Jahrgang 22 Heft 70 Juni 2002

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Eine mathematische Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ und die „mathematischen Entdeckungen“ vorgesehen. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern.)
Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

30.08. 2002.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

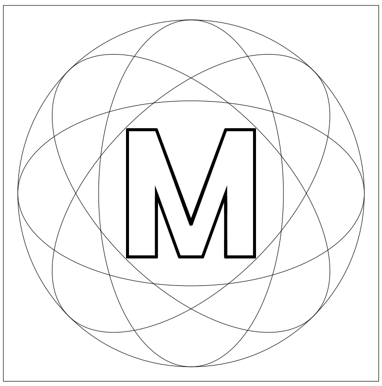
Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: martinmettler@web.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M



Außer der Medaille mit dem goldenen M, die ihr Aussehen im letzten Jahr gewandelt hat, gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich:
Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

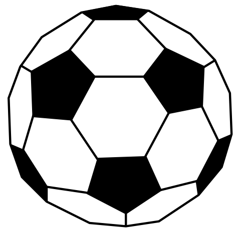
Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Zur Fußball-WM:

Mathematische Entdeckungen am Fußball

Wie ihr alle wisst, ist der Fußball ein Körper, der nur aus regelmäßigen Fünf- und Sechsecken zusammen gesetzt ist.

Stellen wir uns folgende Fragen:



1. Wie viele Fünfecke hat der Fußball?
2. Wie viele Sechsecke hat der Fußball?
3. Wie viele Ecken hat der Fußball?
4. Wie viele Kanten hat der Fußball?

Wenn ihr alle Fragen richtig beantwortet habt, setzt die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen in die folgende Formel ein:

$$\text{Anzahl der Ecken}(E) - \text{Anzahl der Kanten}(K) + \text{Anzahl der Flächen}(F)$$

In Kurzform: $\boxed{E - K + F}$

Das richtige Ergebnis muss 2 lauten!

Es gilt für alle Körper, deren Seitenflächen Vielecke sind, nur dürfen sie nirgends "eingedellt" sein. Diese Körper nennt man **"konvexe Körper"**.

Entdeckt hat diese Tatsache der Mathematiker **Leonard Euler**, der von 1707 bis 1783 lebte. Er hat das so formuliert:

Eulerscher Polyedersatz:
Für jeden konvexen Körper, der genau E Ecken, K Kanten und F Flächen hat, gilt:

$$\boxed{E - K + F = 2}$$

In der Beilage findet ihr einen Bastelbogen für einen Fußball. Entwickelt wurde dieser von Herrn Professor Beutelspacher aus Gießen, einem langjährigen Freund und Förderer von MONOID.[1] Am Besten ihr verwendet diesen Bogen als Kopiervorlage; es empfiehlt sich, den Fußball beim Kopieren auch etwas zu vergrößern, damit das Zusammenbauen leichter fällt. Dazu die

Bastelanleitung:
Schneidet die Figur entlang der dicken Linien aus und faltet sie entlang der dünnen Linien. Wenn ihr den Körper zusammenfaltet, ergibt sich ein Fußball, bei dem allerdings die Fünfecksflächen Löcher sind.

(A.K.)

[1] Den Bastelbogen findet ihr auch in seinem interessanten Buch: "In Mathe war ich immer schlecht…" aus dem Vieweg Verlag.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) zweier Zahlen

von Martin Mettler

Bestimme den ggT der Zahlen: 2184 und 180.
In der Schule haben wir gelernt: Man bestimmt den ggT zweier Zahlen, indem man sie in Primfaktoren zerlegt und danach das Produkt der gemeinsamen Faktoren bildet. Also

$$\begin{array}{rcccccccc} 2184 & = & 2^3 & \cdot & 3 & \cdot & 7 & \cdot & 13 \\ 180 & = & 2^2 & \cdot & 3^2 & \cdot & 5 & & \\ \hline \\ ggT & = & 2^2 & \cdot & 3 & & = & & 12. \end{array}$$

Man schreibt auch $(2180; 180) = 12$ (lies: der ggT von 2184 und 180 ist 12).

Wir wollen nun einen anderen Weg zur Bestimmung des ggT suchen. Dazu schreiben wir folgende Kette von Divisionen auf:

$$\begin{array}{lclclcll} 2184 \div 180 & = & 12 \text{ Rest } 24 & \Rightarrow & 2184 & = & 12 \cdot 180 + 24 & (1) \\ 180 \div 24 & = & 7 \text{ Rest } 12 & \Rightarrow & 180 & = & 7 \cdot 24 + 12 & (2) \\ 24 \div 12 & = & 2 \text{ Rest } 0 & \Rightarrow & 24 & = & 2 \cdot 12 & (3) \end{array}$$

Aus (3) wird sichtbar, dass 12 ein gemeinsamer Teiler (und zwar sogar der größte) von 12 und 24 ist.
Wir schauen uns nun die Gleichung (2) an: Da 12 gemeinsamer Teiler von 12 und 24 ist, ist 12 auch Teiler von $7 \cdot 24 + 12$, also auch von 180. Also ist $(180; 24) = 12$.
Schauen wir uns nun die Gleichung (1) an: Da 12 gemeinsamer Teiler von 24 und 180 ist, ist 12 auch Teiler von $12 \cdot 180 + 24$, also auch von 2184.
Also ist $(2184; 180) = 12$.

Bemerkung: Dieser Weg ist besonders nützlich für jene Fälle, bei denen die Zerlegung in Primfaktoren zeitraubend ist.

Zum Beispiel: Für die Zahlen $213\,332$ und $777\,138$ erhält man die Kette von Divisionen:

$$\begin{array}{lclclcl} 777\,138 \div 213\,332 & = & 3 \text{ Rest } 137\,142 & \Rightarrow & 777\,138 & = & 3 \cdot 213\,332 + 137\,142 \\ 213\,332 \div 137\,142 & = & 1 \text{ Rest } 76\,190 & \Rightarrow & 213\,332 & = & 1 \cdot 137\,142 + 76\,190 \\ 137\,142 \div 76\,190 & = & 1 \text{ Rest } 60\,952 & \Rightarrow & 137\,142 & = & 1 \cdot 76\,190 + 60\,952 \\ 76\,190 \div 60\,952 & = & 1 \text{ Rest } 15\,238 & \Rightarrow & 76\,190 & = & 1 \cdot 60\,952 + 15\,238 \\ 60\,952 \div 15\,238 & = & 4 \text{ Rest } 0 & \Rightarrow & 60\,952 & = & 4 \cdot 15\,238 \end{array}$$

Es ist: $15\,238 = (213\,332; 777\,138)$

Geht man, wie im vorhergehenden Beispiel, den umgekehrten Weg von unten nach oben, so erhält man in der Tat:

$$\begin{array}{rclclclc} 15\,238 & = & (15\,238; 60\,952) & = & (60\,952; 76\,190) & = & (76190; 137142) & = \\ & = & (137\,142; 213\,332) & = & (213\,332; 777\,138) & & & \end{array}$$

Der ggT zweier Zahlen kann also durch folgende Schritte gefunden werden:

- Dividiere die größere Zahl durch die kleinere mit Rest!
- Dividiere die kleinere Zahl durch den Rest aus der ersten Division!
- Dividiere den Rest aus der 1. Division durch den Rest aus der 2. Division, usw. bis der Rest gleich Null wird!

Dann ist der letzte von Null verschiedene Rest der gesuchte ggT.

Anmerkungen:

1. Der Rest einer Division ist stets kleiner als der Divisor. Also wird der Rest sicher irgendwann gleich Null sein, da er mit jeder neuen Division kleiner wird.

   Bei uns $24 > 12$ bzw. $137\,142 > 76\,190 > 60\,952 > 15\,238$.
2. Der oben aufgeführte Weg stellt einen **Algorithmus** dar. Da dieser Weg bereits von dem berühmten Mathematiker der griechischen Antike Euklid gefunden wurde, wird er heute auch nach ihm benannt und heißt also **euklidischer Algorithmus**.
3. Außer der etwas gemütlicheren Bestimmung im Falle von großen Zahlen bietet dieser Algorithmus auch noch den folgenden Vorteil. Gestützt auf ihn, kann man sehr leicht ein Computer-Programm zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen schreiben.

Die (halbe) Seite für den Computer-Fan

In diesem Heft werden drei Algorithmen vorgestellt:

- Der **euklidische Algorithmus** zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen (Seiten 4-5);
- das **Sieb des Erathostenes**, mit dem aus der Folge der natürlichen Zahlen
  $$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$$
  die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ ”ausgesiebt” werden kann (Seite 6-7);
- die **Berechnung des Ostertermins nach Gauß** (Seite 27-28).

Wer etwas Erfahrung mit dem Programmieren hat, wird eingeladen, zu einem dieser Algorithmen eine Routine (z.B. als *function* oder *procedure* in PASCAL) zu entwickeln, die das gestellte Problem löst.

Zum Quadrupel-Spiel aus Monoid 68:
Für jede Quadrupel-Folge gibt es ein $m \leq 4$, so dass Q^m aus lauter geraden Komponenten besteht. Schließlich werden einmal alle Komponenten gleich und beim nächsten Schritt zu Null.

Ein gelöstes und ein ungelöstes Problem aus Monoid 68:
Zu dieser Aufgabe warten wir weiterhin auf eure Ideen. (E.K.)

Primzahlen – Bausteine der ganzen Zahlen

von Ekkehard Kroll

Zahlen spielen in unserem täglichen Leben eine wichtige Rolle: Wir verwenden sie zum Abzählen, zum Messen von Längen, Flächen- oder Rauminhalten, zur Angabe von Anteilen (Prozentrechnung) und zu verschiedenen anderen Zwecken. Am liebsten haben wir es dabei mit den natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, 4, 5$ usw. zu tun; die negativen Zahlen werden mit Unannehmlichkeiten verbunden (Kälte, Schulden, ...), die Null spielt eine merkwürdige Rolle, da sie einmal "nichts" ist, aber andermal – z.B. auf dem Konto bei der Bank – hinter einer Zahl und vor dem Komma ganz bedeutend wird. Die Brüche mag eigentlich niemand.

In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gibt es viele mit besonderen Eigenschaften; zu ihnen gehören die Primzahlen: sie sind in gewissem Sinne die Bausteine für die natürlichen Zahlen, da sich jede natürliche Zahl außer der Eins als Produkt von Primzahlen darstellen lässt. Wie kommt das?

Wir wollen in einer Folge von Beiträgen in den nächsten Heften die Primzahlen etwas näher beleuchten und beginnen in dieser Ausgabe mit einer kurzen Einführung. Also was sind Primzahlen? Dazu brauchen wir erst einmal den *Teilbarkeitsbegriff:*

Eine natürliche Zahl a heißt ein *Teiler* von $b \in \mathbb{N}$, wenn es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt mit $b = a \cdot c$. Wegen $n = n \cdot 1$ ist jedes $n \in \mathbb{N}$ sein eigener Teiler; außerdem teilt 1 jede natürliche Zahl. Eine natürliche Zahl $p \neq 1$ heißt *Primzahl*, wenn 1 und p ihre einzigen Teiler sind. Ist eine Primzahl p ein Teiler von $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir p einen *Primteiler* von n.

Behauptung: Jede natürliche Zahl > 1 besitzt mindestens einen Primteiler.

Beweis durch vollständige Induktion: Die Behauptung stimmt für $n = 2$, da 2 selbst eine Primzahl ist. Die Behauptung sei bereits nachgewiesen für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$. Wir untersuchen nun $n + 1$. Ist $n + 1$ eine Primzahl, sind wir fertig. Ist $n + 1$ keine Primzahl, so muss es nach Definition einer Primzahl einen von 1 und $n + 1$ verschiedenen Teiler t von $n + 1$ geben; sei $n + 1 = t \cdot m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wegen $2 \leq t \leq n$ trifft auf t die Induktionsannahme zu, wonach t mindestens einen Primteiler p besitzt; sei $t = p \cdot d$ mit $d \in \mathbb{N}$. Damit haben wir $n + 1 = p \cdot d \cdot m$. Also ist p auch ein Primteiler von $n + 1$.

Hieraus ergibt sich – formal wiederum durch vollständige Induktion – sofort der **Fundamentalsatz der Zahlentheorie**, wonach jede natürliche Zahl > 1 ein Produkt von Primzahlen ist (wenn sie nicht sogar selbst schon eine Primzahl ist), wobei – bis auf die Reihenfolge der Faktoren – diese Produktdarstellung eindeutig ist.

Der griechische Mathematiker **Euklid** (um 300 v.Chr.) hat bereits nachgewiesen, dass es mehr Primzahlen gibt, als jede noch so große natürliche Zahl anzugeben vermag. Wir sagen dazu etwas salopp: Es gibt "unendlich" viele Primzahlen. Gäbe es nämlich nur endlich viele, sagen wir insgesamt nur r Primzahlen: $p_1, p_2, \ldots p_r$, so könnten wir diese aufmultiplizieren und das Produkt noch um 1 vergrößern:

$$n := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_r + 1.$$

Wenn wir p_1 mit der kleinsten Primzahl, nämlich 2, gleichsetzen, so wäre n sicher größer als 2 und besäße daher einen Primteiler p. Dieser könnte keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_r$ sein, da die Division von n durch ein solches p_i stets den Rest 1 ließe. Also wäre p eine weitere, in der Aufzählung $p_1, p_2, \ldots p_r$ noch nicht enthaltene Primzahl – ein Widerspruch, da diese Aufzählung schon komplett sein sollte!

Um aus den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ die Primzahlen herauszufiltern, hat der griechische Gelehrte **Eratosthenes** (um 200 v. Chr.) ein Siebverfahren angegeben, das folgendermaßen funktioniert: Man schreibe sich alle natürlichen Zahlen von 2 bis zu einer bestimmten (z.B. 100 oder 200) auf, streiche zunächst alle Vielfachen von 2 außer 2, dann alle Vielfachen von 3 (außer 3), soweit sie nicht schon als Vielfache von 2 gestrichen wurden, dann alle Vielfachen von 5 (außer 5) usw. Nach jedem Streichvorgang bleibt eine neue Primzahl stehen. Man erhält so leicht die Folge $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots$.
Denkt man sich diese Primzahlen durchnummeriert: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \ldots$ so liefert der Ausdruck $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r + 1$ für $1 \leq r \leq 5$ der Reihe nach die Primzahlen $3, 7, 31, 211, 2311$, so dass der Eindruck entstehen könnte, man hätte hier eine Formel, die direkt Primzahlen "ausspuckte". Aber bereits der nächste Fall

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

widerlegt diese Vermutung.
Dennoch bleibt die Frage, ob es nicht vielleicht andere Ausdrücke gibt, die stets Primzahlen direkt "produzieren". So vermutete der französische Jurist und Mathematiker Pierre de **Fermat** 1640, dass alle Zahlen der Form

$$F_k := 2^{2^k} + 1 \text{ , } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Primzahlen seien. Er hatte dies nachgeprüft für $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ und $F_4 = 65\,537$. Der aus Basel stammende Mathematiker Leonhard **Euler** widerlegte diese Vermutung 1732, indem er $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ in Primfaktoren zerlegte. Den Faktor 641 fand er, nachdem er gezeigt hatte, dass jeder Teiler von F_k, $k \geq 2$, von der Form $m \cdot 2^{k+2} + 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, also im Falle $k = 5$ von der Form $128 \cdot m + 1$, sein muss.
Eine Primzahl F_k mit $k > 4$ konnte bisher nicht gefunden werden, so dass vermutet wird, dass es außer den fünf bekannten Fermatschen Primzahlen keine weiteren gibt. Wie weit ist man inzwischen mit den Untersuchungen gekommen? In "The **New** Book of Prime Number Records" von P. Ribenboim aus dem Jahre 1996 findet man eine tabellarische Übersicht über den Status (prim oder zusammengesetzt) der Fermat-Zahlen F_k , $k \leq 22$. Die kleinsten Fermat-Zahlen, von denen man – jedenfalls zum Zeitpunkt des Erscheinens dieses Guinness-Buches der Primzahlrekorde – noch nicht wusste, ob sie Primzahlen sind oder nicht, sind F_{24} und F_{28}. Die bis 1996 größte als zusammengesetzt erkannte Fermat-Zahl ist $F_{23\,471}$ mit mehr als $10^{7\,000}$ Ziffern und $5 \cdot 2^{23\,473} + 1$ als Teiler.

In diesem Zusammenhang stellen sich folgende Fragen:

- Wie kann man mit vertretbarem Aufwand feststellen, ob eine vorgelegte Zahl Primzahl ist, bzw. ihre Faktorisierung erhalten?
- Hat dies außer dem ästhetischen Reiz auch eine praktische Anwendung?
- Falls Primzahlen zu etwas nütze sind: Gibt es eine Formel für die n-te Primzahl p_n oder eine Formel zu Berechnung der $(n+1)$-ten Primzahl aus der n-ten oder wenigstens eine Regel, wie man zu einer gegebenen Primzahl eine größere finden kann?

Auf solche und ähnliche Fragen wollen wir in den nächsten Folgen von MONOID eingehen.

Literatur: Paulo Ribenboim, The **New** Book of Prime Number Records. Springer-Verlag New York 1996 (3rd ed.) ISBN 0-387-94457-5 (EUR 53,45)

Ein dritter Blick hinter die Kulissen

von Hartwig Fuchs

Der Schnellrechner

Ein Lehrer, der mit seinen Schülern das Addieren übt, stellt folgende Aufgabe:

Jeder Schüler soll in seinem Heft zwei beliebige natürliche Zahlen Z_1 und Z_2 untereinander schreiben und dann addieren.

Die Summe sei Z_3.

Z_3 wird unter Z_2 geschrieben.

Nun sollen Z_2 und Z_3 addiert werden, und ihre Summe Z_4 soll unter Z_3 gesetzt werden – und so fort, bis 10 Zahlen $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_{10}$ untereinander stehen.

Nachdem die Schüler das gemacht haben, wirft der Lehrer einen nicht sehr langen nachdenklichen Blick auf die Zahlenkolonnen und setzt dann die Summe aller 10 Zahlen $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_{10}$ als 11. Zahl darunter.

Ist der Lehrer ein Rechenkünstler oder wie macht er das?

Der Lehrer braucht kein besonders schneller Rechner zu sein, um die Summe zu bestimmen, denn tatsächlich addiert er die 10 Zahlen gar nicht – vielmehr besitzt er vor jeder Rechnung eine wichtige Teilinformation über das Additionsergebnis, das ihm gestattet, die Addition zu umgehen.

Er weiß nämlich, dass gilt:

$$(*) \qquad Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_{10} = 11 \cdot Z_7$$

Wegen $(*)$ braucht der Lehrer nämlich nur die Zahl Z_7 auf dem Blatt des Schülers zu suchen und dann Z_7 im Kopf mit 11 zu multiplizieren (das ist im Kopf machbar!) – und schon kennt er die Summe.

Beweis von ($*$):

$$\begin{array}{lclclcl}
Z_1 & & & = & Z_1 & & \\
Z_2 & & & = & & & Z_2 \\
Z_3 & = & Z_1 + Z_2 & = & Z_1 & + & Z_2 \\
Z_4 & = & Z_2 + Z_3 & = & Z_1 & + & 2Z_2 \\
Z_5 & = & Z_3 + Z_4 & = & 2Z_1 & + & 3Z_2 \\
Z_6 & = & Z_4 + Z_5 & = & 3Z_1 & + & 5Z_2 \\
Z_7 & = & Z_5 + Z_6 & = & 5Z_1 & + & 8Z_2 \\
Z_8 & = & Z_6 + Z_7 & = & 8Z_1 & + & 13Z_2 \\
Z_9 & = & Z_7 + Z_8 & = & 13Z_1 & + & 21Z_2 \\
Z_{10} & = & Z_8 + Z_9 & = & 21Z_1 & + & 34Z_2 \\
\hline
\multicolumn{3}{l}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_{10}} & = & 55Z_1 & + & 88Z_2 = 11 \cdot (5Z_1 + 8Z_2) = 11 \cdot Z_7
\end{array}$$

Drei Zahlenpyramiden

von Martin Mettler

$$\begin{aligned}
1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\
12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\
123 \cdot 9 + 4 &= 1\,111 \\
1\,234 \cdot 9 + 5 &= 11\,111 \\
12\,345 \cdot 9 + 6 &= 111\,111 \\
123\,456 \cdot 9 + 7 &= 1\,111\,111 \\
1\,234\,567 \cdot 9 + 8 &= 11\,111\,111 \\
12\,345\,678 \cdot 9 + 9 &= 111\,111\,111
\end{aligned}$$

Um die Entstehung dieser Pyramide zu erklären, greifen wir uns eine Zeile heraus.
Z. B. $12\,345 \cdot 9 + 6 = 111\,111$.
Wenn wir die 9 durch $10 - 1$ ersetzen, dann wird die linke Seite der Gleichung:
$12\,345 \cdot (10 - 1) + 6 = 12\,345 \cdot 10 + 6 - 12\,345 = 123\,456 - 12\,345$, woraus man sofort erkennt, dass im Ergebnis lauter Einsen stehen werden.

$$\begin{aligned}
1 \cdot 8 + 1 &= 9 \\
12 \cdot 8 + 2 &= 98 \\
123 \cdot 8 + 3 &= 987 \\
1\,234 \cdot 8 + 4 &= 9\,876 \\
12\,345 \cdot 8 + 5 &= 98\,765 \\
123\,456 \cdot 8 + 6 &= 987\,654 \\
1\,234\,567 \cdot 8 + 7 &= 9\,876\,543 \\
12\,345\,678 \cdot 8 + 8 &= 98\,765\,432 \\
123\,456\,789 \cdot 8 + 9 &= 987\,654\,321
\end{aligned}$$

Zur Erklärung greifen wir uns wieder eine Zeile heraus.
Z. B. $1\,234 \cdot 8 + 4 = 1\,234 \cdot (9 - 1) + 4 = 1\,234 \cdot 9 - 1\,234 + 4$.
Schaut man auf die erste Pyramide, so kann man folgendermaßen fortfahren:
$(1\,234 \cdot 9 + 5) - 1 - 1\,234 = 11\,111 - 1 - 1\,234 = 11\,110 - 1\,234 = 9\,876$.
Im letzten Schritt wurde eine Zahl mit steigenden Ziffern von $11\,110$ subtrahiert, also erhält man eine Zahl mit fallenden Ziffern.

$$\begin{aligned}
9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\
98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\
987 \cdot 9 + 5 &= 8\,888 \\
9\,876 \cdot 9 + 4 &= 88\,888 \\
98\,765 \cdot 9 + 3 &= 888\,888 \\
987\,654 \cdot 9 + 2 &= 8\,888\,888 \\
9\,876\,543 \cdot 9 + 1 &= 88\,888\,888 \\
98\,765\,432 \cdot 9 + 0 &= 888\,888\,888
\end{aligned}$$

Diese Pyramide kann unmittelbar aus den beiden ersten gefolgert werden. Das kannst du sicherlich alleine durchführen.

Wer knackt die Nuss?

Unter diesem Titel griff JOGU, das Magazin der Johannes Gutenberg-Universität Mainz, in seiner Februar-Ausgabe zum ”Tag der offenen Tür” die Aufgabe Nr. 767 aus MONOID Nr. 68 auf:

> **Eine ungewöhnliche Rechnung**
> Frau Meier kauft im Laden vier Artikel, von denen jeder einen anderen Preis hat: ein Artikel kostet genau 1 Euro; ein weiterer kostet doppelt so viel wie der billigste der vier Artikel.
> Bei der Berechnung des Gesamtpreises tippt der Verkäufer versehentlich die Multiplikationstaste seines Taschenrechners anstelle der Additionstaste, und er erhält so den Betrag von $6,75$ Euro.
> Frau Meier protestiert erstaunlicherweise nicht – sie hat im Kopf addiert und ist ebenfalls auf $6,75$ Euro als Gesamtpreis gekommen.
> Nun die Frage: *Wie viel kosten die einzelnen Artikel?*

Einige Einsender(innen) machten sich (stillschweigend oder ganz bewusst) das Lösen dadurch leicht, dass sie von vornherein annahmen, dass der niedrigste Preis x bei 1 Euro liegt. Dann kostet ein weiterer Artikel 2 Euro, und es sind nur noch zwei Preise unbekannt. Für diese kann man aus den beiden Bedingungen, nämlich dass sowohl die Addition als auch die Multiplikation aller Preise den gleichen Betrag von $6,75$ Euro liefert, rasch eine quadratische Gleichung herleiten, deren beide Lösungen (nämlich $1,50$ Euro und $2,25$ Euro) leicht zu ermitteln sind.

Die Schwierigkeit der Aufgabe steckt aber gerade in dem Nachweis, dass der niedrigste Preis nicht unter 1 Euro liegen kann. Unter den Lösungen, die diesen Fall korrekt ausgeschlossen haben, kommt die Lösung von *Rita Nowotny* aus Wiesbaden mit ihren Teilbarkeitsuntersuchungen der Vorgehensweise, wie sie in MONOID Nr. 69 inzwischen veröffentlicht wurde, sehr nahe; sie geht von Anfang an auf Cent über und erhält aus den gestellten Bedingungen über Summe und Produkt der Preise unter Verwendung der Vorgabe, dass ein Artikel dann genau 100 Cent kostet, die folgenden beiden Gleichungen für die noch gesuchten Preise A, B und C, ohne sich dabei festzulegen, welcher von ihnen der niedrigste Preis und welcher demzufolge sein Doppeltes sein könnte:

$$A + B + C = 575 \text{ und } A \cdot B \cdot C = 6,75 \cdot 10^6 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6,$$

wobei also A, B und C natürliche Zahlen < 575 sind. Da $5^4 > 575$ ist, müssen mindestens zwei Summanden durch 25 teilbar sein; da die Summe aller drei durch 25 teilbar ist, muss auch der dritte Summand durch 25 teilbar sein. Somit können wir in obigen Gleichungen auf die gekürzten Größen $A' := A/25$, $B' := B/25$, $C' := C/25$ übergehen und erhalten als neue Gleichungen:

$$A' + B' + C' = 23 \text{ und } A' \cdot B' \cdot C' = 2^4 \cdot 3^3.$$

Da $3^3 > 23$, aber 3 kein Teiler von 23 ist, liefert die analoge Argumentation nun, dass ein Summand (etwa A') durch 9 teilbar sein muss, ein weiterer (etwa B') nur durch 3 und der dritte Summand (also dann C') zu 3 teilerfremd sein muss. Mit den neuen Bezeichnungen $A'' := A'/9$ und $B'' := B'/3$ erhalten wir die Produktgleichung

$$A'' \cdot B'' \cdot C' = 2^4.$$

Somit sind A'', B'' und C' selbst Zweierpotenzen oder gleich 1. Wegen $A' = 9 \cdot A'' < 23$ kann A'' höchstens gleich 2 sein. Wäre $A'' = 2$, also $A' = 18$, so verbliebe $B' + C' = 5$, was wegen $B' = 3 \cdot B''$ nur mit $B'' = 1$ und $C' = 2$ lösbar wäre, aber dann im Widerspruch zu $A'' \cdot B'' \cdot C' = 16$ stünde. Also ist $A'' = 1$, folglich $A' = 9$ und daher $A = 25 \cdot 9 = \mathbf{225}$. Aus $B' + C' = 23 - A' = 14$ folgt $C' = 14 - B'$; eingesetzt in die mit 3 multiplizierte verbliebene Produktgleichung $B' \cdot C' = 3 \cdot B'' \cdot C' = 48$ erhalten wir die quadratische Gleichung

$$B'^2 - 14 \cdot B' + 48 = 0.$$

Deren Lösungen nach bekannten Formeln sind $B' = 8$ (dann ist $C' = 6$) und $B' = 6$ (dann ist $C' = 8$). Dies liefert $\mathbf{B = 200}$ und $\mathbf{C = 150}$ bzw. umgekehrt (alles in Cent). Also sind die erfragten Preise der vier Artikel:

$\mathbf{1}$ Euro; $\mathbf{1,50}$ Euro; $\mathbf{2}$ Euro und $\mathbf{2,25}$ Euro,

und tatsächlich ist ein Preis genau das Doppelte des niedrigsten Preises.

Manfred Nowotny aus der gleichen Familie nimmt an, dass von den vier Preisen A, B, C und D (in Euro) A der niedrigste und B sein Doppeltes ist. Er führt zunächst den Fall $A < 1$ durch Untersuchung von **arithmetischem und geometrischem Mittel** zweier geeigneter Preise zum Widerspruch. Die Betrachtung dieser Mittelbildungen wird durch die in der Aufgabenstellung vorausgesetzte Gleichheit einer Summe mit einem Produkt nahegelegt. Im Fall $A < 1$ und $B = 1$ (also $A = 0,5$) zum Beispiel wäre $A + B = 1,5$ und $A \cdot B = 0,5$. Also wäre $C + D = 6,75 - 1,5 = 5,25$ und $C \cdot D = 6,75/0,5 = 13,5$. Dies stünde aber im Widerspruch zur Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, wonach $\sqrt{(C \cdot D)} \leq (C + D)/2$ sein müsste; es wäre aber hier $\sqrt{(C \cdot D)} > 3,674 > 2,625 = (C + D)/2$. Im Fall $A < 1$ (somit $B < 2$) und $C = 1$ sind nach dieser Methode zwar mehrere Schritte nötig, doch führen auch diese zum Widerspruch, so dass nur $A = 1$ sein kann. Dann ist $B = 2$, und es lässt sich nun wieder leicht eine quadratische Gleichung für C und D aufstellen.

Alexandra Nowotny als Dritte im Bunde geht ebenfalls von A als dem niedrigsten der vier Preise A, B, C und D und von B als seinem Doppelten aus. Zunächst schließt sie den Fall $A = 0,5$, also $B = 1$ und somit $C + D = 5,25$ und $C \cdot D = 13,5$ elegant durch Betrachtung der Gleichung $(C + D)^2 - 4 \cdot C \cdot D = (C - D)^2$ aus; denn die linke Seite ergäbe etwas Negatives, während die rechte Seite ≥ 0 sein muss.
Somit bleibt der Fall $A < 1$, $B = 2 \cdot A$, $C = 1$ zu untersuchen. Dieser führt auf Grund der gestellten Bedingungen über Summe und Produkt der Preise auf eine **Gleichung dritten Grades** für A :

$$24 \cdot A^3 - 46 \cdot A^2 + 27 = 0$$

Hat diese eine positive Lösung? Eine Kurvendiskussion ergibt als einzige reelle Nullstelle einen negativen Wert, den man sich auch mit einem Computeralgebra-System berechnen lassen kann: Neben zwei komplexen Nullstellen liefert z. B. DERIVE den Näherungswert $-0,66$. Damit ist $A < 1$ ausgeschlossen. Mit $A = 1$ verläuft der Rest der Lösung wie schon skizziert über eine quadratische Gleichung.

Wenn man abschließend die drei unterschiedlichen Vorgehensweisen zur Lösung der gestellten Aufgabe vergleicht, wird man feststellen, dass die Chancen zur erfolgreichen Behandlung eines Problems um so größer sind, je mehr Methoden man kennen gelernt hat und im "Ernstfall" auch beherrscht. (E.K.)

Ein Buch – Tipp:

Attila Furdek:

Fehler-Beschwörer

Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben

Gute Mathematik-Lehrbücher sind das Ergebnis einer intensiven Auseinandersetzung mit dem zu vermittelnden mathematischen Stoff und enthalten in der Regel außer eventuellen Druckfehlern keine oder doch fast keine mathematischen Fehler. Die Logik stimmt eben, und die Beweise von Lehrsätzen und die Lösungen von Beispielaufgaben hat der Autor mehrfach durchgesehen beziehungsweise durchgerechnet. Ein präziser, gut durchstrukturierter Beweis auf knappem Raum hat einen gewissen ästhetischen Reiz. Den weniger geübten Leser aber frustriert diese Perfektheit. Je ausgefeilter die Darstellung im Buch, desto stümperhafter kommt sich der Anfänger vor, wenn er um das Verstehen ringt. Attila Furdek sieht darin einen psychologischen Fehler vieler Mathematikbücher, die doch den Lernenden einen Weg in die Mathematik zeigen wollen und dabei verschweigen, dass dieser mit Irrtümern und Fehlern gepflastert ist. Aber gerade die Auseinandersetzung mit den Fehlern führt zur Erkenntnis, zum berühmten ”Aha-Effekt”.

Darum ist ein besonderes Verdienst von Attila Furdek, typische, dem Unterrichtsalltag entnommene Fehler gesammelt und Schülern wie Lehrern zugänglich gemacht zu haben. Das Buch **Fehler-Beschwörer** (ISBN 3-8311-2110-9; Preis: 19,95 €) kann in jeder Buchhandlung, im Internet unter www.libri.de oder telefonisch unter der Nummer (0180) 2369800 bestellt werden.

Hier ein kleine Kostprobe zum Thema **Prozentrechnung:**

> Die Zehnerkarte zum Linienbus kostet 8 Euro, eine Einzelkarte 1 Euro.
> Um wie viel Prozent ist die Zehnerkarte billiger als 10 Einzelkarten?

1. Lösungsweg:
Eine Zehnerkarte ist um 2 Euro billiger als 10 Einzelkarten, die 10×1 Euro , also 10 Euro kosten; 10 Euro entsprechen 100 %, also entspricht 1 Euro dem 10-ten Teil davon, das sind 100 % $\div 10 = 10$ %. Folglich entsprechen 2 Euro dem Doppelten hiervon, also 2×10 % $= 20$ %.

Antwort: Die Zehnerkarte ist um **20 %** billiger als 10 Einzelkarten.

2. Lösungsweg:
Offensichtlich sind 10 Einzelkarten, die 10×1 Euro $= 10$ Euro kosten, um 2 Euro teurer als 1 Zehnerkarte, die nur 8 Euro kostet; 8 Euro entsprechen 100 %, also entspricht 1 Euro dem 8-ten Teil davon, das sind 100 % $\div 8 = 12{,}5$ %. Folglich entsprechen 2 Euro dem Doppelten, also $2 \times 12{,}5$ % $= 25$ %. Somit sind 10 Einzelkarten um 25 % teurer als eine Zehnerkarte, also ist umgekehrt eine Zehnerkarte um 25 % billiger als 10 Einzelkarten.

Antwort: Die Zehnerkarte ist um **25 %** billiger als 10 Einzelkarten.

Die beiden Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch!

Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

(Die Lösungswege sind leicht verändert dargestellt. Die Auflösung gibt’s im nächsten Heft. Bis dahin denkt mal über die Sache nach!) E. Kroll

Hättest Du es gewusst?

Was ist Napoleons Problem?

von Hartwig Fuchs

Napoleon Bonaparte (1769 - 1821), der korsische Eroberer auf dem französischen Thron, hatte gewiss viele und vielfältige Probleme: persönliche, militärische ... - aber die sind hier alle nicht gemeint.
Es handelt sich vielmehr um ein Problem, das man eher nicht mit Napoleon B. in Verbindung bringen würde.
Darum wollen wir auch die Sache nicht mit drei, vier Sätzen beschreiben, sondern uns ihr auf einem kleinen Umweg nähern.

Im Jahre 1797 erschien das Buch "Geometria del compasso" (Geometrie des Zirkels) des italienischen Mathematikers L. Mascheroni (1750 - 1800), in dem er eine nicht gerade alltägliche Auffassung der geometrischen Konstruktionen vertritt und ausführlich beschreibt; nämlich: **geometrische Konstruktionen mit ausschließlich** einem Instrument, **dem Zirkel**.
Sein Buch führt dabei - ausgehend von den einfachsten und grundlegenden Konstruktionen zu einem abschließenden Resultat, das mathematisch sehr interessant ist; er beweist, dass gilt: **Jede mit der üblichen Instrumentenkombination Zirkel und Lineal lösbare Konstruktionsaufgabe ist auch allein mit dem Zirkel lösbar**.

Mit seinem Buch wurde Mascheroni schnell in weiten Kreisen seiner Fachkollegen sehr bekannt und viel diskutiert. Nun liegen aber Zirkel-Konstruktionen sicher nicht im Zentrum des mathematischen Interesses. Was war also der Grund für die schnelle und breite Popularität von Mascheronis Geometrie?
Durch einen glücklichen Umstand machte Mascheroni während des französischen Italienfeldzuges 1796/97 die Bekanntschaft eines Amateurmathematikers, der insbesondere von der Geometrie fasziniert und in ihr ziemlich bewandert war - und der sich für Mascheronis Zirkel-Geometrie begeisterte:

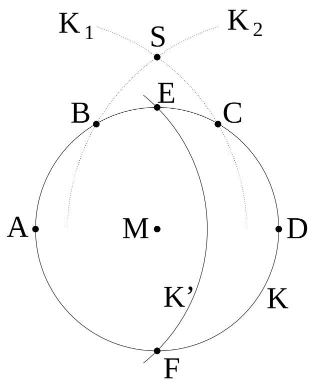
Napoleon Bonaparte.

Durch ihr gemeinsames Intersse wurden die Beiden Freunde - und daher durfte sich Napoleon schon vor der Erscheinung von Mascheronis Buch "Geometria" über dessen Entwurf hermachen, Aufgaben daraus lösen, Verbesserungsvorschläge und sogar Aufgabenvorschläge machen. Eine dieser Aufgaben, die Mascheroni dann in die Endfassung seines Werkes übernahm, wird seither **Napoleons Problem** genannt.
Napoleons "Mitarbeit" und seine politische Position sorgten so für den Erfolg von Mascheronis Buch.

Und das ist **Napoleons Problem**:

> Es sei K ein Kreis um M mit dem Radius r.
> Unterteile K in 4 gleich lange Kreisbögen - oder:
> Konstruiere die Eckpunkte eines dem Kreis K einbeschriebenen Quadrats und zwar nur mit dem Zirkel!

Lösung:



1. Wähle einen Punkt A auf dem Kreis K und konstruiere, bei A beginnend, der Reihe nach die Punkte B, C, D mit der Zirkelöffnung r; somit gilt $|AB| = |BC| = |CD| = r$ und $|AD| = 2|AM| = 2r$.

2. Zeichne einen Kreis K_1 um A und einen Kreis K_2 um D, beide vom Radius $|AC|$; sie schneiden sich in S. Dann ist $|MS| = r\sqrt{2}$.

   Beweis:

   Im Halbkreis des Thales über AD ist das Dreieck ADC rechtwinklig, also gilt:

   $$|AC|^2 = |AD|^2 - |CD|^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2.$$

   Im rechtwinkligen Dreieck AMS gilt wegen $|AS|^2 = |AC|^2 = 3r^2$ daher

   $$|MS|^2 = |AS|^2 - |AM|^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2.$$

3. Zeichne um A einen Kreis K' mit dem Radius $r\sqrt{2}$. K' schneidet K in E und F.

   Im Dreieck AME gilt wegen $|AM| = |ME| = r$ und $|AE| = r\sqrt{2}$ die Pythagoras - Gleichung $|AM|^2 + |ME|^2 = |AE|^2$, so dass das Dreieck AME rechtwinklig ist.

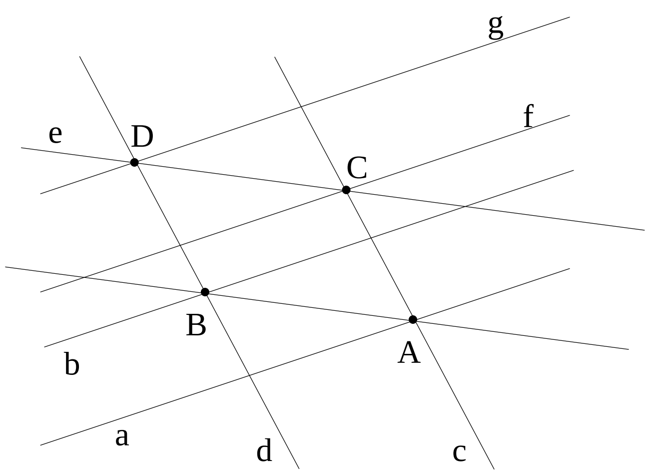
Somit sind AD und EF zueinaner orthogonale Durchmesser des Kreises K und zugleich Diagonalen des gesuchten Quadrates; dessen Ecken sind also A, F, D, E.

* * * * *

Mathis machen geometrische Entdeckungen

Untersuchung an Parallelen

Gegeben seien zwei Paare paralleler Geraden: $a \parallel b$, $c \parallel d$, die sich gegenseitig schneiden. Sei A der Schnittpunkt von a mit c und B der Schnittpunkt von b mit d.
Ferner sei e eine beliebige Parallele zur Geraden AB und C der Schnittpunkt von c mit e sowie D der Schnittpunkt von d mit e.
Sei f die Parallele zu a durch C und g die Parallele zu b durch D.



Vergleiche die Abstände der Parallelenpaare (f, g) und (a, b) sowie (a, f) und (b, g)!
Was entdeckst Du? Warum ist dies so?

(Die Lösung zu dieser Aufgabe findet Ihr im MONOID 71.) (E.K.)

Lösungen der mathematischen Entdeckungen aus Monoid 69

Zahlen aus Zweien

1. Wie viele Zahlen kann man mit genau drei Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
2. Wie viele Zahlen kann man mit genau zwei Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
3. Wie viele Zahlen kann man mit genau fünf Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
4. Wie viele Zahlen kann man mit genau sieben Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
5. Kannst du eine Formel aufstellen zur Bestimmung der Anzahl von Zahlen, die man mit genau n Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen kann?

Lösung:

1. Man kann 4 Zahlen darstellen und zwar die 222, 22^2, 2^{22} und 2^{2^2}.
2. Man kann 2 Zahlen darstellen und zwar die 22 und die 2^2.
3. Man kann 16 Zahlen darstellen und zwar: $22\,222$, $2\,222^2$, 222^{22}, 222^{2^2}, 22^{222}, 22^{22^2}, $22^{2^{22}}$, $22^{2^{2^2}}$, $2^{2\,222}$, $2^{2^{222}}$, 2^{222^2}, $2^{22^{22}}$, $2^{2^{2^{22}}}$ $2^{2^{22^2}}$, $2^{22^{2^2}}$ und $2^{2^{2^{2^2}}}$.
4. Man kann $2^6 = 64$ Zahlen darstellen.
5. Die Formel lautet: Anzahl $= 2^{n-1}$.

Summen von Zahlen in Quadraten

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

Wenn man die 16 Zahlen im 4×4–Quadrat addiert, dann erhält man als Summe eine Zahl S, die sich durch eine besondere Eigenschaft auszeichnet.
Diese Eigenschaft kommt auch der Summe aller Zahlen eines nach dem Muster des 4×4–Quadrats gebauten 2×2–Quadrats, 3×3–Quadrats, 5×5–Quadrats, usw. zu.
Finde heraus, welches diese Eigenschaft ist.
Überprüfe dann Deine Vermutung an der Summe aller Zahlen des 100×100–Quadrats.

Lösung: Wir bezeichnen die Summe aller Zahlen des $n \times n$–Quadrats mit S_n.
Dann ist $S_2 = 8 = 2^3$, $S_3 = 27 = 3^3$, $S_4 = 64 = 4^3$.
Vermutung: $S_n = n^3$
Überprüfung für $n = 100$:
Die Summe der Zahlen der 1. Zeile ist $50 \cdot 101 = 5050$.
Die Summe der Zahlen der 2. Zeile (der 3. Zeile, …der 100. Zeile) ist um 100 (um $2 \cdot 100, \ldots$ um $99 \cdot 100$) größer als die der 1. Zeile.
Somit ist die Gesamtsumme:

$$\begin{aligned} S_{100} &= 5050 + (5050 + 100) + (5050 + 2 \cdot 100) + \cdots + (5050 + 99 \cdot 100) \\ &= 100 \cdot 5050 + 100 + 2 \cdot 100 + \cdots + 99 \cdot 100 \\ &= 100 \cdot 5050 + 100 \cdot (1 + 2 + \cdots + 99) \\ &= 100 \cdot 5050 + 100 \cdot (50 \cdot 99) = 1\,000\,000 = 100^3 \end{aligned}$$

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 69

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Passende Ziffern

In der folgenden Aufgabe stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern.

Welche Ziffern passen für die Buchstaben, wenn folgende Rechnung gelten soll?

$$\begin{array}{ccccc} & & G & I & B \\ + & & M & I & R \\ \hline & G & E & L & D \end{array} \qquad \textbf{Lösung:} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & 3 & 2 \\ + & & 9 & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & 7 \end{array}$$

Wie müssen die Buchstaben ersetzt werden, damit die englische Forderung erfüllt ist?

$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & N & D \\ + & & M & O & R & E \\ \hline & M & O & N & E & Y \end{array} \qquad \textbf{Lösung:} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 5 & 6 & 7 \\ + & & 1 & 0 & 8 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

(WJB)

Das Glückskind

Ernst Müller, den alle nur unter dem Namen "Lucky Baby" kennen, gilt als geborenes Glückskind. Ausgerechnet am Freitag, dem 13., besucht er die Spielbank in Wiesbaden. Viermal hat er gespielt und viermal hintereinander hat er seinen Einsatz verdreifacht. (Als echter "Zocker" hat er natürlich jeweils seine ganze aktuelle Barschaft gesetzt.) Nach dem vierten Spiel ruft die Pflicht, er muss nach Hause und nimmt natürlich all sein Geld mit, immerhin $324\,000$ EURO .

Überlege, wie viel EURO Lucky Baby beim ersten Spiel gesetzt hat!

Lösung:

1. Lösungsweg: *für Schüler(innen) der Orientierungsstufe:*
   Da wir nur die Barschaft am Spielende kennen, müssen wir rückwärts entwickeln: Durch das vierte Spiel hat Lucky Baby seinen letzten Einsatz verdreifacht. Vor Beginn dieses 4. Spiels muss er also $324\,000$ EURO $\div 3 = 108\,000$ EURO eingesetzt haben.
   Die weitere Rechnung erfolgt entsprechend und lässt sich in der folgenden Tabelle verfolgen:

Nach dem 4.Spiel	Vor 4.Spiel	Vor 3.Spiel	Vor 2.Spiel	Vor 1.Spiel
$324\,000$ EURO	$108\,000$ EURO	$36\,000$ EURO	$12\,000$ EURO	$4\,000$ EURO

   Also hatte Lucky Baby $4\,000$ **EURO** zur Spielbank mitgebracht.

2. Lösungsweg: *für Schüler(innen) ab 7. Klasse:*
   War x der erste Einsatz von Lucky Baby, so war der Einsatz beim 2. Spiel das Dreifache, also $3x$, beim 3. Spiel $3 \cdot 3x$, beim vierten Spiel $3 \cdot 3 \cdot 3x$ und nach dem vierten Spiel $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3x$, also $81 \cdot x$. Der Ansatz lautet also: $81 \cdot x = 324\,000 \Rightarrow x = 4000$.

Der Ferrari und das Fahrrad

Zu Mittag fährt ein Ferrari-Fahrer von A-Town nach B-City ab. Eine Stunde später fährt ein Radfahrer auf derselben Straße von B-City nach A-Town, aber natürlich ein kleines bisschen langsamer. *Wer von den Beiden wird, wenn sich der Ferrari-Fahrer und der Radfahrer treffen, weiter von A-Town entfernt sein?* (H. König)

Lösung: Wenn sich zwei treffen, sind sie gleich weit von jedem beliebigen Ort, also auch von A-Town, entfernt.

Welcher Wochentag ist heute?

Der kleine Mathematiker Dennis Rechenfix genießt es, bei (eigentlich ziemlich langweiligen) Familienfeiern die kleinen Rätsel seines Großvaters zu lösen. Das "Rätsel des Tages" seines Großvaters lautet diesmal:

"Nehmen wir an, übermorgen sei gestern. Dann wäre heute genauso weit von Sonntag entfernt, wie heute von Sonntag entfernt wäre, wenn vorgestern morgen wäre. Welchen Wochentag haben wir heute?"

Lösung: Wir beobachten, dass der Großvater in seinem Rätsel 3 verschiedene Zeitebenen eingebaut hat: die Wirklichkeit und 2 verschiedene Annahmen. Wir stellen in einer Tabelle die 3 Aussagen zusammen und nummerieren die Tage von dem frühesten erwähnten Tag ab:

Tag Nr.	Wirklichkeit	Annahme 1	Annahme 2
1			heute
2	vorgestern		morgen
3	gestern		
4	HEUTE		
5	morgen		
6	übermorgen	gestern	
7		heute	

Nach dem Aufgabentext muss der Sonntag genau zwischen den "heute's" der beiden Annahmen liegen, also am Tag Nr. 4. Folglich ist der Tag Nr. 4 ein Sonntag, und damit der HEUTE-Tag in Wirklichkeit auch ein Sonntag.

Die Schnecke

Eine arme Schnecke sitzt tief unten im Brunnen und will heraus. Aber die Brunnenwand ist $27m$ hoch. Da heißt es klettern. Jeden Tag klettert sie $7m$ hoch, rutscht nachts aber $4m$ zurück. Sie beginnt den Weg an einem Montag. *Berechne, an welchem Tag sie endlich den Brunnenrand erreicht!* (Gefunden von Ulrike Barth)

Lösung: Die Schnecke legt täglich $7m - 4m = 3m$ zurück. Nach der siebten Nacht hat sie also $7 \cdot 3m = 21m$ zurückgelegt. Demnach bleiben ihr noch $6m$, die sie während des achten Tages schafft. Also erreicht sie am achten Tag, also wiederum einem **Montag** den Brunnenrand.

Ist das nicht ein tolles Pünktchenmuster?

Andy zeichnet aus Langeweile (in der Mathe – Stunde bestimmt nicht) die folgenden Pünktchenmuster:

Diese 4 Muster sind ja noch einfach zu zeichnen. Aber:

1. Wie viele Pünktchen muss er im 10. Muster zeichnen?
2. Wie viele Pünktchen müsste er im 100. Muster zeichnen?
3. Wie heißt die Anzahlformel für das 1000. Muster und wie viele Pünktchen hat es?

4. Hinweis der Redaktion: Findet ihr eine allgemeine Formel für die Anzahl der Punkte im n-ten Muster?

(Daniel Faber, Fabian Kappesser, Johann Kirsch, Johannes Merz; Klasse 6 ELG Alzey)

Lösung:

1. Das zehnte Muster besteht aus $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = (1+19)+(3+17)+(5+15)+(7+13)+(9+11) = 20\cdot 5 =$ **100 Pünktchen** .
2. Entsprechend besteht das hundertste Muster aus $1+3+5+\cdots+195+197+199 = (1+199)+(3+197)+(5+195)+\cdots = 200\cdot 50 =$ **10 000 Pünktchen** .
3. Im tausendsten Muster haben wir $(1+2\cdot 1\,000-1)+(3+2\cdot 1\,000-3)+(5+2\cdot 1\,000-5)+\cdots = 2\,000\cdot 500 =$ **1 000 000 Pünktchen** .
4. Zum Hinweis der Redaktion: Im n-ten Muster haben wir
   $1+3+5+\cdots+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1) =$
   $(1+2n-1)+(3+2n-3)+(5+2n-5)+\cdots = 2n\cdot\frac{n}{2} = \mathbf{n^2}$ **Pünktchen**

Mittagessen in einer Ganztagsschule Bei der Essenausgabe in einer Ganztagsschule standen genau 7 Schüler(innen) in einer Reihe hintereinander. Olaf stellt fest:

(1) Kein Mädchen stand unmittelbar vor einem anderen Mädchen.
(2) Genau einer der Jungen stand unmittelbar zwischen zwei Mädchen.
(3) Genau eines der Mädchen stand unmittelbar zwischen zwei Jungen.
(4) Genau einmal kam es in der Reihe vor, dass drei Jungen unmittelbar hintereinander standen.

Finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge von Mädchen und Jungen! Erkläre, warum es keine weiteren Möglichkeiten geben kann!

Lösung: Im Folgenden soll für Mädchen die Abkürzung M und für Jungen die Abkürzung J gelten.
Nach Information (2) ergibt sich in dieser Reihenfolge eine Teilgruppe MJM,nach Information (4) eine Teilgruppe JJJ. Zwischen diesen Teilgruppen darf wegen (1) kein Mädchen stehen und wegen (4) kein Junge.
Also ergeben sich für *Sechsergruppen* genau 2 Möglichkeiten, nämlich (A)$MJM\,JJJ$ oder (B) $JJJ\,MJM$.
Im Falle (A) kann **vor** der Sechsergruppe wegen (1) kein Mädchen stehen, wegen (3) aber auch kein Junge. **Hinter** der Sechsergruppe kann wegen (4) kein Junge stehen, also ergibt sich für die *Siebenergruppe* die 1. Möglichkeit $MJM\,JJJ\,M$.
Im Falle (B) kann hinter der Sechsergruppe wegen (1) kein Mädchen stehen, wegen (3) aber auch kein Junge. Vor der Sechsergruppe kann wegen (4) kein Junge stehen, also ergibt sich für die Siebenergruppe die 2. Möglichkeit $M\,JJJ\,MJM$.

Ist der Eingeborene ehrlich?

Ein Reisender will auf einer Insel, auf der zwei Stämme (die Ehrlichen und die Lügner) wohnen, einen Mitarbeiter einstellen, der natürlich ehrlich sein soll.
Er fragt den ersten Bewerber B, zu welchem Stamm er gehöre, worauf dieser antwortet, dass er zum Stamm der Ehrlichen gehört. Um nicht reinzufallen, sagt er zu dem Bewerber, er solle doch einen abseits stehenden Eingeborenen E fragen, zu welchem Stamm er gehöre. Der Bewerber tut das, kehrt zurück und sagt, dass der Eingeborene E erklärt habe, zum Stamm der Ehrlichen zu gehören.
Soll nun der Reisende diesen Bewerber einstellen? Begründe deine Antwort.

Lösung: Es gibt 2 Möglichkeiten:

(1) E ist ein Ehrlicher. Also sagt er zu B, dass er ein Ehrlicher ist; dann müsste B auch ein Ehrlicher sein, da die Mitteilung: ”E hat gesagt, er sei ein Ehrlicher” stimmt.
(2) E ist ein Lügner. Also sagt er zu B, dass er ein Ehrlicher ist; dann muss B ein Ehrlicher sein, da die Information, die er dem Wanderer mitteilt, stimmt.

Der Bewerber B ist also in jedem Fall ehrlich und der Reisende kann ihn getrost einstellen.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Zahlenfolge

In einem Rätselheft findet Nina folgende Zahlenfolge:

$$1; \quad 3; \quad 7; \quad 15; \quad 31; \quad 63; \quad \ldots .$$

Nun überlegt sie, wie die nächste Zahl lauten muss.
Kannst du ihr helfen? Welche Zahl muss auf die 63 *folgen?*

Überlegen ist besser als Knobeln

$$\begin{array}{lccccc}
(1) & A & + & B & = & C \\
(2) & C & \div & D & = & D \\
(3) & B & \cdot & D & = & E \\
(4) & G & - & H & = & J \\
(5) & A & - & B & = & G \\
(6) & & & H & > & J
\end{array}$$

Wie lauten die 5 Gleichungen, wenn verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten und nur die einziffrigen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9$ vorkommen?

(H. F.)

Der Geburtstagskuchen

Nico will für seine Schwester Charlotte zum Geburtstag einen Kuchen backen. Laut Rezept soll dieser für 17 Minuten in den vorgeheizten Backofen. Leider hat Nico zur Zeitmessung nur zwei Sanduhren; eine für 7 Minuten und eine für 9 Minuten.

Wie geht er vor? (WJB)

Tipp: Die Uhren dürfen schon zum Laufen gebracht werden, bevor der Kuchen in den Backofen kommt.

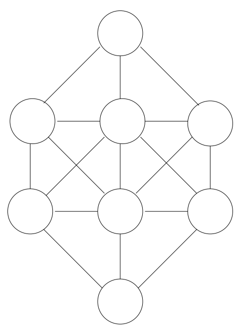
Fremdsprachen

Jeder der 25 Schüler/innen einer 5. Klasse spricht mindestens eine der Sprachen Französisch und Englisch; 18 Kinder sprechen Französisch und 17 Englisch.
Wie viele Schüler/innen sprechen beide Sprachen?

Knobelei

Die Zahlen 1 bis 8 sind genau einmal so in die Felder einzutragen, dass unmittelbar aufeinander folgende Zahlen keine direkten Nachbarn sind. Direkte Nachbarschaft bedeutet: Verbindung durch eine Strecke.

(gefunden: H. F.)



Weitere Mathespielereien findest du auf der nächsten Seite.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

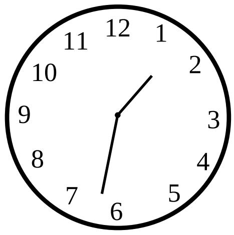
Die Uhrzeiger

Welchen Winkel bilden die Zeiger einer Uhr

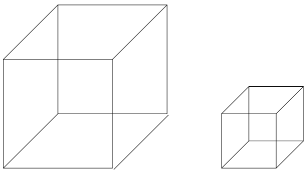
a) um $13:00$ Uhr,

b) um $12:30$ Uhr,

c) um $13:17$ Uhr? (E. Grammes)



Würfelvolumen



Für zwei Würfel gilt:
Die Kante das größeren Würfels ist um $45\ cm$ länger als die des kleineren Würfels. Außerdem ist das Volumen des größeren Würfels das Tausendfache des Volumens des kleineren Würfels.
Wie lang sind die Kanten beider Würfel? (H. F.)

Ist etwa $1 = 5$? Wo liegt denn da der Fehler?
Franziska führt ihrem Bruder Thomas ihre neuesten mathematischen "Erkenntnisse" vor. Sie legt ihrem Bruder einen Zettel hin und sagt: "Auf diesem Papier beweise ich dir, dass es egal ist, ob ich bei der nächsten Mathe-Arbeit eine 1 oder eine 5 schreibe."
Ziemlich interessiert liest Thomas die folgende "Beweiskette":
"Ich gehe von $1 = 5$ aus und zeige am Schluss, dass dies richtig sein muss.

$$\begin{aligned} 1 &= 5 && | \cdot 6 \\ 6 &= 30 && | -18 \\ 6 - 18 &= 30 - 18 \end{aligned}$$

Wegen der 2. Binomischen Formel folgt:

$$\begin{aligned} (6-18)^2 &= (30-18)^2 \\ 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 18 + 18^2 &= 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 + 18^2 \\ 36 - 216 + 324 &= 900 - 1080 + 324 \\ 144 &= 144 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich wahr. Also müssen auch alle Gleichungen vorher wahr sein und folglich ist tatsächlich $1 = 5$."
Thomas überlegt: "Na, da muss doch irgendwo ein Fehler sein; aber wo?"
Ja, wo ist eigentlich der Fehler?

An alle MONOIDANER/-INNEN der Klassen 8 und 9!

Ab MONOID 70 dürft ihr euch auch wieder an den Mathespielerein vergnügen und fleißig Lösungen einsenden!
Da ihr aber schon größere mathematische Kenntnisse habt als die Mathis, erhaltet ihr nur die Hälfte der für Monoidaner aus den Klassen 5 – 7 angesetzten Punkte. Dabei zahlt sich Fleiß sicherlich aus, denn "Kleinvieh macht auch Mist"!

Viel Spaß bei den Mathespielereien wünscht euch das MONOID-Team!

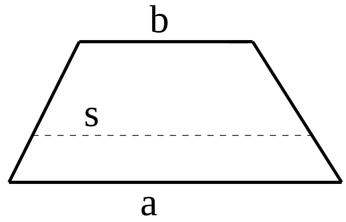
Selbstverständlich dürft ihr auch weiterhin die "Neuen Aufgaben" lösen - mit **voller** Punktzahl.

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 776. Untersuchungen am Trapez

Ein Trapez mit einer Grundseite der Länge a und einer Oberseite der Länge b werde durch eine Strecke s parallel zur Grundseite in zwei Teiltrapeze zerlegt.



a) In welchem Verhältnis unterteilt s die Fläche des Trapezes, wenn s die Mittelparallele ist?
   Berechne in diesem Fall den Prozentanteil des unteren Trapezes an der Gesamtfläche, wenn $a = 5$ cm und $b = 3$ cm ist!

b) Welche Länge hat die Strecke s, wenn sie so gelegt wird, dass beide Teiltrapeze flächengleich sind? (Tipp: Ergänze das Trapez zu einem Dreieck!) (H. F.)

Aufgabe 777.

Zu bestimmen sind alle reellen Zahlenpaare $(x; y)$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y = 1 \qquad \text{und} \qquad x^5 + y^5 = 211$$ (MM)

Hinweis: Setze $s := x + y$ und $p := x \cdot y$ und versuche, $x^5 + y^5$ durch s und p auszudrücken! Wenn dir dies zu schwer erscheint, versuche dich an der reduzierten Problemstellung, indem du alle ganzen Zahlenpaare $(x; y)$ bestimmst, die das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 778. Diophantisches Gleichungssystem

Gegeben sind die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} I & a+b-c+d & = 11; \\ II & a+b+c+d & = 33; \\ III & a^2+b^2+c^2+d^2 & = 343. \end{array}$$

Mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $a < b < c < d$.

1. Bestimme die (eindeutige) Lösung!
2. Welchen Wert hat im Lösungsfall das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$? (Helmut Rössler)

Aufgabe 779.

Ein Mathematiker, der sich die 5-ziffrige Geheimzahl g seiner Scheckkarte nicht merken kann, zugleich aber g nicht auf einem Zettel notiert dauernd mit sich führen will, benutzt eine bemerkenswerte Beziehung zwischen g und der Zahl $h = 40\,391$, die ihm bei der Kenntnis von h jederzeit g zu berechnen gestattet, nämlich:

Die Summe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, h-1$ stimmt überein mit der Summe der Zahlen $h+1, h+2, \ldots, g$.

a) Wie geht der Mathematiker, der h auf seine Scheckkarte geschrieben hat, bei der Berechnung von g vor und wie lautet g?
   Hinweis: Es gilt $1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{1}{2}x(x+1)$.

b) Der Mathematiker braucht nicht einmal h zu kennen, um g zu berechnen!
   Begründe dies für den Fall, dass g eine 3-ziffrige Geheimzahl ist. (H.F.)

Aufgabe 780.
In einem Quadrat der Seitenlänge n findet man leicht n^2 Quadrate der Seitenlänge 1.

a) Wieviele gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 findet man in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge n?
b) Wieviele regelmäßige Sechsecke der Seitenlänge 1 findet man in einem regelmäßigen Sechseck der Seitenlänge n? (WJB)

Aufgabe 781. Eine schwierige Knobelei (für die Sommerferien): Streckenzüge und Potenzen im Quadrat

•	•	B	•	•	•	•	H
•	•	•	•	F	•	•	J
•	•	•	•	•	K	•	•
3	2	•	•	•	A	•	•
•	•	•	•	•	•	•	D
•	•	•	•	•	G	•	•
•	5	•	•	•	1	4	•
•	•	C	•	•	•	•	E

Die 64 Punkte des Quadrats sollen durch Streckenzüge so verbunden werden, dass gilt:

1. Es gibt insgesamt 5 Streckenzüge. Diese dürfen sich nicht schneiden.
2. Ein Streckenzug besteht aus Teilstrecken, die parallel zu den Quadratseiten sind.
3. Jeder der 64 Punkte liegt auf einem der Streckenzüge.
4. Die Anzahl der Punkte auf einem Streckenzug sowie die beiden Endpunkte und ein "Zwischenpunkt" eines jeden Streckenzugs sind durch (1) – (5) gegeben.

Die jeweils drei zu verbindenden Punkte sind		Die Anzahl der Punkte auf dem zugehörigen Streckenzug
(1)	1-A-E	16 Punkte
(2)	2-F-G	13 Punkte
(3)	3-B-H	11 Punkte
(4)	4-D-J	7 Punkte
(5)	5-C-K	17 Punkte

Man bestimme nun 5 verschiedene Potenzen einer festen einziffrigen Zahl. Die Ziffern dieser Potenzen trage man längs der Verbindungsstrecken (1) – (5) so ein, dass man jedem Punkt eine Ziffer zuordnet, wobei die in der Figur vorkommenden Zahlen bereits entweder alle die Anfangziffern oder aber alle die Endziffern dieser Potenzen sind.
Probe: Die den Punkten A, B, C, D zugeordneten Ziffern ergeben eine zur Zeit sehr häufig vorkommende Zahl. (H. F.)

Errata zu MONOID 69

- Auf S. 10 muss es unter (b), (c) und (d) der Aufgabenstellung $(*)$ statt (3) heißen.
- Auf S. 19 (Neue Mathespielereien) muss es in der Aufgabe "Das Glückskind" heißen: "…und viermal hintereinander hat er seinen **Einsatz** verdreifacht."
- Auf S. 25, Lösung zur Aufgabe 767:
  Während Gleichung (1) mit 100 multipliziert wird, muss Gleichung (2) natürlich mit $100^3 = 10^6$ multipliziert werden.
  Außerdem muss es in Zeile 6 von unten v statt u heißen.

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 69

Kl. 8-13

Aufgabe 769. Konstruiere mehrere unendliche Folgen von Potenzdifferenzen, deren Glieder alle durch eine feste natürliche Zahl $t \geq 3$ teilbar sind.
Gib für $t = 23$ Beispiele an. (H.F.)

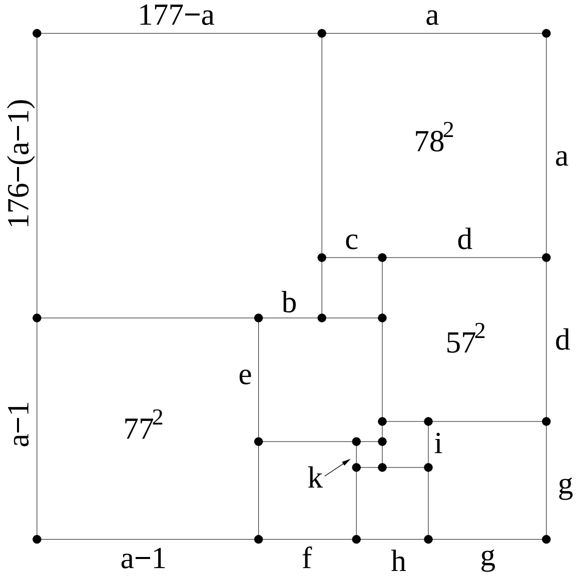
Lösungsansatz:
Es sei b eine natürliche Zahl und $a = b + t$. Dann ist wegen $a^1 - b^1 = (a - b) \cdot 1$,
$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, allgemein
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + b \cdot a^{n-2} + \cdots + b^{n-2} \cdot a + b^{n-1})$ für jedes $n \geq 3$, die Potenzdifferenz $a^n - b^n$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ durch t teilbar.
Beispiele für $t = 23$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl@{\qquad\qquad}rcl}
26^1 & - & 3^1 & 26^{10} & - & 3^{10} & 100^2 & - & 77^2 \\
26^2 & - & 3^2 & 27^{10} & - & 4^{10} & 1\,000^4 & - & 977^4 \\
26^3 & - & 3^3 & 28^{10} & - & 5^{10} & 10\,000^8 & - & 9977^8 \\
26^4 & - & 3^4 & 29^{10} & - & 6^{10} & 100\,000^{16} & - & 99977^{16} \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

Aufgabe 770. Gib die größte Zahl an, die man mit genau fünf Zweien aber ohne Verwendung der Rechenzeichen + , - , · , ÷ und Klammern darstellen kann! (MM)

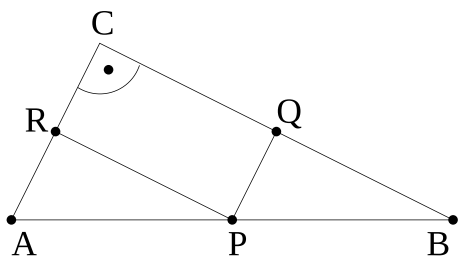
Lösung: Es ist die größte unter den Zahlen: $22\,222$, $2\,222^2$, 222^{22}, 22^{222}, 2^{2222}, 222^{2^2}, 22^{22^2} $22^{2^{22}}$, $22^{2^{2^2}}$, $2^{2^{222}}$, $2^{2^{22^2}}$, $2^{22^{22}}$, $2^{22^{2^2}}$, $2^{2^{222}}$, $2^{2^{2^{22}}}$ und $2^{2^{2^{2^2}}}$ zu ermitteln.
Dabei muss man sich nach Konvention die Hochzahlen von oben beginnend geklammert denken, z. B. bedeutet $22^{2^{2^2}} = 22^{(2^{(2^2)})} = 22^{(2^4)} = 22^{16}$.
Wir vergleichen zunächst 2^{2222}, $2^{2^{222}}$, $2^{2^{22^2}}$, $2^{22^{22}}$, $2^{22^{2^2}}$, $2^{2^{222}}$, $2^{2^{2^{22}}}$ und $2^{2^{2^{2^2}}}$.
Wegen der gleichen Grundzahl 2 vergleichen wir lediglich die Hochzahlen:
$2\,222$, 2^{222}, 2^{22^2}, 22^{22}, 22^{2^2}, 2^{222}, $2^{2^{22}}$ und $2^{2^{2^2}}$.
Das sind die acht Zahlen, deren Vergleich wir im Artikel " Vier mal die Vier" im MONOID Nr. 69 gemacht haben. Die kleinste dieser Zahlen ist $2\,222$ und die größte ist $2^{2^{22}}$.
Also ist unter den acht zu vergleichenden Zahlen $x = 2^{2222}$ die kleinste und $y = 2^{2^{2^{22}}}$ die größte.
Wir vergleichen nun die übrigen Zahlen $22\,222$, $2\,222^2$, 222^{22}, 22^{222}, 222^{2^2}, 22^{22^2}, $22^{2^{22}}$ und $22^{2^{2^2}}$.
Die Hochzahlen der Darstellungen mit der Grundzahl 22 sind 222, $22^2 = 484$, 2^{22} und $2^{2^2} = 16$.
Also ist unter diesen Zahlen $u = 22^{2^{2^2}}$ die kleinste und $v = 22^{2^{22}}$ die größte.
Es ist $w = 22\,222 < 2\,222^2 = 4\,937\,284 < 222^{2^2} = 2\,428\,912\,656 < 222^{22} = z$.
Es ist $z = 222^{22} < 256^{22} = (2^8)^{22} = 2^{176} < 2^{2\,222} = x < y$.
Nun vergleichen wir noch $v = 22^{2^{22}}$ mit $y = 2^{2^{2^{22}}}$:
Es ist $v = 22^{2^{22}} < 32^{2^{22}} = (2^5)^{2^{22}} < (2^8)^{2^{22}} = (2^{2^3})^{2^{22}} = 2^{2^{3} \cdot 2^{22}} = 2^{2^{3+22}} = 2^{2^{25}} < y$, weil $2^{25} < 2^{2^{22}}$ wegen $25 < 2^{22}$ ist.
Somit ist $y = 2^{2^{2^{22}}}$ die größte der 16 Darstellungen.

Aufgabe 771. Rechteckzerlegung
Das Rechteck, dessen Seiten 177 bzw. 176 lang sind, ist in 11 Quadrate so aufgeteilt, dass die Quadrate das Rechteck vollständig ausfüllen.
Bestimme die Seitenlängen aller Quadrate! (H.F.)



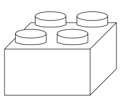
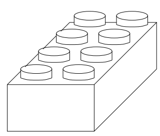
Lösung: Wir bezeichnen die Längen der Quadratseiten wie in der Figur.
$b = (177-a)-(a-1) = 178-2a;$ $\quad c = (177-a)-a = 177-2a;$
$d = a-c = a-(177-2a) = 3a-177;$
$e = b+c = 355-4a;$ $\quad f = (a-1)-e = 5a-356;$
$g = 176-a-d = 353-4a;$
$h = 177-(a-1)-f-g = 181-2a;$ $\quad i = g-h = 172-2a.$
Die Seite des kleinsten Quadrates ist $k = h-i = 9$.
Aus $k = f-h = 9$ folgt $(5a-356)-(181-2a) = 9$, so dass $7a = 546$ und $a = 78$.
Damit erhält man weiter:
$b = 22$, $c = 21$, $d = 57$, $e = 43$, $f = 34$, $g = 41$, $h = 25$, $i = 16$.

Aufgabe 772. Wahr oder falsch?
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C seien P, Q, R die Seitenmittelpunkte.
Wahr oder falsch: *Das Viereck $CRPQ$ ist ein Rechteck, dessen Fläche halb so groß ist wie die Dreiecksfläche ist.* (H.F.)



Lösung: Aus einem Strahlensatz folgt $RP \parallel CB$, also ist RP orthogonal zu CA und somit ist $\sphericalangle CRP = 90$ Grad.
Analog für die zwei anderen Winkel des Vierecks: sie sind 90-Grad Winkel.
Also ist $CRPQ$ ein Rechteck.
Die Fläche von $\triangle ABC$ ist $\frac{1}{2}|BC|\cdot|CA|$; die Fläche des Rechtecks $CRPQ$ ist
$|CQ|\cdot|CR| = \frac{1}{2}|BC|\cdot\frac{1}{2}|CA| = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}|BC|\cdot|CA|) =$ halbe Fläche von $\triangle ABC$.

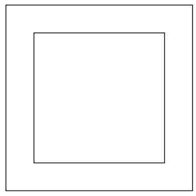
Aufgabe 773. Lego-Pyramiden: Aus Lego-Steinen soll eine vierseitige Pyramide gebaut werden.

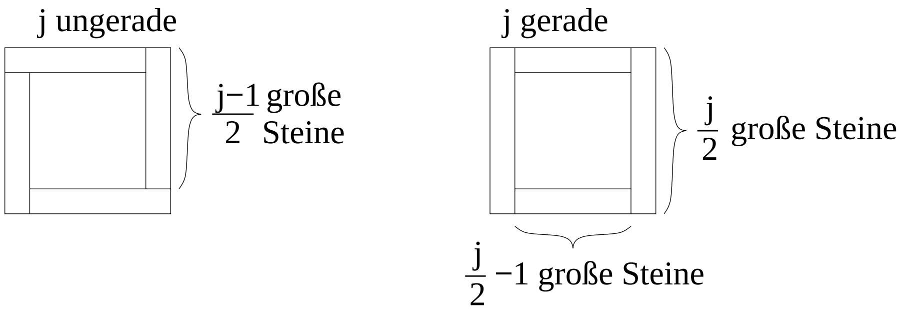
Man hat ”kleine” Steine  und ”große” Steine. 
Die Pyramide soll die Seitenlänge n und die Höhe n haben (gemessen in Einheiten des kleinen Steins). Wieviele Steine werden benötigt? (WJB)

TIPP: Untersuche die beiden Fälle, dass die Pyramide hohl oder massiv ist.

Lösung:

a) Darf die Pyramide hohl sein, so setzt sie sich aus "Ringen" der nebenstehenden Gestalt mit Seitenlängen n, $n-1$, ..., 2 zusammen und der Spitze, die ein kleiner Stein bildet. Ein solcher Ring mit Seitenlänge j lässt sich immer aus lauter großen Steinen zusammensetzen:





Man benötigt also jeweils $2 \cdot (j-1)$ große Steine und somit für die Pyramide insgesamt

$$P_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} 2 \cdot (j-1) = 1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 1 + n \cdot (n-1)$$

Steine.

b) Die massive Pyramide besteht aus Schichten, die Quadrate der Seitenlänge j sind, $j = 1, 2, \dots, n$. Die Fläche der Größe j^2 lässt sich (offensichtlich) für gerades j durch $j^2/2$ große Steine ausfüllen, für ungerades j durch $(j^2-1)/2$ große Steine und einen kleinen Stein (z.B. in der Mitte). Man braucht also für die Pyramide

$$Q_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{2} + \frac{1}{2} A_n$$

Steine, wobei

$$A_n = \text{ Anzahl der ungeraden Zahlen } j \leq n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade,} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

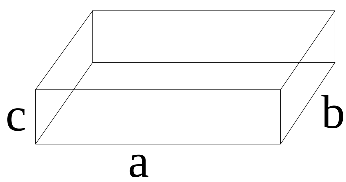
Wegen $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ ergibt sich

$$Q_n = \begin{cases} \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{3} & n \text{ gerade,} \\ \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{3} + \frac{1}{4} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 774. Maße gesucht

Gesucht werden die Maße eines quaderförmigen Behälters, der ein Volumen von $500 cm^3$ hat und dessen Oberfläche minimal ist.

Der Behälter soll oben offen sein, also nur aus einer Grundfläche und vier Seitenflächen bestehen.



Anmerkung: Es handelt sich nicht um eine gewöhnliche Extremwertaufgabe, da hier das Maximum einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen bestimmt werden muss.

(Christoph Sievert, Bornheim)

Lösung:

Für das Volumen V des Behälters gilt: $V = abc$
und für seine Oberfläche F: $F = ab + 2ac + 2bc = ab + 2(a+b)c$.
Wegen $c = V/(ab)$ (1. Nebenbedingung) folgt:

$$(1) \qquad F = ab + 2V(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}).$$

Bei vorgegebenem Volumen $V = 500cm^3$ ist also $F = F(a,b)$ eine Funktion der unabhängigen Variablen a und b. Wir betrachten b vorübergehend als Konstante und leiten F nach a ab:

$$\frac{dF}{da} = b - \frac{2V}{a^2}, \text{ also } \frac{dF}{d\,a} = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2V}{b}}$$

(beachte $a > 0$). Wegen

$$\frac{d^2F}{(da)^2} = \frac{4V}{a^3} > 0$$

für alle a liegt ein Minimum vor. Einsetzen der erhaltenen Bedingung für a (2. Nebenbedingung) in (1) liefert für die Oberfläche als Funktion von b:

$$F(b) = 2(\sqrt{2V}\sqrt{b} + \frac{V}{b})$$

Ableitung nach b:

$$\frac{dF}{db} = \frac{\sqrt{2V}}{\sqrt{b}} - \frac{2V}{b^2}, \text{also } \frac{dF}{db} = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2V}.$$

Wegen

$$\frac{d^2F}{(db)^2} = -\frac{\sqrt{2V}}{2\sqrt{b^3}} + \frac{4V}{b^3}, \text{also } \frac{d^2F}{(db)^2}\Big|_{\sqrt[3]{2V}} = \frac{4V}{2V} - \frac{\sqrt{2V}}{2\sqrt{2V}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$$

liegt ein Minimum vor. Damit ergibt sich für a:

$$a = \frac{\sqrt{2V}}{\sqrt[6]{2V}} = \sqrt[3]{2V} = b,$$

und folglich ist

$$c = \frac{V}{ab} = \frac{1}{2}\frac{2V}{(2V)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \frac{1}{2}b.$$

Die Lösung ist also ein Quader mit quadratischer Grundfläche und einer Höhe vom Betrag der halben Grundseite: Für $V = 500cm^3$ ergibt sich $a = b = 10cm$ und $c = 5cm$, folglich für die minimale Oberfläche $F_{min} = 300cm^2$.

Aufgabe 775. Vielfache

Die Zahl N sei nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar.
Wie lässt sich feststellen, ob es ein Vielfaches von N gibt, dessen Ziffern alle gleich 1 sind? (WJB)

Lösung: Aus der gesuchten Darstellung $b \cdot N = 11\ldots1$ (n-mal) folgt

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{11\ldots1} = \frac{9b}{99\ldots9}\ .$$

Setzt man $a = 9b$, dann muss $a = a_1a_2 \dots a_n$ sein, wobei hierbei die erste oder weitere Stellen 0 sein können. Damit erhält man die Darstellung als periodischen Dezimalbruch

$$\frac{1}{N} = 0,\overline{a_1a_2 \dots a_n} \,.$$

Zur praktischen Berechnung beginnt man umgekehrt hiermit und erhält so a und hieraus $b = a \div 9$ als das gesuchte Vielfache von N.

Beispiel:
$1 \div 13 = 0,\overline{076923}$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 \div 13 & = & 0,\overline{076923} \\ 76923 \div 9 & = & 8547 = b \end{array}\right\} \Longrightarrow 13 \cdot 8547 = 111\,111$$

Wie wird der Ostertermin berechnet?

Die Bestimmung des Osterdatums nach Carl Friedrich Gauß

von Martin Mattheis

Im Gegensatz zum Heiligen Abend, der immer am 24. Dezember gefeiert wird, fällt das Osterfest jedes Jahr auf ein anderes Datum.
Die Tradition der christlichen Kirchen legt das Osterfest auf den ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond nach Frühlingsbeginn. Damit benötigte man die Sonne, um den Wochentag, und den Mond, um den Vollmond zu berechnen. Der Osterzyklus, mit dem man normalerweise das Osterdatum bestimmte, war daher eine Verbindung des 28-jährigen Sonnenzyklus mit dem 19-jährigen Mondzyklus, so dass ein $28 \cdot 19 = 532$-jähriger Osterzyklus entstand.

Eine ganz andere Möglichkeit zur Bestimmung des Osterdatums entwickelte der auf dem inzwischen historischen 10-Mark-Schein abgebildete berühmte Göttinger Mathematiker **Carl Friedrich Gauß** (1777-1855).

Diese Methode funktioniert ohne alle astronomischen Hilfsmittel nur mit der Jahreszahl und den vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division).

Zunächst mögen die von Gauß entwickelten Formeln zur Berechnung des Osterfestes zwar etwas verwirrend erscheinen, sieht man jedoch einmal genauer hin, so erkennt man, dass man wirklich mit den vier Grundrechenarten sowie der Jahreszahl auskommt.

Hat man dann das nächste Osterfest tatsächlich mit der von Gauß entwickelten Methode bestimmt, so wird man von ihrer Einfachheit fasziniert sein, denn im Gegensatz zu anderen vorher gebräuchlichen Methoden braucht man keinerlei astronomische Hilfsmittel und Tabellen.

Bei der Durchführung der Divisionen ist der ganzzahlige Teil der Lösung (in den nachfolgenden Formeln mit Großbuchstaben bezeichnet) uninteressant; von Bedeutung ist jeweils nur der Rest (mit Kleinbuchstaben bezeichnet).
Falls eine Division aufgeht und kein Rest übrigbleibt, so ist der Rest gleich Null zu setzen (z.B. $20 \div 5 = 4$ Rest 0). Außerdem sind die beiden Ausnahmen zu beachten.

Allgemeine Berechnung:	Beispielrechnung für 2002:
Dividiere mit Rest:	Dividiere mit Rest:
Jahreszahl : $19 = A$ Rest a	$2002 : 19 = 105$ Rest 7
Jahreszahl : $4 = B$ Rest b	$2002 : 4 = 500$ Rest 2
Jahreszahl : $7 = C$ Rest c	$2002 : 7 = 286$ Rest 0
$(19 \cdot a + m) : 30 = D$ Rest d	$(19 \cdot 7 + 24) : 30 = 5$ Rest 7
$(2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + n) : 7 = E$ Rest e	$(2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 7 + 5) : 7 = 7$ Rest 2
Ostern ist dann am $(\mathbf{22 + d + e})$ten März oder am $(\mathbf{d + e - 9})$ten April	**Ostern 2002 war am $(\mathbf{22 + 7 + 2}) = \mathbf{31}$.März.**

Die hierbei benutzten Zahlen m und n ergeben sich aus der Jahrhundertzahl k für die Jahre von $k \cdot 100$ bis $k \cdot 100 + 99$ (z.B. für unser Jahrhundert gilt $k = 20$), wie folgt:
Dividiere mit Rest: $k : 3 = p$ Rest r und $k : 4 = q$ Rest s.

Mit p und q bestimmt man dann m und n folgendermaßen:
$(15 + k - p - q) : 30 = M$ Rest m und $(4 + k - q) : 7 = N$ Rest n.

Für eine Jahreszahl von 1900 bis 2099 ergibt sich damit: $m = 24$ und $n = 5$.

Ausnahmen:

1) Ergibt die Rechnung den 26. April, so ist Ostern am 19. April (z.B. 1989).
2) Falls $d = 28$ und $e = 6$ sowie $(11 \cdot m + 11) : 30$ einen Rest ergibt, der kleiner als 19 ist und die Rechnung den 25. April als Ergebnis hat, wird Ostern jedoch am 18. April gefeiert (z.B. 1954). Dies gilt insbesondere für das 20. und das 21. Jahrhundert.

Mit dem beschriebenen Verfahren von Gauß kannst du nun den Ostertermin des nächsten Jahres oder deines Geburtsjahres berechnen.

Literatur:

Carl Friedrich Gauss: Werke. Sechster Band. Herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1874, S. 73-86.

Hermann Grotefend: Taschenbuch der Zeitrechnung des deutschen Mittelalters und der Neuzeit, 12. Auflage, Hannover 1982.

Nikolai Stuloff: Die Entwicklung der Mathematik Teil III von Gauss bis Hilbert, Skriptum herausgegeben vom Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität Mainz 1988.

Anzahl-Probleme bei Dreiecken (II)

Ein Bericht für Mathis und Fortgeschrittene

von Hartwig Fuchs

Für jede Figur D_n, $n \geq 4$, mit den Eckpunkten $E_1, \dots E_n$ unterliegt der Grad $g(E_i)$ eines jeden Eckpunktes E_i der folgenden Einschränkung:

(5) $\quad 3 \leq g(E_i) \leq n - 1$

Beweis (hinsichtlich der Begriffe, Bezeichnungen und Abbildungen siehe MONOID Nr. 69, Seiten 13 - 15):
Zunächst zeigen wir:

$$3 \leq g(E_i).$$

Jeder Eckpunkt, der im Laufe der Konstruktion von D_n in eines der bis dahin vorhandenen Teildreiecke von D_3 platziert wird, muss nach der Zerlegungsvorschrift mit den 3 Eckpunkten eben dieses Teildreiecks durch Kanten verbunden werden. Dann ist also $g(E_i) = 3$; dieser Eckengrad kann sich bei weiterer Unterteilung von D_3 nur erhöhen, d. h. es ist $3 \leq g(E_i)$.
Für den "letzten" Zerlegungspunkt E_n gilt stets: $\quad g(E_n) = 3$.

Als Zwischenergebnis halten wir fest:

(I) $\boxed{\text{Jede Figur } D_n,\ n \geq 4 \text{ enthält mindestens einen Eckpunkt vom Grad } 3, \text{ nämlich } E_n.}$

Es gilt weiter: $\quad g(E_i) \leq n - 1$.
Offensichtlich kann nämlich in D_n ein Eckpunkt E_i höchstens mit allen übrigen $n - 1$ Eckpunkten von D_n durch je eine Kante verbunden werden.

Damit ist (5) vollständig bewiesen.

(5) gibt eine – wenn auch sehr grobe – Abschätzung für die Gradzahlen an, die in einer Figur D_n überhaupt nur möglich sind.

Für jede Figur D_n, $n \geq 3$, mit den Eckpunkten E_1, E_2, $\dots$,E_n gilt

(6) $\quad g(E_1) + g(E_2) + \cdots + g(E_n) = 6n - 12$

Beweis:
Für D_3 ist (6) offenbar richtig (vgl. Bild 1).

Sei nun $n \geq 4$.

Für D_n, $n \geq 4$, gilt zunächst

(6') $\quad g(E_1) + g(E_2) + \cdots + g(E_n) = 2K$,
wobei K die Anzahl der Kanten in D_n angibt.

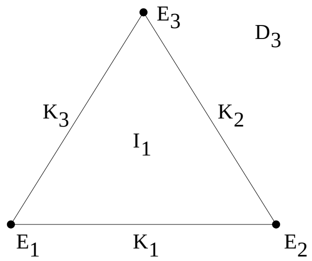


Bild 1 aus MONOID 69

Begründung von (6'):

$g(E_i)$ gibt die Anzahl der Kanten an, die in einem Eckpunkt E_i enden. Jede dieser Kanten muss aber noch in einem anderen, von E_i verschiedenen Eckpunkt enden. Also wird in der Summe (6') jede Kante zweimal gezählt.

$g(E_1) + g(E_2) + \cdots + g(E_n)$ gibt daher nicht die einfache, sondern die doppelte Kantenzahl von D_n an. Somit gilt (6').

Aus (6') und aus (2), nämlich $K = 3n - 6$, also $2K = 6n - 12$ folgt (6).

Aus (5) und (6) lassen sich einige interessante Zusammenhänge zwischen Figuren D_n und den Gradzahlen ihrer Eckpunkte ableiten.

(II) Außer D_3 und D_4 gibt es keine Figur D_n, $n \geq 5$, bei der jeweils alle Eckpunkte den gleichen Grad besitzen.

Beweis:

Tatsächlich gilt (II) für D_3 und D_4: in D_3 haben alle Eckpunkte den Grad 2 (Bild 1) und in D_4 haben sie alle den Grad 3 (Bild 2 aus MONOID 69).

Wir wollen nun Figuren D_n, $n \geq 5$ untersuchen.

Dazu treffen wir eine Annahme, von der wir allerdings leider nicht wissen, ob sie überhaupt erlaubt ist, nämlich:

(7) Unter den Figuren D_5, D_6, D_7, ... befindet sich eine Figur D_n, $n \geq 5$, mit den Eckpunkten E_1, E_2, ... E_n, welche alle den gleichen Grad besitzen.

Da es in D_n einen Punkt vom Grad 3 gibt – vgl. (I) – , müssen in D_n alle übrigen Eckpunkte ebenfalls den Grad 3 aufweisen.

Aus $g(E_1) = \cdots = g(E_n) = 3$ folgt dann $g(E_1) + \cdots + g(E_n) = 3 \cdot n$;

aus der Gleichung (6) ergibt sich: $g(E_1) + \cdots + g(E_n) = 6n - 12$.

Somit gilt: $6n - 12 = 3n$ oder $3n = 12$, also $n = 4$.
Aber mit $n = 4$ sind wir in eine Situation geraten, die man wohl als einen "totalen Schiffbruch" ansehen darf:

Unsere Untersuchungsobjekte sind nämlich gemäß (7) die Figuren D_5, D_6, D_7, ...; und die einzige unter ihnen, die die Eckengrad-Bedingung erfüllt, ist die Figur D_4. Das widerspricht natürlich der Logik.
Die einzige Erklärung für diesen Widerspruch ist diese: wir durften die Annahme (7) gar nicht machen, weil sie falsch sein muss.

Das letzte bedeutet: Es gibt keine Figur D_n, $n \geq 5$, bei der alle Eckpunkte den gleichen Grad aufweisen – (II) trifft also zu.

Wir fragen nun, welche Figuren D_n, $n \geq 3$, mit den Eckpunkten $E_1, \ldots, E_n$ die folgende Eckengrad-Bedingung erfüllen:

(8) Alle Eckpunkte $E_1, \ldots E_{n-1}$ haben einen Grad ≥ 6, während E_n den Grad 3 aufweist.

Zunächst ist klar, dass D_3, D_4, D_5 und D_6 die Bedingung (8) nicht erfüllen.
Damit nämlich ein Eckpunkt E_i von D_n einen Grad $g(E_i) \geq 6$ haben kann, muss wegen (5) gelten:

$n - 1 \geq g(E_i) \geq 6$, also $n - 1 \geq 6$ und daher $n \geq 7$.

Sei also im Folgenden $n \geq 7$.

Nun treffen wir wieder wie oben bei (II) eine Annahme, bei der wir nicht sicher sind, ob wir sie überhaupt machen dürfen:

(9) Unter den Figuren D_7, D_8, D_9, ... befindet sich eine Figur D_n, $n \geq 7$ mit den Eckpunkten $E_1, \dots, E_n$, die die Bedingung (8) erfüllt.

Also gilt für die in (9) genannte Figur D_n:
$g(E_1) = \cdots = g(E_{n-1}) \geq 6$ und $g(E_n) = 3$;
damit folgt aus (6), dass $6n - 12 = g(E_1) + \dots g(E_n) \geq 6 \cdot (n-1) + 3 = 6n - 3$, woraus man $6n - 12 \geq 6n - 3$ erhält.

Die letzte Ungleichung ist natürlich falsch. Wir haben also mit unserer Annahme (9) wieder "Schiffbruch" erlitten. Also durften wir die Annahme (9) nicht machen – weil sie unzutreffend sein muss.

Damit gilt:

(III) $\boxed{\text{Es gibt keine Figur } D_n,\ n \geq 3, \text{ bei der ein Eckpunkt den Grad } 3 \text{ und alle übrigen Eckpunkte einen Grad } \geq 6 \text{ haben.}}$

Folgerung aus (I) und (III):

(IV) $\boxed{\text{Jede Figur } D_n,\ n \geq 4 \text{ hat (mindestens) einen Eckpunkt vom Grad 3 und (mindestens) einen Eckpunkt von einem Grad } \leq 5.}$

Wir führen nun eine Abkürzung ein, die die Verteilung der Gradzahlen auf die Eckpunkte einer Figur D_n bequemer zu beschreiben gestattet.

Mit $\mathbf{G_d}$ sei die Anzahl aller Eckpunkte einer Figur D_n bezeichnet, welche den **Grad** $\mathbf{d}$ besitzen.

Beispiel 3:

a) Für die Figuren D_7' (Bild 7 aus MONOID 69) und D_7'' (Bild 8 aus MONOID 69) ist

$$\begin{array}{llll} D_7' : G_3 = 2, & G_4 = 3, & G_5 = 0, & G_6 = 2; \\ D_7'' : G_3 = 3, & G_4 = 0, & G_5 = 3, & G_6 = 1. \end{array}$$

b) Für jede der Figuren D_3, D_4, D_5, D_6 gibt es nur eine **einzige** Kombination der Werte $G_3, G_4, \dots$ – im Gegensatz zu a)!

$$\begin{array}{llll} D_3 : & G_2 = 3 & & (Bild\ 1) \\ D_4 : & G_3 = 4 & & (Bild\ 2) \\ D_5 : & G_3 = 2, & G_4 = 3 & (Bild\ 5) \end{array}$$

Begründung für D_5: Um von D_4 nach D_5 zu gelangen, ist ein Punkt E_5 in eines der 3 Teildreiecke von D_4 zu platzieren. Wo auch immer das geschieht, man erhält stets die oben angegebene Kombination der Werte G_3, G_4.

$$D_6 : G_3 = 2, \quad G_4 = 2, \quad G_5 = 2, \quad G_6 = 2;$$

Die Begründung ist ganz so wie bei D_5.

Im nächsten MONOID findet Ihr den dritten und abschließenden Teil dieser Serie.

Bundeswettbewerb Mathematik 2002

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

Aufgabe 1
Auf dem Planeten Ypsilon besteht das Jahr – wie bei uns – aus 365 Tagen. Auch dort gibt es nur Monate mit 28, 30 oder 31 Tagen.
Man beweise, dass auf Ypsilon das Jahr ebenfalls 12 Monate hat.

Lösung (von Thomas Gerlach):
Weil das Jahr aus der ungeraden Anzahl von 365 Tagen besteht, muss es mindestens einen Monat mit 31 Tagen geben (denn 28 und 30 sind beides gerade Zahlen). Wir wählen einen solchen Monat aus und betrachten das Restjahr, das heißt, das Jahr ohne diesen Monat. Das Restjahr hat $365 - 31 = 334$ Tage, und es gilt:

- Hätte das Restjahr 10 oder weniger Monate, so hätten diese zusammen höchstens $10 \cdot 31 = 310$ Tage, also zu wenig Tage.
- Hätte das Restjahr 12 oder mehr Monate, so hätten diese zusammen mindestens $12 \cdot 28 = 336$ Tage, also zu viele Tage.

Daher müssen das Restjahr 11 Monate und damit das gesamte Jahr auf Ypsilon 12 Monate haben. □

Aufgabe 2
Die Loszettel einer gewissen Lotterie enthalten sämtliche neunstelligen Zahlen, die mit den Ziffern 1, 2, 3 gebildet werden können; dabei steht auf jedem Loszettel genau eine Zahl. Es gibt nur rote, gelbe und blaue Loszettel.
Zwei Losnummern, die sich an allen neun Stellen unterscheiden, stehen stets auf Zetteln verschiedener Farbe. Jemand zieht ein rotes Los und ein gelbes Los; das rote Los hat die Nummer $122\,222\,222$, das gelbe Los hat die Nummer $222\,222\,222$.
Der Hauptgewinn fällt auf das Los mit der Nummer $123\,123\,123$. Welche Farbe hat es? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

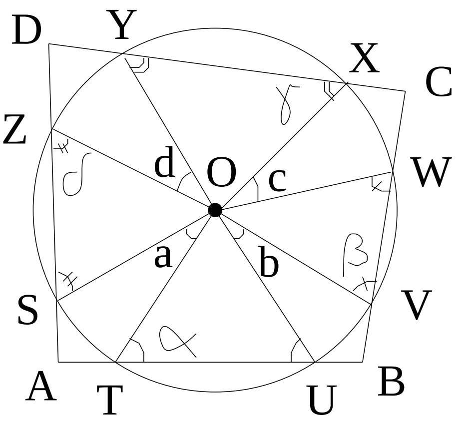
Lösung: Das Los mit dem Hauptgewinn ist *rot*:
Alle Losnummern, die mit 3 beginnen und nur aus den Ziffern 1 und 3 bestehen, stehen auf *blauen* Zetteln. Denn jede beliebige dieser Losnummern unterscheidet sich an allen neun Stellen von den Losnummern $122\,222\,222$ (rot) und $222\,222\,222$ (gelb); sie steht nach den in der Aufgabenstellung beschriebenen Regeln der Lotterie also weder auf einem roten noch auf einem gelben Zettel. Insbesondere sind also die Lose mit den Nummern $313\,113\,113$ und $311\,311\,311$ blau.
Wir stellen außerdem fest, dass die Nummer $231\,331\,331$ auf einem *gelben* Loszettel steht: Denn diese Losnummer unterscheidet sich an allen neun Stellen von den Losnummern $122\,222\,222$ (rot) und $313\,113\,113$ (blau). Da sich die Losnummer des Hauptgewinns, $123\,123\,123$, an allen neun Stellen von den Losnummern $231\,331\,331$ (gelb) und $311\,311\,311$ (blau) unterscheidet, muss der Hauptgewinn auf einem roten Loszettel stehen.

Bemerkung: Aus den in der Aufgabenstellung beschriebenen Färbungsregeln folgt mit etwas mehr Beweisaufwand, dass tatsächlich allein die Anfangsziffer einer Losnummer über die Farbe des Loses entscheidet: Alle Losnummern, die mit 1 (2, 3) beginnen, stehen auf roten (gelben, blauen) Zetteln. □

Aufgabe 3

Die Seiten eines konvexen Vierecks zerlegen einen Kreis in acht Teilbögen, von denen vier innerhalb und vier außerhalb des Vierecks liegen. Die Längen der inneren Bögen seien gegen den Uhrzeigersinn mit a, b, c, d bezeichnet; es gelte $a + c = b + d$.
Man beweise, dass das Viereck ein Sehnenviereck ist.

Lösung:



Über die Bezeichnungen der Aufgabenstellung festgelegten Bezeichnungen hinaus legen wir fest: Die Eckpunkte des Vierecks seien wie in der Skizze mit A, B, C, D bezeichnet; die Schnittpunkte des Vierecks mit dem Kreis mögen wie in der Skizze S, T, U, V, W, X, Y, Z heißen. Der Mittelpunkt des Kreises heiße O, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Kreis den Radius 1 hat.

Es ist dann $\measuredangle SOT = a$, $\measuredangle UOV = b$, $\measuredangle WOX = c$, $\measuredangle YOZ = d$. Zudem sei $\measuredangle UTO =: \alpha$; da das Dreieck $\triangle TUO$ gleichschenklig ist, ist damit auch $\measuredangle OUT = \alpha$. Analog legen wir fest: $\measuredangle WVO = \measuredangle OWV =: \beta$, $\measuredangle YXO = \measuredangle OYX =: \gamma$, $\measuredangle SZO = \measuredangle OSZ =: \delta$.
Das Viereck $\square ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn

$$\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = \measuredangle CBA + \measuredangle ADC;$$

beide Summen betragen dann $180°$.
Am Viereck $\square ATOS$ überlegen wir: Die Innenwinkel summieren sich zu $360°$, und daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \measuredangle BAD = \measuredangle TAS &= 360° - \measuredangle OTA - \measuredangle ASO - \measuredangle SOT \\ &= 360° - (180° - \alpha) - (180° - \delta) - a \\ &= \alpha + \delta - a. \end{aligned}$$

Analog können wir argumentieren, dass

$$\begin{aligned} \measuredangle CBA = \measuredangle VBU &= \beta + \alpha - b, \\ \measuredangle DCB = \measuredangle XCW &= \gamma + \beta - c, \\ \measuredangle ADC = \measuredangle ZDY &= \delta + \gamma - d, \end{aligned}$$

und daraus folgt auf Grund der Beziehung $a + c = b + d$ der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} \measuredangle BAD + \measuredangle DCB &= \alpha + \delta + \gamma + \beta - (a + c) \\ &= \beta + \alpha + \delta + \gamma - (b + d) \\ &= \measuredangle CBA + \measuredangle ADC. \end{aligned}$$

Ein vollständiger Beweis der Aufgabe muss übrigens auch den Fall betrachten, dass der Mittelpunkt O, anders als in der Skizze, nicht innerhalb des Vierecks liegt. Der obige Beweis lässt sich auf diesen Fall übertragen.

□

Aufgabe 4

Aus zwölf Strecken der Längen $1, 2, 3, 4, \ldots, 12$ wird irgendwie ein Zwölfeck zusammengesetzt.

Man beweise, dass es dann stets in diesem Zwölfeck drei aufeinander folgende Seiten gibt, deren Gesamtlänge größer als 20 ist.

Lösung (von Torben Hagerup):

Zur Abkürzung nennen wir eine Gruppe von drei aufeinander folgenden Seiten des Zwölfecks eine *Dreiergruppe*; die Länge einer solchen Dreiergruppe sei die Gesamtlänge ihrer Seiten.

Wir stellen zunächst fest, dass die Behauptung der Aufgabenstellung auch bewiesen ist, wenn eine Dreiergruppe existiert, deren Länge höchstens 17 ist. Denn die Gesamtlänge aller neun übrigen (aufeinander folgenden) Seiten des Zwölfecks beträgt dann mindestens $1 + 2 + \cdots + 11 + 12 - 17 = 61$. Diese neun Seiten lassen sich in drei Dreiergruppen aufteilen, und die Länge mindestens einer der Dreiergruppen muss $\lceil 61/3 \rceil = 21$ sein (Schubfachprinzip).

Wir führen zum endgültigen Beweis der Aufgabe einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an, dass jede Dreiergruppe höchstens Länge 20 hat. Aus der Überlegung im vorigen Abschnitt folgt, dass unter dieser Annahme die Länge jeder Dreiergruppe jeweils einen der Werte 18, 19 oder 20 annehmen muss.

Wir legen eine Orientierung auf dem Zwölfeck fest, in der wir das Zwölfeck durchlaufen; wir nennen die Seiten und ihre Längen in dieser Orientierung $z_1, z_2, \ldots, z_{11}, z_{12}$. Wir wählen die Ausgangsseite so, dass $z_1 = 12$ gilt. Da die Ausgangsseite mit den beiden ihr folgenden Seiten eine Dreiergruppe bildet, gilt nach Annahme:

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 20, \text{ also } z_2 + z_3 \leq 20 - z_1 = 8.$$

Die Seite z_4 muss 11 oder 10 lang sein: Wäre sie 9 lang oder kürzer, würde für die Dreiergruppe z_2, z_3, z_4 gelten, dass $(z_2 + z_3) + z_4 \leq 8 + 9 = 17$, was ausgeschlossen ist.

Analog können wir für die Seiten z_{12}, z_{11}, z_{10} argumentieren: Auf Grund der Annahme $z_1 + z_{12} + z_{11} \leq 20$ gilt $z_{12} + z_{11} \leq 8$, und wegen $z_{12} + z_{11} + z_{10} \geq 18$ folgt $10 \leq z_{10} \leq 11$.

Ohne Einschränkung legen wir fest, dass $z_4 = 11$ und $z_{10} = 10$. Wir wiederholen die Argumentation von eben für die auf z_4 folgenden Seiten: Auf Grund der Annahme $z_4 + z_5 + z_6 \leq 20$ gilt $z_5 + z_6 \leq 9$, und wegen $z_5 + z_6 + z_7 \geq 18$ folgt $z_7 = 9$, da die Seiten mit den Längen 12, 11 und 10 schon feststehen. Aus $z_{10} + z_9 + z_8 \leq 20$ folgt schließlich $z_9 + z_8 \leq 10$.

Wir fassen zusammen: Die Seiten z_1, z_4, z_{10} und z_7 haben die Längen 12, 11, 10 und 9. Die übrigen Seiten haben daher nach Aufgabenstellung und auf Grund der vorangegangenen Überlegungen die Gesamtlänge

$$36 = 1 + 2 + \cdots + 7 + 8 = z_2 + z_3 + z_5 + z_6 + z_8 + z_9 + z_{11} + z_{12} \leq 8 + 9 + 10 + 8 = 35,$$

ein Widerspruch. □

V.P.

Beweisen kann man lernen (II)

von Hartwig Fuchs

Der direkte Beweis

Beweisen ist eine geistige Tätigkeit - und daher lernt man Beweisen nur durch Beweisen, also durch eigenes selbstständiges Tun oder durch den Nachvollzug von vorgegebenen Beweisen.
Damit ist das Vorgehen in den nachfolgenden Beiträgen vorgezeichnet:
Keine lehrbuchhafte Schritt-für-Schritt-Entwicklung des Themas ”Beweisen” mit einem Übergewicht theoretischer Erörterungen, sondern Herausarbeitung des Wesentlichen eines Beweistyps an exemplarischen Beispielen mit gelegentlich weiteren Beispielen zur Vertiefung.
Als ersten Beweistyp betrachten wir den **direkten Beweis**.
An ihm können wir einige der wesentlichen **Ideen** erkennen, **die allem ”Beweisen” zu Grunde liegen**.

Zu den einfachsten geometrischen Figuren zählt das Dreieck - und dennoch oder gerade deswegen ist es eines der bestuntersuchten mathematischen Objekte: man hat viele Hunderte von wichtigen, schönen oder auch nur merkwürdigen Eigenschaften von Dreiecken entdeckt. Wenn man nun feststellt, dass eine gewisse Eigenschaft jedem beliebigen Dreieck zukommt, dann beschreibt man diese Tatsache als eine **wahre Aussage** über das Dreieck; und wenn diese Aussage dem Mathematiker hinreichend merk-würdig erscheint, dann nennt er sie nach einer Tradition, die von den alten Griechen herrührt, einen **Satz** oder auch ein **Theorem** über das Dreieck.
Damit lässt sich das **Ziel des Beweisens** vorausschauend so umreißen:
Aussagen über mathematische Objekte (z. B. über Dreiecke) sind der Wahrheit zu überführen, und das heißt: es ist hieb- und stichfest zu begründen, dass sie zutreffend sind.

Einer der wichigsten Sätze über das Dreieck - der seit fast 3000 Jahren bekannt ist - ist der Innenwinkelsatz (IW-Satz):

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180.

Wie erlangt man die Gewissheit, dass diese Aussage wahr, also immer und unter allen Umständen zutreffend ist?
Wir wollen den Prozess, durch den man zu dieser Gewissheit gelangt, genauer betrachten.

1. **Kann man die Gültigkeit des IW-Satzes mit real gegebenen**, z. B. mit gezeichneten **Dreiecken begründen**?

   In einer realen Situation wird man es so versuchen:

   (1) Ein Dreieck wird gezeichnet.

   (2) Die Innenwinkel des Dreiecks werden gemessen.

   (3) Es werden weitere Dreiecke gezeichnet und ihre Innenwinkel gemessen.

Zu (1): Kann man ein Dreieck exakt zeichnen?

Wenn man mit Lineal und Bleistift eine "Strecke" auf ein Blatt Papier zeichnet, dann kann diese "Strecke" nicht die Seite eines exakten Dreiecks sein: zum einen ist es unmöglich, ein Lineal mit einer wirklich geraden Zeichenkante - also ohne jede mikroskopische Unebenheit - herzustellen; zum anderen hat ein Bleistiftstrich stets eine gewisse Breite, die wegen des wechselnden Drucks, mit dem der Zeichner den Stift auf das Papier drückt, nicht konstant sein kann.
Also erhält man durch Zeichnung kein exaktes Dreieck.

Zu (2): Kann man einen Winkel exakt messen?

Statt einer Erörterung dieser Frage eine hübsche Geschichte.

Ein Raumfahrer von einem fernen Stern besucht die Erde. Er ist so fasziniert von dem, was er hier antrifft, dass er beschließt, bei seinem Rückflug alles Wissen der Menschheit mit nach Hause zu nehmen. Jedoch ist seine Rakete für den Rückstart bis an die Kapazitätsgrenze mit Treibstoff beladen, so dass eine Zuladung vieler Bücher, Disketten usw. nicht möglich ist. Aber er denkt sich für sein Transportproblem eine Lösung in Form einer genialen Textverschlüsselung aus.
Wir erläutern seine Überlegungen an einem Beispiel:
Ein Buch von 250 Seiten mit durchschnittlich 30 Zeilen zu je 50 Textzeichen (Buchstaben, Symbole usw.) pro Seite enthält etwa 375 000 Zeichen. Jedem Zeichen ordnet er einen der Ziffernblöcke $001, 002, \dots, 999$ zu, wobei gleichen Zeichen auch gleiche Ziffernblöcke entsprechen. So transformiert er den Text T des Buches in eine Folge von etwa 1 000 000 Ziffern. Nach den 3 ersten Ziffern der Folge setzt er ein Komma. Dann entspricht dem Text T eine gigantische Dezimalzahl D mit etwa 1 Million Ziffern nach dem Komma.
Wenn er nun auf einem Metallstab von exakt $1\,000\ mm$ Länge eine Marke M im Abstand $D\ mm$ vom linken Stabende (Nullmarke) anbringt, dann repräsentiert diese eine Marke M den Text T - und so kann er mit ganzen Bibliotheken verfahren!
Auf seinem Heimatstern braucht er nur noch den exakten Abstand der Marke M vom Nullpunkt zu messen - er wird $D\ mm$ sein - um aus der Dezimalzahl D den Originaltext T zu rekonstruieren.
Leider funktioniert dieses Ver- und Entschlüsselungsverfahren in der Praxis nicht - es scheitert bereits an der Breite der Markierungsstriche: ein Atomkern hat einen Durchmesser von etwa $0{,}000\,000\,1\ mm$, während die Breite einer Marke in unserem Beispiel sicher kleiner als der $10^{1\,000\,000}$-te Teil eines Atomdurchmessers betragen müsste und das ist technisch nicht machbar. Ohne exakte Markierungen sind aber exakte Messungen unmöglich.

Der letzte Satz der Geschichte lässt sich sinngemäß auf einen Winkelmesser und seine Markierungen übertragen.
Damit haben wir die Antwort auf die oben gestellte Frage: die Innenwinkel eines Dreiecks kann man nicht exakt messen, weil es keinen exakten Winkelmesser gibt.

Zu (3): Kann man die Operationen (1) und (2) bei jedem beliebigen Dreieck durchführen?

Die Antwort lautet: Nein.
So ist (1) nicht möglich für das Dreieck, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte von Sonne, Mond und Erde sind; und die Innenwinkel dieses Dreiecks kann man nur näherungsweise bestimmen.

Die Untersuchung von realen Dreiecken schien zunächst einen ganz natürlichen und einfachen Weg darzustellen, wie man Sicherheit über die Richigkeit des IW-Satzes erlangen könnte. Jedoch zeigen die Überlegungen zu (1), (2) und (3), dass man dabei zwangsläufig auf unüberwindliche Hindernisse stößt, die zur Folge haben: an realen

Dreiecken kann man sich keine Gewissheit über das Zutreffen des IW-Satzes verschaffen.

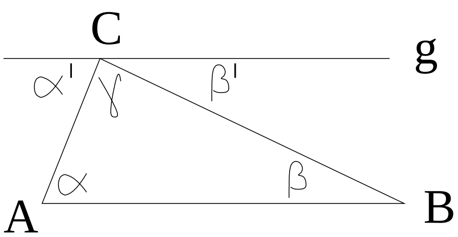
2. **Wie kann man ohne Rückgriff auf reale Dreiecke den IW-Satz zuverlässig begründen?**

   Die griechischen Mathematiker bemerkten wohl als erste:

   Wenn man eine unanfechtbare Begründung des IW-Satzes finden will, dann darf man sich nicht auf reale Dreiecke stützen.
   Infolgedessen kann sich der IW-Satz auch nicht auf solche realen Dreiecke beziehen.
   Von was für Dreiecken handelt dann aber der IW-Satz?
   Die griechische Antwort ist auch heute noch gültig: es müssen "mathematische" Dreiecke sein - und damit sind Dreiecke gemeint, die nur in der Vorstellung der Menschen existieren. Da nun für mathematische Dreiecke Zeichnen und Messen entfallen, haben die Griechen auf diese Weise die bei (1), (2) und sogar auch bei (3) auftretenden Probleme elegant vermieden. Zugleich aber standen sie jetzt vor einem anderen Problem: wie konnten sie Aussagen über abstrakte Objekte - wie es z. B. die mathematischen Dreiecke sind - stichhaltig begründen?
   Sie haben dazu ein universales Prinzip erdacht, eine Methode, die heute bei der Lösung mathematischer Probleme zwingend "vorgeschrieben" ist und ohne die Mathematik im Grund undenkbar ist: Sie begründen - der Mathematiker sagt: sie **beweisen** - mathematische Aussagen im Wesentlichen **allein mit** Hilfe der **Logik**.

Diese unverzichtbare griechische Methode erläutern wir an unserem geometrischen Beispiel, dem IW-Satz.

Beweis des IW-Satzes



1. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck A, B, C.

   Hinweis: die nebenstehende Zeichnung dient nur zur Veranschaulichung der geometrischen Sachverhalte. Wir werden keine Eigenschaft der Figur und auch keinen an der Figur gewonnen Messwert in dem nachfolgenden Beweis benutzen.

2. Wir wissen, dass die folgenden Aussagen V_1, V_2, V_3 wahr sind:

   V_1 (Parallelensatz): Durch den Punkt C gibt es zur Strecke AB genau eine Parallele g.

   Weil α und α' sowie β und β' Wechselwinkel an den Parallelen AB und g sind, gilt für diese Winkel:

   V_2 (Wechselwinkelsatz): Die Wechselwinkel α und α' sind gleich groß; die Wechselwinkel β und β' sind gleich groß.

   V_3 (Satz über gestreckte Winkel): α', γ und β' bilden einen gestreckten Winkel.

3. Die Durchführung des Beweises sieht so aus:

   Die Aussagen V_1, V_2, V_3 gelten für das gegebene (mathematische) Dreieck ABC und die Parallele g durch C (vgl. Figur).

Aus V_1 **schließt** man:	es gibt zu α nur einen Wechselwinkel α' und zu β nur einen Wechselwinkel β'.
Aus V_2 erhält man:	es ist $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.
Aus V_3 **folgt**:	$\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$.

   Ersetzt man in der letzten Gleichung α' durch den gleich großen Winkel α und β' durch den gleich großen Winkel β, so gilt nun:

   $$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

   und diese Gleichung ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ABC $180°$ ist.
   Wenn nun ein Mathematiker eine Aussage ”für ein beliebiges Dreieck” als wahr nachgewiesen hat, dann meint er damit:

   die Aussage gilt ”für jedes Dreieck” (s. u. Ausblick).

4. Mit 3. ist der Beweis des IW-Satzes erbracht.

Die Struktur des Beweises unseres IW-Satzes

Eine Analyse des Vorgehens beim Beweis des IW-Satzes zeigt einen logischen Prozess, der eine deutlich erkennbare dreiteilige Struktur besitzt:

ausgehend von **Voraussetzungen**
- das sind die über das Dreieck ABC samt Parallele g durch C gemachten Aussagen V_1, V_2, V_3, von denen man (aus anderen Überlegungen) weiß, dass sie **wahr** sind –

führt der Beweisprozess allein mit Hilfe von **Schlussregeln**
- das sind logische und auch mathematische Regeln, die zunächst auf die vorausgesetzten Aussagen V_1, V_2, V_3, dann aber auch auf die sich dabei ergebenden Aussagen (**Folgerungen**) angewendet werden –

schließlich auf eine **Schlussfolgerung**
- das ist der am Anfang des Beweises **behauptete** IW-Satz, dessen Wahrheit von nun ab als gesichert gilt.

Ein Beweis, der nach diesem Muster abläuft, heißt ein **direkter Beweis**.

Davon demnächst mehr.

Rubrik der Löser und Löserinnen *(Stand: 26.02.2002)*

ACHTUNG! Neue Zählung ab MONOID 68

◊ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

■ **Kl. 5:** Claudia Heiss 11, Johanna Mees 5, Annett Stellwagen 11;
■ **Kl. 6:** Johann Kirsch 10, Johannes Merz 10;
■ **Kl. 7:** Markus Bassermann 14, Meike Fluhr 7, Isabelle Merker 12;
■ **Kl. 8:** Isabelle Maurot 3, Christina Simon 9;
■ **MSS 12:** Aaron Breivogel 12, Dominik Kraft 12.

◊ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

■ **Kl. 5:** Carolin Herandez-Sanchez 9, Felix Liebrich 11, Lisa Mettler 12, Carolin Morlock 9, Nina Rein 9, Susanne Rogge 9, Inga Wellstein 9, Rebecca Zimmer 10;
■ **Kl. 7:** Jeanette Stohr 9; ■ **Kl. 9:** Gregor Dschung 6.

◊ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

■ **Kl. 7:** Sebastian Bischof 9, Patrick Eichstätter 8, Robert Vogt 1;
■ **Kl. 8:** Lorenz Diener 4, Stefan Tran 8.

◊ **Alzey, Gymnasium am Römerkastell: Kl. 6:** Christian Behrens 15.

◊ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**
■ **Kl. 7:** Hannah Hauser 7, Marius Trabert 4.

◊ **Frankenthal, Erkenbert-Grundschule: Kl. 3:** Laura Mettler 9.

◊ **Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (Betreuende Lehrerin Frau Irmtrud Niederle):**
■ **Kl. 5:** Jonas Fischer 1, Franziska Lahnstein 2;
■ **Kl. 7:** Soria Astar 1, Katja Dik 1.

◊ **Hantersbüttel: Kl. 9:** Roman Menzel 5.

◊ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium: Kl. 12:** Kerstin Bauer 13.

◊ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 8:** Judith Reinhardt 11.

◊ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 11:** Steffen Biallas 11.

◊ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
■ **Kl. 6:** Daniela Bongartz 4, Jennifer Döring 7, Annika Kohlhaas 11;
■ **Kl. 7:** Stefanie Tiemann 15.

◊ **Oberusel (Betreuende Lehrer/in Frau Angelika Beitlich und Herr Bielefeld):**
■ **Kl. 5:** Carolin Dossmann 7, Gib Gutzeit 4, Alice Kah 3, Marcel Landua 6, Sabrina Schröder 4, Annkatrin Weber 15; ■ **Kl. 6:** Stefan Albert 8, Margarete Heinrichs 3;
■ **Kl. 8:** Elham Qiami 3.

◊ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
■ **Kl. 5:** Annika Fetzer 8, Kurosch Habibi 7, Carolin Roßbach 3, David Schuschke 4, Joanna Wendling 8; ■ **Kl. 6:** Julia Jung 9, Lena Müller 10, Sarah Tröbs 8;
■ **Kl.9:** Verena Prägert 3.

◊ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium: Kl. 10:** Catherina Wirtz 3.

MONOID Jahrgang 22 Heft 70 Juni 2002

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Dr.Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Ehrenmitglied: Martin Mettler
Monoidaner: Eike Bumb, Aaron Breitvogel, Gregor Dschung, Felix Henninger, Armin Holschbach, Dominik Kraft, Sönke Loitz, Heiner Olbermann, Martin Olbermann, Christoph Peters, Joachim Trodler und Marcel Zimmer
Korrekturen und Layout: Katrin Elter **Internet:** Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort 'MONOID', **Adresse nicht vergessen**.
Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid