Madeleine Fister 26, Meike Fluhr 63, Isabelle Merker 64;
■ **Kl. 9:** Sven-Marc Gaubatz 7, Johannes Giarra 4, Isabelle Maurot 3, Christina Simon 23;
■ **Kl. 13:** Aaron Breivogel 87, Dominik Kraft 81.

♢ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

■ **Kl. 6:** Johannes Fiebig 29, Carolin Herandez-Sanchez 21, Felix Liebrich 73, Lisa Mettler 51, Carolin Morlock 27, Lena Radder 5, Nina Rein 44, Susanne Rogge 33, Inga Wellstein 16, Rebecca Zimmer 35;
■ **Kl. 8:** Jeanette Stohr 9;
■ **Kl. 9:** Marc Rein 21;
■ **Kl. 10:** Gregor Dschung 75, Alexander Kent 6.

♢ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

■ **Kl. 6:** Thomas Geiß 28;
■ **Kl. 8:** Sebastian Bischof 9, Christoph Bös 10, Patrick Eichstätter 8, Robert Vogt 21;
■ **Kl. 9:** Lorenz Diener 13, Stefan Tran 83.
■ **Kl. 10:** Thomas Schumacher 17.

♢ **Alzey, Gymnasium am Römerkastell:** ■ **Kl. 7:** Christian Behrens 68.

♢ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**

■ **Kl. 7:** Ann-Katrin Bock 16, Julian Hohmann 6, Christian Münkel 24;
■ **Kl. 8:** Navina Groß 6, Hannah Hauser 39, Leonie Münkel 10, Sebastian Sauer 19, Katharina Schwert 19, Marius Trabert 10.

♢ **Frankenthal, Erkenbert-Grundschule:** ■ **Kl. 4:** Laura Mettler 24.

♢ **Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**
■ **Kl. 6:** Jonas Fischer 1, Franziska Lahnstein 2, Janina Rau 2;
■ **Kl. 7:** Lukas Bünning 1, Marco Mallm 1, Carolin Marusic 2, Rodney de Meulenaer 3, Annika Scherer 1, Ann-Kathrin Tilch 1;
■ **Kl. 8:** Soria Asvar 7, Katja Dik 2, Cornelius Doll 2, Lukas Frink 4, Matthias Fritz 3, Viktoria Gerz 5, Alexander Schardt 2, Matthis Scherer 3.

♢ **Hantersbüttel: Kl. 10:** ■ Roman Menzel 5.

♢ **Heilbronn, Walldorfschule:** ■ **Kl. 13:** Carl Friedrich Bolz 18.

♢ **Kaiserlautern, Burggymnasium (Betreuender Lehrer Ernst Mischler):**
■ **Kl. 6:** Annika Buch 7, Tanita Eichler 4, Jennifer Lorch 2, Lena Sembach 2.

♢ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium:** ■ **Kl. 13:** Kerstin Bauer 95.

♢ **Kelkheim/Taunus, Eichendorfschule:** ■ **Kl. 7:** Sonja Sauckel-Plock 11.

♢ **Koblenz, Max-von-Laue-Gymnasium (Betreuender Lehrer David Brungs):**
■ **Kl. 6:** Marius Rackwitz 13;
■ **Kl. 8:** Florian Lörsch 2, Daniela Rünz 3, Marvin Schuth 2.

♢ **Korschenbroich:** ■ Anita Robitzsch 4.

♢ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium:**
■ **Kl. 7:** Katharina Kober 36, ■ **Kl. 9:** Judith Reinhardt 88, Adriana Spalwisz 33;
■ **Kl. 12:** Alexandra Engelhardt 9.

♢ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium:** ■ **Kl. 12:** Steffen Biallas 98.

♢ **Mainz, Willigis-Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Marcel Ackermann 23.

♢ **Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Wittekindt):**
■ **Kl. 7:** Maike Bäcker 10, Regina Friedmann 9, Natalie Geiß 16, Julia Heeß 16, Maximilian Jehle 11, Laura Mayer 12, Patrick Schäfer 19, Michaela Schuster 18, Helena Schweizer 14.

♢ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
■ **Kl. 7:** Daniela Bongartz 4, Laura Cohnitz 23, Jennifer Döring 7, Annika Kohlhaas 38;
■ **Kl. 8:** Katharina Höveler 54, Stefanie Tiemann 91.

♢ **Neustadt a. d. W., Kurfürst-Ruprecht-Gymnasium (Betreuende Lehrerin Frau Hanna Jöhlinger):** ■ **Kl. 7:** Martin Jöhlinger 25, Robert Simon 3.

♢ **Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Beitlich, Frau Elze und Herr Bielefeld):**
■ **Kl. 5:** Sarah Rosengarten 13;
■ **Kl. 6:** Abla Alaouvi 13, Carolin Dossmann 38, Gib Gutzeit 8, Alice Kaoch 18, Julian Kleiner 4, Karina Krenke 5, Marcel Landua 18, Sabrina Schröder 4, Annkatrin Weber 72;
■ **Kl. 7:** Stefan Albert 42, Margarete Heinrichs 6, Nicole Witzel 8;
■ **Kl. 8:** Sarah C. Alaouvi 13, Sebastian Eckart 20, Massim Tawanaie 15, Daniel Dieth 14; ■ **Kl. 9:** Elham Qiami 3.

♢ **Pirmasens, Immanuel-Kant-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Alexander Hillert 64.

♢ **Saarburg, Gymnasium:** ■ **Kl. 10:** Sibylle von Bomhard 7.

♢ **Siegburg, Anno-Gymnasium:** ■ **Kl. 9:** Jan B. Boscheinen 17.

♢ **Trier, Friedrich-Wilhelm-Gymnasium:** ■ **Kl. 11:** Moritz Klügle 3.

♢ **Wiesbaden, Gutenbergschule:** ■ **Kl. 11:** Kathleen Renneißen 11.

♢ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
■ **Kl. 5:** Lisa Engel 15;
■ **Kl. 6:** Katrin Brenneisen 7, Annika Fetzer 21, Kurosch Habibi 17, Carolin Roßbach 9, David Schuschke 15, Joanna Wendling 8;
■ **Kl. 7:** Annika Johann 36; Julia Jung 66, Lena Müller 32, Sarah Tröbs 64;
■ **Kl.10:** Verena Prägert 30.

♢ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium:** ■ **Kl. 11:** Catherina Wirtz 34.

MONOID Jahrgang 23 Heft 73 März 2003

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr.Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Ehrenmitglied: Martin Mettler
Monoidaner: Eike Bumb, Aaron Breitvogel, Gregor Dschung, Felix Henninger, Armin Holschbach, Dominik Kraft, Sönke Loitz, Heiner Olbermann, Martin Olbermann, Christoph Peters, Joachim Trodler und Marcel Zimmer
Korrekturen und Layout: Katrin Elter **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid