Jahrgang 22 Heft 69 März 2002

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Die einzigartige Mathe-Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
in der Bundesrepublik Deutschland,
1980 begründet von Martin Mettler;
seit 2001 herausgegeben vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern). Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15. 06. 2002.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

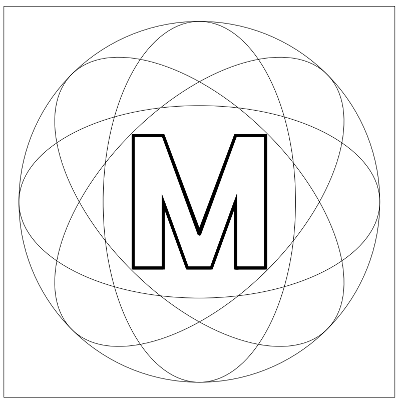
Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: MMettler@t-online.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M



Außer der Medaille mit dem goldenen M, die ihr Aussehen in diesem Jahr gewandelt hat, gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten.
Zur Ermittlung der Preisgewinner werden folgende Tätigkeiten bewertet: Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Viermal die Zwei

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

von Martin Mettler

Auf S. 38 im MONOID-Heft 68 stellte Herr Kraft die Frage: "Welches ist die größte Zahl, die man mit genau fünf Zweien unter Verwendung der Rechenzeichen + , - , $\cdot$, $\div$ und Klammern darstellen kann?
Nach dem Abgabetermin für die Lösungen besprach Herr Müller in seiner Mathe - AG für die Fünftklässler die Lösung zu dieser Frage.
(Siehe die Lösungen der Mathespielereien auf S. ??? in diesem Heft.)

Im Anschluss sagte er: "Wir wollen uns nun weitere Fragen stellen. Zur Vereinfachung betrachten wir nun Zahlen, die aus genau vier Zweien gebildet werden und stellen uns die Frage:
"Welches ist die größte Zahl, die man mit genau vier Zweien, aber ohne Verwendung der Rechenzeichen + , - , $\cdot$, $\div$ und Klammern darstellen kann ?"

Darauf sagte Felix: "Mit vier Zweien kann man lediglich eine einzige Zahl darstellen und zwar die $2\,222$."
Herr Müller aber meinte: "Vielleicht denkst du mal an 222^2 ? Wie lautet denn da das Ergebnis ?"
Felix antwortete: "Da müssen wir $222 \cdot 222$ rechnen und das ist $49\,284$."
"Ja, wenn man an Potenzen denkt, dann gibt es noch weitere Darstellungsmöglichkeiten", bemerkte Lisa.
Wir wollen uns zunächst einmal alle Darstellungsmöglichkeiten aufschreiben", schlug Herr Müller vor.
"Also wären da noch 22^{22} und 2^{222}", fiel Carolin ein.

Auf Herrn Müllers Frage: "Findet ihr noch weitere Darstellungen?" herrschte zunächst Schweigen. Daraufhin half er weiter: "Und was ist mit $2^{2^{2^2}}$?"
Rebecca rechnete nach und sagte: "Also $2^{2^{2^2}}$ ist $2^{2^4} = 2^{16} = 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 65\,536$".
Dann hatte es bei Felix wieder geblitzt. Er stellte fest: "Dann kommen auch noch 2^{22^2} und $2^{2^{22}}$ als Möglichkeiten hinzu".
"Ich hab auch noch eine Möglichkeit gefunden und zwar die 22^{2^2}", freute sich Lisa.

Nun suchten alle eifrig nach weiteren Möglichkeiten. Doch es tat sich nichts. Herr Müller wusste selbstverständlich, wie viele Darstellungsmöglichkeiten es insgesamt gibt. Da er inzwischen heimlich die gefundenen Darstellungsmöglichkeiten abgezählt hatte, gab er sich zufrieden und forderte Carolin auf, sie noch mal systematisch aufzuschreiben und ihnen die Namen a,b,c, usw. zu geben. Sie schrieb:

$$\begin{array}{lllllllll} a &=& 2\,222 & b &=& 222^2 = 49\,284 & c &=& 22^{22} \\ d &=& 2^{222} & e &=& 22^{2^2} = 234\,256 & f &=& 2^{22^2} \\ g &=& 2^{2^{22}} & h &=& 2^{2^{2^2}} = 65\,536 & & & \end{array}$$

Aus den bereits errechneten Werten folgerte sie: "Es ist $a < b < h < e$ ".

Herr Müller gab zu: ”Bei der Berechnung von c, d, f und g stoßen wir auf Schwierigkeiten. Die Zahlen sind unübersichtlich groß und es fehlt uns die Geduld diese Darstellungen völlig auszurechnen.

Z.B. ist

$$\begin{aligned} c &= 22^{22} = 22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 22 = 484 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 22 = \\ &= 10\,648 \cdot 22 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 22 = 234\,256 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 22 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Es wird hier zwar sichtbar, dass $c > e$ ist, doch c auszurechnen langweilt uns. Aus diesem Grund lassen wir uns zum Vergleich etwas einfallen.

Wir bemerken, dass c und e die gleiche Grundzahl 22 haben. Also genügt es die Hochzahlen zu vergleichen.
Wegen $22 > 2^2 = 4$ ist $e < c$ und somit ist $a < b < h < e < c$.
Versucht doch mal den Trick mit der gleichen Grundzahl zum Vergleich von d, f, g und h an zu wenden.”
Nun meldete sich Felix. Er überlegte: ”Wir müssen also nur die Hochzahlen 222 , $22^2 = 484$, 2^{22} und $2^{2^2} = 2^4 = 16$ vergleichen.
Also ist $h < d < f$. Aber 2^{22} auszurechnen wird ewig dauern.”
Herr Müller sagte:”Überlegt doch mal, ob wir nicht auch ohne 2^{22} völlig auszurechnen weiter kommen?”
Lisa sagte:”Die $22^2 = 484$ wird sicherlich von den Zweierpotenzen überschritten werden bevor wir zu 2^{22} gelangen.”
Sie rechnet, indem sie mit den Fingern die genannten Zweien nachzählt: ”Zwei mal zwei sind vier, mal zwei sind acht, mal zwei sind 16, mal zwei sind 32, mal zwei sind 64, mal zwei sind 128, mal zwei sind 256, mal zwei sind 512 und das ist schon mehr als $22^2 = 484$.
Es ist bereits 2^9 größer als 22^2, also erst recht 2^{22}.
Demnach ist $h < d < f < g$.
Herr Müller wies daraufhin, dass man zum Vergleich von f und g auch den folgenden Trick anwenden könnte:
”Man ersetzt die Grundzahl 22 durch die nächstgrößere Zweierpotenz $32 = 2^5$.
Dann gilt nämlich: $22^2 < 32^2 < \left(2^5\right)^2 = 2^{10} < 2^{22}$, also ist $f < g$.
Wer kann denn nun mit diesem Trick die Zahlen c und d vergleichen ?”
Nun meldete sich Lisa. Sie überlegte:
”Es ist $22^{22} < 32^{22} = \left(2^5\right)^{22} = 2^{110} < 2^{222}$. Also ist $c < d$.
”Damit”, behauptete schließlich Carolin, ”gilt die Ungleichungskette

$$a < b < h < e < c < d < f < g$$

und somit ist $g = 2^{2^{22}}$ die größte der acht möglichen Zahlen.”
Herr Müller hatte damit sein Ziel erreicht.

Ich will nun auch nicht diese Zahl ausrechnen, da ich die notwendige Geduld nicht aufbringe. Auch will ich die Moidaner/innen nicht herausfordern dies zu tun. Sie können schließlich ihre Zeit nützlicher verbringen - indem sie zum Beispiel weitere Aufgaben aus dem neuen MONOID-Heft lösen.

Eins will ich aber trotzdem noch überlegen, und zwar wie groß etwa diese Zahl ist.
Folgende Schätzung sei zu Grunde gelegt: $2^{10} = 1\,024 \approx 1\,000 = 10^3$.

Dann ist $2^{22} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^2 \approx 10^3 \cdot 10^3 \cdot 4 = 4 \cdot 10^6 = 4\,000\,000$.
Damit ist dann

$$2^{2^{22}} \approx 2^{4\,000\,000} = (2^{1\,000\,000})^4 = \left((2^{10})^{100\,000}\right)^4 \approx \left((10^3)^4\right)^{100\,000} = (10^{12})^{100\,000} = 10^{1\,200\,000}$$

Dies ist immerhin eine Zahl von der Form 1000 ... 0 mit einemillionzweihunderttausend Nullen.
Zum Aufschreiben dieser Zahl benötigt man eine ganz schöne Menge Papier. Eine Seite in eurem Matheheft hat etwa 58 Zeilen und 40 Spalten. Also hat eine Seite etwa $58 \cdot 40 = 2\,320$ Karos. Würden wir in jedes Karo eine Ziffer schreiben, so bräuchten wir zum Schreiben dieser Zahl mehr als 517 Seiten, weil

$$1\,200\,000 \div 2\,320 = 517 \text{ Rest } 560$$

ist. Ein Heft hat 32 Seiten.
Wir rechnen weiter $517 \div 32 = 16$ Rest 5.
Das heißt: Würde man die Zahl $2^{2^{22}}$ aufschreiben, so würde man mehr als 16 Hefte voller Nullen erhalten, vor denen allerdings die 1 steht.
Eine solche Schreibweise ist unpraktisch. Deshalb schreibt man so große Zahlen als Zehnerpotenzen. In unserem Fall $10^{1\,200\,000}$.
Doch selbst die Hochzahl $z = 1\,200\,000$ ist noch "ungemütlich". Sie ist zwar noch übersichtlich, doch auch sie benötigt in dieser Schreibweise viel Platz.
Wir bemerken, dass $z = 1,2 \cdot 1\,000\,000 = 1,2 \cdot 10^6$ ist.
Daher hat man vereinbart, die Schreibweise $1,2 \cdot 10^6$ zu verwenden.

Beispiele:
a) Die Entfernung von der Erde zur Sonne ist $150\,000\,000$ km $= 1,5 \cdot 10^8$ km.
b) Die Erdmasse hat $5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg $= 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

Im Allgemeinen schreibt man nach der ersten Stelle ein Komma, lässt die Nullen wegfallen und multipliziert mit zehn hoch der Anzahl der Stellen hinter der Ersten.
Weitere Beispiele sind:
$70\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 7 \cdot 10^{28}$
$12\,300\,000\,000\,000\,000 = 1,23 \cdot 10^{16}$
$960\,500\,000\,000\,000 = 9,605 \cdot 10^{14}$

Eine kleine Knobelbeschäftigung:
Ergänze die Figur zu einem magischen Quadrat, für das gilt:
Die Zahlen x und z sind in der Zahlenreihe unmittelbare Nachbarn von y und die magische Summe ist $3y$.

x	·	1912
·	y	·
2092	·	z

Hinweis: alle Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen haben den gleichen Wert, den man die **magische Summe** nennt. (H.F.)

Die **Lösung** findet Ihr auf Seite ?????.

Eine Anmerkung zum Artikel „Römisches Recht“ von Martin Mettler

von Duong-Han Tran

Mit großem Interesse habe ich den Artikel von Herrn M. Mettler im letzten MONOID–Heft gelesen. Dabei hat mir sehr gut gefallen, wie

- **der Schüler Uwe** seine intelligente ”Verdoppeln”–Lösung vorstellte;
- **Herr Müller als Lehrer** mit der Idee über das Minimum und Maximum die Schüler zum Weiterdenken anregte;
- **die Schüler Michael und Lisa** die Anregungen annahmen und ihrerseits aus Sicht der Mutter bzw. der Tochter weitere Lösungen vorschlugen.

Es wäre ideal, wenn jeder Mathematik–Unterricht auch so einen Verlauf annehmen könnte!

Obwohl Herr Mettler am Ende seines Artikels bemerkt, dass das Problem sich kompliziert, wenn man Verschiedenes (z. B. Minimum und Maximum) in den Text hineininterpretieren würde, möchte ich ihm bzw. dem römischen Jurist Salvius Julianus dennoch ein anderes Urteil, basierend auf folgenden 3 Tatsachen vorschlagen:

1. Die zwei Regeln im Testament sind gleichwertig.
2. Wenn die Bedingung in einer Regel erfüllt ist, muss der genannte Wunsch befolgt werden.
3. Die Bedingungen in beiden Regeln sind erfüllt, da sowohl ein Junge als auch ein Mädchen geboren wurden.

Wegen dieser 3 Tatsachen könnte m. E. ein ”gerechteres” Urteil erreicht werden, wenn man das hinterlassene Vermögen zuerst wegen Tatsache 1 halbiert und anschließend wegen Tatsachen 2 und 3 mit je einer Hälfte des Vermögens die Regel 1 und 2 anwendet.

Demnach würde der Sohn $\frac{2}{3}$ von der Hälfte des Vermögens, also $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$ des Gesamtvermögens und die Tochter $\frac{1}{3}$ von der Hälfte des Vermögens, also $\frac{1}{6}$ des Gesamtvermögens erhalten. Der Rest des Gesamtvermögens $(1 - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2})$ entspräche genau dem, was der Frau nach beiden Regeln zusteht.

Auf den ersten Blick könnte man meinen, dass damit die Frau vor den Kindern bevorzugt würde. Wenn man aber bedenkt, dass die Frau die schwere Zwillings-Schwangerschaft getragen und beide Kinder unter Schmerzen geboren hat, dann könnte dieses Urteil doch zum Ausdruck bringen, wie dankbar unsere Gesellschaft durch die Jury den Müttern gegenüber ist!

Noch ein Blick hinter die Kulissen [1]

von Hartwig Fuchs

Ein unerwartetes Produkt
Ein Mathematiklehrer verblüfft seine Schüler mit folgender Aufgabe:
Er bittet sie, mehrere Vielfache von 73 zwischen $73\,000$ und $730\,000$ zu wählen und jedes von ihnen mit 137 zu multiplizieren.
Bevor sie auch nur ein Ergebnis ausgerechnet haben, sagt er voraus:
"Das Produkt wird eine achtziffrige Zahl sein, die in Ziffernschreibweise die Form $abcd\,abcd$ hat."
Beispiel: $269\,881$ ist eines der wählbaren Vielfachen von 73, für das gilt:

$$269\,881 \cdot 137 = 3697\,3697$$

Wie hat der Lehrer diese interessante Aufgabe entwickelt?
Der entscheidende **Trick** wurde bereits im MONOID 38, Seiten 4-5, verraten;
wir wiederholen ihn hier:

(T) Man geht vom gewünschten Ergebnis aus.
Der Lehrer überlegt gemäß (T) so:
Wie kann man eine Zahl der Form $abcd\,abcd$ aus einer kleineren Zahl durch Multiplikation erzeugen?
Eine Möglichkeit besteht darin: Multipliziere die vierziffrige Zahl $abcd$ mit $10\,001$.
Man erhält damit $abcd \cdot (10\,000 + 1) = abcd \cdot 10000 + abcd = abcd\,abcd$.
Nun ist $10\,001 = 73 \cdot 137$.
Der Lehrer braucht also nur die Schüler Zahlen $abcd \cdot 73$ wählen zu lassen und das erreicht er durch die Forderung:
Ein Vielfaches von 73 zwischen $1000 \cdot 73$ und $9999 \cdot 73$, um die jetzt gar nicht mehr unerwarteten Produkte $(abcd \cdot 73) \cdot 137 = abcd \cdot (73 \cdot 137) = abcd \cdot 10001 = abcdabcd$ zu erhalten.

Variante
Der Lehrer bittet die Schüler, beliebig viele 8-ziffrige Zahlen der Form $abcd\,abcd$ zu wählen.
Er behauptet: Jede gewählte Zahl ist ohne Rest durch 137 und auch durch 73 ohne Rest teilbar.

Die Erklärung der "hellseherischen Gabe" des Lehrers dürfte den Lesern nicht besonders schwer fallen.
Sie ergibt sich sofort aus:

$$abcd\,abcd = abcd \cdot 10\,001 = abcd \cdot 137 \cdot 73.$$

[1] **Aufgabe** für Mitmacher siehe dieses Monoid, Seite 21

Lauter Vielfache

Jede der unendlich vielen Zahlen in einer der vertikalen Folgen

$$\begin{array}{lrcl@{\qquad}lrcl@{\qquad}lrcl}
\text{a)} & 5^{10} & - & 1^{10} & \text{b)} & 7^{1} & - & 1^{1} & \text{c)} & 11^{10} & - & 1 \\
 & 6^{10} & - & 2^{10} & & 8^{2} & - & 2^{2} & & 21^{20} & - & 1 \\
 & 7^{10} & - & 3^{10} & & 9^{3} & - & 3^{3} & & 31^{30} & - & 1 \\
 & 8^{10} & - & 4^{10} & & 10^{4} & - & 4^{4} & & 41^{40} & - & 1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \multicolumn{3}{c}{\text{ist Vielfaches}} & & \multicolumn{3}{c}{\text{ist Vielfaches}} & & \multicolumn{3}{c}{\text{ist Vielfaches}} \\
 & \multicolumn{3}{c}{\text{von } 8} & & \multicolumn{3}{c}{\text{von } 6} & & \multicolumn{3}{c}{\text{von } 100}
\end{array}$$

Wie findet man diese Folgen?
Gemäß dem Prinzip (T) geht man bei der Konstruktion der 3 Folgen von einem Faktum aus, das die angegebenen Teilbarkeitseigenschaften unmittelbar liefert.

Es gilt die in vielen Zusammenhängen wichtige Formel:

$$(*)\ a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^1 b^{n-2} + b^{n-1})$$

(Zur Nachprüfung multipliziere man die beiden Klammern miteinander.)

1. Setze $a = b + 4$ und wähle der Reihe nach $b = 1\ ,2\ ,3\ \ldots.$
   Dann folgt aus ($*$) für $n = 10$:

   $$a^{10} - b^{10} = (a-b)(a^9 + \cdots + b^9)$$

   mit $a - b = 4$ sowie a und b beide gerade oder beide ungerade.
   Da die zweite Klammer 10 Summanden enthält, ist ihr Wert eine gerade Zahl.
   Also ist $a^{10} - b^{10} = 4\cdot$ gerade Zahl = Vielfaches von 8.

2. Setze $a + b = 6$ und wähle der Reihe nach $b = 1\ ,2\ ,3\ \ldots.$
   Aus ($*$) folgt dann:

   $$a^n - b^n = 6 \cdot (a^{n-1} + \cdots + b^{n-1})$$

   woraus die Behauptung folgt.

3. Aus ($*$) folgt mit $a = 10m + 1$, $m = 1\ ,2\ ,3\ \ldots$, $b = 1$ und $n = 10m$:

   $$\begin{aligned}(10m+1)^{10m} - 1 = \ & (\quad (10m+1) - 1)((10m+1)^{10m-1} + (10m+1)^{10m-2} + \\ & + \quad \cdots + (10m+1)^1 + 1)\end{aligned}$$

   Jede Potenz von $10m + 1$ endet offensichtlich mit der Einerziffer 1, weil $10m + 1$ selbst die Einerziffer 1 hat.
   Daher besitzen alle $10m$ Summanden der zweiten großen Klammer die Einerziffer 1, woraus folgt:
   Die Summe dieser $10m$ Summanden endet mit der Einerziffer 0, d.h. sie ist ein Vielfaches von 10.
   Also gilt:

   $$(10m+1)^m - 1 = 10m \cdot \text{Vielfaches von } 10 = \text{Vielfaches von } 100.$$

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Zahlen aus Zweien

Mit genau vier Zweien können ohne Verwendung von Rechenzeichen acht Zahlen dargestellt werden. Dies sind: $2\,222$, 222^2, 22^{22}, 2^{222}, 22^{2^2}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$.

1. Wie viele Zahlen kann man mit genau drei Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
2. Wie viele Zahlen kann man mit genau zwei Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
3. Wie viele Zahlen kann man mit genau fünf Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
4. Wie viele Zahlen kann man mit genau sieben Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen?
5. Kannst du eine Formel aufstellen zur Bestimmung der Anzahl von Zahlen, die man mit genau n Zweien ohne Verwendung von Rechenzeichen darstellen kann?

Hinweis: Lies doch bitte auch den Artikel ”Vier mal die Zwei“ auf Seite 3 (MM)

Summen von Zahlen in Quadraten

Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799), Professor der Physik in Göttingen, Philosoph und weithin gefürchteter Schriftsteller wegen seiner satirischen Aufsätze und Sprüche, mit denen er die Missstände seiner Zeit anprangerte und seine Zeitgenossen verspottete, beschäftigte sich in seiner ”Freizeit“ gerne mit Zahlenspielereien und Knobeleien.
Davon zeugt eine hübsche Beobachtung, die er 1763 beschrieb:

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

Wenn man die 16 Zahlen im 4×4–Quadrat addiert, dann erhält man als Summe eine Zahl S, die sich durch eine besondere Eigenschaft auszeichnet.
Diese Eigenschaft kommt auch der Summe aller Zahlen eines nach dem Muster des 4×4–Quadrats gebauten 2×2–Quadrats, 3×3–Quadrats, 5×5–Quadrats, usw. zu.

Finde heraus, welches diese Eigenschaft ist.

Überprüfe dann Deine Vermutung an der Summe aller Zahlen des 100×100–Quadrats.

Hinweis: Der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß kannte schon als Kind den Trick, wie man $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$ ausrechnet, nämlich so:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 =$$

$$(1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) = 50 \cdot 101$$

Dieser Trick wird Dir helfen, die Summe aller Zahlen des 100×100–Quadrats zu bestimmen.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & 100 \\ 2 & 3 & \dots & 101 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 100 & 101 & \dots & 199 \end{array}$$

Wie lautet Deine Vermutung für das $n \times n$–Quadrat, $n = 2, 3, 4, \dots$? (H.F.)

Die Lösungen zu diesen Aufgaben findet ihr im MONOID 70.

Die Seite für den Computer-Fan

Quadratzahl oder nicht?
Für natürliche Zahlen a, b ist $a^2 \pm 2ab + b^2$ stets eine Quadratzahl wegen

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Kann dann auch

$$(1) \qquad a^2 - ab + b^2, a > b$$

eine Quadratzahl sein?

a) Rechne nach, dass (1) für a mit $1 \leq a \leq 7$ keine Quadratzahl ist.

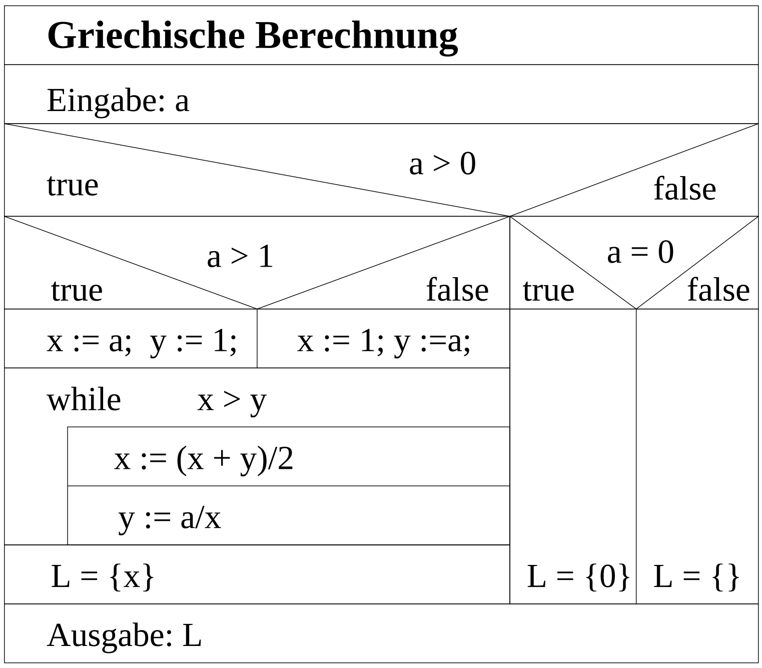
b) Gibt es für $a = 8$ eine Quadratzahl der Form (1)?

c) Untersuche das Problem (1) für $a > 8$. (H.F.)

Griechische Berechnung
Welcher Algorithmus verbirgt sich hinter diesem Struktogramm?

a) Führe einen Schreibtischtest mit $a = 2$ durch. Was wird ausgegeben?

b) Was berechnet der Grieche mit seinem Verfahren?



Hinweis: Die Aufgaben für den Computer-Fan sind meist ohne Bezug auf einen speziellen Rechner oder ein spezielles Programm oder eine spezielle Programmiersprache gestellt. Ihr könnt selbst entscheiden, für welche Teile es sich lohnt, z.B. einen Taschenrechner oder ein Computeralgebra-System (z.B. DERIVE) einzusetzen oder ein eigenes kleines Programm (z.B. in Pascal) zu schreiben.
Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`.
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auch Teile eingesandter Lösungen veröffentlichen können.

Für Mathis: Schnelle Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen

Mein ehemaliger Mitschüler Jan Rezba hat das große Einmaleins nie gelernt. Er behauptet, mit folgendem Trick stets schnell genug gewesen zu sein:

Beispiel 1: Zu berechnen ist $13 \cdot 12$. Er rechnet:

$$\begin{array}{lrcrcr} & 13 & + & 2 & = & 15 \\ & 3 & \cdot & 2 & = & 6 \\ \cline{6-6} \text{Ergebnis:} & & & & & 156 \end{array}$$

Beispiel 2: Zu berechnen ist $17 \cdot 13$. Er kann nach demselben Schema vorgehen, wenn er eine kleine Verschiebung vornimmt:

$$\begin{array}{lrcrcr} & 17 & + & 3 & = & 20 \\ & 7 & \cdot & 3 & = & 21 \\ \cline{6-6} \text{Ergebnis:} & & & & & 221 \end{array}$$

Beispiel 3: Zu berechnen ist $14 \cdot 14$:

$$\begin{array}{lrcrcr} & 14 & + & 4 & = & 18 \\ & 4 & \cdot & 4 & = & 16 \\ \cline{6-6} \text{Ergebnis:} & & & & & 196 \end{array}$$

Beispiel 4: Zu berechnen ist $12 \cdot 14$:

$$\begin{array}{lrcrcr} & 12 & + & 4 & = & 16 \\ & 2 & \cdot & 4 & = & 8 \\ \cline{6-6} \text{Ergebnis:} & & & & & 168 \end{array}$$

Solltest du nicht alleine darauf kommen, weshalb dieser Trick immer funktioniert, so kannst du mal bei deinem Lehrer nachfragen.

(MM)

Scherzfragen

Hunger!

Ein Hungriger aß zunächst die Hälfte von eins, danach die Hälfte von zwei und schließlich die Hälfte von drei.

Was und wieviel aß er? (Gregor Dschung)

Zahlenordnung

Nach welchem Prinzip ist die Zahlenfolge $8, 3, 1, 5, 9, 0, 6, 7, 4, 2$ geordnet?
(Gregor Dschung)

Lösungen:

Hunger: Er aß drei Eier, denn die Hälfte von eins ist ei, von zwei ei und von drei auch ei.

Zahlenordnung: Sie ist alphabetisch geordnet: **a**cht, **d**rei, **e**ins, **f**ünf, . . .

Anzahl-Probleme bei Dreiecken (I)

Ein Bericht für Mathis und Fortgeschrittene

von Hartwig Fuchs

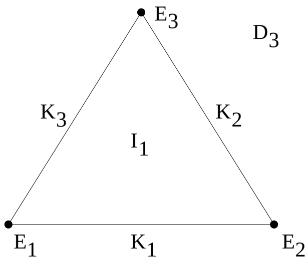


Bild 1

Die Bestandteile eines Dreiecks sind:

- seine **Eckpunkte** E_1, E_2, E_3,
- seine **Kanten** K_1, K_2, K_3
- und sein **Innengebiet** I_1.

Wir bezeichnen ein Dreieck mit D_3. Ein beliebiges Dreieck D_3 soll nun auf folgende Weise in Teildreiecke zerlegt werden:
Im Inneren I_1 von D_3 sei ein Punkt E_4 beliebig gewählt und E_4 mit E_1, mit E_2 und mit E_3 jeweils durch eine Kante verbunden. Damit ist D_3 in Teilbereiche zerlegt; die neue Figur nennen wir D_4. Dabei spielt es keine Rolle, ob D_4 zum Beispiel

so

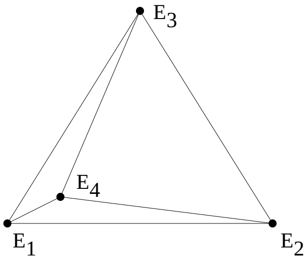


Bild 2

oder so

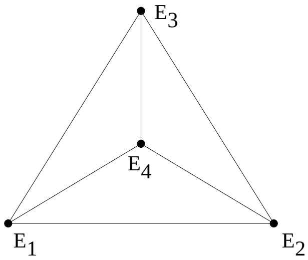


Bild 3

aussieht.

Nun setzt man das Zerlegungsverfahren fort: im Inneren eines der drei Teildreiecke von D_4 wählt man einen Punkt E_5, den man mit den Eckpunkten des Teildreiecks durch Kanten verbindet; so erhält man eine D_5 genannte Figur. So fortfahrend erhält man eine Kette von Figuren D_3, D_4, D_5, D_6, ...
Entscheide nun selbst: Welche der in Bild 4-8 angegebenen Figuren sind nach obiger Konstruktionsvorschrift nicht möglich?
Die Anzahl aller in einer Figur $D_n, ngeq3$ vorkommenden **Eckpunkte** E_1, E_2, $\ldots$, E_n sei mit E bezeichnet – offenbar ist $E = n$. K sei die Anzahl der in D_n vorkommenden **Kanten** und I die Anzahl der vorkommenden **Innengebiete** (Dreiecksflächen) – wobei das Innere von D_3 mitgezählt werde.

Beispiel 1:
Wir bestimmen für Figuren D_5, D_6, $\ldots$, D_{10} jeweils K und I. Dabei sind die Ergebnisse unabhängig davon, wie die Punkte E_5, E_6, $\ldots$, E_{10} im Inneren bereits konstruierter Teildreiecke von D_4 gewählt werden. (Überprüfe dies durch Zeichnungen und durch Überlegung!)

D_n	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
K	6	9	12	15	18	21	24
I	4	6	8	10	12	14	16

(vgl. z.B. Bild 7,8,10 für D_7)

Wenn man K und I für D_n mit großen n (z.B. $n \geq 1000$) wissen möchte, dann sollte man es sicher nicht mit einer Zeichnung von D_n und dem Abzählen ihrer Kanten und Innengebiete versuchen. Vielmehr: eine Abzählregel muss her!

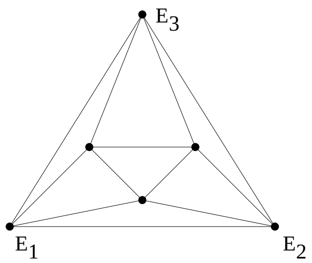
Schaut man sich die Tabelle genau an, dann erkennt man: ausgehend von D_4 konstruiert man D_n, $n \geq 5$, indem man zu E_1, ..., E_4 der Reihe nach die $n-4$ Eckpunkte E_5, ..., E_n hinzufügt.
Bei jedem Hinzufügen eines Punktes erhöht sich die Anzahl der Kanten um 3 und die Anzahl der Innengebiete um 2 (es entstehen zwar 3 neue Teildreiecke, aber zugleich verschwindet ein altes Dreieck).
Also gelten für D_n, $n \geq 4$ die Gleichungen:

$(1)\quad E = n \qquad$ wegen $\quad E = 4 + (n-4)$
$(2)\quad K = 3n - 6 \qquad$ wegen $\quad K = 6 + (n-4) \cdot 3$
$(3)\quad I = 2n - 4 \qquad$ wegen $\quad I = 4 + (n-4) \cdot 2 \qquad$ (D_3 mitgezählt!)

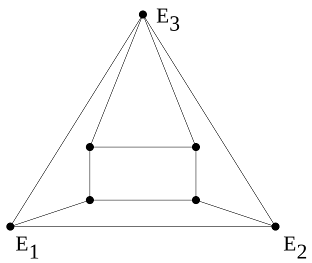
Aus dieser Regel folgt wegen $n - (3n-6) + (2n-4) = 2$ sofort die Gleichung

$$(4) \qquad E - K + I = 2.$$

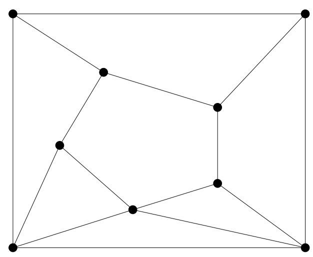
(4) ist die berühmte **Eulersche Formel**.
Sie gilt nicht nur für Dreieckszerlegungen nach der oben angegebenen Zerlegungsvorschrift. Sie ist viel universaler: Zum Beispiel gilt sie auch bei anderen Zerlegungsverfahren – man vergleiche die Figuren in Bild 4-6, die nicht nach unserer Konstruktionsvorschrift herstellbar sind.



$E = 6$, $K = 12$, $I = 8$
(D_3 mitgezählt)
Bild 4



$E = 7$, $K = 11$, $I = 6$
(D_3 mitgezählt)
Bild 5


$E = 9$, $K = 14$, $I = 7$
(das Rechteck mitgezählt)
Bild 6

Die Eulersche Formel (4) gilt sogar im Dreidimensionalen. Für von ebenen Flächenstücken begrenzte Körper etwa:
für einen Tetraeder ist $E = 4$, $K = 6$ und $I = 4$, so dass (4) gilt;
für einen Würfel ist $E = 8$, $K = 12$ und $I = 6$ – wieder gilt hier (4);
für eine n–seitige Pyramide ist $E = n+1$, $K = 2n$, $I = n+1$ und wegen $E - K - I = (n+1) - 2n - (n+1) = 2$ gilt (4).
Diese Bemerkungen zur Gleichung (4) machen deutlich: Die Eulersche Formel ist ein Weg, auf dem man tief in die Abzähl-Fragen bei Polygon- und Polyeder-Zerlegungen eindringen kann.

Zurück zu den Figuren D_n. Die beiden Figuren D'_7 und D''_7 sind anschaulich offensichtlich verschieden:

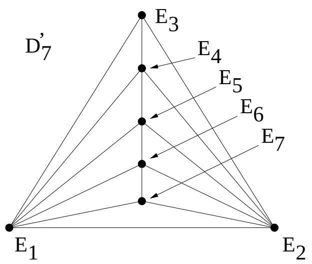


Bild 7

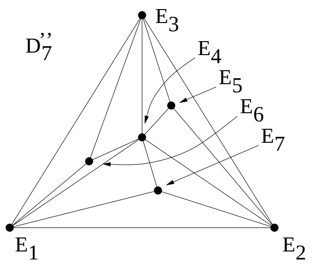


Bild 8

Diese Verschiedenheit von D_7' und D_7'' hat sicher damit zu tun, wie viele Kanten in den Eckpunkten von D_7' und von D_7'' jeweils enden.

Den Zusammenhängen, die zwischen den Figuren D_n und der Kantenzahl ihrer Eckpunkte bestehen, wollen wir daher ein wenig nachspüren! Zunächst definieren wir:

In einer Figur D_n, $n \geq 3$, mit den Eckpunkten $E_1, \ldots, E_n$ hat der Eckpunkt E_i den **Grad** d, wenn gilt: in E_i enden d Kanten. Dafür schreiben wir kurz: $g(E_i) = d$

Beispiel 2:

Für die Figur D_7' (Bild 7) gilt:

$$g(E_1) = g(E_2) = 6; g(E_3) = g(E_7) = 3; g(E_4) = g(E_5) = g(E_6) = 4.$$

Für die Figur in D_7'' (Bild 8) gilt:

$$g(E_1) = g(E_2) = g(E_3) = 5; g(E_4) = 6; g(E_5) = g(E_6) = g(E_7) = 3.$$

Es ist eine leichte Aufgabe, bei einer gegebenen Figur D_n die jeweiligen Grade ihrer Eckpunkte zu bestimmen.

Umgekehrt kann es recht schwierig – ja sogar unmöglich – sein, die Grade von Eckpunkten einer Figur D_n so vorzugeben, dass dann D_n konstruierbar wird. Versuchen wir es!

Aufgabe 1:

a) Zeichne eine Figur D_5, für die gilt: 3 Eckpunkte haben den Grad 4.
b) Zeichne eine Figur D_7, mit den Eckpunkten $E_1, \ldots E_7$, für die gilt: $g(E_1) = 4$, $g(E_2) = 5$, $g(E_3) = 6$.
c) Zeichne eine Figur D_6, bei der alle 6 Eckpunkte den Grad 4 besitzen.

Lösungen:

a) Zeichne D_4 – vgl. Bild 2. In welches der 3 Teildreiecke von D_4 man auch den 5-ten Punkt setzt, stets erfüllt dann D_5 die Bedingung a).
b) Zeichne D_5 – vgl. Bild 9. Dann ist $g(E_1) = 4$. Wählen wir nun E_6 im Teildreieck $E_2E_3E_4$ und tragen die entsprechenden Kanten ein mit dem Erfolg, dass dann $g(E_5) = 5$ und $g(E_3) = 5$ ist.

   Ein Punkt E_7 samt zugehöriger Kanten, in das Dreieck $E_2E_3E_6$ platziert, löst dann die Aufgabe b) – vgl. Bild 10.
c) Wieder zeichnen wir D_5 mit seinen 5 Teildreiecken (Bild 9). Um von D_5 zu einer Figur D_6 zu gelangen, müssen wir einen 6-ten Punkt E_6 in eines der 5 Dreiecke platzieren. Wie auch immer das geschieht: E_6 hat den Grad 3 (vgl. Bild 11), und damit ist die Bedingung c) für keine Figur D_6 erfüllbar.

   Man sagt: eine Figur D_6, die c) erfüllt, **existiert** nicht.

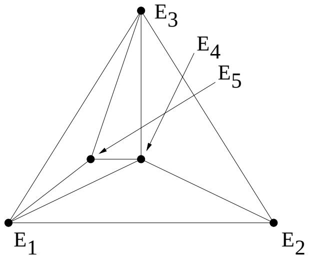


Bild 9

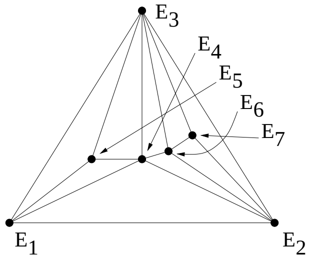


Bild 10

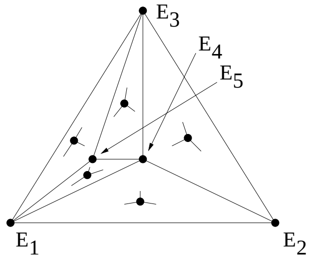


Bild 11

Die Nicht-Lösbarkeit von Aufgabe 1c) lehrt, dass man für Figuren D_n den Grad ihrer Eckpunkte nicht beliebig vorgeben kann – dass vielmehr Beziehungen zwischen den Figuren D_n und dem Grad ihrer Eckpunkte bestehen müssen.

Wir wollen im nächsten Heft einige solcher Zusammenhänge aufdecken.

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 68

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Wer hält sich einen Goldfisch?

Das nachfolgende Rätsel soll von der Idee her eine Logelei Einsteins gewesen sein, der der Meinung war, höchstens zwei Prozent der Weltbevölkerung wären in der Lage, es zu lösen. Gehörst Du dazu?

Durch logische Verknüpfung kommt man dem Rätsel auf die Spur, welche verschiedenen Haustiere in den fünf Häusern, die alle eine andere Farbe haben, gehalten werden. In jedem Haus wohnt ein Eigentümer mit einer anderen Nationalität; jeder von ihnen hat eine klare Vorliebe für ein bestimmtes Getränk. Sie unterscheiden sich auch alle in der Automarke, die sie fahren. Hier nun die Hinweise:

1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Der Schwede hält einen Hund.
3. Der Däne trinkt gerne Tee.
4. Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
5. Der Besitzer des grünen Hauses trinkt gerne Kaffee.
6. Der Mercedesfahrer hält sich einen Vogel.
7. Der Milchtrinker wohnt im mittleren Haus.
8. Der Besitzer des gelben Hauses fährt Volvo.
9. Im ersten Haus wohnt der Norweger.
10. Der VW-Fahrer wohnt neben dem, der eine Katze hat.
11. Der Mann, der sich ein Pferd hält, sieht auf den Volvo seines Nachbarn.
12. Der BMW-Fahrer trinkt gerne Bier.
13. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Deutsche fährt einen Opel.
15. Der Nachbar des VW-Fahrers trinkt Wasser. (gefunden von Gerhard Hoffmann)

Lösung: Wir erstellen eine Tabelle, in die wir alle Informationen an die geeigneten Stellen eintragen:

	Haus Nr. 1	**Haus Nr. 2**	**Haus Nr. 3**	**Haus Nr. 4**	**Haus Nr. 5**
Haustier	Katze	Pferd	Vogel		Hund
Hausfarbe	gelb	blau	rot	grün	weiß
Nationalität	Norweger	Däne	Brite	Deutscher	Schwede
Getränk	Wasser	Tee	Milch	Kaffee	Bier
Automarke	Volvo	VW	Mercedes	Opel	BMW

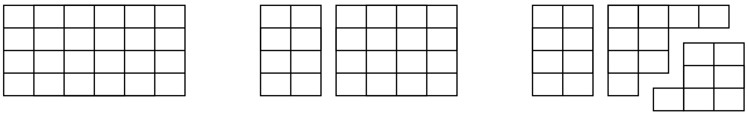
Wir erkennen jetzt, wozu laut Einstein nur 2% aller Menschen fähig sind: Der Goldfisch wird vom Besitzer des Hauses Nr. 4 gehalten.

Schokolade zerteilen

Eine Tafel Schokolade soll in ihre 24 Teilstücke zerbrochen werden. Ein Bruch muss entlang der Rillen von einem Randpunkt zu einem anderen Randpunkt erfolgen. Dabei darf auch „um die Ecke“ gebrochen werden. Bereits entstandene Teilstücke dürfen **nicht** aufeinandergelegt oder sonstwie **gleichzeitig** gebrochen werden. Wie oft muss man mindestens brechen, bis die Tafel ganz zerlegt ist?

Beispiel:

Tafel erster Bruch zweiter Bruch



(WJB)

Lösung

Bei jedem Brechen erhöht sich die Anzahl der entstandenen Stücke um 1. Also muss man auf jeden Fall $24 - 1 = 23$ mal brechen.

Dreieckszerlegung

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit verschieden langen Seiten a, b, c. Konstruiere auf der Seite AB einen Punkt D so, dass die Verbindungsstrecke CD das Dreieck ABC in zwei umfangsgleiche Teildreiecke ADC, BCD zerlegt.
Wie lang ist die Strecke AD? (H.F.)

Lösung

1. Rechnung

   Für die Umfänge von ADC und BDC gilt (mit $|AD| = x$, $|CD| = y$):

$$\begin{aligned} b + x + y &= a + y + (c - x) \\ \Leftrightarrow\ 2x &= a + c - b \\ \Leftrightarrow\ x &= \frac{1}{2}(a + c - b) \end{aligned}$$

   Die rechnerische Lösung zeigt: man konstruiert D, indem man $\frac{1}{2}(a + b - c)$ konstruiert.

   a) Auf der Verlängerung v von AB trägt man die Strecke BC von B aus ab; man erhält B'. Es ist $|AB'| = c + a$.

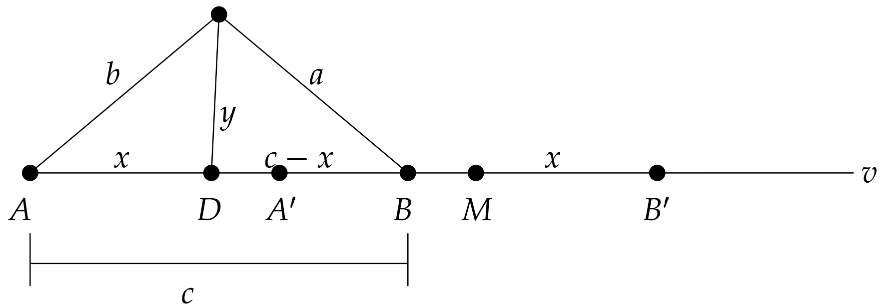


Abbildung 1: Konstruktion des Punktes D

   b) Auf v die Strecke AC von A aus (in Richtung B) abtragen; man erhält A'. Es ist $|A'B'| = a + b - c$.

   c) Halbierung von $A'B'$ ergibt Streckenmittelpunkt M mit $|A'M| = |MB'| = \frac{1}{2}(a + b - c) = x$.

   d) Eine Strecke der Länge x von A aus in Richtung B auf v abtragen ergibt den gesuchten Punkt D.

Vierstellige Zahlen aus lauter verschiedenen Ziffern

Die vierstellige Jahreszahl 2002 besteht nur aus zwei verschiedenen Ziffern.

a) In welchem Jahr werden zum nächsten Mal alle Ziffern **verschieden** sein?

b) Wie viele vierstellige Zahlen **aus lauter verschiedenen** Ziffern gibt es?

(Wolfgang Kraft)

Lösung:

a) Im Jahr 2013.

b) Wir stellen die vierstellige Zahl in Dezimalschreibweise als $abcd$ dar. Für a kann man eine der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ auswählen. Für b kann man sogar eine der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ auswählen, wobei allerdings darauf zu achten ist, dass $b \neq a$ sein muss; man hat also für b neun Wahlmöglichkeiten. Für ab ergeben sich daher $9 \cdot 9 = 81$ verschiedene Zahlen mit jeweils verschiedenen Ziffen. Für die dritte Ziffer c kann man wieder eine der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ auswählen, wobei allerdings darauf zu achten ist, dass $c \neq a$ und $c \neq b$ sein muss; man hat also für c acht Wahlmöglichkeiten. Für abc ergeben sich $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ verschiedene Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern. Für die vierte Ziffer d kann man wieder eine der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ auswählen, wobei allerdings darauf zu achten ist, dass d von a, b und c verschieden sein muss; man hat also für d sieben Wahlmöglichkeiten. Für $abcd$ ergeben sich also $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ verschiedene Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern.

Die tolle Zwei und die sogar immer fünfmal

Kristin entdeckt:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 2 \cdot 2 : (2 + 2) \\ 2 &= (22 : 22) \cdot 2 \\ 3 &= 2 + 22 : 22 \end{aligned}$$

Jetzt sucht sie natürlich andere Zahlen, die ebenfalls nur mit Hilfe von genau fünf Zweiern, den Rechenzeichen $+, -, \cdot, :$ und Klammern dargestellt werden können. Stelle die Zahlen 4 bis 10 so dar!

Zusatzfrage (mit der Möglichkeit, Sonderpunkte zu erhalten):

Wer findet die größte Zahl, die nur mit Hilfe von genau fünf Zweien, Rechenzeichen $+, -, \cdot, :$ und Klammern dargestellt werden kann? (Wolfgang Kraft)

Lösung: Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} 4 &= 2 : 2 + 2 + 2 : 2 \\ 5 &= 2 + 2 + 2 - 2 : 2 \\ 6 &= 2 + 2 + 2 + 2 - 2 \\ 7 &= 2 + 2 + 2 + 2 : 2 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2 \\ 9 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 : 2 \\ 10 &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \end{aligned}$$

Zur Zusatzfrage:

Die größte so darstellbare Zahl ist sicherlich nicht, wie vielleicht zunächst vermutet $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, denn da gibt es ja zum Beispiel die Zahl 22222. Dies ist aber wirklich die größte, denn das Anhängen einer Zwei an eine Zahl entspricht der Multiplikation mit 10 und der zusätzlichen Addition einer 2, also z.B. $22 = 2 \cdot 10 + 2$. Man kann also durch das Anhängen einer Zwei eine Zahl viel mehr vergrößern, als durch die Multiplikation oder Addition mit einer zwei.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Passende Ziffern

In der folgenden Aufgabe stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern.

Welche Ziffern passen für die Buchstaben, wenn folgende Rechnung gelten soll?

$$\begin{array}{ccccc} & & G & I & B \\ + & & M & I & R \\ \hline & G & E & L & D \end{array}$$

Wie müssen die Buchstaben ersetzt werden, damit die englische Forderung erfüllt ist?

$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & N & D \\ + & & M & O & R & E \\ \hline & M & O & N & E & Y \end{array}$$

(WJB)

Das Glückskind

Ernst Müller, den alle nur unter dem Namen "Lucky Baby" kennen, gilt als geborenes Glückskind. Ausgerechnet am Freitag, dem 13., besucht er die Spielbank in Wiesbaden.

Viermal hat er gespielt und viermal hintereinander hat er seinen Gewinn verdreifacht (Als echter "Zocker" hat er natürlich jeweils seine ganze aktuelle Barschaft gesetzt). Nach dem vierten Spiel ruft die Pflicht, er muss nach Hause und nimmt natürlich all sein Geld mit, immerhin $324\,000$ EURO .

Überlege, wie viel EURO Lucky Baby beim ersten Spiel gesetzt hat!

Der Ferrari und das Fahrrad

Zu Mittag fährt ein Ferrari von A-Town nach B-City ab. Eine Stunde später fährt ein Radfahrer auf derselben Straße von B-City nach A-Town, aber natürlich ein kleines bisschen langsamer.

Wer von den Beiden wird, wenn sich der Ferrari und der Radfahrer treffen, weiter von A-Town entfernt sein? (H. König)

Welcher Wochentag ist heute?

Der kleine Mathematiker Dennis Rechenfix genießt es, bei (eigentlich ziemlich langweiligen) Familienfeiern die kleinen Rätsel seines Großvaters zu lösen. Das "Rätsel des Tages" seines Großvaters lautet diesmal:

"Nehmen wir an, übermorgen sei gestern. Dann wäre heute genauso weit von Sonntag entfernt, wie heute von Sonntag entfernt wäre, wenn vorgestern morgen wäre. Welchen Wochentag haben wir heute?"

Die Schnecke

Eine arme Schnecke sitzt tief unten im Brunnen und will heraus. Aber die Brunnenwand ist $27m$ hoch. Da heißt es klettern. Jeden Tag klettert sie $7m$ hoch, rutscht nachts aber $4m$ zurück.

Sie beginnt den Weg an einem Montag.

Berechne, an welchem Tag sie endlich den Brunnenrand erreicht!

(Gefunden von Ulrike Barth)

Weitere Mathespielereien findest du auf der nächsten Seite.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Ist das nicht ein tolles Pünktchenmuster?

Andy zeichnet aus Langeweile (in der Mathe – Stunde bestimmt nicht) die folgenden Pünktchenmuster:

Diese 3 Muster gingen ja noch einfach. Aber:

1. Wie viele Pünktchen muss er im 10. Muster zeichnen?
2. Wie viele Pünktchen müsste er im 100. Muster zeichnen?
3. Wie heißt die Summenformel für das 1000. Muster und wie viele Pünktchen hat es?

(Daniel Faber, Fabian Kappesser, Johann Kirsch, Johannes Merz; Klasse 6 ELG Alzey)

Hinweis der Redaktion: Vielleicht findet ihr auch eine allgemeine Formel für die Anzahl der Punkte im n.Muster?

Mittagessen in einer Ganztagsschule

Bei der Essenausgabe in einer Ganztagsschule stehen genau 7 Schüler(innen) in einer Reihe hintereinander. Olaf stellt fest:

1. Kein Mädchen stand unmittelbar vor einem anderen Mädchen.
2. Genau einer der Jungen stand unmittelbar zwischen zwei Mädchen.
3. Genau eines der Mädchen stand unmittelbar zwischen zwei Jungen.
4. Genau einmal kam es in der Reihe vor, dass drei Jungen unmittelbar hintereinander standen.

Finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge von Mädchen und Jungen!
Erkläre, warum es keine weiteren Möglichkeiten geben kann!

Ist der Eingeborene ehrlich?

Auf einer Insel wohnen zwei Stämme: Die Ehrlichen, die immer die Wahrheit sagen, und die Lügner, die immer lügen.

Ein Reisender will für die Zeit seines Inselaufenthalts einen Eingeborenen in Dienst nehmen (und will natürlich einen ehrlichen Mitarbeiter einstellen). Er fragt den ersten Bewerber B, zu welchem Stamm er gehöre, worauf dieser antwortet, dass er zum Stamm der Ehrlichen gehört.

Um nicht reinzufallen, sagt er zu dem Bewerber, er solle doch einen abseitsstehenden Eingeborenen E fragen, zu welchem Stamm er gehöre.

Der Bewerber tut das, kehrt zurück und sagt, dass der Eingeborene E erklärt habe, zum Stamm der Ehrlichen zu gehören.

Soll nun der Reisende diesen Bewerber einstellen? Begründe Deine Antwort.

Bereits auf Seite 19 findest du weitere Mathespielereien.

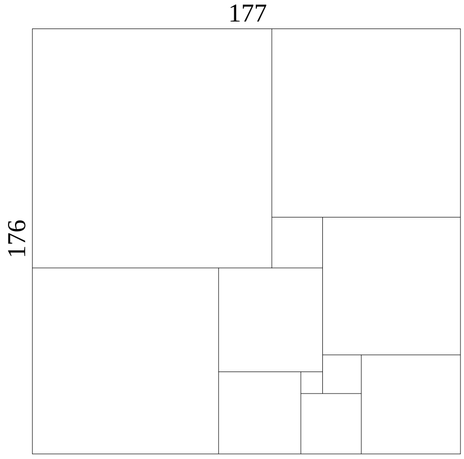
Neue Aufgaben

Kl. 8-13

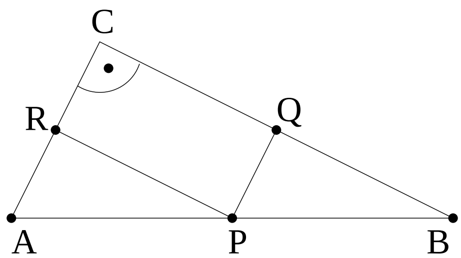
Aufgabe 769. (vgl. den Artikel "Noch ein Blick hinter die Kulissen", Seite 7)
Konstruiere mehrere unendliche Folgen von Potenzdifferenzen, deren Glieder alle durch eine feste natürliche Zahl $t \geq 3$ teilbar sind.
Gib für $t = 23$ Beispiele an. (H.F.)

Aufgabe 770. (vgl. den Artikel "Vier mal die Vier", Seite 3)
Welches ist die größte Zahl, die man mit genau fünf Zweien, aber ohne Verwendung der Rechenzeichen + , - , · , ÷ und Klammern darstellen kann? (MM)

Aufgabe 771. Rechteckzerlegung Das Rechteck, dessen Seiten 177 bzw. 176 lang sind, ist in 11 Quadrate so aufgeteilt, dass die Quadrate das Rechteck vollständig ausfüllen.
Bestimme die Seitenlängen aller Quadrate. (H.F.)



Aufgabe 772. Wahr oder falsch?
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C seien P, Q, R die Seitenmittelpunkte.
Wahr oder falsch: *Das Viereck $CRPQ$ ist ein Rechteck, dessen Fläche halb so groß ist wie die Dreiecksfläche ist.* (H.F.)



Aufgabe 773. Lego-Pyramiden: Aus Lego-Steinen soll eine vierseitige Pyramide gebaut werden.
Man hat kleine Steine

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 68

Kl. 8-13

Aufgabe 764. Familie G. feiert Advent wie üblich mit einem Adventskranz, an dem am ersten Adventssonntag eine Kerze brennt, am zweiten zwei, usw. Tochter Jenny möchte, dass am Ende alle Kerzen gleich weit abgebrannt sind. Ihre Schwester Nadine erklärt ihr, dass das nicht möglich sei. Warum hat Nadine recht?
Was müsste man am üblichen Adventskranz verändern, damit Jennys Wunsch erfüllt werden könnte?
Gäbe es n Adventssonntage ($n \in \mathbb{N}$), so wäre das Problem für gewisse n lösbar; für welche? (Jutta Gonska)

Lösung: Wir nehmen an, dass die Kerzen jeweils für die gleiche Zeitdauer (sagen wir eine Stunde) angezündet werden. Dann ergeben sich bei n Adventssonntagen insgesamt $B_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ Brennstunden. Diese lassen sich höchstens dann auf n Kerzen gleichmäßig verteilen, wenn $\frac{B_n}{n} = \frac{n+1}{2}$ eine ganze Zahl, also n ungerade ist. $n = 4$ ist nicht ungerade.
Ist n ungerade, so kann man an jedem der n Adventssonntage offenbar die anzuzündenden Kerzen so wählen, dass die bisherigen Brenndauern verschiedener Kerzen sich um höchstens 1 unterscheiden (siehe Skizze mit Beispiel $n = 5$). Hätte nach n Sonntagen eine der Kerzen mindestens $\frac{n+1}{2} + 1$ mal gebrannt, so müsste eine andere mindestens zweimal weniger gebrannt haben (und umgekehrt), was diesem Verfahren widerspricht. Also kann man bei ungeradem n die Kerzen immer so anzünden, dass sie nach n Sonntagen alle gleich weit abgebrannt sind. Sie sind sogar schon nach $n-1$ Sonntagen alle gleich weit abgebrannt. Also müsste man einen Adventskranz mit 5 Kerzen haben, damit nach 4 Adventssonntagen alle Kerzen gleich weit abgebrannt wären.

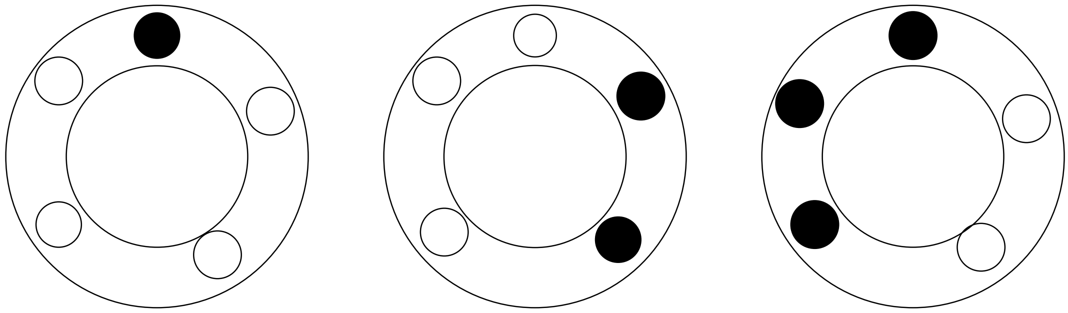
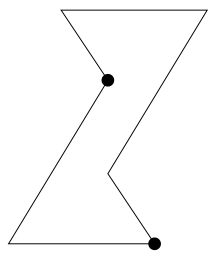


Abbildung 2: Die Kerzen werden im Uhrzeigersinn angezündet: am ersten Sonntag die erste, am zweiten Sonntag die beiden nächsten, usw.

Aufgabe 765. Für die Gemälde der modernen Künstlerin Ursula Molinera soll ein eigenes Ausstellungsgebäude errichtet werden. Dabei soll jede der insgesamt 14 Stilepochen der Künstlerin auf einer eigenen Ausstellungswand dokumentiert werden.Der vorgesehene Leiter der Einrichtung, Dr. Eric Lindon, will die Ausstellung durch eine Videokamera in der Mitte des Gebäudes überwachen lassen, nachdem er erfahren hat, dass das Gebäude aus einem einzigen Raum bestehen wird. Arthur Forrester, ein Freund des mit dem Bau beauftragten Architekten, macht ihn darauf aufmerksam, dass dies bei unkonventioneller Gestaltung des Raums



möglicherweise nicht ausreicht, z.B. schon bei einem Raum mit nur sechs Wänden wie dem in der Skizze wären mindestens zwei Kameras erforderlich, die etwa wie in der Skizze positioniert sein könnten.
Wie viele Kameras muss man vorsehen, damit bei 14 Wänden auf jeden Fall der ganze Raum kontrollierbar ist? Was ist die allgemeine Lösung bei n Wänden?
Bemerkung: Wir nehmen an, dass eine Videokamera nach allen Seiten „sieht" und dass es keine Säulen oder Ähnliches gibt, die die Sicht versperren. (WJB)

Lösung: Man schneide von dem n-Eck (z.B. $n = 14$) zunächst eine Ecke ab und markiere die Ecken des abgeschnittenen Dreiecks mit drei verschiedenen Farben (z.B. schwarz, weiß, rot). Danach verbinde man zwei der markierten Ecken mit einer weiteren Ecke des ursprünglichen Vielecks (so dass keine Verbindungslinie außerhalb verläuft). Dies wiederhole man, bis das n-Eck vollständig in Dreiecke zerlegt ist. Bei jedem Schritt markiere man die neu hinzugekommenen Ecken so, dass das neue Dreieck drei verschiedenfarbige Ecken hat. Hängt man nun in jede rote (oder jede schwarze, oder jede weiße) Ecke eine Videokamera, so ist der Raum vollständig überwacht, da jedes Teildreieck eine rote (schwarze, weiße) Ecke hat und von dort aus überwacht wird.

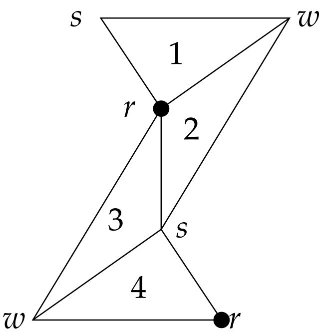


Abbildung 3: Vorgehensweise im Beispiel: Schneide die Dreiecke in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4 ab und markiere die Ecken wie angegeben.

Sind R, S, W die Anzahlen der rot, schwarz und weiß markierten Ecken, so kommt man mit $K = min(R, S, W)$ Kameras aus. Wegen $R + S + W = n$ ist $K \leq \frac{n}{3}$.
Im Fall $n = 14$ reichen also 4 Kameras auf jeden Fall. Man kann für jedes n Beispiele konstruieren, in denen tatsächlich $K = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ (größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{n}{3}$ ist) Kameras benötigt werden.

Aufgabe 766.

a) Teile ein Quadrat in acht spitzwinklige Dreiecke.

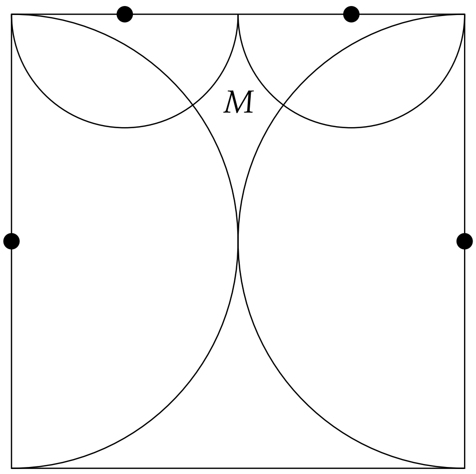
b) Zeige, dass sich ein Quadrat nicht in weniger als acht spitzwinklige Dreiecke teilen lässt. (WJB)

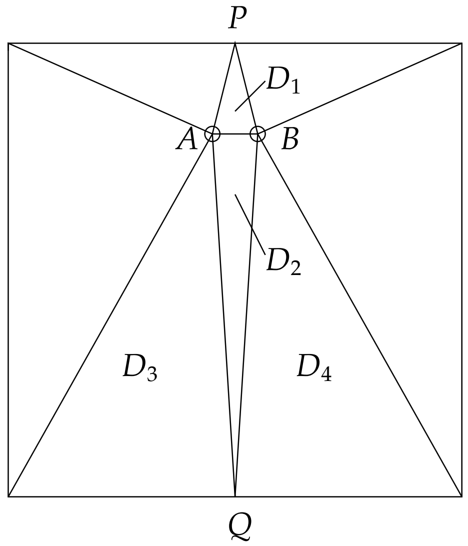
Lösung:

a) Halbiere zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates und viertele eine weitere. Zeichne wie in der Skizze Halbkreise in das Quadrat. Zeichne sodann eine Parallele zur geviertelten Seite in die Fläche M. Auf dieser Parallele können die Punkte A und B beliebig in M platziert werden (jedoch nicht auf den Kreisen). Jetzt können alle Dreiecke eingezeichnet werden (durch A, B, die Ecken des Quadrates und die eingezeichneten Seitenmittelpunkte P und Q). Die Dreiecke D_1, D_2, D_3 und D_4 sind offensichtlich spitzwinklig (man überlege sich, daß man A und B beliebig nahe beieinander (aber verschieden) wählen kann). Die restlichen Dreiecke sind nach dem Satz des Thales ebenfalls spitzwinklig.

b) Die Ecken der entstehenden Dreiecke sind

- E-Punkte (Eckpunkte des Quadrats),
- R-Punkte (auf dem Rand des Quadrats),
- I-Punkte (im Inneren des Quadrats).





Offensichtlich muss es mindestens zwei I-Punkte geben. Von jedem dieser I-Punkte müssen mindestens 5 Dreiecksseiten abgehen (da $360°$ in Teile kleiner als $90°$ geteilt werden muss). Es muss auch mindestens zwei Randpunkte geben, denn sonst überschneiden sich die Verbindungslinien.

Aufgabe 767. Eine ungewöhnliche Rechnung

Frau Meier kauft vier Artikel, von denen jeder einen anderen Preis hat. Ein Artikel kostet 1 Euro; ein weiterer kostet doppelt so viel wie der billigste Artikel.

Bei der Berechnung des Gesamtpreises tippt der Verkäufer versehentlich die Multiplikationstaste seines Taschenrechners anstelle der Additionstaste, und er erhält $6,75$ Euro.

Frau Meier protestiert nicht - sie hat im Kopf addiert und den Gesamtpreis berechnet, und sie ist ebenfalls auf $6,75$ Euro gekommen.

Wieviel kosten die Artikel? (H.F.)

Lösung

Wir bezeichnen den niedrigsten Preis mit x und nehmen zunächst $x \leq 0,99$ an.

Dann gilt $1 + x + 2x + y = 6,75$ und $1 \cdot x \cdot 2x \cdot y = 6,75$ (wobei y der Preis des 4. Artikels ist). Dies ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned} 1 + 3x + y &= 6,75 && (1) \\ 2x^2 y &= 6,75\,. && (2) \end{aligned}$$

Wir multiplizieren (1) und (2) mit 100 und ersetzen $100x$ durch u und $100y$ durch v, rechnen also in cents. Das aus (1) und (2) bestehende Gleichungssystem nimmt dann folgende Form an:

$$\begin{aligned} 3u + v &= 575 && (3) \\ 2u^2 v &= 675 \cdot 10^4 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6\,. && (4) \end{aligned}$$

Wäre u nicht durch 25 teilbar, so müsste v durch $5^4 = 625$ teilbar sein. Dann wäre aber u bereits mindestens $= 625$. Dies widerspräche (3).

Also bleiben folgende Fälle zu überprüfen (beachte: $u < 100$): $u = 25$, $u = 50$ und $u = 75$.

$$u = 25 \overset{(3)}{\Rightarrow} v = 500, \text{ also } 2u^2v = 2 \cdot 25^2 \cdot 500$$
$$u = 50 \overset{(3)}{\Rightarrow} v = 425, \text{ also } 2u^2v = 2 \cdot 50^2 \cdot 425$$
$$u = 75 \overset{(3)}{\Rightarrow} v = 350, \text{ also } 2u^2v = 2 \cdot 75^2 \cdot 350$$

Keines der Ergebnisse für $2u^2v$ ist durch 3^3 teilbar, so dass unsere Annahme $x \leq 0,99$ zum Widerspruch geführt ist. Also ist der niedrigste Preis 1 (Euro). Damit gilt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + a + b &= 6,75 && (5) \\ 1 \cdot 2 \cdot a \cdot b &= 6,75 && (6) \end{aligned}$$

(a bzw. b seien die Preise des 3. bzw. 4. Artikels)
Aus (5) folgt $a = 3,75 - b$ und damit wegen (6) $2 \cdot (3,75 - b) \cdot b = 6,75$, oder $2b^2 - 7,5b + 6,75 = 0$. Daraus erhält man $b = 2,25$, $a = 1,50$, oder umgekehrt.

Aufgabe 768.

Es sei $z = \dfrac{2001}{2002}$.

Der Wert des unendlichen Produkts

$$(1 + z + z^2 + \cdots + z^9) \cdot (1 + z^{10} + z^{20} + \cdots + z^{90}) \cdot (1 + z^{100} + z^{200} + \cdots + z^{900}) \cdots$$

ist eine in diesem Jahr häufig benutzte ganze Zahl. Wie heisst sie? (H.F.)

Lösung: Zunächst zeigen wir, dass sich das unendliche Produkt, bei dem man von links nach rechts die 1. Klammer mit der 2. Klammer, das Ergebnis mit der 3. Klammer, usw. multipliziert, als unendliche Summe schreiben lässt. Wir gehen induktiv vor.

Es sei $P_1 := 1 + z + \cdots + z^9 = 1 + z + \cdots + z^{10^1 - 1}$.
Dann ist
$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \cdot (1 + z^{10} + \cdots + z^{90}) = P_1 + P_1 \cdot z^{10} + \cdots + P_1 \cdot z^{90} \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^{10^2 - 1}. \end{aligned}$$

Es sei $P_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{10^n - 1}$ nachgewiesen, $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \cdot (1 + z^{10^n} + z^{10^n \cdot 2} + \cdots + z^{10^n \cdot 9}) \\ &= P_n + P_n \cdot z^{10^n} + \cdots + P_n \cdot z^{10^n \cdot 9} \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^{10^{n+1} - 1}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} & (1 + z + z^2 + \cdots + z^9) \cdot (1 + z^{10} + z^{20} + \cdots + z^{90}) \cdot (1 + z^{100} + z^{200} + \cdots + z^{900}) \cdots \\ = \; & 1 + z + z^2 + \cdots \end{aligned}$$

Nach der bekannten Formel für geometrische Reihen ist

$$1 + z + \cdots + z^t = \frac{1 - z^{t+1}}{1 - z} \qquad \text{für jedes ganze } t \geq 1.$$

Daher ist wegen $z = \frac{2001}{2002}$ und $\lim_{t \to \infty} z^{t+1} = 0$ offenbar

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} (1 + z + \cdots + z^{10^n - 1}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^{10^n}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} = 2002,$$

d.h. das unendliche Produkt hat den Wert 2002.

Hättest Du es gewusst?

Was bedeutet die verschlüsselte Botschaft ($*$)?

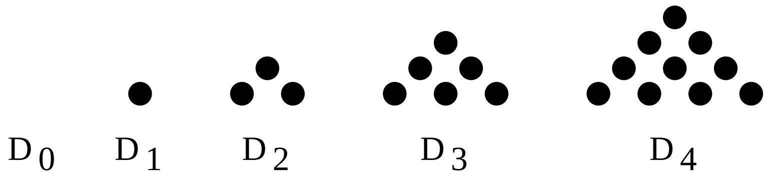
von Hartwig Fuchs

C.F. Gauß, Tagebucheintrag vom 10.Juli 1796:

($*$) "HEYPHKA! $num = \triangle + \triangle + \triangle$"

Was mag das wohl bedeuten?
Bevor wir eine Übersetzung dafür geben, sind einige Vorbemerkungen notwendig.

Betrachten wir die folgenden Figuren D_0, D_1, D_2, ... aus Punkten (D_0 ist die Figur ohne Punkte).



Wir nennen sie **Dreieckshaufen** und die Anzahl der Punkte in den Haufen D_0, D_1, D_2, D_3, D_4,... heißen **Dreieckszahlen** $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, ... Offenbar ist $\triangle_0 = 0$, $\triangle_1 = \triangle_0 + 1 = 1$, $\triangle_2 = \triangle_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, $\triangle_3 = \triangle_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $\triangle_4 = \triangle_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ... *Wie groß ist $\triangle_n$?*
Es ist $\triangle_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$. Nun gilt die Formel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Somit gilt: $\triangle_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Jetzt zur Übersetzung des Tagebucheintrags von C.F. Gauß:

1. **HEYPHKA** ist griechisch (in Großbuchstaben geschrieben; ausgesprochen: heureka) und entspricht ungefähr dem Indianer-Ausruf des Erstaunens (laut Karl May), nämlich: Uff!
2. **num** ist eine Abkürzung des lateinischen Wortes numerus, also Zahl.
3. $\triangle$ ist die Gaußsche Bezeichnung einer Dreieckszahl.

Damit ist die Gaußsche Botschaft entschlüsselbar:

"Uff! Jede Zahl ist die Summe von 3 Dreieckszahlen."

Nimm also eine handvoll Erbsen (es dürfen auch Bohnen oder Reiskörner sein) und Du wirst sie immer in Dreieckshaufen und zwar in höchstens drei Haufen anordnen können ("höchstens" deshalb, weil es auch Haufen ohne Erbsen geben darf – vgl. $\triangle_0$).

Überprüfe die Gaußsche Behauptung mit Hilfe der $\triangle_n$–Formel und des Taschenrechners für die Zahlen 22, 202 und 2 002 (Lösung siehe Seite ??? unten).

Übrigens: einen Beweis für die Behauptungen von Gauß geben wir hier nicht – Gauß war ein so überragender Mathematiker, dass wir der Richtigkeit seiner Behauptungen blind vertrauen dürfen.

Automaten und Monoide

Lösungen zu den Aufgaben des zweiten Teils

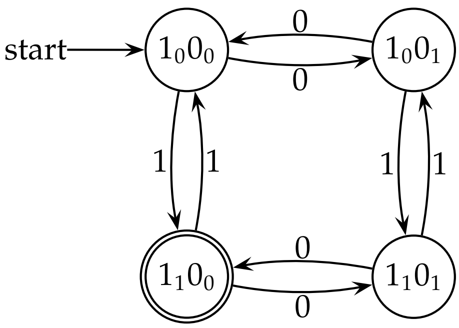
von Andrea Krol

Aufgabe 1: Gib das Diagramm eines Automaten an, der über dem Alphabet $\{0, 1\}$ genau die Worte erkennt, die aus einer ungeraden Anzahl von Einsen und einer geraden Anzahl von Nullen bestehen.

Aufgabe 2: Bestimme zu dem Automat aus Teil (1) das zugehörige Monoid $\mathcal{M}$, das die gleiche Sprache erkennt, indem Du zuerst die Tabelle der Elemente dieses Monoids erstellst. Danach zeige, dass Dein Monoid die gleiche Sprache erkennt, indem Du alle Urbilder des Homomorphismus von A^* auf $\mathcal{M}$ bestimmst.

Lösungen:

Aufgabe 1: Dies hier ist der Automat, der über dem Alphabet $\{0, 1\}$ genau die Worte erkennt, die aus einer ungeraden Anzahl von Einsen und einer geraden Anzahl von Nullen bestehen.



Aufgabe 2:

Funktionen	Zustände			
	$1_0 0_0$	$1_1 0_0$	$1_0 0_1$	$1_1 0_1$
$\alpha := f_0$	$1_0 0_1$	$1_1 0_1$	$1_0 0_0$	$1_1 0_0$
$\beta := f_1$	$1_1 0_0$	$1_0 0_0$	$1_1 0_1$	$1_0 0_1$
$\gamma := f_{10}$	$1_1 0_1$	$1_0 0_1$	$1_1 0_0$	$1_0 0_0$
$1 := f_{11}$	$1_0 0_0$	$1_1 0_0$	$1_0 0_1$	$1_1 0_1$

Tabelle 1: Monoidelemente

Der Homomorphismus $\mu : A^* \to \mathcal{M}$ ist definiert wie folgt:

$$0 \mapsto \alpha \quad 1 \mapsto \beta$$

Bestimmt man nun die Urbilder aller Elemente aus $\mathcal{M}$ unter dieser Abbildung, so erhält man:

$\mu^{-1}(\alpha) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ besteht aus einer geraden Anzahl von Einsen und einer ungeraden Anzahl von Nullen$\}$

$\mu^{-1}(\beta) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ besteht aus einer geraden Anzahl von Nullen und einer ungeraden Anzahl von Einsen$\}$

$\mu^{-1}(\gamma) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ besteht aus einer ungeraden Anzahl von Nullen und Einsen$\}$

$\mu^{-1}(1) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ besteht aus einer geraden Anzahl von Nullen und Einsen$\}$

Man kann nun sehen, das die gesuchte Sprache genau das Urbild des Elements β unter dem Homomorphismus μ ist.

Beweisen kann man lernen (I)

von Hartwig Fuchs

Zur Notwendigkeit des Beweisens

Für den Mathematiker ist seine Wissenschaft eine abstrakte ”Landschaft”, aufgebaut aus wahren Aussagen, gestaltet und geprägt von den Kräften und Gestalten der Logik und auch erfahrbar nur durch die Logik.

Was er von dieser ”Landschaft” durch eigene Bemühungen kennenlernt und was er aus den ”Reisebeschreibungen” (mathematische Literatur) über sie weiß, stellt nur den kleinsten Teil von ihr dar; ihr weitaus größter Teil dagegen ist weithin eine ”terra incognita” – ein unbekanntes ”Land”, das sich bis zum Horizont seiner Wissbegierde erstreckt – und das nur darauf wartet entdeckt und erschlossen zu werden.

Wie aber vermag der Mathematiker in diese unerforschten Gebiete einzudringen, wie erschließt er sie sich und anderen? Was sind seine ”Wege und Stege”, durch die er bis dahin unerforschte ”Regionen” mit seiner vertrauten Welt der (bekannten) mathematischen Sätze und Theorien verbindet und sie dadurch überhaupt erst zugänglich macht?

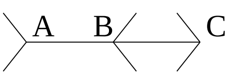
Es sind **Beweise**, die diese Verbindungen herstellen und die es ihm ermöglichen, sich in seiner Welt aus mathematischen Sätzen ungehindert zu bewegen und insbesondere auch ”Expeditionen” in neue ”Gegenden” zu unternehmen:
Beweise nämlich stellen die Zusammenhänge her, durch die man von wahren Aussagen zu weiteren wahren Aussagen gelangt.

Und daher gilt für die Mathematik – und das schon von ihren Anfängen bei den Griechen her – das **Beweisprinzip: Jede mathematische Aussage**– abgesehen von einigen Grundaussagen (Axiomen) – **ist zu beweisen!**
Und Beweisen heißt: mit Hilfe von allgemein anerkannten mathematischen und logischen Methoden die Wahrheit von Aussagen zu begründen.

An dieser Stelle wird man sich fragen, ob solche mathematisch – logische Beweisverfahren tatsächlich immer notwendig sind, oder ob nicht auch z.B. die Anschauung, die Erfahrung oder der gesunde Menschenverstand genügen, um wahre Aussagen machen zu können.
Sie genügen nicht!
Betrachten wir dazu einige Beispiele:

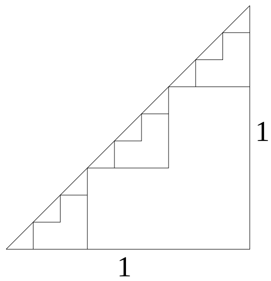
- Die Anschauung ist kein zuverlässiges Beweismittel für die Wahrheit von Aussagen.

Beispiel 1



Die Anschauung legt nahe, die Strecke AB für länger als die Strecke BC zu halten; man wird also die Aussage $|AB| > |BC|$ als wahr betrachten. Tatsächlich aber gilt (nach unserer Konstruktion der Figur): $|AB| = |BC|$. Die Anschauung ist hier einer optischen Täuschung zum Opfer gefallen.

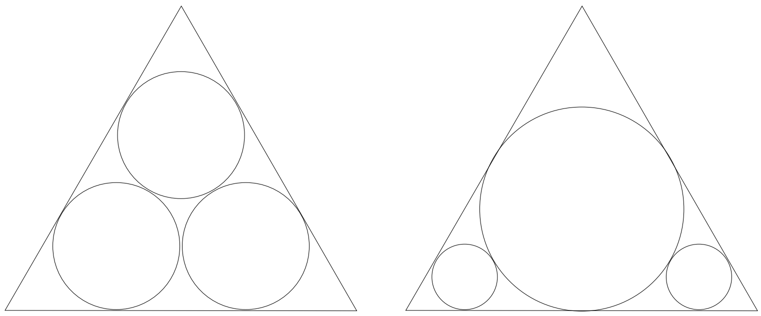
Beispiel 2
Die Anschauung lässt uns behaupten: Je mehr Stufen die Treppenlinie hat, umso weniger wird sich ihre Länge von der Länge der Hypotenuse unterscheiden.
Falsch!
Welche Stufenzahl die Treppenlinie auch aufweist, ihre Länge ist stets 2. Die Länge der Hypotenuse ist jedoch $\sqrt{2} \approx 1,41\ldots$.



• Auch große mathematische Erfahrung kann nicht zuverlässig die Wahrheit von Aussagen begründen.

Beispiel 3
Pierre de Fermat, der bedeutende Mathematiker und geniale Zahlen – Jongleur schreibt 1654 in einem Brief an Blaise Pascal, er sei überzeugt davon, dass der Ausdruck $2^{2^n} + 1$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ stets eine Primzahl liefere.
Trotz aller Erfahrung, die Fermat im Umgang mit Zahlen hatte, hier irrte er:
Die sechste Fermatzahl $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ ist durch 641 teilbar und mithin keine Primzahl.

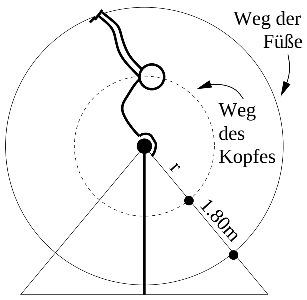
Beispiel 4
Der italienische Mathematiker G.F. Malfatti (1731 – 1807) stellte 1803 die folgende – wegen ihres Schwierigkeitsgrades heute berühmte Aufgabe:
Konstruiere drei Kreise so in ein gegebenes Dreieck, dass die Gesamtfläche der Kreise maximal ist.
Malfatti "löste" seine Aufgabe i.w. so wie im linken Bild; jeder Kreis berührt 2 Dreiecksseiten und 2 Kreise.

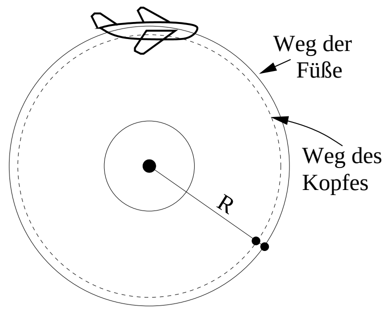


Aber mathematische Intuition kann Beweise nicht ersetzen: wie Lob und Richmond 1929 für gleichseitige Dreiecke bewiesen, ist die Fläche der 3 Kreise im Bild rechts größer als die der 3 Kreise links. Also liefert Malfattis "naheliegende" Konstruktion nicht die richtige Lösung.

• Gesunder Menschenverstand genügt ebenfalls nicht, um die Wahrheit mathematischer Behauptungen zu etablieren.

Beispiel 5
Hänschen, von Kopf bis Fuß $1,80$ m groß, macht einen Umschwung am Reck.
Hans – ebenfalls $1,80$ m groß – möchte einen Eintrag ins Buch der Rekorde erhalten und er macht dazu eine Erdumrundung mit dem Flugzeug im Non – Stopp, wobei er die ganze Zeit im Kopfstand steht!
Der Weg von Hänschens Füßen sei um w Meter länger als der Weg seines Kopfes bei einem Umschwung; bei der Erdumkreisung sei der Weg von Hans' Füßen um W Meter länger als der Weg seines Kopfes.





Der gesunde Menschenverstand sagt uns (unter anderem):
W ist beträchtlich größer als w.
Tatsächlich aber ist W genau so groß wie w, denn

$$\begin{aligned} W &= 2\pi(R+1,80) - 2\pi R = 3,60\pi \quad \text{und} \\ w &= 2\pi(r+1,80) - 2\pi r = 3,60\pi. \end{aligned}$$

Nach den Beispielen 1 – 4 wird man einsehen, dass weder Anschauung noch Erfahrung oder gesunder Menschenverstand als Instrumente mathematischer Wahrheitsfindung geeignet sind – man kann sich mit ihnen offensichtlich viel zu leicht irren.

Warum aber sind Mathematiker überhaupt so sehr darauf bedacht, dass ja nicht – etwa auf den oben als unzuverlässig erkannten Wegen – auch nur eine Falschaussage in ihre Theorien gelangt?
Denn – so wird man sich vielleicht fragen – welchen Schaden könnte schon eine einzelne unrichtige Ausage in einem Hunderte und mehr Aussagen enthaltenden mathematischen System anrichten?

Dazu ein Beispiel:
Hänschen behauptet steif und fest: $1 \cdot 1 = 2$.
Hans versucht, ihn davon abzubringen, indem er sich zunächst Hänschens Meinung zu eigen macht, dass $1 \cdot 1 = 2$ wahr sei und daraus dann einige Konsequenzen für die Arithmetik natürlicher Zahlen herleitet.
Hans: Was ist $1 \cdot 2$? oder $1 \cdot 3$? oder $1 \cdot 4$? ...
Hänschen: $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 3 = 3$, $1 \cdot 4 = 4$ .... Das ist nicht zu bestreiten.
Hans:

1. Aus $1 \cdot 1 = 2$ und $1 \cdot 2 = 2$ folgt $1 \cdot 1 = 1 \cdot 2$, also ist $1 = 2$ und daraus folgt:

$$\begin{array}{l} 1 = 2 - 1 = 2 - 2 = 0 \text{ , also } 1 = 0 \text{ ;} \\ 3 = 4 - 1 = 4 - 2 = 2 \text{ , also } 3 = 2 \text{ ;} \\ 4 = 5 - 1 = 5 - 2 = 3 \text{ , also } 4 = 3 \quad \text{usw.,usw.} \end{array}$$

   Letztlich ist $0 = 1 = 2 = 3 = 4 \ldots$.

2. Wie auch immer zwei natürliche Zahlen $m \geq 0$, $n \geq 0$ gewählt werden, stets gilt:
   $m + n = 0$, $m - n = 0$, $m * n = 0$
   Schlimmer ist, dass $m \div n$ wegen $m \div n = 0 \div 0$ gar nicht erst definiert werden kann.

Hänschen: Genug! Ich sehe ein, dass durch meine Annahme $1 \cdot 1 = 2$ die gesamte Arithmetik im Wesentlichen sinnlos wird.

Die Lehre, die man aus diesem Beispiel ziehen kann, gilt allgemein:
Eine Falschaussage, die in einer mathematischen Theorie eingebaut ist, vermag diese

Theorie gänzlich zu ruinieren.
Nur das oben angegebene Beweisprinzip bewahrt sie vor der Gefahr der Einschleusung so zerstörerischer Komponenten.

Das Beweisprinzip hat noch einen weiteren Aspekt.
Es stellt sicher, dass alle wahren mathematischen Aussagen durch eine einheitliche Methode gewonnen werden:
Jede mathematische Aussage ist das Endprodukt eines Beweisprozesses.

Leider aber verlaufen die Beweisprozeduren selbst keineswegs nach einem einheitlichen Muster.
Sie treten vielmehr in einer so verwirrenden Vielfalt von unterschiedlichen Formen auf, dass man z.B. im Mathematikunterricht in den Schulen die meisten Beweisvarianten gar nicht kennen lernt.
Hier nun möchte der MONOID einspringen:
Es ist beabsichtigt, in einer zwanglosen Folge verschiedenartige Beweistypen vorzustellen und ihre Funktionsweise zu beschreiben (etwa: indirekter Beweis? unendlicher Regress? ...).
Zugleich sollen dabei auftretende logische Begriffe (etwa: Axiom? genau dann? ...), Schlussregeln (etwa: Implikation? Äquivalenz? ...), logische Gesetze (etwa: tertium non datur? ...) erklärt und ihre Anwendungen erläutert werden.

Hier tut sich für Schreiber und Leser ein weites Betätigungsfeld auf – demnächst.

Nach anstrengender Lektüre gibt es nun etwas zum Entspannen:

Mathematik und Literatur

Kleine Rechenaufgabe

von Erich Kästner

Addiert die Null zehntausend Mal!
Rechnet's nur gründlich aus!
Multipliziert's! Mit jeder Zahl!
Steht Kopf! Es bleibt euch keine Wahl:

Zum Schluß kommt Null heraus.

(Aus:"Bei Durchsicht meiner Bücher")

MONOID-Preisträger 2001

Das „Goldene M“: Kerstin Bauer
Sonderpreis: Steffen Biallas

1. Preis: Gregor Dschung, Dominik Kraft, Markus Bassermann
2. Preis: Michael Kuntz, Stefan Tran, Sönke Loitz, Annika Johann, Johann Kirsch, Meike Fluhr, Isabelle Merker, Johannes Merz
3. Preis: Verena Prägert, Peter Antes, Daniel Faber, Christoph Peters, Florian Schnitter, Julia Jung, Stefanie Tiemann
Trostpreis: Aaron Breivogel, Catherina Wirtz, Ingo Gerhold, Sebastian Bischof, Marc Schöfer, Ramona Christmann

Jeweils einen MONOID-Stein erhalten unsere neuen Löser und Löserinnen aus den 5. Klassen:

Annett Stellwagen, Johanna Mees, Annkatrin Weber, Claudia Heiss, Rebecca Zimmer, Janina Braun, Vanessa Nagel, Sabine Oßwalt, Felix Liebrich, Lisa Mettler, Carolin Murlock, Larissa Nickel

Das „Goldene M“, der Sonderpreis und die ersten, zweiten und dritten Preise sind verbunden mit Geldbeträgen, die der Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz gestiftet hat.

Schülertag 2002 in Mainz

Liebe Schülerinnen und Schüler,

auch in diesem Jahr findet wieder ein Schülerinformationstag des Fachbereichs Mathematik und Informatik der Universität Mainz in Zusammenarbeit mit dem Verein Freunde der Mathematik für die 12. Klassen (und interessierte 11. Klassen) in Mainz statt.

An diesem Tag, dem **23. Mai 2002**, wird Euch ein Einblick in das Studium geboten. Natürlich wird einiges Mathe-spezifisch sein, aber auch für diejenigen, die sich nicht für Mathe oder Informatik (als Studienfach) interessieren, ist ein Besuch an der Uni sicher informativ. Ihr seid also recht herzlich eingeladen, Euch die Uni Mainz und den Fachbereich Mathematik und Informatik mal genauer anzuschauen.

Ein kleiner Überblick über das vorläufige Programm:

9:00	Begrüßung
9:15	Vorstellung der Mathematik
10:30	Einteilung der Übungsgruppen
11:00	Übungen im Stil einer Mathematikübung
12:00	Mittagessen und Gelegenheit zum Gespräch mit Studierenden
14:00	Vorstellung der Informatik
15:00	Film der Fachschaft Mathematik
16:00	Kaffee & Kuchen

Wir bitten um rechtzeitige Anmeldung zum Schülertag! Ihr könnt Euch sowohl alleine als auch als Gruppe anmelden. Und zwar unter Angabe der Teilnehmeranzahl (getrennt nach Schülern und eventuellen Betreuern) und einer Postadresse für die Anmeldebestätigung und weitere Informationen bei (am schnellsten und bequemsten via e-Mail; auf der Homepage ist aber auch ein Formular zu finden):

Anschrift:	Freunde der Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz e.V. Fachbereich Mathematik und Informatik 55099 Mainz
Homepage:	`www.mathematik.uni-mainz.de/Freunde`
e-Mail:	`freunde@mathematik.uni-mainz.de`

Rubrik der Löser und Löserinnen *(Stand: 26.11.2001)*

◇ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

Kl. 5: Janina Braun 10, Claudia Heiss 12, Johanna Mees 13, Vanessa Nagel 9, Larissa Nickel 6, Sabine Oßwalt 9, Annett Stellwagen 15; ■ **Kl. 6:** Julia Becker 7, Daniel Faber 36, Marina Kauff 7, Johann Kirsch 47, Nadine Meitzler 7, Johannes Merz 40, Daniel Noll 14, Katharina Oehl 7, Marie-Christine Salamon 7, Lisa Schäfer 7, Jennifer Stemmler 7, Marlene Weber 7, Jana Thielmann 7; ■ **Kl. 7:** Markus Bassermann 59, Meike Fluhr 41, Jennifer Großer 7, Isabelle Merker 40, Mareike Scholl 6; ■ **Kl. 8:** Isabelle Maurot 14, Christina Simon 24, Florian Schnitter 32; ■ **Kl. 9:** Marc Schöfer 27; ■ **MSS 11:** Manuel Kochenburger 15; **MSS 12:** Aaron Breivogel 30, Dominik Kraft 67; ■ **MSS 13:** Christoph Peters 33, Sönke Loitz 48.

◇ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

Kl. 5: Felix Liebrich 6, Lisa Mettler 6, Carolin Murlock 6, Rebecca Zimmer 12; ■ **Kl. 9:** Corinna Christmann 3, Gregor Dschung 68, Felix Henninger 8, Alexander Kent 5; ■ **MSS 12:** Marcel Zimmer 10; ■ **MSS 13:** Ramona Christmann 26.

◇ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

Kl. 7: Sebastian Bischof 29; ■ **Kl. 8:** Thomas Meneges 5, Stefan Tran 50.

◇ **Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium: Kl. 13:** Peter Antes 36;

◇ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**
Kl. 7: Sebastian Hartmann 5, Andreas Reuter 17, Marius Trabert 9;

◇ **Hamburg: Kl. 13:** Wolfram Regen 23;

◇ **Holzhausen:** Thomas Hotschicke 3;

◇ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium: Kl. 12:** Kerstin Bauer 126;

◇ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 8:** Sonja Keilbach 3;

◇ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 11:** Steffen Biallas 93;

◇ **Mainz, BBS I (Höhere Berufsfachschule Physik): Kl. 12:** Jens Mintzlaff 8;

◇ **Mannheim (Betreuender Lehrer Ulrich Wittekindt):**
Kl. 8: Adrian Streitz 6, Matthias Werner 16;

◇ **Münster, Schule auf der Aue (Betreuender Lehrer H. Stapp):**
Kl. 8: Sarah Danz 2, Tobias Eggert 3, Ingo Gerhold 29, Nadine Kenntje 5, Marc Leonhardt 2, Jonas Löbig 3;

◇ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
Kl. 6: Annika Kohlhaas 14; ■ **Kl. 7:** Stefanie Tiemann 31;

◇ **Oberusel:**
Kl. 5: Annkatrin Weber 13; ■ **Kl. 6:** Stefan Albert 12; ■ **Kl. 10:** Boris Traskow 14;

◇ **Osthofen:** Eugen Keller 23;

◇ **Westerburg, Konrad-Adenauer-Gymnasium:**
Kl.10: Julius Demmer 2, Kathrin Hehl 2, Josef Keller 3, Alexandra Rienert 3, Tatjana Schmidt 9, Lena Schürg 9;

◇ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
Kl. 6: Mahkuba Ayhat 5, Jana Hohlfinger 6, Annika Johann 47, Julia Jung 32, Lena Müller 6; ■ **Kl. 8:** Michael Kuntz 54; ■ **Kl.9:** Verena Prägert 37;

◇ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium: Kl. 10:** Catherina Wirtz 29.

MONOID Jahrgang 22 Heft 69 März 2002

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, 67316 Carlsberg;
Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz
Mitglieder: Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber
Monoidaner: Eike Bumb, Gregor Dschung, Felix Henninger, Armin Holschbach, Dominik Kraft, Sönke Loitz, Heiner Olbermann, Martin Olbermann, Christoph Peters, Michael Peters, Joachim Trodler und Marcel Zimmer
Korrekturen und Layout: Linda Hosius
Internet: Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000.

Herausgeber: Fachbereich Mathematik und Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389
e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid

Rubrik der Löser und Löserinnen *(Stand: 26.11.2001)*

◊ **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:**

Kl. 5: Janina Braun 10, Claudia Heiss 12, Johanna Mees 13, Vanessa Nagel 9, Larissa Nickel 6, Sabine Oßwalt 9, Annett Stellwagen 15; ■ **Kl. 6:** Julia Becker 7, Daniel Faber 36, Marina Kauff 7, Johann Kirsch 47, Nadine Meitzler 7, Johannes Merz 40, Daniel Noll 14, Katharina Oehl 7, Marie-Christine Salamon 7, Lisa Schäfer 7, Jennifer Stemmler 7, Marlene Weber 7, Jana Thielmann 7; ■ **Kl. 7:** Markus Bassermann 59, Meike Fluhr 41, Jennifer Großer 7, Isabelle Merker 40, Mareike Scholl 6; ■ **Kl. 8:** Isabelle Maurot 14, Christina Simon 24, Florian Schnitter 32; ■ **Kl. 9:** Marc Schöfer 27; ■ **MSS 11:** Manuel Kochenburger 15; **MSS 12:** Aaron Breivogel 30, Dominik Kraft 67; ■ **MSS 13:** Christoph Peters 33, Sönke Loitz 48.

◊ **Karolinen-Gymnasium Frankenthal:**

Kl. 5: Felix Liebrich 6, Lisa Mettler 6, Carolin Murlock 6, Rebecca Zimmer 12; ■ **Kl. 9:** Corinna Christmann 3, Gregor Dschung 68, Felix Henninger 8, Alexander Kent 5; ■ **MSS 12:** Marcel Zimmer 10; ■ **MSS 13:** Ramona Christmann 26.

◊ **Leibniz-Gymnasium Östringen (Betreuender Lehrer Klaus Ronellenfitsch):**

Kl. 7: Sebastian Bischof 29; ■ **Kl. 8:** Thomas Meneges 5, Stefan Tran 50.

◊ **Bad Kreuznach, Lina-Hilger-Gymnasium: Kl. 13:** Peter Antes 36;

◊ **Eiterfeld, Lichtbergschule (Betreuender Lehrer Wolfgang Jakob):**
Kl. 7: Sebastian Hartmann 5, Andreas Reuter 17, Marius Trabert 9;

◊ **Hamburg: Kl. 13:** Wolfram Regen 23;

◊ **Holzhausen:** Thomas Hotschicke 3;

◊ **Kaiserslautern, Hohenstaufen-Gymnasium: Kl. 12:** Kerstin Bauer 126;

◊ **Ludwigshafen, Geschwister Scholl-Gymnasium: Kl. 8:** Sonja Keilbach 3;

◊ **Magdeburg, Albert-Einstein-Gymnasium: Kl. 11:** Steffen Biallas 93;

◊ **Mainz, BBS I (Höhere Berufsfachschule Physik): Kl. 12:** Jens Mintzlaff 8;

◊ **Mannheim (Betreuender Lehrer Ulrich Wittekindt):**
Kl. 8: Adrian Streitz 6, Matthias Werner 16;

◊ **Münster, Schule auf der Aue (Betreuender Lehrer H. Stapp):**
Kl. 8: Sarah Danz 2, Tobias Eggert 3, Ingo Gerhold 29, Nadine Kenntje 5, Marc Leonhardt 2, Jonas Löbig 3;

◊ **Neuss, Gymnasium Marienberg (Betreuende Lehrerin Frau Cordula Langkamp):**
Kl. 6: Annika Kohlhaas 14; ■ **Kl. 7:** Stefanie Tiemann 31;

◊ **Oberusel:**
Kl. 5: Annkatrin Weber 13; ■ **Kl. 6:** Stefan Albert 12; ■ **Kl. 10:** Boris Traskow 14;

◊ **Osthofen:** Eugen Keller 23;

◊ **Westerburg, Konrad-Adenauer-Gymnasium:**
Kl.10: Julius Demmer 2, Kathrin Hehl 2, Josef Keller 3, Alexandra Rienert 3, Tatjana Schmidt 9, Lena Schürg 9;

◊ **Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (Betreuender Lehrer Herr Kuntz):**
Kl. 6: Mahkuba Ayhat 5, Jana Hohlfinger 6, Annika Johann 47, Julia Jung 32, Lena Müller 6; ■ **Kl. 8:** Michael Kuntz 54; ■ **Kl.9:** Verena Prägert 37;

◊ **Zweibrücken, Hofenfelsgymnasium: Kl. 10:** Catherina Wirtz 29.