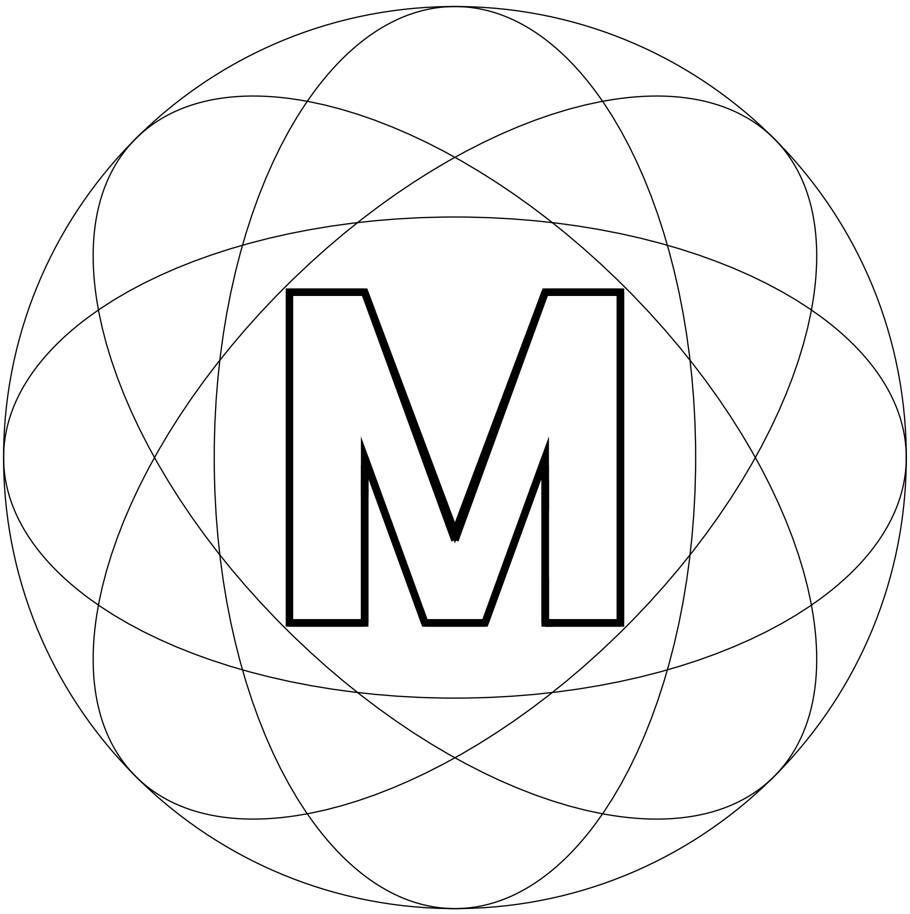
Jahrgang 21 Heft 68 Dezember 2001

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Die einzigartige Mathe-Zeitschrift für Schüler/innen und Lehrer/innen
in der Bundesrepublik Deutschland,
1980 begründet von Martin Mettler
und seit 2001 herausgegeben vom Fachbereich Mathematik/Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz am Rhein

Liebe Le(ö)serin, lieber Le(ö)ser!

Die NEUEN AUFGABEN warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn du in Mathe keine „Eins“ hast. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wird das Lösen mancher Aufgabe viel mathematische Phantasie und selbständiges Denken von dir fordern, aber auch Zähigkeit, Wille und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer ***nur eine oder Teile einzelner Aufgaben*** lösen kann, sollte teilnehmen; ***der Gewinn eines Preises*** ist dennoch nicht ausgeschlossen.

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die „Mathespielereien“ vorgesehen. Denkt bei euren Lösungen daran, auch den Lösungs**weg** abzugeben.

Alle Schüler/innen, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen **(mit Lösungsweg!)** zu den NEUEN AUFGABEN und zur „Seite für den Computer-Fan“ abgeben. (Beiträge zu **verschiedenen Rubriken** bitte auf verschiedenen Blättern). Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der

15. 02. 2002.

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

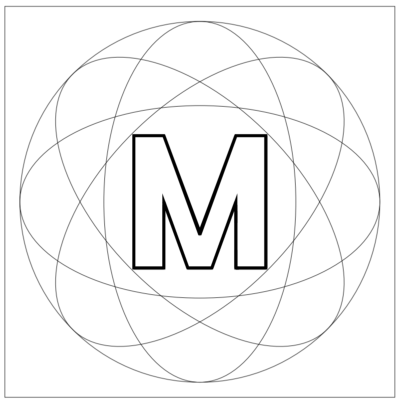
Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, D-67316 Carlsberg

Tel.: 06356/8650; Fax: 06356/989780; e-Mail: MMettler@t-online.de

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften im MONOID-Kasten oder direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.
Ferner gibt es in folgenden Orten/Schulen betreuende Lehrer, denen ihr eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Frau Langkamp** in Marienberg, **Herrn Stapp** in der Schule auf der Aue in Münster und **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler.
Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der RUBRIK DER LÖSER und in der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.
Wir bitten auch um neue Aufgaben, die du selbst erstellt hast, um sie in den Rubriken „Mathespielereien“ und „Neue Aufgaben“ zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern deiner eigenen Phantasie entspringen. Würde es dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur du kennst?

Am Jahresende werden **20-25 Preise** an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es bei uns noch einen besonderen Preis:

Das Goldene M



Außer der Medaille mit dem goldenen M, die ihr Aussehen in diesem Jahr gewandelt hat, gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten.
Zur Ermittlung der Preisgewinner werden folgende Tätigkeiten bewertet: Lösungen zu den NEUEN AUFGABEN und den MATHESPIELEREIEN, Beiträge zur „Seite für den Computer-Fan“, Artikel schreiben, Erstellen von „neuen Aufgaben“, Tippen von Texten für den MONOID, Teilnahme an Wettbewerben, etc.

Und nun wünschen wir euch allen: Viel Erfolg bei eurer Mitarbeit! Die Redaktion

„Römisches Recht“

von Martin Mettler

Während einer Vertretungsstunde stellt Herr Müller den Schülerinnen und Schülern der Klasse 6a folgende Knobelaufgabe:

Im alten Rom hatte ein Sterbender, dessen Frau ein Kind erwartete, folgendes Testament aufgestellt:

(1) Wird ein Sohn geboren, so soll dieser $\frac{2}{3}$ und die Frau $\frac{1}{3}$ des Vermögens erhalten;

(2) Wird eine Tochter geboren, so soll diese $\frac{1}{3}$ und die Frau $\frac{2}{3}$ des Vermögens bekommen.

Nach dem Tode des Mannes gebar die Frau Zwillinge und zwar einen Jungen und ein Mädchen. Wie muss nun das Vermögen unter den drei Hinterbliebenen verteilt werden?

Uwe gibt folgende Lösung: Aus (2) folgt, dass der Tochter die Hälfte von dem was die Mutter bekommen soll, zusteht. Bekommt also die Tochter ein Teil, so muss die Mutter zwei Teile bekommen.
Aus (1) folgt, dass dem Sohn das Doppelte von dem was die Mutter bekommt, zusteht. Bekommt also die Mutter zwei Teile, so muss der Sohn 4 Teile bekommen.
Also bekommt die Tochter 1 Teil, die Mutter 2 Teile und der Sohn 4 Teile, insgesamt 7 Teile. Der Tochter steht also $\frac{1}{7} \approx 0,14$, der Mutter $\frac{2}{7} \approx 0,29$ und dem Sohn $\frac{4}{7} \approx 0,57$ zu.

Herr Müller sagt: Du hast sehr schön überlegt Uwe, doch gebe ich zu Bedenken, dass dadurch die Mutter benachteiligt wäre. Aus (1) und (2) folgt nämlich, dass die Mutter höchstens $\frac{2}{3}$ aber mindestens $\frac{1}{3}$ zu bekommen hat.

Daraufhin überlegt Michael: Aus dieser Sicht müsste also die Mutter mindestens $\frac{1}{3}$ bekommen; der Rest von $\frac{2}{3}$ müsste unter den Kindern wie folgt verteilt werden: die Tochter bekommt einen Teil und der Sohn bekommt 4 Teile, insgesamt also 5 Teile.
Wegen $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ist einer von diesen 5 Teilen $\frac{2}{15}$; also steht dem Tochter $\frac{2}{15} \approx 0,13$, dem Sohn $4 \cdot \frac{2}{15} \approx 0,53$ und der Mutter $\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \approx 0,33$ des Vermögens zu.

Nun sagt aber Lisa: Das Mädchen ist sowieso am schlechtesten dran, warum betrachten wir nicht das Problem aus ihrer Sicht ?
Es müsste gefordert werden, dass die Tochter mindestens $\frac{1}{3}$ erhält und der Rest von $\frac{2}{3}$ wird an Sohn und Mutter so verteilt, dass die Mutter einen Teil und der Sohn 2 Teile erhält, also insgesamt 3 Teile. Wegen $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ bekäme die Mutter $\frac{2}{9} \approx 0,22$ und der Sohn $\frac{4}{9} \approx 0,44$ des Vermögens.

Wir bemerken: Jedem völlig gerecht zu werden ist unmöglich, denn sollten Tochter und Mutter mindestens je $\frac{1}{3}$ bekommen, so bliebe für den Sohn höchstens $\frac{1}{3}$ und nicht mindestens $\frac{2}{3}$ übrig.
Das Problem kompliziert sich, wenn man Verschiedenes in den Text hineininterpretiert. Es wird im Text überhaupt nichts über ein Minimum, das der Mutter oder irgendjemandem zusteht, behauptet.
Seinerzeit hat der römische Jurist Salvius Julianus genauso wie Uwe überlegt.

Ein Blick hinter die Kulissen

von Hartwig Fuchs

Immer wieder teilen Hobby-Mathematiker schöne oder bemerkenswerte oder auch nur verblüffende Eigenschaften von natürlichen Zahlen mit - dies geschieht häufig in der Form von Aufgaben wie z.B. der folgenden:

Lauter Quadratzahlen
Bei einer mit 121 beginnenden unendlichen Folge von natürlichen Zahlen sind alle weiteren Zahlen nach einem Muster gebildet, das man sofort erkennt, wenn man die Folgenelemente so untereinander schreibt:

$$\begin{array}{c} 121 \\ 10201 \\ 1002001 \\ 100020001 \\ \vdots \end{array}$$

(1) Zeige: alle Zahlen der Folge sind Quadratzahlen.

Auf eine Behauptung wie (1) stößt man sicher nicht durch mathematisches Experimentieren und durch Zufall schon gar nicht. Wie aber kommt man auf (1)?

Die Lösung ist ein simpler methodischer Trick:

(T) **Man geht einfach vom gewünschten Ergebnis aus.**

Für unser Beispiel heißt das: Der Aufgaben-Konstrukteur sucht nach einer Formel, die lauter Quadratzahlen liefert, welche zudem noch ein auffälliges Ziffernmuster besitzen.

Eine solche Formel ist etwa $(a \cdot 10^n + b)^2$ mit $a \geq 1$, $b \geq 1$, wie man leicht mit selbst gewählten Werten für a und b überprüfen kann. Insbesondere erhält man für $a = b = 1$ die obige Zahlenfolge, wenn $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist.

Die folgenden Beispiele sind alle mit Hilfe des Prinzips (T) gefunden worden.

Erzeugung von Nicht-Primzahlen aus einer Primzahl
Gegeben sei die Zahlenfolge

$$\begin{array}{c} 4133 \\ 401303 \\ 40013003 \\ 4000130003 \\ \vdots \end{array}$$

(2) Zeige: 4133 ist eine Primzahl, während alle übrigen Zahlen der Folge Nicht-Primzahlen sind.

Auch hier wird man sich kaum erklären können, wie die gegebene Zahlenfolge gefunden wurde, wenn man nicht weiß, dass sie mittels (T) konstruiert wurde: ausgehend von der Formel $(4 \cdot 10^n + 1)(10^n + 3) = 4 \cdot 10^{2n} + 13 \cdot 10^n + 3$ erhält man für $n = 2, 3, 4, \ldots$ die offensichtlich nicht-primen Zahlen der Folge.

Ungewöhnliche Vielfache
Gegeben sei die Folge der Zahlen

$$\begin{array}{c} 72 \\ 9702 \\ 997002 \\ 99970002 \\ \vdots \end{array}$$

(3) Zeige: 1) Jede Zahl der Folge ist ein Vielfaches von 9.
2) Jede zweite Zahl der Folge ist ein Vielfaches von 99.
3) Jede dritte Zahl der Folge ist ein Vielfaches von 999.
$\vdots$

Der Aufgaben-Konstrukteur ist gemäß (T) von einer geeigneten Gleichung, hier von $(10^n - 1)(10^n - 2) = 10^{2n} - 3 \cdot 10^n + 2$ ausgegangen; für $n = 1, 2, 3, \ldots$ erhält man aus ihr die gegebene Zahlenfolge.
$10^n - 1$ ist die Zahl $99\ldots9$ mit n Ziffern 9, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Daraus folgt sofort 1).
Ist n ein Vielfaches von 2 (von 3, von 4, $\ldots$), dann ist $10^n - 1 = 99\ldots9$ mit n Ziffern 9 offenbar durch 99 (durch 999, durch 9999, $\ldots$) teilbar, so dass 2) und auch 3), 4), $\ldots$ gelten.

Zufall oder nicht?
Finde heraus, wie der Aufgaben-Konstrukteur die folgenden Gleichungen gefunden hat:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 36 + 28 &= 280 \\ 77 \cdot 36 + 28 &= 2800 \\ 777 \cdot 36 + 28 &= 28000 \\ 7777 \cdot 36 + 28 &= 280000 \\ &\vdots \end{aligned}$$

und begründe damit, dass sie alle richtig sind. Die Lösung findet sich in diesem MONOID, S. 26

Zuschrift zum letzten Heft / Errata

1. Zu dem Artikel „Was ist ein Hamilton-Weg?“ schrieb **Herr Friedrich Regen**:

   „Sehr geehrter Herr Dr. Fuchs, auf die Frage nach der Anzahl von Hamiltonwegen auf dem Dodekaeder findet der Computer schnell die Antwort: 54, 20 davon sind Hamiltonkreise. Die beiliegenden Pascal-Programme liefern jeweils dieselbe Ausgabe, nämlich 27 Pfade, die mit der Eckenfolge $U - T - I$ beginnen. Die $U - T - S$-Wege verlaufen symmetrisch. Die Rechenzeit legt nahe, dass man das Problem auch von Hand lösen könnte, eine elegante Lösung kenne ich aber nicht. An dieser Stelle einen herzlichen Dank für den interessanten Artikel und das MONOID.“
2. Auf Seite 31 ist uns ein schlimmer Tippfehler unterlaufen: Die Assoziativität der Multiplikation wird natürlich ausgedrückt durch $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Stehen an Stelle der Malpunkte Minuszeichen, ist die Aussage falsch. Entschuldigung!

Bundeswettbewerb Mathematik 2. Runde 2001

Hier sind die Aufgaben der zweiten Runde 2001, welche Ihr mit den Musterlösungen für die Korrektoren finden könnt unter `www.bundeswettbewerb-mathematik.de`. Im Anschluss stellen wir noch die Lösung von Kerstin Bauer, einer Schülerin der Klasse 12, zur zweiten Aufgabe vor.

Aufgabe 1
Zehn Ecken eines regelmäßigen 100-Ecks seien rot und zehn andere blau gefärbt.
Man beweise: Unter den Verbindungsstrecken zweier roter Punkte gibt es mindestens eine, die genauso lang ist wie eine der Verbindungsstrecken zweier blauer Punkte.

Aufgabe 2
Man gebe für jede natürliche Zahl n zwei ganze Zahlen p_n und q_n mit folgender Eigenschaft an: Für genau n verschiedene ganze Zahlen x ist $x^2 + p_n x + q_n$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.
Bemerkung: Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Aufgabe 3
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Punkte A', B' und C' liegen auf den Seiten BC bzw. CA bzw. AB so, dass $\overline{A'B} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$ und $\overline{AB'} = \overline{BC'} = \overline{CA'}$ gilt.
Man beweise, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Aufgabe 4
In einem Quadrat Q der Seitenlänge 500 liegt ein Quadrat R der Seitenlänge 250.
Man beweise: Auf dem Rand von Q lassen sich stets zwei Punkte A und B so wählen, dass die Strecke AB mit R keinen Punkt gemeinsam hat und ihre Länge größer als 521 ist.

Lösung zu Aufgabe 2 (Kerstin Bauer)
Bezeichnung: $\mathbb{Z} =$ Menge der ganzen Zahlen

Behauptung: Für die Paare $(\mathbf{p_n}, \mathbf{q_n})$ **mit** $\mathbf{p_n = 0}$ **und** $\mathbf{q_n = 2^{n+1}}$ gilt:
$x^2 + p_n x + q_n$ ist für genau n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) verschiedene ganze Zahlen x das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Beweis:
Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus den beiden folgenden Teilbehauptungen:
Teilbehauptung 1:

$$x^2 + 2^{n+1} = y^2 \text{ mit } x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \{x_i | x_i = 2^{i-1} - 2^{n-i}, 1 \leq i \leq n\}$$

Teilbehautpung 2:

$$\left|\{x_i | x_i = 2^{i-1} - 2^{n-i}, 1 \leq i \leq n\}\right| = n, \text{ d.h. die } x_i \text{ sind paarweise verschieden.}$$

Beweis der Teilbehauptungen:
Zu Teilbehauptung 1:

$$x^2 + 2^{n+1} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 2^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)(x-y) = 2^{n+1}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt hieraus (bis auf die Vorzeichen):

$$x + y = 2^i \quad \text{und} \quad x - y = 2^j \quad \text{mit} \quad 0 \leq i \leq n+1 \quad \text{und} \quad i + j = n + 1$$

Unter Beachtung der Vorzeichen gibt es nun zwei Möglichkeiten, nämlich:

(a) $x + y = 2^i\,;\ x - y = -2^{n+1-i}$ und (b) $x + y = -2^i\,;\ x - y = 2^{n+1-i}$

Zu (a):

$$x + y = 2^i\,;\ x - y = -2^{n+1-i} \quad \Rightarrow 2x = 2^i - 2^{n+1-i} \quad \Rightarrow x = x_i = 2^{i-1} - 2^{n-i}$$

Ist $1 \leq i \leq n$, so gilt $2^{i-1} \in \mathbb{Z}$ und somit auch $x_i \in \mathbb{Z}$.
Ist $i = 0$, so ist $2^{i-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^{n-i} \in \mathbb{N}$ und somit $x_i \notin \mathbb{Z}$.
Ist $i = n+1$, so ist $2^{n-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^i \in \mathbb{N}$ und somit $x_i \notin \mathbb{Z}$.

Also: $x_i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n$.

Zu (b):

$$x + y = -2^i\,;\ x - y = 2^{n+1-i} \quad \Rightarrow 2x = -2^i + 2^{n+1-i} \quad \Rightarrow x = x'_i = -2^{i-1} + 2^{n-i}$$

Wie in (a) folgt:

Ist $1 \leq i \leq n$, so gilt $2^{i-1} \in \mathbb{Z}$ und somit auch $x'_i \in \mathbb{Z}$.
Ist $i = 0$, so ist $2^{i-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^{n-i} \in \mathbb{N}$ und somit $x'_i \notin \mathbb{Z}$.
Ist $i = n+1$, so ist $2^{n-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^i \in \mathbb{N}$ und somit $x'_i \notin \mathbb{Z}$.

Also: $x'_i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n$.

Die Lösungskomponenten x'_i, $1 \leq i \leq n$, von (b) sind bereits in der Menge der Lösungskomponenten x_i des Gleichungssystems (a) enthalten:

Beweis:

Ist $1 \leq i \leq n$, so gilt $1 \leq n + 1 - i \leq n$ (offensichtlich) und

$$x'_i = 2^{n-i} - 2^{i-1} = 2^{(n-i+1)-1} - 2^{n-(n-i+1)} = x_{n+1-i} \in \{x_i \,|\, x_i = 2^{i-1} - 2^{n-i},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Also: Ist $x^2 + 2^{n+1} = y^2$ mit $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$, so ist $x \in \{x_i \,|\, = 2^{i-1} - 2^{n-i},\ 1 \leq i \leq n\}$; d.h. nur diese x_i kommen in Frage.

Wegen

$$\begin{aligned} x_i^2 + 2^{n+1} &= (2^{i-1} - 2^{n-i})^2 + 2^{n+1} \\ &= 2^{2i-2} - 2 \cdot 2^{i-1} \cdot 2^{n-i} + 2^{2n-2i} + 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{2i-2} - 2^n + 2^{2n-2i} + 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{2i-2} + 2^n + 2^{2n-2i} \\ &= (2^{i-1} + 2^{n-i})^2 \end{aligned}$$

liefert aber jedes x_i eine Lösung, da wegen $1 \leq i \leq n$ auch $y_i = 2^{i-1} + 2^{n-i} \in \mathbb{N}$ gilt.

Zu Teilbehauptung 2:

Offensichtlich genügt es, zu zeigen, dass $x_{i+1} > x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt. Dies ist der Fall, denn:

$$x_{i+1} - x_i = 2^i - 2^{n-i+1} - (2^{i-1} - 2^{n-i}) = (2^i - 2^{i-1}) + (2^{n-i+1} - 2^{n-i}) > 0,$$

da $2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1} \cdot (2-1) = 2^{i-1} > 0$ und $2^{n-i+1} - 2^{n-i} = 2^{n-i} \cdot (2-1) = 2^{n-i} > 0$.

Damit ist die Behauptung von Aufgabe 2 gezeigt.

Die Bundesrunde der 40. Mathematik-Olympiade

von Wolfgang Moldenhauer

Die Bundesrunde (4. Stufe) vom 13. bis 16. Mai 2001 in Magdeburg wurde für die 40. Mathematik-Olympiade durch das Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, die Hochschule Magdeburg-Stendal (FH), die Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg und den Mathematik-Olympiaden e.V. ausgerichtet. Schirmherr war der Ministerpräsident des Landes Sachsen-Anhalt, Herr Dr. Reinhard Höppner, der 1966 in Bulgarien und 1967 in Jugoslawien an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) teilnahm (Silber- bzw. Goldmedaille).

Die Schüler qualifizierten sich für diese Bundesrunde in ihrem Land durch Erfolge bei den vorhergehenden drei Stufen. Insgesamt haben sich in diesem Jahr ca. 100.000 Schüler an der 1. Stufe der Mathematik-Olympiade beteiligt.

Die besten 183 Schülerinnen und Schüler nahmen in Magdeburg teil. In fünf Altersgruppen (Kl. 8: 29 Starter, davon 5 aus Kl. 7, Kl. 9: 29 Starter, Klasse 10: 41 Starter, Klasse 11: 22 Starter, Klasse 12/13: 62 Starter, davon 40 aus Kl. 12) wurde um die besten Leistungen in zwei Klausuren zu je drei Aufgaben gestritten. Alle Aufgaben (ohne Lösungen) sind unter `http://www.mathematik-olympiaden.de` einsehbar. Dort wird auch auf die Jahresbände verwiesen, in denen Aufgaben, Lösungen und Berichte enthalten sind.

Die Jury verlieh 9 erste Preise, 26 zweite Preise und 37 dritte Preise. Drei Schüler erhielten Buchschecks der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 34 Teilnehmer eine Anerkennung, sieben Schüler Sonderpreise für die elegante Lösung einer Aufgabe, ein Schüler den Sonderpreis des Oberbürgermeisters und der jüngste Sieger einen Preis des Klettverlages. Ein Jahresabonnement der kanadischen Mathematik-Zeitschrift „Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem" wurde an fünfzehn Schüler vergeben. Weitere Informationen (z.B. auch Bilder) kann man unter `http://www.math.uni-magdeburg.de/schule/mo/40/` finden.

Für die elegante Lösung einer Aufgabe wurden an sechs Schüler Sonderpreise vergeben. Die prämierten Lösungen erscheinen im Heft 11 des Mathematik-Olympiaden e.V. (siehe `http://www.mathematik-olympiaden.de`)

Die Preisträger aller Klassenstufen größer gleich 9, die vom Alter her zum Start berechtigt sind, wurden für die IMO-Auswahlklausuren vorgeschlagen.

Ergebnisübersicht:

Land	Anzahl Starter	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Anerkennung	durchschn. Punkte
Baden-Württemb.	10	-	2	4	1	23,4
Bayern	11	3	3	4	1	30,6
Berlin	14	-	1	4	5	24,6
Brandenburg	15	1	3	2	4	23,9
Bremen	6	-	-	1	-	16,8
Hamburg	10	-	2	5	1	24,5
Hessen	13	1	4	3	4	25,6
Mecklenb.-Vorp.	11	-	2	2	2	22,7
Niedersachsen	9	-	1	-	-	13,8
Nordrhein-Westf.	12	2	1	2	5	24,7

Rheinland-Pfalz	9	-	1	1	1	21,6
Saarland	10	-	-	-	-	11,3
Sachsen	14	2	3	-	4	24,3
Sachsen-Anhalt	15	-	1	5	3	21,5
Schleswig-Holstein	9	-	1	-	-	16,2
Thüringen	15	-	1	4	3	22,8

Bemerkung: Pro Starter waren 40 Punkte erreichbar.

Die Unterkunft für Schüler und Betreuer erfolgte in der Jugendherberge „Magdeburger Hof" im Zentrum. Die Eröffnung, die Klausuren und die Korrekturen wurden in der gerade fertiggestellten Hochschule Magdeburg-Stendal (FH) unmittelbar neben dem Gelände der ehemaligen Bundesgartenschau (1999) durchgeführt. Zudem zeigte sich, wie auch bei den letzten Bundesrunden, das Wetter von der besten Seite.

Das Freizeitprogramm war reichhaltig. Neben einem Stadtrundgang auf den Spuren Ottos des Großen gab es eine Vorführung des Wireless LANet an der Hochschule. Ein Kinobesuch im CinemaxX war genauso im Programm wie ein Schach- und Skatturnier. Korrektoren und Koordinatoren konnten die ERAM (Endlagerstätte für Radioaktive Abfälle Morsleben) mit Einfahrt in den Schacht „Marie" besichtigen.

Weitere Angebote für die Schüler waren:

- Otto von Guericke: Vorstellen von Erfindungen und Experimenten Guerickes in der Lukasklause, danach Stadtrundgang auf den Spuren Guerickes
- Natur und Umwelt: Wanderung durch die Magdeburger Elbaue, in der die Wiederansiedlung von Bibern gelungen ist, die man mit etwas Glück auch beobachten kann
- Technik-Geschichte: Besuch im Technik-Museum Magdeburg, danach Besichtigung des Pretziener Wehrs Geschichte: Stadtrundgang mit Dombesichtigung, der im historischem Schulraum des Hegel-Gymnasiums und einer Aussicht „Über die Dächer von Magdeburg" endete
- Wissenschaft: Besuch des Fraunhofer Instituts und der Universität Magdeburg, Fakultäten für Mathematik und Informatik (u.a. mit TINA, einem Linux-Cluster aus 75 PC´s)
- Technisches Bauwerk I: Besichtigung der Bauten zum Wasserstraßenkreuz Elbe-Mittellandkanal
- Technisches Bauwerk II: Besichtigung des Gradierwerkes in Schönebeck-Salzelmen

Abgerundet wurde dieses reichhaltige Angebot durch einen festlichen, geselligen Abend im Hegel-Gymnasium am Dienstag. Neben der Festveranstaltung im Victoriasaal und einer Grillparty wurde im Laufe des Abends Musik, Aerobic, Ballspiele, Groteske, Kabarett, Bewegungs- und Sprachtheater, Malaktion, Ausstellungen und Markt dargeboten.

Am Mittwoch wurde in der Johanniskirche die feierliche Siegerehrung durchgeführt. Nach der Begrüßung durch den Vorsitzenden des Organisationskomitees Dr. Biallas sprach Herr Dr. Höppner sein Grußwort. Er zeichnete Herrn Prof. Dr. W. Engel (Rostock) für seine langjährigen Verdienste bei der Mathematik-Olympiade mit dem Verdienstkreuz des Landes Sachsen-Anhalt aus. In seinem Festvortrag „Die vielen Facetten der modernen Mathematik" machte Prof. Dr. R. Weismantel am Beispiel des Rundreiseproblems auf moderne Entwicklungen in der diskreten Optimierung aufmerksam. Für die Durchführung der Bundesrunde wurde stellvertretend Frau Fritzlar und Herrn Dr. Biallas herzlich gedankt. Das Landes-Akkordeon-Ensemble Sachsen-Anhalt umrahmte die Veranstaltung musikalisch. Herr Dr. Henning lud abschließend zur 41. Bundesrunde nach Hamburg ein.

Die Festschrift (Hrsg. Eckard Specht, Schutzgebühr DM 9,80) zur Bundesrunde der 40. Mathematik-Olympiade in Magdeburg, die u. a. alle 400 Aufgaben der ersten drei Olympiaden enthält, und ein Buch von Eckard Specht, Geometria - scientiae atlantis, 300 + Aufgaben zur Geometrie und zu Ungleichungen, (Schutzgebühr 10 Euro) sind über `http://www.math4u.de` bestellbar. Ferner liegt ein Heft „40 Jahre Mathematik-Olympiaden“ aus der Reihe Materialien, Heft 48, vor. (Bestelladresse: Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien, Heinrich-Heine-Allee 2-4, 99438 Bad Berka, Schutzgebühr DM 8).

Ich möchte nun zwei Aufgaben vorstellen, die die Anwendung des Dirichletschen Schufachschlusses nahe legen.

Aufgabe 401046 (die Zahl bedeutet: 40. Olympiade, Klassenstufe 10, 4. Stufe, Aufgabe 6) mit Lösungsbemerkungen**:**
Im Inneren eines Quadrates der Seitenlänge 12 cm seien 20 Punkte beliebig, aber so gewählt, dass keine drei auf derselben Geraden liegen. Beweisen Sie, dass es mindestens ein Dreieck gibt, dessen Ecken mit solchen Punkten übereinstimmen und dessen Flächeninhalt höchstens 8 cm^2 beträgt.
1. Lösungsskizze: Zunächst müssen die Schubfächer bereitgestellt werden. Das gegebene Quadrat wird dazu in neun kongruente Quadrate (die Schubfächer) der Seitenlänge 4 cm zerlegt. In mindestens einem dieser neun Quadrate müssen (wegen $9 \cdot 2 = 18$) nach dem Dirichletschen Schubfachschluss drei der vorgegebenen kollinearen Punkte liegen. Es verbleibt damit zu zeigen, dass jedes einem solchen Quadrat der Seitenlänge 4 cm einbeschriebene Dreieck einen Flächeninhalt hat, der höchstens 8 cm^2 beträgt. Dies war aber die Aufgabe 401016 der 1. Stufe (Bitte überlegen Sie sich die Lösung selbstständig.).
2. Lösungsskizze (redaktionell bearbeitete Lösung nach Carsten Moldenhauer, Thüringen, der für diese Lösung einen der erwähnten Sonderpreise erhielt)**:**
Man bezeichne einen der 20 Punkte mit P und verbinde P mit den 19 anderen Punkten. Da die 20 Punkte kollinear sind, kann man die 19 Punkte so untereinander verbinden, dass 18 Dreiecke entstehen, die sich nicht überschneiden. Die kann man z.B. tun, indem man einen der 19 Punkte (dieser sei Q) mit P verbindet und dann den Winkel von $\overline{PQ}$ zu den anderen Punkten mißt. Man verbindet dann nacheinander genau die Punkte, die die kleinste Differenz ihrer Winkel zu $\overline{PQ}$ aufweisen. Dadurch erhält man 18 Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt P. Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von 144 cm^2.
Angenommen, es gibt kein Dreieck mit einem Flächeninhalt von höchstens 8 cm^2. Dann hat jedes der 18 Dreiecke einen Flächeninhalt größer als 8 cm^2 . Die 18 Dreiecke haben also zusammen einen Flächeninhalt, der größer als $18 \cdot 8$ cm$^2 = 144$ cm^2 , also größer als der Flächeninhalt des Quadrates ist. Widerspruch! Die Annahme war also falsch und daher gilt die Behauptung.

Und nun zum Knobeln und Selbstlösen:
Aufgabe 401342:
Man bestimme die maximale Anzahl von Punkten, die in einem Rechteck mit den Seitenlängen 14 und 28 so untergebracht werden können, dass der Abstand zweier beliebiger dieser Punkte größer als 10 ist.

Bemerkungen zur Lösung findet man in Wurzel, Heft 7/01, S. 155-159 (siehe auch `http://www.wurzel.org`).

Die Seite für den Computer-Fan

Eine Regel zur Erzeugung von Primzahlen?

Schon seit den Zeiten der alten Griechen suchen die Mathematiker nach einer Regel zur Erzeugung von Primzahlen. Aber bis heute waren diese Bemühungen im wesentlichen vergeblich. Wir sind nun in der Lage, wenigstens eine „Näherungslösung“ für dieses Problem anzubieten.

Regel: Wähle eine beliebige Primzahl $p > 2$ und berechne für gerade Zahlen $g \geq 2$ die Summen $p + g^x$ für $x = 2, 3, 4, \dots$
Mindestens eine der Summen ist eine Primzahl.

Beispiele: Für $p = 7$, $g = 2$ ist $p + g^4 = 23$ (Primzahl).
Für $p = 43$, $g = 6$ ist $p + g^2 = 79$ (Primzahl).
Für $p = 43$, $g = 2$ ist $p + g^6 = 107$ (Primzahl).
Für $p = 67$, $g = 10$ ist $p + g^3 = 1067$ (Primzahl).

Aufgabe: Untersuche, ob die angegebene Regel alle Primzahlen $< 10\,000$ erzeugt. (H.F.)

Ein gelöstes und ein ungelöstes Problem

Es sei x eine ungerade und t eine beliebige natürliche Zahl.

1. Man weiß: Es gibt natürliche Zahlen $2^n - 1$, für die gilt: x^t ist ein Teiler von $2^n - 1$.

   Bestimme nun für $x^t = 7^2$ ($7^3, 7^4, 7^5$) mindestens drei Zahlen $2^n - 1$, die durch x^t teilbar sind.

   Beispiel: für $x^t = 7$ gilt: x^t ist Teiler von $2^3 - 1$, $2^6 - 1$, $2^9 - 1$, $2^{12} - 1$.

2. Man weiß nicht: Gibt es natürliche Zahlen $2^n - 1$, n eine Primzahl, für die gilt: x^t ist ein Teiler von $2^n - 1$? Untersuche mit dem Computer, ob man für die erste ungerade Quadratzahl 3^2 (also $x = 3, t = 2$) Zahlen $2^n - 1$, n Primzahl, angeben kann, die durch 3^2 teilbar sind. (H.F.)

Hinweis: Die Aufgaben für den Computer-Fan sind meist ohne Bezug auf einen speziellen Rechner oder ein spezielles Programm oder eine spezielle Programmiersprache gestellt. Ihr könnt selbst entscheiden, für welche Teile es sich lohnt, z.B. einen Taschenrechner oder ein Computeralgebra-System (z.B. DERIVE) einzusetzen oder ein eigenes kleines Programm (z.B. in Pascal) zu schreiben.
Ihr könnt Eure Lösungen auch einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines Computeralgebra-Systems oder eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am besten als Anhang einer eMail an die MONOID-Adresse: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`.
Die Lösungen werden jeweils im *übernächsten* Heft erscheinen, damit wir gegebenenfalls auch Teile eingesandter Lösungen veröffentlichen können.

Ortskurven im Dreieck (III)

Eine Anwendung zur dynamischen Geometrie am Personalcomputer

von Ingmar Rubin

Ortskurve vom Inkreismittelpunkt

Konstruktion der Ortskurve mit EUKLID

Die Winkelhalbierenden im $\triangle ABC$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt I, dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks. In EUKLID gibt es bereits einen fertigen Konstruktionsbefehl, welcher den Winkel zwischen zwei Geraden teilt (siehe auch Hilfe in EUKLID). Der Konstruktionstext für den Inkreismittelpunkt lautet :

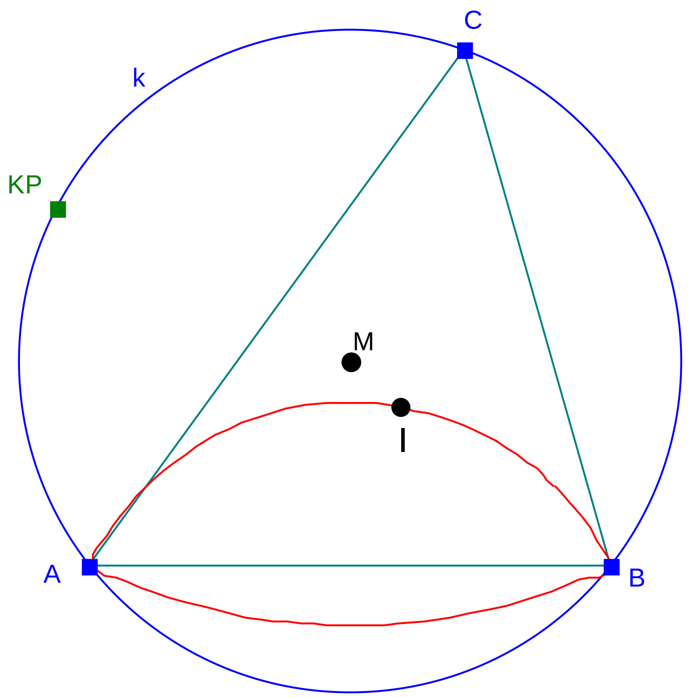


Abbildung 1: Ortskurve vom Inkreismittelpunkt im Programm EUKLID

```
M   ist ein freier Basispunkt
KP  ist ein freier Basispunkt
k   ist ein Kreis um M durch KP
A   ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
C   ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
B   ist ein Basispunkt, der an k gebunden ist.
s1  ist die Strecke   [ A ; C ]
s2  ist die Strecke   [ C ; B ]
s3  ist die Strecke   [ B ; A ]
g1  ist die Halbierende des Winkels ( C ; B ; A )
g2  ist die Halbierende des Winkels ( C ; A ; B )
I   ist der Schnittpunkt der Linien g4 und g3
OL2 ist eine Ortslinie des Punktes I, wenn C gezogen wird
```

Parameterdarstellung der Ortskurve vom Inkreismittelpunkt

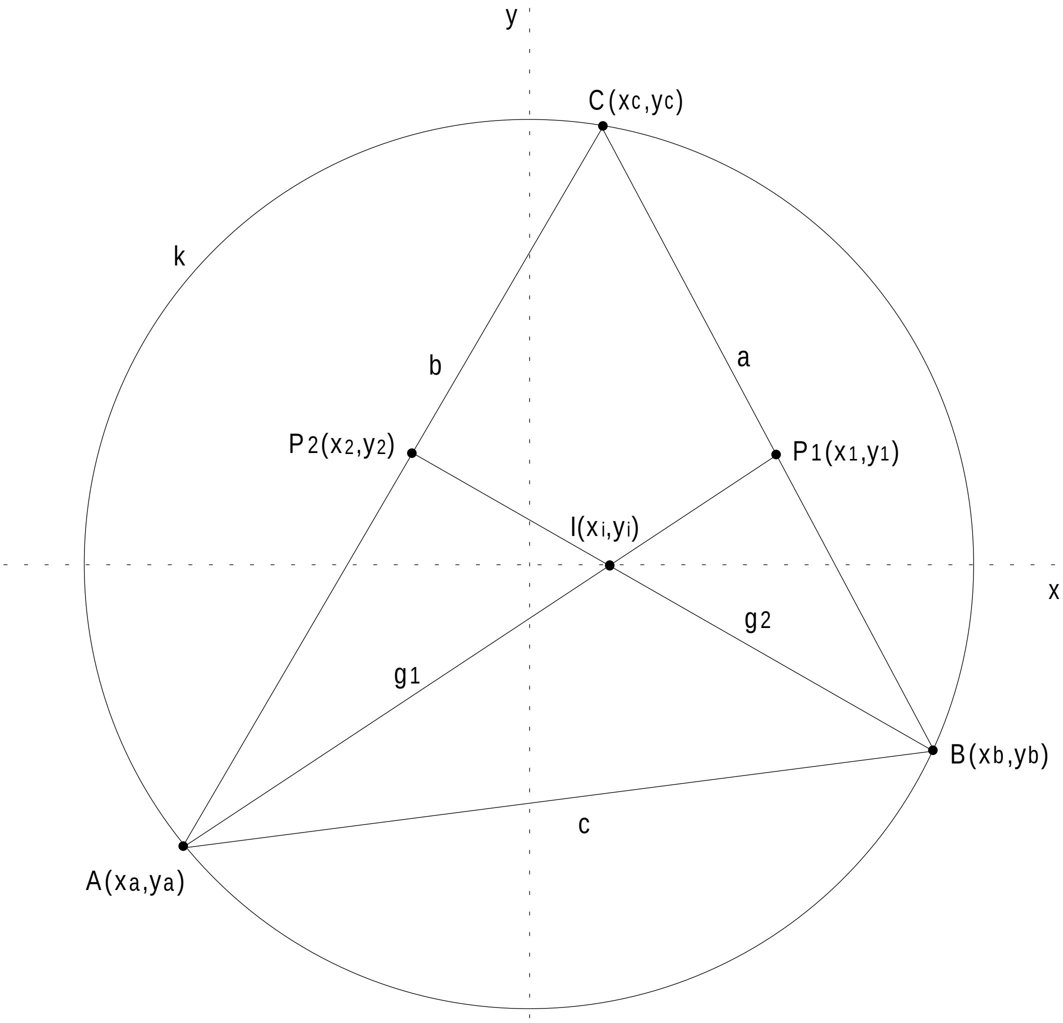


Abbildung 2: Lösungsskizze

Wir bezeichnen die Koordinaten der Punkte A, B, C mit :

$$A(x_a, y_a), \quad B(x_b, y_b), \quad C(x_c, y_c) \tag{1}$$

Um den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zu erhalten, benötigen wir die Geradengleichungen von g_1 und g_2. Als Basis für die Herleitung erinnern wir uns an den

Satz des Appolonius: *In einem Dreieck teilt die Winkelhalbierende eines Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*

Der Punkt $P_1(x_1, y_1)$ ist der Schnittpunkt der Winlelhalbierenden g_1 mit der Seite a. Er teilt die Strecke $a = \overline{BC}$ im Verhältnis λ_1.

$$x_1 = \frac{x_b + \lambda_1 \cdot x_c}{1 + \lambda_1}, \qquad y_1 = \frac{y_b + \lambda_1 \cdot y_c}{1 + \lambda_1}, \qquad \lambda_1 = \frac{c}{b} \tag{2}$$

Analog berechnet man die Koordinaten von $P_2(x_2, y_2)$ - dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden g_2 mit Seite b:

$$x_2 = \frac{x_a + \lambda_2 \cdot x_c}{1+\lambda_2}, \qquad y_2 = \frac{y_a + \lambda_2 \cdot y_c}{1+\lambda_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{c}{a} \tag{3}$$

Aus der Verbindung von Punkt A mit P_1 folgt die Geradengleichung g_1 (Zweipunkteform):

$$g_1: \quad \frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{-y_a + \frac{y_b + \lambda_1 y_c}{1+\lambda_1}}{-x_a + \frac{x_b + \lambda_1 x_c}{1+\lambda_1}} \tag{4}$$

Aus der Verbindung der Punkte B und P_2 folgt die Geradengleichnung der Winkelhalbierenden g_2 :

$$g_2: \quad \frac{y - y_b}{x - x_b} = \frac{-y_b + \frac{y_a + \lambda_2 y_c}{1+\lambda_2}}{-x_b + \frac{x_a + \lambda_2 x_c}{1+\lambda_2}} \tag{5}$$

Der Schnittpunkt zwischen g_1 und g_2 liefert die Koordinaten vom Inkreismittelpunkt:

$$g_1 = g_2: \quad x_i = \frac{a \cdot x_a + b \cdot x_b + c \cdot x_c}{a+b+c}, \quad y_i = \frac{a \cdot y_a + b \cdot y_b + c \cdot y_c}{a+b+c} \tag{6}$$

Um eine parameterabhäbgige Darstellung zu gewinnen, ersetzen wir die kartesischen Koordinaten durch ihre Polarkoordinaten.

$$x_a = R \cdot \cos[\alpha], \qquad y_a = R \cdot \sin[\alpha] \tag{7}$$
$$x_b = R \cdot \cos[\beta], \qquad y_b = R \cdot \sin[\beta] \tag{8}$$
$$x_c = R \cdot \cos[t], \qquad y_c = R \cdot \sin[t] \tag{9}$$

Die Länge der Dreiecksseiten folgt aus der Punktabstandsformel:

$$a = \sqrt{(R\cos[t] - R\cos[\beta])^2 + (R\sin[t] - R\sin[\beta])^2} \tag{10}$$
$$b = \sqrt{(R\cos[t] - R\cos[\alpha])^2 + (R\sin[t] - R\sin[\alpha])^2} \tag{11}$$
$$c = \sqrt{(-R\cos[\alpha] + R\cos[\beta])^2 + (-R\sin[\alpha] + R\sin[\beta])^2} \tag{12}$$

Setzen wir die Polarkoordinaten und Formeln für a, b, c in die Formel für die Schnittpunktkoordinaten $I(x_i, y_i)$ ein, ergibt sich die gewünschte Parameterdarstellung :

$$\begin{aligned} x_i(t) = {} & \Big(R\Big(\cos[\alpha]\sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\beta])} + \\ & \cos[t]\sqrt{-R^2(-1+\cos[\alpha-\beta])} + \\ & \sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\alpha])}\cos[\beta]\Big)\Big) \Big/ \\ & \Big(\sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\alpha])} + \sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\beta])} + \\ & \sqrt{-R^2(-1+\cos[\alpha-\beta])}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y(t) \;=\; & \left(R\left(\sqrt{-R^2(-1+\cos[\alpha-\beta])}\sin[t]+\sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\beta])}\right.\right. \\
& \left.\left.\sin[\alpha]+\sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\alpha])}\sin[\beta]\right)\right) \Big/ \\
& \left(\sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\alpha])}+\sqrt{-R^2(-1+\cos[t-\beta])}+\right. \\
& \left.\sqrt{-R^2(-1+\cos[\alpha-\beta])}\right)
\end{aligned}
$$

Parameterkurve für $\alpha = \pi$ und $\beta = 2\pi$

Für die Winkel $\alpha = \pi$ und $\beta = 2\pi$ vereinfacht sich die Parameterdarstellung wie folgt:

$$x_i(t) = \frac{\sqrt{R^2}\left(-\sqrt{-R^2(-1+\cos[t])}+\sqrt{R^2(1+\cos[t])}\right)}{\sqrt{2}R} \tag{13}$$

$$y_i(t) = \frac{\sqrt{2}R\sqrt{R^2}\sin[t]}{\sqrt{2}\sqrt{R^2}+\sqrt{-R^2(-1+\cos[t])}+\sqrt{R^2(1+\cos[t])}} \tag{14}$$

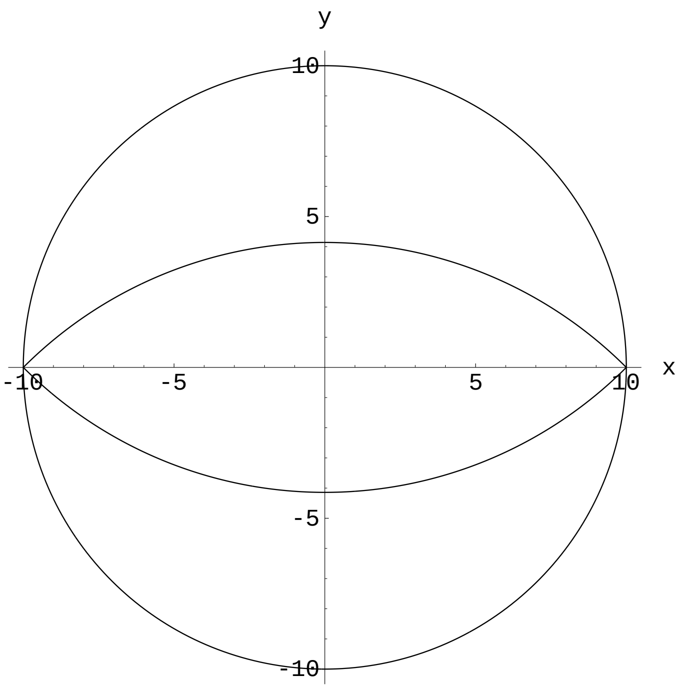
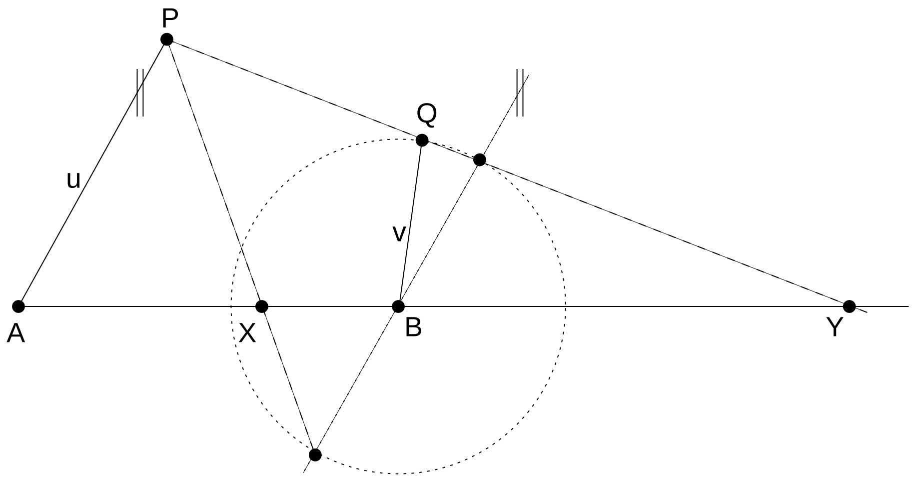


Abbildung 3: Ortskurve vom Inkreismittelpunkt für $\alpha = \pi, \quad \beta = 2\pi, \quad R = 10\,cm$

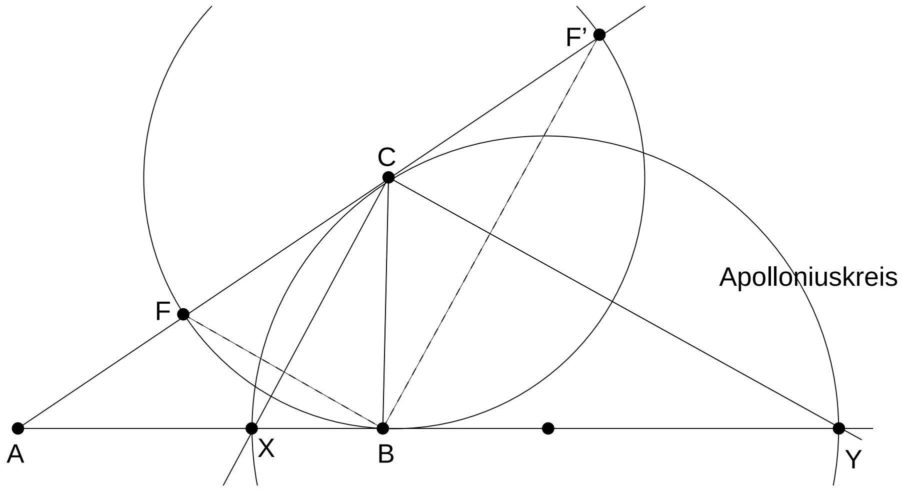
Lösung der Aufgabe zur harmonischen Teilung aus MONOID 67, S. 5

a) Für die Durchführung der in dem Artikel „Eine besondere Geometrie-Aufgabe“ von M. Mettler dargestellten Konstruktion hat man nach Konstruktion der Tangentenabschnitte AP und BQ noch die Strecke AB innerlich und äußerlich im Verhältnis $q = u : v = |AP| : |BQ|$ zu teilen. Nach dem 2. Strahlensatz führt folgende Konstruktion zum Ziel:



Es gilt: $|AX| : |XB| = u : v = |AY| : |YB|$.

b) Nach der Konstruktion von C über den Schnitt des Apolloniuskreises $k*$ mit dem Kreis k kann zur Kontrolle die Tatsache herangezogen werden, dass die Winkelhalbierenden des Innen- bzw. Außenwinkels bei C die gegenüber liegende Dreiecksseite AB harmonisch im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten $|AC|$ und $|BC|$ teilen, also durch die Punkte X bzw. Y gehen müssen:



Diese Tatsache ist leicht zu sehen, wenn man auf der Geraden AC von C aus nach beiden Seiten den Abstand $|BC|$ abträgt und so die Punkte F und F' erhält. In den Dreiecken FBC und $F'BC$ sind die Winkelhalbierenden Mittellote, stehen also auf BF bzw. BF' senkrecht. Auch zueinander sind sie orthogonal; somit gilt $BF||CY$ und $BF'||CX$. Der Rest folgt mit dem 1. Strahlensatz. Ekkehard Kroll

Lösungen der Mathespielereien aus dem MONOID 67

Drei Seiten für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 - 7)

Die Rechnungen müssen alle stimmen

In der folgenden Aufgabe stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern:

k	m	n	+	a	b	=	c	k	d
	+			+				+	
	b	b	+	k	l	=		n	b
k	e	d	+	d	b	=	c	e	m

Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, dass senkrecht und waagrecht alle Rechnungen korrekt sind.

(Marcel Kuhn, Kl. 6, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey)

Lösung:

1	3	5	+	8	4	=	2	1	9
	+			+				+	
	4	4	+	1	0	=		5	4
1	7	9	+	9	4	=	2	7	3

Der größere Bruder

Max und Moritz sammeln zusammen Nüsse und wollen sie hinterher verteilen. Da sagt Max: Gib mir doch bitte noch eine Nuss, damit wir beide gleich viele haben. Darauf antwortet Moritz: Da ich der Größere bin, steht mir eigentlich das Doppelte zu. Dafür musst du mir noch eine Nuss geben. Wie viele Nüsse haben sie gesammelt?

Max	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Moritz	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Max - 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Moritz + 1	4	5	6	7	8	9	10	11	12

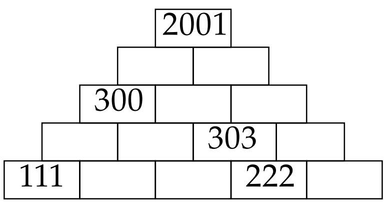
1. Lösungsweg:
Aus der Bitte von Max folgt, dass Moritz um 2 Nüsse mehr gesammelt hat als Max. Durch Probieren erhält man nun, dass Max 5 und Moritz 7 Nüsse zu Beginn hatten (s. die Tabelle). Hätte Max zu Anfang mehr als 5 Nüsse, so wäre Max - 1 größer als die Hälfte von Moritz + 1.

2. Lösungsweg: Angenommen Max hat x und Moritz hat y Nüsse gesammelt, so muss $x+1=y-1$ und $y+1=2\cdot(x-1)$ sein. Dies gilt genau dann, wenn $x+2=y$ und $y=2x-3$ ist. Daraus folgt, daß $x+2=2x-3$ ist. Also lautet die Lösung $x=5$ und $y=7$.

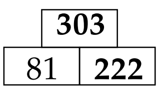
Pyramide

In dieser Pyramide ist die Zahl jedes oberen Bausteins die Summe der Zahlen der beiden darunterliegenden Bausteine. Ergänze die fehlenden Zahlen!

(Helmut Rössler)

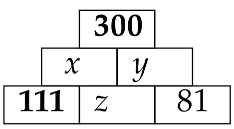


Lösung:



Figur 1

Die fehlende Zahl in dem in Figur 1 abgebildeten Pyramidenstück kann direkt berechnet werden ($303-222=81$). Wenn wir nun die fehlenden Zahlen in dem Pyramidenstück in Figur 2 mit x, y und z bezeichnen, erhalten wir folgende Gleichungen:



Figur 2

$$x+y = 300 \tag{1}$$
$$111+z = x \tag{2}$$
$$z+81 = y. \tag{3}$$

Wir setzen die linken Seiten der Gleichungen (2) und (3) für x und y in Gleichung (1) ein und erhalten $111 + z + z + 81 = 300$. Subtraktion von 111 und 81 ergibt $2 \cdot z = 108$. Also ist $z = 54$. Aus Gleichung (2) ergibt sich dann $x = 165$ und aus Gleichung (3) $y = 135$.

2001				
b	c			
300	a	d		
165	135	**303**	e	
111	54	81	**222**	f

Figur 3

Nun müssen wir noch die in Figur 3 mit a bis f bezeichneten Zahlen ausrechnen. a und b kann man nacheinander als Summen der jeweils darunterliegenden Zahlen berechnen, die übrigen ergeben sich - beginnend mit c - nacheinander als Differenz der darüberliegenden und der danebenstehenden Zahl. Die komplette Lösung ist also durch die Einträge in Figur 4 gegeben.

2001				
738	1263			
300	438	825		
165	135	**303**	522	
111	54	81	**222**	300

Figur 4

Quersumme

Gesucht wird eine zweistellige Zahl mit folgender Eigenschaft: Verdoppelt man die Zahl, so bleibt die Quersumme unverändert.

Gibt es überhaupt eine solche Zahl? Wenn ja, welche Quersumme hat sie?

Gibt es vielleicht mehrere zweistellige Zahlen mit dieser Eigenschaft? Wenn ja, wie viele? (Christoph Sievert)

Lösung:

Gesucht wird eine Zahl $z = 10 \cdot x + y$, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, mit $q = Quersumme\ von\ z = x + y = Quersumme\ von\ (2 \cdot z)$.

Damit sich die Quersumme nicht ändert, muss sich beim Verdoppeln von z ein Überschlag ergeben; d.h. entweder die Endziffer y oder die Zehnerziffer x oder beide müssen größer als 4 sein. Wir haben also drei Fälle zu betrachten:

1. Fall: Überschlag nur bei der Endziffer: $5 \leq y \leq 9$, $1 \leq x \leq 4$.
   Aus $x + y = q$ folgt durch Multiplikation mit 2:
   $$2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot q. \qquad (1)$$
   Andererseits lautet nach dem Verdoppeln die Einerziffer: $2 \cdot y - 10$ und die Zehnerziffer: $2 \cdot x + 1$. Bei konstanter Quersumme muss also gelten:
   $$2 \cdot x + 1 + 2 \cdot y - 10 = q. \qquad (2)$$
   Die Gleichung (2) lässt sich umformen in $2 \cdot x + 2 \cdot y = q + 9$. Also besagt das Gleichungssystem aus (1) und (2), dass $2 \cdot q = q + 9$ sein muss. Dies ist genau dann lösbar, wenn $q = 9$ ist.
2. Fall: Überschlag nur bei der Zehnerziffer: $0 \leq y \leq 4$, $5 \leq x \leq 9$.
   Dieser Fall führt auf dasselbe Gleichungssystem und somit auf die selbe Bedingung $q = 9$.
3. Fall: Überschlag bei Einer- und Zehnerziffer: $5 \leq y \leq 9$, $5 \leq x \leq 9$.
   Gleichung (1) bleibt unverändert:
   $$2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot q. \qquad (1)$$
   Beim Verdoppeln ergibt sich: $2 \cdot y - 10$ als neue Einerziffer, $(2 \cdot x + 1) - 10$ als neue Zehnerziffer und 1 als neue Hunderterziffer, also
   $$1 + (2 \cdot x + 1) - 10 + 2 \cdot y - 10 = q. \qquad (2)$$
   Gleichung (2) kann umgeformt werden in $2 \cdot x + 2 \cdot y = q + 18$. Hieraus ergibt sich zusammen mit Gleichung (1), dass $q = 18$ sein muss.

Ergebnis: Alle zweistelligen Zahlen mit der Quersumme 9 bzw. 18 erfüllen die Bedingung; es sind dies also alle zweistelligen Zahlen, die durch 9 teilbar sind: $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99$; insgesamt zehn Zahlen.

Knobelei mit Potenzen

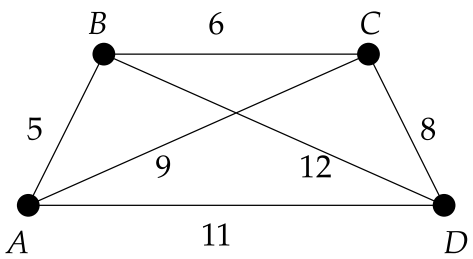
Für welche natürlichen Zahlen x ist $2^x + x^2$ ein Vielfaches von 10?
Hinweis: Versuche, die Lösungen durch Überlegung zu finden. Achte auf die Endziffern der beiden Summanden und deren Summe. Rechnen führt nicht weit, weil die Zahlen 2^x sehr schnell sehr groß werden. (H.F.)

Lösung:

Die Potenzen 2^x, $x = 1, 2, 3, \ldots$ haben die periodisch sich wiederholenden Einerziffern $2, 4, 8, 6$.

1. Die Endziffer von 2^x sei 2. Dann sollte x^2 die Einerziffer 8 haben. Nun hat aber 2^x die Einerziffer 2 nur für $x = 1, 5, 9, 13, \ldots$. Für diese x ist x^2 ungerade und hat folglich nicht die Endziffer 8. Also finden sich unter diesen x keine Lösungen.
2. Die Endziffer von 2^x sei 4. Das ist der Fall für $x = 2, 6, 10, 14, 18, \ldots$. Aber nur für $x = 6, 14, 26, 34, 46, \ldots$ hat x^2 jeweils die Einerziffer 6 - und diese letzten Zahlen x sind daher Lösungen.
3. Die Endziffer von 2^x sei 8. Dann ist $x = 3, 7, 11, 15, \ldots$, und die ungerade Zahl x^2 hat niemals die Endziffer 2.
4. Die Endziffer von 2^x ist 6 für $x = 4, 8, 12, 16, \ldots$. Die Einerziffer der zugehörigen Zahlen x^2 ist aber nur dann 4, wenn $x = 8, 12, 28, 32, \ldots$ ist; diese letzten Zahlen x sind demnach Lösungen.
5. Es sei a eine der Zahlen $6, 8, 12$ oder 14. Aus 2. und 4. folgt dann, dass alle Zahlen $x = a + 20, a + 40, a + 60, \ldots$ Lösungen sind, und dies sind auch alle.

Kürzester Weg



Ein Wanderer will von A-Stadt aus jedes der drei Dörfer B, C, D besuchen und am Schluss nach A-Stadt zurückkehren. Natürlich soll seine Route möglichst kurz sein. Wie sollte er seinen Weg wählen?
(Jeder Ort ist mit jedem anderen Ort durch einen nicht notwendig geradlinigen Weg verbunden, dessen Länge Du der Abbildung entnimmst.) (H.F.)

Lösung:

Es kommen nur Wege in Betracht, auf denen er jedes Dorf genau einmal besucht. Davon gibt es sechs verschiedene, von denen jeweils zwei gleich lang sind (warum?).

Weg:	$ABCDA$	$ABDCA$	$ACBDA$	$ACDBA$	$ADBCA$	$ADCBA$
Länge:	30	34	38	34	38	30

Kürzester Weg ist $ABCDA$, den man natürlich auch in umgekehrter Richtung wandern kann.

Der Mittlere

Beim Training stellt Herr Müller die Sportler in eine Reihe und fordert den Mittleren auf herauszutreten, doch es tut sich nichts. Keiner meldet sich. Warum wohl?

Antwort: Es ist eine gerade Anzahl von Sportlern da, also gibt es keinen Mittleren; in der Mitte stehen 2 Sportler.

Neue Mathespielereien

Eine Seite für Mathis (Schüler/innen der Kl. 5 – 7)

Wer hält sich einen Goldfisch?

Das nachfolgende Rätsel soll von der Idee her eine Logelei Einsteins gewesen sein, der der Meinung war, höchstens zwei Prozent der Weltbevölkerung wären in der Lage, es zu lösen. Gehörst Du dazu?

Durch logische Verknüpfung kommt man dem Rätsel auf die Spur, welche verschiedenen Haustiere in den fünf Häusern, die alle eine andere Farbe haben, gehalten werden. In jedem Haus wohnt ein Eigentümer mit einer anderen Nationalität; jeder von ihnen hat eine klare Vorliebe für ein bestimmtes Getränk. Sie unterscheiden sich auch alle in der Automarke, die sie fahren. Hier nun die Hinweise:

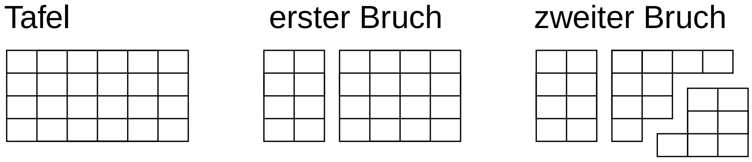
1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Der Schwede hält einen Hund.
3. Der Däne trinkt gerne Tee.
4. Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
5. Der Besitzer des grünen Hauses trinkt gerne Kaffee.
6. Der Mercedesfahrer hält sich einen Vogel.
7. Der Milchtrinker wohnt im mittleren Haus.
8. Der Besitzer des gelben Hauses fährt Volvo.
9. Im ersten Haus wohnt der Norweger.
10. Der VW-Fahrer wohnt neben dem, der eine Katze hat.
11. Der Mann, der sich ein Pferd hält, sieht auf den Volvo seines Nachbarn.
12. Der BMW-Fahrer trinkt gerne Bier.
13. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Deutsche fährt einen Opel.
15. Der Nachbar des VW-Fahrers trinkt Wasser.

(Gerhard Hoffmann)

Schokolade zerteilen

Eine Tafel Schokolade soll in ihre 24 Teilstücke zerbrochen werden. Ein Bruch muß entlang der Rillen von einem Randpunkt zu einem anderen Randpunkt erfolgen. Dabei darf auch „um die Ecke“ gebrochen werden. Bereits entstandene Teilstücke dürfen nicht aufeinandergelegt oder sonstwie gleichzeitig gebrochen werden. Wie oft muß man mindestens brechen, bis die Tafel ganz zerlegt ist?

Beispiel:



(Wolfgang J. Bühler)

Dreieckszerlegung

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit verschieden langen Seiten a, b, c. Konstruiere auf der Seite AB einen Punkt D so, dass die Verbindungsstrecke CD das Dreieck ABC in zwei umfangsgleiche Teildreiecke ADC, BCD zerlegt.

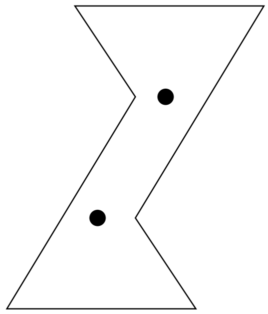
Wie lang ist die Strecke AD? (H.F.)

Neue Aufgaben

Kl. 8-13

Aufgabe 764. Familie G. feiert Advent wie üblich mit einem Adventskranz, an dem am ersten Adventssonntag eine Kerze brennt, am zweiten zwei, usw. Tochter Jenny möchte, dass am Ende alle Kerzen gleich weit abgebrannt sind. Ihre Schwester Nadine erklärt ihr, dass das nicht möglich sei. Warum hat Nadine recht?
Hätte die Adventszeit n Wochen ($n \in \mathbb{N}$), so wäre das Problem für gewisse n lösbar; für welche? (Jutta Gonska)

Aufgabe 765. Für die Gemälde der modernen Künstlerin Ursula Molinera soll ein eigenes Ausstellungsgebäude errichtet werden. Dabei soll jede der insgesamt 14 Stilepochen der Künstlerin auf einer eigenen Ausstellungswand dokumentiert werden. Der vorgesehene Leiter der Einrichtung, Dr. Eric Lindon, will die Ausstellung durch eine Videokamera in der Mitte des Gebäudes überwachen lassen, nachdem er erfahren hat, dass das Gebäude aus einem einzigen Raum bestehen wird. Arthur Forrester, ein Freund des mit dem Bau beauftragten Architekten, macht ihn darauf aufmerksam, dass dies bei unkonventioneller Gestaltung des Raums möglicherweise nicht ausreicht, z.B. schon bei einem Raum mit nur sechs Wänden wie dem in der Skizze wären mindestens zwei Kameras erforderlich.



Wie viele Kameras muss man vorsehen, damit bei 14 Wänden auf jeden Fall der ganze Raum kontrollierbar ist? Was ist die allgemeine Lösung bei n Wänden?
Bemerkung: Wir nehmen an, dass eine Videokamera nach allen Seiten „sieht“ und dass es keine Säulen oder ähnliches gibt, die die Sicht versperren.
(Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 766.

a) Teile ein Quadrat in acht spitzwinklige Dreiecke.
b) Zeige, dass sich ein Quadrat nicht in weniger als acht spitzwinklige Dreiecke teilen lässt. (Wolfgang J. Bühler)

Aufgabe 767. Eine ungewöhnliche Rechnung
Frau Meier kauft vier Artikel, von denen jeder einen anderen Preis hat. Ein Artikel kostet 1 Euro; ein weiterer kostet doppelt so viel wie der billigste Artikel.
Bei der Berechnung des Gesamtpreises tippt der Verkäufer versehentlich die Multiplikationstaste seines Taschenrechners anstelle der Additionstaste, und er erhält $6{,}75$ Euro.
Frau Meier protestiert nicht - sie hat im Kopf addiert und den Gesamtpreis berechnet, und sie ist ebenfalls auf $6{,}75$ Euro gekommen.
Wieviel kosten die Artikel? (H.F.)

Aufgabe 768.
Es sei $z = \dfrac{2001}{2002}$.
Der Wert des unendlichen Produkts
$$(1 + z + z^2 + \cdots + z^9) \cdot (1 + z^{10} + z^{20} + \cdots + z^{90}) \cdot (1 + z^{100} + z^{200} + \cdots + z^{900}) \cdots$$
ist eine demnächst häufig benutzte ganze Zahl. Wie heisst sie? (H.F.)

Gelöste Aufgaben aus dem MONOID 67

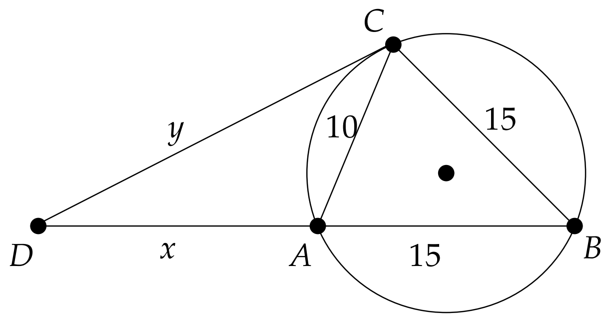
Kl. 8-13

Aufgabe 757. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit den Seitenlängen $BC = BA = 15$ und $AC = 10$. Die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC in C schneidet AB in D. Berechne die Länge von DA. (Hans Engelhaupt)

Lösung:
Sei $AD = x$ und $CD = y$.
Laut Sehnen-Tangentensatz gilt:

$$y^2 = x \cdot (x + 15), \qquad (*)$$

sowie $\angle DCA = \angle CBA$ (Sehnen-Tangentenwinkel). Also sind die Dreiecke DAC und DCB ähnlich.



$$\Rightarrow x : 10 = y : 15 \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}5 \cdot x.$$

In $(*)$ eingesetzt folgt: $2{,}25 \cdot x = x + 15 \quad \Rightarrow \quad x = 12$.

Aufgabe 758. Eins-Zwei-Drei.
Gesucht sind alle Zahlen a und b, für die gilt

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{ab} \quad \text{und} \quad \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{ab} \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

(Klaus Ronellenfitsch, Leibniz-Gymnasium Östringen)

Lösung: Multiplikation der Gleichungen mit dem Hauptnenner $a \cdot b$ ergibt die Gleichungen $b + 2a = 3$ und $3b + 2a = 1$.
Auflösen nach $2a$ und Gleichsetzen ergibt $3 - b = 1 - 3b$, also $2b = -2$ bzw. $b = -1$.
Demnach sind $a = 2$ und $b = -1$ die einzigen Zahlen, die beide Gleichungen erfüllen.

Aufgabe 759. Gibt es Vielfache von 49, deren Ziffern sämtlich gleich sind? (H. F.)

Lösung: Es sei $z_n = 111\ldots1$ mit n Ziffern.
Falls es eine Lösung gibt, so ist sie von der Form $d \cdot z_n$ mit $1 \leq d \leq 9$.
Ist $d = 7$, so ist die Zahl z_n durch 7 teilbar. Wir untersuchen daher nur, ob es Zahlen z_n gibt, die durch 7 teilbar sind. Durch Probieren finden wir, dass $z_6 = 111\,111 = 7 \cdot 15\,873$ ist, also durch 7 teilbar ist. Es ist

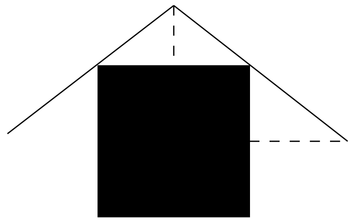
$$\begin{aligned} z_{12} &= 111\,111\,111\,111 = 111\,111 \cdot 10^6 + 111\,111 = 111\,111 \cdot 1\,000\,001 = \\ &= 7 \cdot 15\,873 \cdot 1\,000\,001; \end{aligned}$$

also ist z_{12} durch 7 und somit $7 \cdot z_{12}$ durch 49 teilbar. Genauso sind auch die Zahlen $7 \cdot z_{18}$, $7 \cdot z_{24}$, $7 \cdot z_{30}$ usw. durch 49 teilbar.

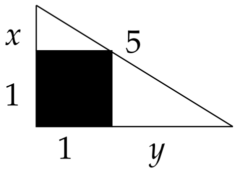
<u>Antwort:</u> Es gibt unendlich viele Vielfache von 49, deren Ziffern sämtlich gleich sind.

Aufgabe 760. Ein Quadrat in einer Raute.
Einem Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm ist eine Raute mit der Seitenlänge 5 cm umbeschrieben.
Zeige: Die Fläche der Raute ist mehr als dreimal so groß wie die Fläche des Quadrates.

(Klaus Ronellenfitsch)



Lösung:



Es gilt: $\frac{x}{1} = \frac{1}{y}$ (Ähnlichkeit) (1)

und $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 25$ (Pythagoras). (2)

Aus (1) folgt $xy = 1$, (3)

aus (2) $(x^2 + y^2 + 2) + 2(x+y) = 25$. (4)

Substitution $z = x + y$ ergibt $z^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2$ (wegen (3)) und damit in Gleichung (4) $z^2 + 2z - 25 = 0$ mit der positiven Lösung $z = -1 + \sqrt{26} > 4$.
Ist R die Fläche der Raute und Q die Fläche des Quadrats, so gilt:

$$\frac{R}{4} = \frac{(x+1)(y+1)}{2} = \frac{xy + x + y + 1}{2} = \frac{1 + z + 1}{2} = \frac{2+z}{2} \quad \text{und} \quad \frac{Q}{4} = 1,$$

also $\frac{R}{Q} = \frac{2+z}{2} > 3,$ w.z.b.w.

Aufgabe 761. Der Mantel eines Kreiskegels mit der Höhe von 15 cm wird durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen in drei gleich große Teile zerlegt. Welchen Abstand haben diese Ebenen von der Spitze?

Lösung: Es seien $r > r' > r''$ die Radien, $SA = s > SA' = s' > SA'' = s''$ die Erzeugenden und $SP = h > SP' = h' > SP'' = h''$ die Höhen der drei Kegel (siehe Abbildung).
Aus den Strahlensätzen folgen:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s} = x \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \frac{h''}{h} = \frac{r''}{r} = \frac{s''}{s} = y. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgen

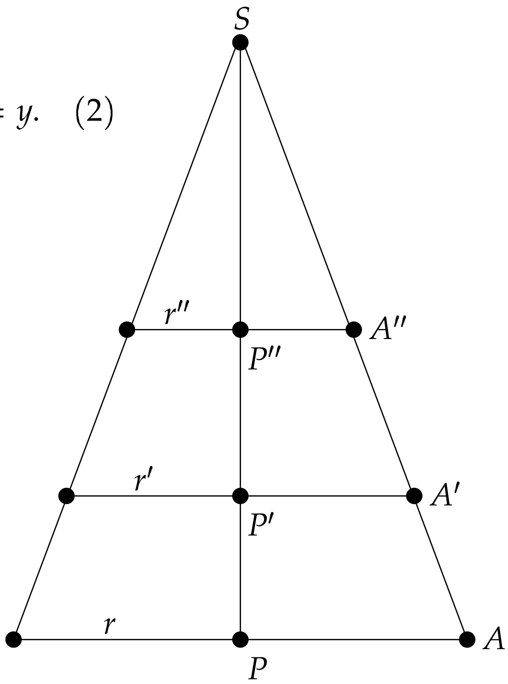
$$h' = 15x \quad (3) \qquad \text{und} \qquad h'' = 15y. \quad (4)$$

Für die Mantelflächen gilt:

$$M' = \frac{2}{3}M \quad (5) \qquad \text{und} \qquad M'' = \frac{1}{3}M. \quad (6)$$

Aus (5) folgt $\frac{2}{3} = \frac{M'}{M} = \frac{\pi r' s'}{\pi r s} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{s'}{s} = x^2;$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$



Mit (3) folgt $\quad h' = 15 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 5 \cdot \sqrt{6}\,.$

Aus (6) folgt $\quad \frac{1}{3} = \frac{M''}{M} = \frac{\pi\, r'' s''}{\pi\, r\, s} = \frac{r''}{r} \cdot \frac{s''}{s} = y^2\,; \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$

Mit (4) folgt $\quad h'' = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 5 \cdot \sqrt{3}\,.$

Probe: Angenommen, der Radius des Kegels ist r, so folgt aus (1), dass

$r' = x\,r = r \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$ und $s' = s \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow M' = \pi\, r' s' = \pi\, rs \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi\, rs = \frac{2}{3} \cdot M.$

Aufgabe 762. Zeige: Eine Zahl von der Form $49n - 2$ kann für keine natürliche Zahl n das Produkt zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen sein. (MM)

Lösung: Wären x und $x + 1$ die aufeinander folgenden Zahlen, so müsste gelten

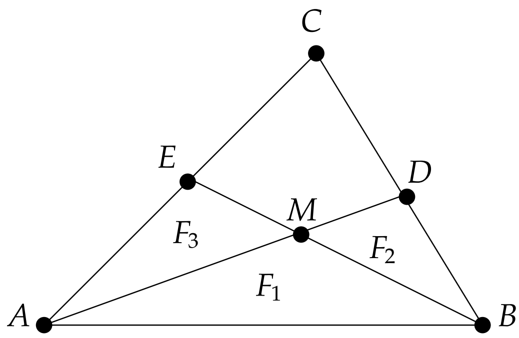
$$x \cdot (x + 1) = 49n - 2.$$

Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-49n + 2) = 196n - 7 = 7 \cdot (28n - 1).$$

Soll es eine ganzzahlige Lösung geben, so muss Δ eine Quadratzahl sein. Der Faktor 7 müsste daher zum Quadrat erscheinen, also müsste $28n - 1$ durch 7 teilbar sein. $28n$ ist durch 7 teilbar, 1 aber nicht. Also ist $28n - 1$ nicht durch 7 teilbar.

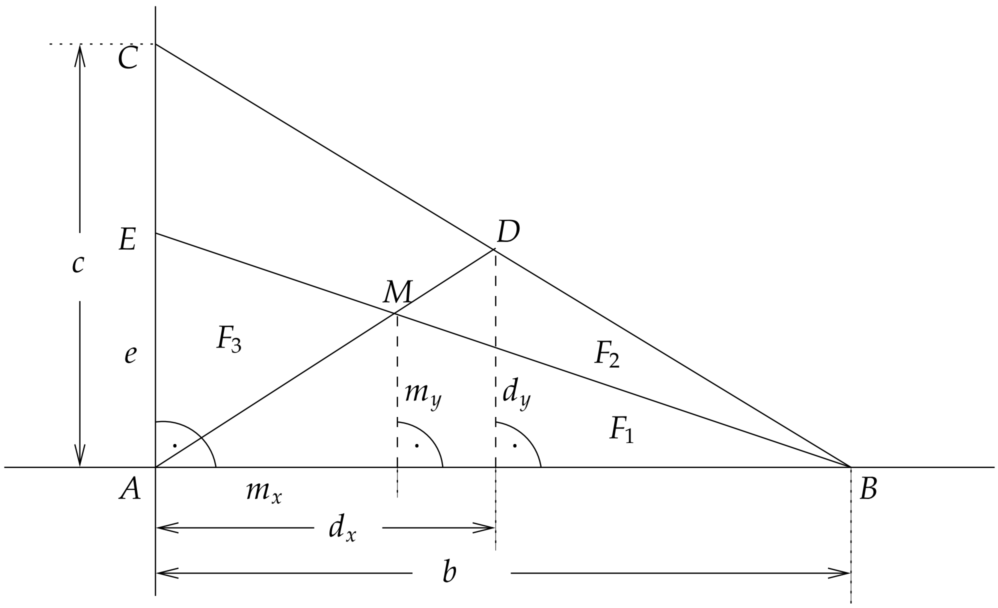
Aufgabe 763.
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC, ein Punkt D auf BC mit $D \neq B, C$ und ein Punkt E auf AC mit $E \neq A, C$ (siehe Skizze). M sei de r Schnittpunkt von BE und AD. Kann man den Flächeninhalt von ΔABC berechnen, wenn die Flächeninhalte von ΔABM, ΔAME und ΔBMD bekannt sind?
(Kerstin Bauer, Kl. 12, Kaiserslautern)



Lösung der Aufgabenstellerin: Der Flächeninhalt von ΔABC lässt sich aus den Flächen F_1, F_2, und F_3 nach folgender Formel berechnen:

$$F_{ABC} = F_1 \cdot \frac{(F_1 + F_2)(F_1 + F_3)}{F_1^2 - F_2 F_3}$$

Beweis: Durch eine Scherung verändern sich bekanntlich die Größen von Vielecksflächen nicht. Also kann ich, ohne etwas an der Aufgabenstellung zu verändern, eine Scherung in Richtung der Geraden AB durchführen und zwar derart, dass der Winkel $\angle CAB = 90°$ wird. Weiterhin wähle ich anschließend ein Koordinatensystem mit A als Ursprung und der Geraden AB als x-Achse. Die y-Achse wird so orientiert, dass die y-Komponente von C positiv wird. Das Ausgangsdreieck geht also in folgendes rechtwinklige Dreieck über:



Skizze des gescherten Dreiecks

Die Punkte haben hiernach folgende Koordinaten: $A(0/0)$, $B(b/0)$, $C(0/c)$, $D(d_x/d_y)$, $E(0/e)$, $M(m_x/m_y)$.

I) Bestimmung von e:

$$F_1 + F_3 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot e \quad \Rightarrow \quad e = \frac{2}{b} \cdot (F_1 + F_3).$$

II) Bestimmung von d_y:

$$F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot d_y \quad \Rightarrow \quad d_y = \frac{2}{b} \cdot (F_1 + F_2).$$

III) Bestimmung von m_y:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot m_y \quad \Rightarrow \quad m_y = \frac{2}{b} \cdot F_1.$$

IV) Bestimmung der Geradengleichung der Geraden BE:

$$y = -\frac{e}{b} \cdot x + e = -x \cdot \frac{2}{b^2} \cdot (F_1 + F_3) + \frac{2}{b} \cdot (F_1 + F_3).$$

V) Bestimmung von m_x (M liegt auf der Geraden BE):

$$-m_x \cdot \frac{2}{b^2} \cdot (F_1 + F_3) + \frac{2}{b} \cdot (F_1 + F_3) = m_y = \frac{2}{b} \cdot F_1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{b} \cdot m_x \cdot (F_1 + F_3) = 2 \cdot F_1 + 2 \cdot F_3 - 2 \cdot F_1 \quad \Leftrightarrow \quad m_x = \frac{b \cdot F_3}{F_1 + F_3}.$$

VI) Bestimmung der Geradengleichung AM:

$$y = a \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot m_x = m_y \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{m_y}{m_x} = \frac{2 \cdot F_1 \cdot (F_1 + F_3)}{b^2 \cdot F_3}$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2 \cdot F_1 \cdot (F_1 + F_3)}{b^2 \cdot F_3} \cdot x.$$

VII) Bestimmung von d_x (D liegt auf der Geraden AM):

$$d_x \cdot a = d_y \quad \Leftrightarrow \quad d_x = \frac{d_y}{a} = \frac{F_3 \cdot (F_1 + F_2) \cdot b}{F_1 \cdot (F_1 + F_3)}.$$

VIII) Bestimmung von $c = y$-Achsenabschnitt der Geraden BD:

$$y = k \cdot x + c \quad \text{mit } k = \frac{d_y}{d_x - b} = \frac{2 \cdot (F_1 + F_2) \cdot F_1 \cdot (F_1 + F_3)}{b^2 \cdot (F_2 \cdot F_3 - F_1{}^2)}$$

Die Division durch $d_x - b$ ist unkritisch, da $d_x - b < 0$ ist.

$$k \cdot b + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -k \cdot b = \frac{2 \cdot (F_1 + F_2) \cdot F_1 \cdot (F_1 + F_3)}{b \cdot (F_1{}^2 - F_2 \cdot F_3)}.$$

IX) Bestimmung des Flächeninhaltes von ΔABC:

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{2 \cdot (F_1 + F_2) \cdot F_1 \cdot (F_1 + F_3)}{b \cdot (F_1{}^2 - F_2 \cdot F_3)} = F_1 \cdot \frac{(F_1 + F_2) \cdot (F_1 + F_3)}{F_1{}^2 - F_2 \cdot F_3}.$$

Abänderungsvorschlag (E.Kroll):
Wegen der Parallelität der auftretenden Höhen kann man die Schritte IV bis VIII durch eine dreimalige Anwendung des 2. Strahlensatzes ersetzen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\frac{m_x}{d_x} &= \frac{m_y}{d_y}, \quad \text{also} \quad d_x = \frac{m_x \cdot d_y}{m_y};\\
\frac{b - m_x}{b} &= \frac{m_y}{e}, \quad \text{also} \quad m_x = b - \frac{b \cdot m_y}{e} = \frac{b \cdot e - b \cdot m_y}{e};\\
\frac{b - d_x}{b} &= \frac{d_y}{c}, \quad \text{also} \quad c = \frac{b \cdot d_y}{b - d_x} = \frac{b \cdot d_y \cdot m_y}{b \cdot m_y - d_y \cdot m_x} = \frac{e \cdot d_y \cdot m_y}{e \cdot (m_y - d_y) + d_y \cdot m_y}.
\end{aligned}$$

Mit den schon errechneten Formeln für e, d_y und m_y aus I bis III folgt:

$$c = \frac{2}{b} \cdot \frac{(F_1 + F_3) \cdot (F_1 + F_2) \cdot F_1}{(F_1 + F_3) \cdot (F_1 - F_1 - F_2) + (F_1 + F_2) \cdot F_1} = \frac{2}{b} \cdot \frac{F_1 \cdot (F_1 + F_2) \cdot (F_1 + F_3)}{F_1{}^2 - F_2 \cdot F_3}.$$

Also ist $\quad F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = F_1 \cdot \frac{(F_1 + F_2) \cdot (F_1 + F_3)}{F_1{}^2 - F_2 \cdot F_3}$.

Lösung zur Aufgabe **Zufall oder nicht?** auf S. 5 in diesem Heft:
Für die n-te Zeile gilt

$$\begin{aligned}
28 \cdot 10^n = 28 \cdot (10^n - 1) + 28 &= \underbrace{(99\ldots9)}_{n \text{ Ziffern } 9} \cdot 28 + 28\\
&= \underbrace{(11\ldots1)}_{n \text{ Ziffern } 1} \cdot 7 \cdot 4 \cdot n9 + 28\\
&= \underbrace{(77\ldots7)}_{n \text{ Ziffern } 7} \cdot 36 + 28
\end{aligned}$$

Ein mathematisches Objekt mit vielen Anwendungen:

Die Gruppe (III)

von Valentin Blomer

Drei Sätze aus der Gruppentheorie

Für interessierte Mitdenker gibt es hier wirklich spannende Mathematik. Wenn jemand nicht alles versteht, macht es gar nichts, denn ganz leicht sind die hier vorgeführten Schlussfolgerungen sicher nicht. In den Beweisen verbergen sich aber Verfahren, die auch in anderem Zusammenhang sehr nützlich sein können.

Satz von Lagrange. Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Dann ist die Ordnung von U ein Teiler der Ordnung von G.

Beweis. Sei $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ und I das neutrale Element von G, das auch in U sein muss, denn U ist ja (Unter-)Gruppe. (Streng genommen muss man sich noch überlegen, dass U dasselbe neutrale Element wie G hat, aber das ist fast klar.) Wir betrachten nun für jedes $g \in G$ die Teilmenge $gU := \{gu \mid u \in U\} = \{gu_1, gu_2, \ldots\}$ von G. Ein Element in gU ist also zum Beispiel gI. Es folgt $g = gI \in gU$. Insbesondere ist also jedes $g \in G$ in wenigstens einer der betrachteten Mengen enthalten, und ihre Vereinigung überdeckt die Gruppe G.

Wieviele Elemente enthält die Menge gU? Die Kürzungsregel sagt, dass für $g, u, u' \in G$ aus $gu = gu'$ stets $u = u'$ folgt. Sind also $u_1, u_2, \ldots$ die (verschiedenen) Elemente aus U, so sind auch die Elemente $gu_1, gu_2, \ldots$ alle paarweise verschieden, also enthält gU für ein beliebiges $g \in G$ genauso viele Elemente wie U. (Das merken wir uns.)

Wir betrachten nun den Fall, dass für gewisse zwei Elemente $g, h \in G$ die Mengen gU und hU wenigstens ein gemeinsames Element x haben. Wegen $x \in gU$ ist x von der Form $x = gu_1$ für ein gewisses $u_1 \in U$. Wegen $x \in hU$ gilt aber auch $x = hu_2$ für ein $u_2 \in U$. Sei nun gu ein beliebiges Element aus gU. Dann gilt:

$$gu = g(Iu) = g(u_1u_1^{-1})u = (gu_1)u_1^{-1}u = xu_1^{-1}u = hu_2u_1^{-1}u.$$

Nun ist aber $u' := u_2u_1^{-1}u$ eine Zusammensetzung von Elementen aus U, also wieder in U, also folgt $gu = hu' \in hU$. Jedes Element aus gU ist somit in hU. Ebenso zeigt man, daß jedes Element aus hU auch in gU ist. Wir haben damit bewiesen, dass zwei Mengen gU und hU entweder elementfremd oder gleich sind.

Wir können also die Gruppe G in eine gewisse Anzahl von elementfremden Mengen $g_1U, g_2U, \ldots$ zerlegen, so dass alle diese Mengen die gleiche Anzahl von Elementen haben, nämlich so viele Elemente, wie U hat, also die Ordnung von U. Nennen wir diese Anzahl verschiedener Mengen A, so folgt $\mid G \mid = A \mid U \mid$, und dies ist die Behauptung!

Aus dem Satz von Lagrange ersieht man, welche Untergruppen es *höchstens* geben kann, nämlich solche, deren Ordnung die Gruppenordnug teilt. Das bedeutet aber nicht, dass es zu jedem Teiler d der Gruppenordnung auch eine Untergruppe der Ordnung d geben muss. Tatsächlich gibt es hierzu Gegenbeispiele.

Für die unendliche Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung wollen wir nun alle Untergruppen bestimmen.

Satz. Sei U eine beliebige Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Dann gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $U = m\mathbb{Z} = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$, d.h. U besteht genau aus den durch m teilbaren Zahlen. Umgekehrt sind diese Mengen auch tatsächlich Untergruppen. (Das prüft man leicht nach.)

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{Z}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Ist $U = \{0\}$, so wählt man $m = 0$ und erhält $U = 0\mathbb{Z} = \{0z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Ansonsten sei m die kleinste natürliche Zahl in U. (Eine solche gibt es immer.) Dann sind natürlich auch die Verknüpfungen $m + m$ und $m + m + m$, ebenso die Inversen $-m$, $-m - m$, allgemein qm für alle $q \in \mathbb{Z}$ Elemente von U. Sei u irgendein Element aus U. Wir schreiben mittels Division mit Rest: $u = qm + r$ für ein $q \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0, \dots, m-1\}$. Wegen $qm \in U$ ist auch $u - qm = r$ in U. Es ist $r < m$, aber m war die *kleinste natürliche* Zahl in U. Dann muss also $r = 0$ sein, also $u = qm$, d.h. u ist ein Vielfaches von m. Folglich können in U nur Vielfache von m sein, d.h. $U = m\mathbb{Z}$.

Satz. Sei G_m die Menge der zu m teilerfremden Zahlen $< m$. Bezüglich der Multiplikation (mod m) bildet G_m eine Gruppe.

G_{12}	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1(25)	11(35)	7(55)
7	7	11(35)	1(49)	5(77)
11	11	7(55)	5(77)	1(121)

Abbildung 6: Gruppentafel für die Multiplikation modulo 12 der zu 12 teilerfremden Zahlen

Beweis. Sind a und b zu m teilerfremd, so auch ab und ab (mod m), also führt die Verknüpfung nicht aus G_m hinaus. 1 ist immer zu m teilerfremd, also besitzt G_m ein neutrales Element.

Zu jedem Element gibt es auch ein Inverses. Im Beispiel $m = 12$ zeigt die Gruppentafel (Abb.6), dass jedes Element selbstinvers ist. Wir haben damit übrigens eine „wesentlich andere “ Gruppenstruktur mit vier Elementen gefunden als die Addition (mod 4), vgl. Abb. 4. Wir wollen nun die Existenz eines Inversen allgemein beweisen. **Aufgepasst**, es kommen eine ganze Reihe interessanter Tricks vor!

Wir suchen also zu jedem $a \in G_m$ ein $b \in G_m$ mit $b \circ a = 1$. Dazu zeigen wir, dass in der Menge $b_1 \circ a, b_2 \circ a, \dots$, wo $b_1, b_2, \dots$ alle Elemente aus G_m durchläuft, auch einmal die 1 vorkommt. Wie macht man das? Nun, paradoxerweise ist es gar nicht so selten einfacher, eine allgemeinere Tatsache zu beweisen. Ergreifen wir also die Flucht nach vorn und zeigen sogar: *Jedes* Gruppenelement (also auch die 1) kommt unter den Elementen $b_1 \circ a, b_2 \circ a, \dots$ mindestens einmal vor. Dies beweisen wir, indem wir (scheinbar) das Gegenteil zeigen: Unter den Elementen $b_1 \circ a, b_2 \circ a, \dots$ kommt jedes Gruppenelement *höchstens* einmal vor. Dann sind wir fertig, denn wir betrachten ja genauso viele Elemente, wie es Elemente in G_m gibt, und wenn alle verschieden sind, müssen auch alle Gruppenelemente vorkommen! Gehen wir also von dem Ansatz $b \circ a = b' \circ a$ aus und zeigen, dass dies nur vorkommen kann, wenn bereits $b = b'$ ist. In unserem Fall ist die Verknüpfung die Multiplikation (mod m), d.h. ba und $b'a$ unterscheiden sich nur um ein Vielfaches von m, m ist also ein Teiler von $ba - b'a = (b - b')a$. Da nach Voraussetzung a und m teilerfremd sind, ist m sogar ein Teiler von $b - b'$. Nun sind aber b und b' aus der Menge $\{0, 1, \ldots, m - 1\}$, also ist ihre Differenz zwischen $-m + 1$ und $m - 1$. Damit m ein Teiler von $b - b'$ ist, bleibt nur $b - b' = 0$, also $b = b'$, übrig, was wir ja zeigen wollten. (Ja tatsächlich, jede Zahl m ist ein Teiler von 0, denn $m \cdot 0 = 0$!)

Rückblick und Ausblick

Wir haben nun einen ganz kleinen Einblick in ein aktuelles mathematisches Forschungsgebiet erhalten, die Gruppentheorie. Zu Beginn unserer Betrachtungen stand eine einzige Definition, nämlich die der Gruppe. Sie geht zurück auf den französischen Mathematiker Evariste Galois (1811 - 1832), über dessen Leben bereits in MONOID (Heft 54) geschrieben wurde. Ob Galois wohl ahnte, dass er damit die Tür zur modernen Algebra aufgestoßen hatte?

Vielleicht erinnern sich die MONOID-Leser noch an das einführende Beispiel, mit dem der Gruppenbegriff motiviert wurde. Es ging da um die Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks, und in der Tat ist die Gruppentheorie die richtige Sprache, um Symmetrien zu beschreiben. Wer schon einmal einen eleganten Beweis gesehen hat, der Symmetrieargumente benutzt, wird sich vorstellen können, welch mächtiges Werkzeug die Gruppentheorie liefert.

Als Mathematiker muss man sich ja häufig rechtfertigen, etwas „Nützliches“ zu machen, das man vielleicht sogar auch „anwenden“ kann und nicht nur abstrakte Spielerei ist. Der Definition der Gruppe sieht man es nicht an, doch sind die modernen Naturwissenschaften, insbesondere die Physik, ohne tiefgehende Kenntnisse über Gruppen nicht mehr vorstellbar.

Ich möchte abschließend drei Beispiele vorstellen, die die vielseitige Anwendbarkeit des Gruppenbegriffs verdeutlichen.

Auf dem offenen Intervall $G := (-1, 1)$ führen wir folgende „Addition“ $\oplus$ ein:

$$a \oplus b := \frac{a + b}{1 + ab} \text{ für } a, b \in G,$$

wobei auf der rechten Seite die gewöhnlichen Rechenzeichen stehen. Das Paar $(G, \oplus)$ bildet eine Gruppe: Für $a, b, \in G$ gilt

$$\begin{aligned} 0 <&(1 - a^2)(1 - b^2) = (1 + a^2b^2) - (a^2 + b^2) = \\ &(1 + 2ab + a^2b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) = (1 + ab)^2 - (a + b)^2, \end{aligned}$$

also

$$| a \oplus b | = \sqrt{\left(\frac{a + b}{1 + ab}\right)^2} < 1.$$

Somit führt die Verknüpfung zweier Elemente aus G nicht aus G heraus. Wegen $0 \oplus a = a$ ist das neutrale Element 0, das zu a inverse Element ist $-a$. Das Assoziativgesetz gilt auch, ist aber etwas mühsam nachzurechnen.

Wo liegt nun die Anwendbarkeit dieses Beispiels? Wir untersuchen, wie sich zwei Geschwindigkeiten addieren, wenn etwa ein Zug-Reisender mit der Geschwindigkeit v_1 vom letzten Wagen bis vorne zur Lok läuft, während der Zug die Geschwindigkeit v_2 hat. In geeigneten Maßeinheiten können wir die Lichtgeschwindigkeit auf 1 normieren, und dann gilt bei relativistischer Rechnung nach Einstein: Die Gesamtgeschwindigkeit (relativ zu einem ruhenden Beobachter) beträgt $(v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2) = v_1 \oplus v_2$! Die Natur hat sich also hier für ihre Gesetzmäßigkeit eine Gruppenstruktur ausgesucht. Da die Verknüpfung zweier Gruppenelemente in der Gruppe bleibt, folgt insbesondere: Die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ kann auch durch Geschwindkeitsaddition nicht erreicht werden, wenn etwa Zug und Läufer die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ haben.

Das Wirken von Kräften auf Elementarteilchen, etwa der Gravitationskraft oder der elektromagnetischen Kraft, und die daraus entstehenden Wechselwirkungen zwischen Teilchen lassen sich durch Gleichungen beschreiben. In der modernen Physik gehört das Finden von Elementarteilchen und das Verstehen der Zusammenhänge der verschiedenen Kräfte eng mit den Symmetrien der dazugehörenden Gleichungen zusammen, die in der Sprache der Gruppentheorie formuliert werden.

Das letzte Beispiel stammt wieder aus der Mathematik. Es ist Galois' Lösung einer berühmten Aufgabe, zu der er gruppentheoretische Methoden überhaupt eingeführt hat, indem er algebraische Gleichungen mit Gruppen in Verbindung brachte. Jeder kennt die „p-q-Formel" zur Lösung quadratischer Gleichungen. Es gibt ähnliche, wenn auch viel kompliziertere Formeln für Gleichungen dritten und vierten Grades. Vielleicht hat der eine oder andere aber schon einmal davon gehört, dass es für Gleichungen fünften oder höheren Grades keine Formeln gibt. Diese *Nichtexistenz* kann man streng mathematisch beweisen, und zwar mit Gruppentheorie. Der Beweis ist natürlich ziemlich tiefliegend, aber ich möchte (nur grob und andeutungsweise) die geniale Idee vorstellen, wie man hier Symmetrie ausnutzen kann: Man startet mit einem gewissen Zahlenbereich, der gerade groß genug ist, dass er die prinzipiell n möglichen Lösungen einer Gleichung n-ten Grades enthält. (Warum es so einen Zahlenbereich gibt und wie er genau aussieht, kann ich leider nicht so einfach erklären.) Nun kommt die Symmetrie ins Spiel: Wir untersuchen nämlich, welche Symmetrien (d.h. Selbstabbildungen) dieser Zahlenbereich besitzt, die die n Lösungen ineinander überführen. Die Menge dieser Symmetrien bildet wie die Symmetrien des Dreiecks eine Gruppe mit höchstens $n!$ Elementen, und an den Eigenschaften dieser Gruppe kann man nun tatsächlich ablesen, dass es keine *allgemeinen* Lösungsformeln für Gleichungen fünften oder höheren Grades gibt (wohl aber für spezielle Typen von Gleichungen, etwa $x^6 + ax^3 + b = 0$, denn dies ist ja eigentlich eine quadratische Gleichung).

Damit beenden wir unseren kleinen Ausflug in die Gruppentheorie und hoffen, dass alle Leser ein bisschen von der Faszination der Mathematik mitbekommen haben.

Automaten und Monoide

Zweiter Teil: Monoide

von Andrea Krol

Hier sind die Lösungen der Aufgaben zum ersten Teil dieses Artikels im letzten Heft:

Lösung zu Aufgabe 1: Dies ist das Diagramm des Graphen, der das Wort „beben“ in einem Text erkennt:

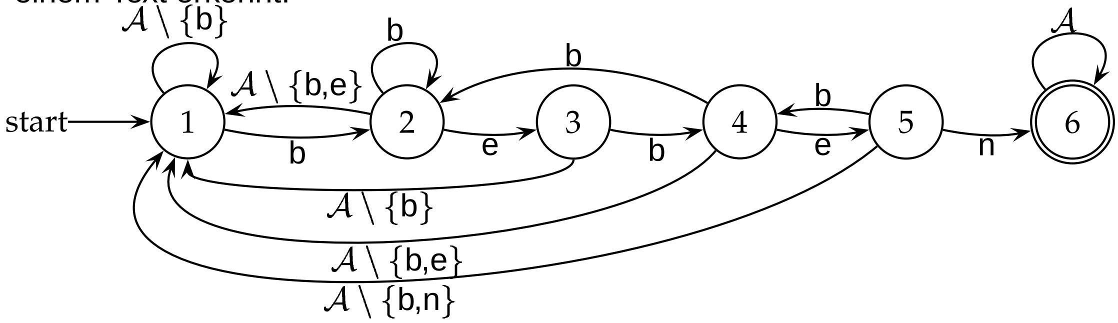


Abbildung 1: Spracherkennungsautomat

Lösung zu Aufgabe 2:

Gegeben war ein Automat $M = (\{1,2,3\}, \{\text{a,b}\}, f, 1, \{1\})$ durch Abbildung 2.

1. Anzugeben waren die Werte von $f(i,\text{a})$ und $f(i,\text{b})$ für $i = 1, 2, 3$:

Buch-staben	**Zustände** 1	2	3
a	2	3	3
b	3	1	3

Also
$f(1,\text{a}) = 2 \quad f(2,\text{a}) = 3 \quad f(3,\text{a}) = 3$
$f(1,\text{b}) = 3 \quad f(2,\text{b}) = 1 \quad f(3,\text{b}) = 3$

2. Der Automat erkennt die folgende Menge von Buchstabenfolgen:
$\{(\text{ab})^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 0\} = (\text{ab})^*$, also alle Worte, die aus Folgen von ab’s bestehen, einschließlich des leeren Wortes ϵ.

Nun geht es weiter mit den Automaten und Monoiden.

In der letzten Ausgabe haben wir bereits Automaten kennengelernt. Dabei haben wir auch gesehen, dass Automaten Buchstabenfolgen erkennen können. Wir sagen dazu auch, dass ein Automat eine Sprache erkennt. Wie man allgemein die Sprache beschreibt, die ein Automat erkennt, werden wir als erstes betrachten. Danach werden wir sehen, dass auch ein Monoid eine Sprache erkennen kann und wie man ein solches Monoid aus einem Automat berechnen kann.

Wir möchten uns in diesem Artikel mit dem Beispielautomaten aus Abbildung 2 beschäftigen, den wir bereits aus MONOID, Ausgabe 67, kennen.

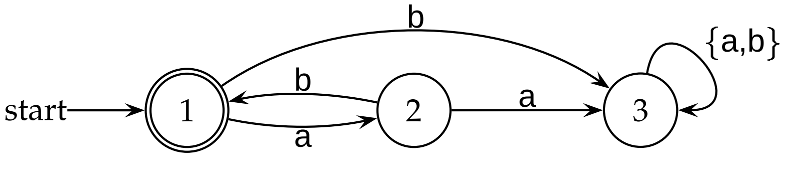


Abbildung 2: Spracherkennungsautomat

Der Automat $M = (Z, \mathcal{A}, f, s, E)$ hat die Zustandsmenge $Z = \{1, 2, 3\}$, das Alphabet $\mathcal{A} = \{\text{a,b}\}$, den Startzustand $s = 1$ und den Endzustand 1. Wie die Überführungsfunktion f definiert ist, können wir der Zustandsüberführungstabelle (Tabelle 1) entnehmen:

Buchstaben	**Zustände** 1	2	3
a	2	3	3
b	3	1	3

Tabelle 1: Zustandsüberführungstabelle

Also
$f(1,\text{a}) = 2 \quad f(2,\text{a}) = 3 \quad f(3,\text{a}) = 3$
$f(1,\text{b}) = 3 \quad f(2,\text{b}) = 1 \quad f(3,\text{b}) = 3$

Uns interessieren nun aber die Folgen von Buchstaben unseres Alphabets $\mathcal{A}$, die der Automat akzeptiert. Wir suchen also Folgen, die aus a's und b's bestehen und die den Automat vom Startzustand 1 in den Endzustand 1 überführen, wenn sie hintereinander eingelesen werden. Die Menge all dieser Folgen definiert uns dann die Sprache L, die der Automat erkennt. Dazu müssen wir die Überführungsfunktion f erweitern, so dass die neue Funktion f^* nicht mehr auf einzelnen Buchstaben des Alphabets, sondern auf Worten über dem Alphabet $\mathcal{A}$ definiert ist. Mit Worten über dem Alphabet $\mathcal{A}$ bezeichnen wir alle Folgen, die aus Buchstaben aus $\mathcal{A}$ gebildet werden können, indem man die Buchstaben einfach hintereinander schreibt. Das leere Wort (wir nennen es ϵ), das aus keinem Buchstaben besteht, ist ebenfalls ein Wort über dem Alphabet $\mathcal{A}$. Die Menge aller Worte über $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^*$.

Wir erweitern jetzt die Überführungsfunktion f schrittweise zu
$f^* : Z \times \mathcal{A}^* \to Z$, indem wir für alle Zustände z aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ festlegen:

$f^*(z,\text{a}) = f(z,\text{a})$
$f^*(z,\text{b}) = f(z,\text{b})$

D.h. auf einzelnen Buchstaben operiert f^* genauso wie die Überführungsfunktion f.

$f^*(z, \epsilon) = z$

D.h. beim Lesen des leeren Wortes bleibt der Automat immer im gleichen Zustand.

$f^*(z,\text{aa}) = f(f(z,\text{a}),\text{a})$
$f^*(z,\text{ab}) = f(f(z,\text{a}),\text{b})$
$\vdots$
$f^*(z,\text{aaa}) = f(f^*(z,\text{aa}),\text{a})$
$f^*(z,\text{aab}) = f(f^*(z,\text{aa}),\text{b})$
$f^*(z,\text{aba}) = f(f^*(z,\text{ab}),\text{a})$
$\vdots$

Liest der Automat im Zustand z das Wort wx aus $\mathcal{A}^*$, so geht er erst in den Zustand $j = f^*(z, w)$ über, den er durch „abarbeiten" des Wortes w erreicht. Von dort geht er in den Zustand y über, der durch die Überführungsfunktion f auf dem Zustand j und dem Buchstaben x berechnet wird. Also $f(j, x) = y$. Insgesamt gilt dann: $f^*(i, wx) = f(f^*(i, w), x) = y$.

Die Funktion f^* beschreibt also, in welchen Zustand der Automat gelangt, wenn er in irgendeinem Zustand ein Wort $w \in \mathcal{A}^*$ liest. Wir nennen f^* die erweiterte Überführungsfunktion von M.

Die Sprache L, die der Automat M aus Abbildung 2 erkennt, enthält alle Worte, die aus a's und b's bestehen und den Automat vom Startzustand 1 in den Endzustand 1 (zurück-)überführen. In dieser Sprache liegt also schon laut Definition das leere Wort ϵ, denn der Startzustand ist zugleich der Endzustand. L enthält außerdem auch alle Folgen der Gestalt $(\text{ab})^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Dabei legen wir fest, dass $(\text{ab})^1 = $ab, $(\text{ab})^2 = $abab, $(\text{ab})^3 = $ababab, usw. Also ist die Sprache L, die der Automat aus Abbildung 2 erkennt, die Menge $L = \{(\text{ab})^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\epsilon\}$. Allgemein sagen wir: Die Sprache L, die ein Automat $M = (Z, \mathcal{A}, f, s, E)$ erkennt, ist gegeben durch $L = \{w \in \mathcal{A} \mid f^*(s, w) \in E\}$.

Nun zu den Monoiden.

In der letzten Ausgabe von MONOID hatten wir bereits gesehen, dass die natürlichen Zahlen mit der Multiplikation ein Monoid sind. Auch die Menge $\mathcal{A}^*$ bildet ein Monoid, wobei hier die Verknüpfung das Hintereinanderreihen von zwei Worten ist. Diese Verknüpfung nennen wir Konkatenation. Das neutrale Element in $\mathcal{A}^*$ ist das leere Wort ϵ.

Ein Automat definiert ebenfalls ein Monoid, wie wir an unserem Automat M aus Abbildung 2 erläutern wollen. Wir betrachten jetzt für alle Worte $w \in \mathcal{A}^*$ und alle Zustände z aus Z die Funktion $f_w : Z \to Z$ definiert durch $f_w(z) = f^*(z, w)$. und legen auf der Menge dieser Funktionen eine Verknüpfung $\circ$ fest:

$$f_u \circ f_v(z) = f_v(f_u(z)) = f_{uv}(z) \quad \text{für alle Zustände } z \text{ und alle Worte } w.$$

Zum Beispiel gilt: $f_{\text{a}} \circ f_{\text{b}}(z) = f_{\text{b}}(f_{\text{a}}(z)) = f_{\text{ab}}(z)$ für alle Zustände z aus Z.
Die Menge dieser Funktionen mit der Verknüpfung $\circ$ bilden ein Monoid. Um dies zu überprüfen, bestimmen wir erst einmal alle möglichen Funktionen der Gestalt f_w für unser Beispiel. Da wir nur drei Zustände haben, kann die Anzahl der verschiedenen Funktionen von Z nach Z nicht unendlich groß werden. Wir möchten auch diese Funktionen in einer Tabelle (Tabelle 2) darstellen. In der obersten Zeile stehen alle Zustände, in die folgenden Zeilen schreiben wir von links nach rechts die Bezeichnung der Funktion und ihre Funktionswerte auf den Zuständen in den jeweiligen Spaltenüberschriften.

	1	2	3
f_ϵ	1	2	3
f_{a}	2	3	3
f_{b}	3	1	3
f_{aa}	3	3	3
f_{ab}	1	3	3
f_{ba}	3	2	3

Tabelle 2: Monoidelemente

In der ersten Zeile kann man also von links nach rechts die Werte $f_\epsilon(1) = 1, f_\epsilon(2) = 2, f_\epsilon(3) = 3$ und in der letzten Zeile die Werte $f_{\text{ba}}(1) = 3, f_{\text{ba}}(2) = 2, f_{\text{ba}}(3) = 3$ ablesen.
Wieso enthält die Tabelle nur 6 Funktionen?

Beim Erstellen der Tabelle fällt auf, dass folgende Funktionen sich auf allen Zuständen gleich verhalten: $f_{\text{aa}} = f_{\text{bb}}$, $f_{\text{aba}} = f_{\text{a}}$, $f_{\text{bab}} = f_{\text{b}}$, $f_{\text{abab}} = f_{\text{ab}}$, $f_{\text{baba}} = f_{\text{ba}}, \dots$
D.h. alle anderen Funktionen traten bereits in der Tabelle auf, und somit ist sie vollständig.

Man kann nun nachrechnen, dass diese Menge der 6 Funktionen mit der Verknüpfung $\circ$ tatsächlich ein Monoid bildet. Wir wollen die einzelnen Bedingungen, die ein Monoid erfüllen muss, nur an je einem Beispiel überprüfen.

- Anhand unserer Tabelle 2 können wir überprüfen, dass die Verknüpfung zweier Funktionen als Ergebnis wieder eine Funktion aus dem Menge liefert. Zum Beispiel ist $f_{\text{ab}} \circ f_{\text{a}}(z) = f_{\text{aba}}(z) = f_{\text{a}}(z)$ für alle Zustände z.
  Die Menge ist also abgeschlossen unter der Verknüpfung.
- Das Assoziativgesetz gilt; zum Beispiel ist:
  $(f_{\text{a}} \circ f_{\text{b}}) \circ f_{\text{a}}(z) = f_{\text{ab}} \circ f_{\text{a}}(z) = f_{\text{aba}}(z) = f_{\text{a}} \circ f_{\text{ba}}(z) = f_{\text{a}} \circ (f_{\text{b}} \circ f_{\text{a}})(z)$
- Die Menge hat ein neutrales Element, nämlich die Funktion f_ϵ, denn f_ϵ bildet jeden Zustand auf sich selbst ab. Zum Beispiel gilt:
  $f_{\text{a}} \circ f_\epsilon(z) = f_\epsilon \circ f_{\text{a}}(z) = f_{\text{a}}(z)$ für alle Zustände z.

Das Monoid, das aus diesen 6 Funktionen besteht, nennen wir $\mathcal{M}$. Betrachtet man die Verknüpfung (die Konkatenation) zweier Worte u und v aus $\mathcal{A}^*$ zu uv und die Verknüpfung der Funktionen $f_u \circ f_v = f_{uv}$, so kann man einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{M}$ erkennen. Diesen Zusammenhang möchten wir ausnutzen. Dazu bilden wir alle Worte $w \in \mathcal{A}^*$ auf die Funktionen $f_w \in \mathcal{M}$ ab, also: $\mu : \mathcal{A}^* \to \mathcal{M}$

$\mu(\epsilon) = f_\epsilon$ $\qquad$ $\mu(\text{aa}) = \mu(\text{a}) \circ \mu(\text{a}) = f_\text{a} \circ f_\text{a} = f_\text{aa}$
$\mu(\text{a}) = f_\text{a}$ $\qquad$ $\mu(\text{ab}) = \mu(\text{a}) \circ \mu(\text{b}) = f_\text{a} \circ f_\text{b} = f_\text{ab}$
$\mu(\text{b}) = f_\text{b}$ $\qquad$ $\vdots$

Wie man sieht, gilt für alle $u, v \in \mathcal{A}^*$: $\mu(uv) = \mu(u) \circ \mu(v) = f_u \circ f_v = f_{uv}$. Man sagt in diesem Fall, die Funktion μ respektiert die Verknüpfung in beiden Monoiden. Eine solche Funktion nennt man Homomorphismus.

Was beschreibt nun der Homomorphismus μ? Betrachten wir einmal die zwei verschiedenen Worte a und aba aus $\mathcal{A}^*$. Wir wissen $\mu(\text{a}) = f_\text{a} = f_\text{aba} = \mu(\text{aba})$ und somit gilt $f_\text{a}(z) = f_\text{aba}(z)$ für alle Zustände aus $\{1, 2, 3\}$. D.h. egal in welchem Zustand der Automat sich gerade befindet, nach der „Verarbeitung“ von a landet er im gleichen Zustand wie nach der Verarbeitung von aba. Also können der Homomorphismus μ und der Automat die Worte a und aba nicht unterscheiden.

Betrachten wir andererseits die Worte ab und ba aus $\mathcal{A}^*$, so gilt $\mu(\text{ab}) \neq \mu(\text{ba})$ und somit $f_\text{ab} \neq f_\text{ba}$. Also gibt es mindestens einen Zustand z aus $\{1, 2, 3\}$, so dass $f_\text{ab}(z) \neq f_\text{ba}(z)$. In unserem Fall gilt z.B. $f_\text{ab}(1) = 1 \neq 3 = f_\text{ba}(1)$. Also können der Automat M und das Monoid $\mathcal{M}$ die Worte ab und ba unterscheiden.

Wir berechnen nun für alle Elemente aus dem Monoid $\mathcal{M}$ ihr Urbild unter dem Homomorphismus μ:

$\mu^{-1}(f_\text{a}) = \{w \in \mathcal{A}^* | w = \text{a(ba)}^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$

$\mu^{-1}(f_\text{b}) = \{w \in \mathcal{A}^* | w = \text{b(ab)}^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$

$\mu^{-1}(f_\text{aa}) = \{w \in \mathcal{A}^* | \text{in } w \text{ kommt die Buchstabenfolge aa oder bb vor}\}$

$\mu^{-1}(f_\text{ba}) = \{w \in \mathcal{A}^* | w = \text{(ba)}^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$

$\mu^{-1}(f_\text{ab}) = \{w \in \mathcal{A}^* | w = \text{(ab)}^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$

$\mu^{-1}(f_\epsilon) = \epsilon$

Man kann nun sehen, dass die Sprache L, die der Automat M aus Abbildung 2 erkennt, genau aus den Urbildern der Elemente f_ϵ und f_ab unter dem Homomorphismus μ besteht. Also $L = \mu^{-1}(f_\text{ab}) \cup \mu^{-1}(f_\epsilon)$, d.h. das Monoid $\mathcal{M}$ erkennt die Sprache L. Verallgemeinert sagt man: ein Monoid $\mathcal{M}$ erkennt eine Sprache L, falls es eine Teilmenge $\mathcal{T}$ von $\mathcal{M}$ gibt und L das Urbild von $\mathcal{T}$ unter dem Homomorphismus μ ist.

Fassen wir noch einmal kurz zusammen:

Zu einem endlichen Automaten $M = (Z, A, \delta, s, E)$ haben wir einen Homomorphismus μ vom Monoid A^* in das Monoid $\mathcal{M}$ konstruiert, der genau die Worte unterschiedlich abbildet, die M unterscheiden kann. Nur zur Information: Wir können auch umgekehrt vorgehen, d.h. zu jedem Homomorphismus μ von A^* in ein Monoid $\mathcal{M}$ gibt es einen Automaten M_μ, der genau die Worte unterscheiden kann, die unter μ unterschiedlich abgebildet werden. Somit ist es (fast) das gleiche, wenn man über endliche Automaten oder endliche Monoiden redet.

Aufgabe 1: Gib das Diagramm eines Automaten an, der über dem Alphabet $\{0, 1\}$ genau die Worte erkennt, die aus einer ungeraden Anzahl von Einsen und einer geraden Anzahl von Nullen bestehen.
Aufgabe 2: Bestimme zu dem Automat aus Teil (1) das zugehörige Monoid $\mathcal{M}$, das die gleiche Sprache erkennt, indem Du zuerst die Tabelle der Elemente dieses Monoids erstellst. Danach zeige, dass Dein Monoid die gleiche Sprache erkennt, indem Du alle Urbilder des Homomorphismus von A^* auf $\mathcal{M}$ bestimmst.
(Die Lösungen zu beiden Aufgaben gibt es im nächsten Heft.)

Hättest Du es gewusst?

Ein mathematischer Wettstreit, der zur Lösung einer kubischen Gleichung führte

von Hartwig Fuchs

Die italienische Renaissance des 15./16. Jahrhunderts war eine Blütezeit der damals betriebenen Wissenschaften - auch der Mathematik.

Überall wurden bedeutende Fortschritte gemacht - und das in einem wissenschaftlichen Klima, das geprägt war von Streitigkeiten der Fachgelehrten untereinander; erbittert ausgetragene besserwisserische verbale und schriftliche Fehden und Intrigen waren an der Tagesordnung.

Missgunst und Konkurrenzneid führten dazu, dass häufig neue wissenschaftliche Erkenntnisse nicht veröffentlicht sondern als persönliches Eigentum und als Berufsgeheimnis zur Erhöhung des eigenen Ansehens und zur Förderung der Karriere gehütet wurden.

In der Mathematik war das kaum anders. Auch mathematische Entdeckungen wurden nur selten veröffentlicht, vielmehr wurden sie den Fachkollegen meist einfach vorenthalten.

Wenn aber doch einmal ein Informationsaustausch zwischen Mathematikern stattfand, dann geschah das oft nur andeutungsweise, manchmal in poetischer Umschreibung (z.B. in einem Gedicht) oder durch einen verschlüsselten Text und auch schon mal in der wohl einmaligen Form eines mathematischen Wettkampfs.

Von einem solchen Wettstreit soll nun berichtet werden, weil er für die Entwicklung der Mathematik von einiger Bedeutung war.

Scipione del Ferro (1465 - 1526), von 1496 bis zu seinem Tode Mathematiker an der Universität Bologna, gelang es um 1515, eine Lösungsmethode für die bis dahin als unlösbar geltende kubische Gleichung

$$x^3 + bx = c \tag{1}$$

zu finden: Er setzte

$$r^2 := \left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

und bestimmte dann x durch

$$x = \sqrt[3]{r + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{r - \frac{c}{2}}\ .$$

Leider hielt er sein Lösungsverfahren geheim - erst auf dem Sterbebett gab er sein Wissen an seinen Schüler **Antonio Flor** weiter.

Dieser betrachtete Ferros Vermächtnis als die große Chance für sein berufliches Fortkommen, und bei einer günstigen Gelegenheit gedachte er es nutzbringend anzuwenden. Diese Gelegenheit schien sich ihm 1534 zu bieten, als **Nicolo Tartaglia** (1499 - 1557), Rechenlehrer in Verona und Venedig, auf Ferros Herausforderung zu einem mathematischen Wettstreit einging - nicht ahnend, unter welch unfairen Bedingungen er stattfinden sollte.

Flor stellte nämlich seinem Gegner 30 Aufgaben, die alle auf eine kubische Gleichung vom Typ (1) führten. Da Flor selbst (mittels Ferros Methode) für diese allgemein als unlösbar geltenden Gleichungen sehr wohl Lösungen angeben, Tartaglia sie aber seiner Meinung nach gewiss nicht finden konnte - wer von ihnen beiden war dann also der bessere Mathematiker?

Aber es kam ganz anders!

In der Nacht zum 12. Februar 1534 entdeckte Tartaglia ebenfalls ein Lösungsverfahren für kubische Gleichungen (1), womit er jede der 30 ihm gestellten Aufgaben löste, während Flor dies bei keinem der ihm von Tartaglia vorgelegten Problemen gelang.

Die Nachricht von Tartaglias Sieg über Flor verbreitete sich rasch; und wer davon erfuhr, dem war auch klar, dass Tartaglia eine Methode zur Lösung jeder Gleichung (1) besitzen musste.

Auch **Giorlamo Cardano** (1501 - 1576) - Arzt, Philosoph, Mathematiker und hochangesehener Gelehrter - hörte davon. Da er damals (1535) gerade sein Buch „Practica arithmetica generalis“ schrieb, in dem er das algebraische Wissen seiner Zeit zusammenfassend darstellen wollte, bedrängte er Tartaglia, ihm die kubische Lösungsformel mitzuteilen. Fünf Jahre lang zögerte Tartaglia, bis er ihm endlich 1539 seine Methode preisgab - und zwar in Form eines Sonetts(!).

Im Jahre 1545 veröffentlichte dann Cardano das Lösungsverfahren von Tartaglia - erweitert um eigene Entwicklungen für kubische Gleichungen von anderem Typ als (1) - in seinem berühmten Buch „Ars magna arithmeticae’ ... “, wodurch es zum wissenschaftlichen Allgemeingut der Mathematiker wurde.

Es bleibt die Frage: Warum wurde so viel Lärm um die Lösung von kubischen Gleichungen gemacht?

Im Laufe von fast 2000 Jahren Bemühung war es weder den griechischen noch später den indischen und arabischen Mathematikern gelungen, im Bereich der Gleichungen über das Lösen von linearen und von quadratischen Gleichungen hinauszugelangen, wenn man eimal absieht von Gleichungen speziellen Typs, die sich - wie z.B. $x^8 + x^4 = 1$ durch die Setzung $x^4 = y$ auf $y^2 + y = 1$ - auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen. Das Gebiet der Gleichungen erschien daher um 1500 als „abgeschlossen“, auf dem also keine weiteren Fortschritte zu erzielen seien.

Ferro, Tartaglia und Cardano jedoch überschritten die vermeintliche Grenze, und sie stießen mit ihren Entdeckungen über die kubischen Gleichungen ein Tor auf zu völlig neuen Erkenntnissen, die die entscheidenden Impulse darstellten für die Entwicklung der Algebra zu einem der Grundpfeiler heutiger Mathematik.

2002 $\scriptstyle 2002$ 2002 **Die Seite zum Neuen Jahr** 2002 $\scriptstyle 2002$ 2002

von Hartwig Fuchs

Ein Wunsch der MONOID-Redaktion

Verbinde die Buchstaben der Reihe nach (beginnend mit dem fetten **E**).
Dabei ergibt sich jede Strecke XY vom Buchstaben X zum Buchstaben Y durch einen sogenannten „Rösselsprung“: von X gehe man in einer Richtung um ein Feld (bzw. um zwei Felder) und dann im rechten Winkel um zwei Felder (bzw. um ein Feld) weiter nach Y.
Die Buchstaben - längs des Streckenzugs gelesen - ergeben einen Wunsch der MONOID-Redaktion.

E	A	E	J	L	H
L	S	N	R	N	I
Ö	S	L	D	A	E
E	R	E	N	O	M
N	H	**E**	O	S	S
N	U	E	C	I	N

Hinweis: Trägt man in ein 6X6-Quadrat alle Verbindungsstrecken ein, dann ergibt sich ein sehr bizarrer Streckenzug, der alle Felder (und damit alle Buchstaben) des Quadrats durchläuft.

Zufall oder nicht?

$$(2001 + 2001) + (2001 - 2001) + (2001 \cdot 2001) + (2001 : 2001) = 2002 \cdot 2002$$

Falls die Gleichung kein Zufall ist, finde eine Begründung.

Erstaunliche Summen

Wähle im Zahlenquadrat aus jeder Zeile je eine Zahl so, dass die vier gewählten Zahlen jeweils aus verschiedenen Spalten stammen. Addiere dann die vier Zahlen.
Wenn Du dieses Vorgehen mehrmals wiederholst (insgesamt höchstens noch 23 mal), dann erlebst Du jedes Mal eine kleine mathematische Überraschung.

493	494	495	496
497	498	499	500
501	502	503	504
505	506	507	508

Wahr oder falsch?

$1 + 2001^{2003}$ ist durch 2002 ohne Rest teilbar.

Zum Jahreswechsel

Es sei $p_0 = 1$; p_i sei die i-te Primzahl, $i \geq 1$. Z.B. ist $p_{33} = 137$.
Berechne

$$\begin{aligned} &(\mathbf{2} \cdot p_0 + \mathbf{0} \cdot p_1 + \mathbf{0} \cdot p_2 + \mathbf{1} \cdot p_3) \quad + \\ &(\mathbf{2} \cdot p_2 + \mathbf{0} \cdot p_3 + \mathbf{0} \cdot p_4 + \mathbf{1} \cdot p_5) \quad + \quad p_4 + p_5 + \cdots + p_{33} = ? \qquad (1) \\ &(\mathbf{2} \cdot p_0 + \mathbf{0} \cdot p_1 + \mathbf{0} \cdot p_2 + \mathbf{2} \cdot p_3) \quad + \\ &(\mathbf{2} \cdot p_1 + \mathbf{0} \cdot p_2 + \mathbf{0} \cdot p_3 + \mathbf{1} \cdot p_4) \quad + \quad p_4 + p_5 + \cdots + p_{33} = ? \qquad (2) \\ &(\mathbf{2} \cdot p_0 + \mathbf{0} \cdot p_1 + \mathbf{0} \cdot p_2 + \mathbf{2} \cdot p_3) \quad + \\ &(\mathbf{2} \cdot p_1 + \mathbf{0} \cdot p_2 + \mathbf{0} \cdot p_3 + \mathbf{2} \cdot p_4) \quad + \quad p_5 + p_6 + \cdots + p_{33} = ? \qquad (3) \end{aligned}$$

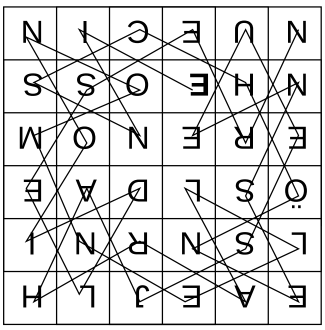
Die Aufgaben sind für Löser(innen) aller Altersstufen geeignet. Nur die Aufgabe „Wahr oder falsch“ ist etwas schwieriger. Nun viel Spaß beim Lösen! Die Lösungen findest Du auf der nächsten Seite.

Zum Image der Mathematik in der Philosophie

> Dass die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische sei, wird dadurch belegt, dass sie die einzige ist, welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann; wie denn jetzt in England dergleichen Rechenmaschinen bequemlichkeitshalber schon in häufigem Gebrauche sind. - Nun läuft aber alle analysis finitorum et infinitorum im Grunde doch auf Rechnerei zurück. Danach bemesse man den „mathematischen Tiefsinn“, über welchen schon Lichtenberg sich lustig macht, indem er sagt: „Die sogenannten Mathematiker von Profession haben sich, auf die Unmündigkeit der übrigen Menschen gestützt, einen Kredit von Tiefsinn erworben, der viel Ähnlichkeit mit dem von Heiligkeit hat, den die Theologen für sich haben.“
>
> Arthur Schopenhauer: Parerga und Paralipomena II, §356

Lösungen der Seite zum Neuen Jahr:

Ein Wunsch der MONOID-Redaktion
Der gesuchte Satz lautet: EIN SCHÖNES NEUES JAHR ALLEN MONOIDLESERN.



Zufall oder nicht?
Kein Zufall! Es gilt für jede reelle Zahl $x \neq 0$:

$$(x+x)+(x-x)+(x\cdot x)+(x:x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

Setze $x = 2001$.

Erstaunliche Summen
Bei allen 24 möglichen Wahlen ergibt sich als Summe stets 2002.

Wahr oder falsch?
Für ungerades natürliches $n \geq 3$ und beliebige reelle x, y gilt:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}).$$

Setzt man $x = 1$, $y = 2001$, $n = 2003$, so folgt:

$$1 + 2001^{2003} = (1+2001)\cdot(1^{2002} - \dots + 2001^{2002}),$$

so dass die Behauptung zutrifft wegen $1 + 2001 = 2002$.

Zum Jahreswechsel
Es gilt: $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, usw. Ferner ist $p_0 + p_1 + \dots + p_{33} = 1989$. Damit erhält man:
(1) $(2+5)+(6+11)+1989-(p_0+p_1+p_2+p_3) = 2002$,
(2) $(2+10)+(4+7)+1989-(p_0+p_1+p_2+p_3) = 2001$,
(3) $(2+10)+(4+14)+1989-(p_0+p_1+p_2+p_3+p_4) = 2001$.

MONOID Jahrgang 21 Heft 68 Dezember 2001

Inhalt

Die Redaktion

Leitung: Martin Mettler, Unterer Kurweg 29, 67316 Carlsberg;
Dr. Ekkehard Kroll, Südring 106, 55128 Mainz

Mitglieder: Valentin Blomer, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Dr. Hartwig Fuchs, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, Volker Priebe, Helmut Ramser, Prof. Dr. Duco van Straten

Monoidaner: Eike Bumb, Gregor Dschung, Felix Henninger, Armin Holschbach, Dominik Kraft, Sönke Loitz, Heiner Olbermann, Martin Olbermann, Christoph Peters, Michael Peters, Joachim Trodler und Marcel Zimmer

Korrekturen und Layout: Linda Hosius

Internet: Oliver Labs

Betreuung der Abonnements: Fachbereich Mathematik/Informatik der Universität Mainz. Ein Jahresabonnement kostet 8 Euro (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000.

Herausgeber: Fachbereich Mathematik/Informatik der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Leibniz-Gymnasium Östringen.

Anschrift: Fachbereich Mathematik/Informatik der Universität Mainz, 55099 Mainz; Tel. 06131/39-22339; Fax 06131/39-24389

e-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de

Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid