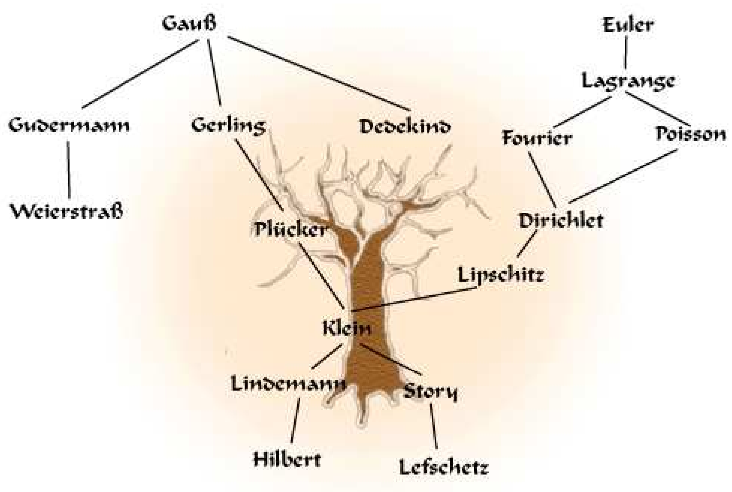
Jahrgang 29 Heft 97 März 2009

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
gegenwärtig herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch nicht ausgeschlossen. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg abzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5-7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* abgeben. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern abgeben.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.05.2009.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
MONOID-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

Im ELG Alzey können Lösungen und Zuschriften direkt an **Herrn Kraft** abgegeben werden, im KG Frankenthal direkt an **Herrn Köpps**.

Ferner gibt es in folgenden Schulen betreuende Lehrer/innen, denen Ihr Eure Lösungen geben könnt: **Herrn Ronellenfitsch** im Leibniz-Gymnasium Östringen, **Herrn Wittekindt** in Mannheim, **Herrn Jakob** in der Lichtbergschule in Eiterfeld, **Frau Langkamp** im Gymnasium Marienberg in Neuss, **Herrn Kuntz** im Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler, **Herrn Meixner** im Gymnasium Nonnenwerth, **Herrn Mattheis** im Frauenlob-Gymnasium Mainz, **Frau Beitlich** und **Frau Elze** im Gymnasium Oberursel, **Frau Niederle** in der F-J-L-Gesamtschule Hadamar und **Herrn Dillmann** im Gymnasium Eltville.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden im MONOID in der „Rubrik der Löser“ und auf der MONOID-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: *das Goldene M*.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei MONOID und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Beiträge zur *Seite für den Computer-Fan*, Artikel schreiben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Aus Zwei mach Eins

von Hartwig Fuchs

Eine bekannte Aufgabe

Zwei Quadrate Q_1 und Q_2 seien gegeben. Kann man eines dieser Quadrate so in vier Teile zerlegen, dass sich aus diesen Teilen und dem unzerlegten Quadrat ein neues Quadrat zusammensetzen lässt? Versuche es selbst, bevor Du weiterliest!

Die Lösung zu der Aufgabe

Es seien $Q_1 = ABCD$ und $Q_2 = RSTU$; für die Seitenlängen L_1 von Q_1 und L_2 von Q_2 gelte $L_1 \geq L_2$.

Auf den Seiten von Q_1 markieren wir Punkte A^*, B^*, C^* und D^* so, dass die Strecken AA^*, BB^*, CC^*, und DD^* sämtlich die Länge $L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ besitzen – eine Begründung für diese Wahl von L wird unten nachgeliefert.

Die Q_1 querenden Strecken A^*C^* und B^*D^* zerlegen Q_1 in vier Vierecke mit einer allen gemeinsamen Ecke M. Nach Konstruktion stimmen in diesen Vierecken drei Innenwinkel – und somit alle Innenwinkel – sowie die Längen je zweier Seiten überein: Daher sind die vier Teilfiguren V_1, V_2, V_3, V_4 von Q_1 kongruent.

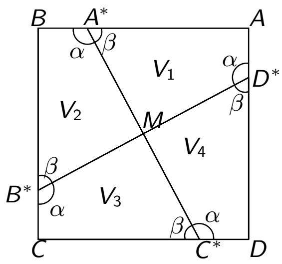


Bild 1

Wir legen nun V_1, V_2, V_3, V_4 so wie in Bild 2 an die Seite des Quadrates Q_2 an. Wir wollen dann zeigen, dass der Umriss der Figur in Bild 2 in Wirklichkeit ein Quadrat $M_1M_2M_3M_4$ und nicht etwa ein Zwölfeck ist. Da die Figur in Bild 2 drehsymmetrisch ist, genügt dazu der Nachweis, dass es eine einspringende Ecke, zum Beispiel $A_1^*A_2^*M_2$, gar nicht gibt. Dabei sollten wir stets das Bild 1 im Auge behalten.

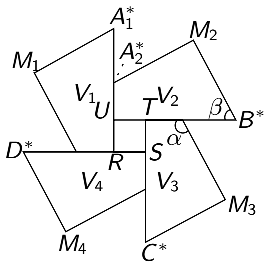


Bild 2

In V_1 ist $|RA_1^*| = |AA^*| = L$; in V_2 folgt aus $|UA_2^*| = |BA^*| = L_1 - L$, dass $|RA_2^*| = |RU| + |UA_2^*| = L_2 + L_1 - L$ ist. Daraus ergibt sich: Es gilt $A_1^* = A_2^*$, sobald $|RA_1^*| = |RA_2^*|$, also $L = L_1 + L_2 - L$ und somit $L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$, ist. So aber war L oben definiert. Die Punkte A_1^* und A_2^* stimmen daher überein.

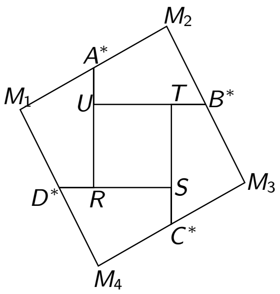


Bild 3

Wir setzen nun $A_1^* = A_2^* = A^*$. Dann hat der Streckenzug $M_1A^*M_2$ keinen Knick in A^*, denn wir haben oben begründet (Bild 1), dass in Bild 2 $\alpha + \beta = 180°$ gelten muss. Daher ist $M_1A^*M_2$ eine Strecke.

Wegen der Drehsymmetrie der aus Q_2 und V_1, V_2, V_3, V_4 zusammengesetzten Figur gilt also: Die Strecken M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1 sind gleich lang. Und da sie nach Konstruktion vier rechte Innenwinkel besitzt, stellt das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ das Lösungsquadrat dar (Bild 3).

Wer war's?

von Margarita Kraus

Sie wird als „Mutter der modernen Algebra" bezeichnet, weil ihre Denkweise ein neues Zeitalter der Algebra einleitete, in dem es nicht mehr um umfangreiche Rechnungen, sondern um abstraktere Begriffe ging. Obwohl sie schon zu Lebzeiten eine anerkannte Mathematikerin war, bekam sie nie eine Stelle als ordentliche Professorin.

Selbst die Habilitation scheiterte im ersten Anlauf, obwohl nie Zweifel an ihrer mathematischen Befähigung herrschten. Die wahren Gründe verrät das folgende Gutachten: „,... die wissenschaftliche Höhe der deutschen Universitäten würde durch die fortschreitende Verweiblichung zweifellos sinken. Alle Fakultätsmitglieder sind darüber einig, ... dass ein weiblicher Kopf nur ganz ausnahmsweise schöpferische wissenschaftliche Leistungen hervorbringen wird ... wenn sich unser Widerspruch ... nur auf die schweren sozialen und akademischen Bedenken und Folgen stützt, die gegen die Zulassung der Frauen zur Habilitation sprechen" Unterzeichnet am 19.11.1915 von Professoren der Göttinger Universität.

Erst vier Jahre später – 1919, mit Beginn der Weimarer Republik – konnte sie sich habilitieren. Ohne feste Anstellung lehrte und forschte sie bis 1933 mit kleinen Unterbrechungen in Göttingen und wurde dort Mittelpunkt einer mathematischen Schule, die weltweit Anerkennung fand.

Am 25.04.1933 wurde sie, da sie Jüdin war, aufgrund des Gesetzes zur *Wiederherstellung des Berufsbeamtentums* von ihrer Tätigkeit an der Universität „beurlaubt". Sie ging ins Exil in die USA. Am Frauenkolleg Bryn Mawr (USA) erhielt sie eine Gastprofessur. Doch schon am 14.04.1935 starb sie völlig unerwartet an den Folgen einer Operation. Albert Einstein schrieb in seinem Nachruf, der am 04.05.1935 in der New York Times erschien, dass „das kreativste mathematische Genie, das seit Begin der höheren Erziehung für Mädchen geboren worden ist", nicht mehr am Leben war.

Des Rätsels Lösung

Die gesuchte Person ist *Emmy Amalie Noether*. Sie wurde als erstes von vier Kindern der jüdischen Eltern Ida Amalia Noether, geb. Kaufmann, und Max Noether am 23.03.1882 in Erlangen geboren.

Ihr Vater war Professor für Mathematik an der Universität Erlangen. Nach dem Besuch der Schule für höhere Töchter legte sie 1900 die bayerische Staatsprüfung für Lehrerinnen in französischer und englischer Sprache ab. Es gab zu dieser Zeit weder Schulen, in denen Mädchen zum Abitur geführt wurden, noch konnten sich Frauen an deutschen Hochschulen immatrikulieren. Jedoch konnten (mit Erlaubnis des Professors) Frauen als Gasthörerinnen Vorlesungen besuchen und dies tat Emmy Noether. Zu der Zeit gibt es knapp 1000 Studenten und 3 Gasthörerinnen in Erlangen. Neben Romanistik und Geschichte begann sie auch Mathematik-Vorlesungen bei ihrem Vater und dessen Kollegen, Prof. Paul Gordon, zu hören.

1903 legte sie als „Externe“ das Abitur ab. Nach einem Semester in Göttingen kehrte sie wieder nach Erlangen zurück. Dort war es mittlerweile auch für Frauen möglich, sich zu immatrikulieren, und sie begann ihr Mathematikstudium. 1907 schloss sie ihre Promotion bei Paul Gordon mit „summa cum laude“ ab. Im Gegensatz zu ihren späteren Arbeiten hatte ihre Dissertation komplizierte technische Rechnungen zum Gegenstand. Später bezeichnet sie ihre Dissertation als „Formelgestrüpp“ und „Mist“. Anschließend unterstützte sie ihren Vater bei seiner Lehrtätigkeit und arbeitete privat wissenschaftlich. 1909 hielt sie als erste Frau bei einer Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung einen Vortrag.

1915 ging sie zur Zusammenarbeit mit Felix Klein und David Hilbert nach Göttingen – einem der führenden mathematischen Institute dieser Zeit. Ein erster Habilitationsversuch 1915 scheiterte, da die preußische Habilitationsordnung nur Männer zur Habilitation zuließ. Die Göttinger Professoren versuchten vergeblich, eine Ausnahmegenehmigung für Emmy Noether zu erreichen. Die Diskussionen dazu waren wohl sehr kontrovers. Von Hilbert ist der Ausspruch überliefert „Meine Herren, wir befinden uns hier in einer Universität nicht in einer Badeanstalt, ich kann nicht sehen, welche Rolle das Geschlecht des Kandidaten spielt.“ Emmy Noether war keine rebellische Feministin, die gegen ihre Rolle aufbegehrte, sondern eine leidenschaftliche Forscherin. Sie arbeitete weiter mit Klein und Hilbert an Fragen der allgemeinen Relativitätstheorie. Daraus entstand ihre Arbeit „Invariante Variationsprobleme“, mit der sie sich 1919, nach Ende des Ersten Weltkriegs habilitierte. Einstein schrieb über diese Arbeit: „Es imponiert mir, dass man diese Dinge von so allgemeinem Standpunkt übersehen kann. Es hätte den Göttinger Feldgrauen nichts geschadet, wenn sie zu Fräulein Noether in die Schule geschickt worden wären. Sie scheint ihr Handwerk zu verstehen."

Wir werden unten noch auf den Inhalt dieser Arbeit, die auch heute noch in vielen Physikbüchern zitiert wird, eingehen.

Für Emmy Noether war diese Arbeit jedoch abseits ihrer hauptsächlichen Interessen, der abstrakten Algebra. Viele Begriffe dort tragen ihren Namen. So gibt es zum Beispiel *noethersche Ringe*, die heute jeder Mathematik-Student kennt.

Ihre Vorlesungen waren wohl nicht nach jedermanns Geschmack und weniger für Anfänger als für fortgeschrittene Studenten geeignet. Auch ihr Vortragsstil war gewöhnungsbedürftig. „Sie zerstampfte manchmal ein Stück Kreide, das sie zerbrochen hatte ..., das Gegenteil einer eleganten Dame", berichtete einer ihrer Schüler, der Algebraiker van der Waerden.

Oft präsentierte sie neue Theorien und Beweise in ihren Vorlesungen. So hatte sie bald einen Kreis begabter Schüler um sich, ihre „Trabanten" oder die „Noether-Knaben", wie sie genannt wurden. Zu ihnen gehörten nicht nur fortgeschrittene Studenten, sondern auch ausgebildete Mathematiker – unter ihnen viele ausländische Gäste. Nicht nur in Seminaren, sondern auch bei langen gemeinsamen Spaziergängen, Puddingessen in ihrer Mansardenwohnung und Schwimmen im Stadtbad redeten sie über Mathematik. Van der Waerden schrieb über sie: „Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler. Sie schrieb für uns alle immer die Einleitungen, in denen die Leitgedanken unserer Arbeiten erklärt wurden, die wir selbst anfangs niemals in solcher Klarheit bewusst machen und aussprechen konnten. Sie war uns eine treue Freundin und gleichzeitig eine strenge, unbestechliche Richterin."

Dieses blühende mathematische Leben wurde durch das Nazi-Gesetz *zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums* von 1933 jäh zerstört. Sie emigrierte in die USA. Rasch begann sie in Bryn Mawr wieder einen Kreis von Schülerinnen um sich zu scharen. Daneben lehrte sie im nahen Princeton bis sie 1935 völlig unerwartet starb.

Der in der Arbeit „Invariante Variationsprobleme" bewiesene Satz spielt auch heute noch vor allem in der Physik, aber auch in der Mathematik, eine wichtige Rolle. Die Stärke des Satzes liegt darin, dass eine spezielle Fragestellung – hier die nach der Erhaltung der Energie in der allgemeinen Relativitätstheorie – so verallgemeinert wird, dass er Antworten auf völlig unterschiedliche Fragestellungen gibt: Grob formuliert, sagt der Satz, dass jede „Symmetrie" eines Problems eine „Erhaltungsgröße" liefert.

Ein geometrisches Muster ist symmetrisch, wenn es unter bestimmten „Bewegungen", beispielsweise Verschiebungen, Spiegelungen oder Drehungen in sich überführt wird. Entsprechend kann man auch von der Symmetrie eines physikalischen Experiments sprechen, wenn man es verändern kann und dennoch

dieselben Resultate erzielt:
Führt man ein physikalisches Experiment durch, so erwartet man, dass das Ergebnis unabhängig vom Zeitpunkt der Ausführung ist. Ein Pendel schwingt heute so schnell wie morgen. Dies nennt man „Symmetrie gegenüber Verschiebungen in der Zeit." Die „Erhaltungsgröße", die man nach dem Satz von Emmy Noether daraus herleiten kann, ist die „Energie". In einem „abgeschlossenen" System bleibt die Energie erhalten.
Wenn man ein Experiment unter gleichen Bedingungen an verschiedenen Orten ausführt, so erwartet man dieselben Messergebnisse. Dies nennt man „Symmetrie unter räumlichen Verschiebungen". Die Erhaltungsgröße, die der *Noether'sche Satz* liefert, ist die Impulserhaltung, das heißt, wenn auf einen Körper keine äußere Kraft wirkt, bleibt der Impuls, also das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, erhalten.
Die wichtigste Rolle spielt der Satz heute in der modernen Elementarteilchenphysik. Symmetrien der Systeme führen dort zur Erhaltung der Ladung und gewisser „Quantenzahlen".

Eulers Berechnung von π mit einem Primzahlen-Sieb

von Hartwig Fuchs

Die Primzahlen und die Kreiszahl π sind seit bald 3000 Jahren Themen der Mathematik. Dabei galt lange Zeit:

„Primzahlen gehören zur Zahlentheorie und die Zahl π ist ausschließlich eine Rechengröße der Geometrie."

Leonhard Euler (1707–1783) widerlegte dieses Vorurteil, als es ihm gelang, eine arithmetische Verbindung zwischen den Primzahlen und π herzuleiten. Ganz unvorbereitet war seine Entdeckung allerdings nicht – sie hatte berühmte Vorläufer:

John Wallis (1616–1703), ein anglikanischer Geistlicher, der erst mit 30 Jahren als Autodidakt (Selbstlerner) zur Mathematik kam, veröffentlichte 1655 eine Gleichung, nämlich das nach ihm benannte unendliche Wallis-Produkt

(1) $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$

Er schlug also eine arithmetische Brücke zwischen den rationalen Zahlen und der Kreiszahl π.

Im Jahre 1682 wurde dann von Gottfried W. Leibniz (1646–1716), einem der größten Gelehrten seiner Zeit, die sogenannte Leibniz-Reihe entdeckt:

(2) $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

Hiermit ist eine arithmetische Beziehung zwischen π und nur den ungeraden natürlichen Zahlen hergestellt.

Die Gleichungen (1) und (2) waren von großer Bedeutung für die Mathematik. Sie brachten einen wichtigen methodischen Fortschritt:
Sie zeigen, dass die bis dahin nur in geometrischen Berechnungen aufgetretene Zahle π durchaus auch in arithmetischen Zusammenhängen vorkommt und solche Zusammenhänge lassen sich mit zahlentheoretischen Mitteln bearbeiten.

Euler demonstierte mit der Herleitung seiner Formel (3), dem unendlichen Euler-Produkt, wie so eine Bearbeitung aussehen kann:

(3) $\frac{\pi}{4}(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})...(1 \pm \frac{1}{p_n})... = 1$ mit $(1+\frac{1}{p_n})$ falls $n = 4k-1$ und $(1-\frac{1}{p_n})$ falls $n = 4k+1$, wobei p_n die n-te Primzahl meint und $n \geq 2$ gilt.

Das von Euler dabei eingesetzte zahlentheoretische Werkzeug ist ein uralter simpler Algorithmus – ein sogenanntes *Primzahlen-Sieb*.

Seit der Antike besitzen die Mathematiker ein von Eratosthenes von Kyrene (um 284–ca. 200 v. Chr.) entwickeltes, genial einfaches Verfahren zur Aussonderung der Primzahlen aus der Folge der natürlichen Zahlen – das Sieb des Eratosthenes –, welches noch nicht einmal vorraussetzt, dass man multiplizieren kann, nur zählen muss man können und Folgendes wissen:

($*$) Wenn man von einer natürlichen Zahl $a > 1$ aus mit der Schrittlänge a die Folge der natürlichen Zahlen „entlang geht“, dann trifft man dabei genau die Vielfachen von a, nämlich a, $2a$, $3a$, ...

Das Verfahren von Eratosthenes funktioniert als Siebverfahren so:
Es sei $F_0 : 2, 3, 4, 5, ...$ die Folge der natürlichen Zahlen größer als 1.
1. Durchgang: Aus F_0 entfernt man alle Vielfache von 2 außer der 2 selbst. Man erhält so die Folge F_1.

$$F_1 : [2], 3, 5, 7, 9, 11, ..., 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, ...$$

2. Durchgang: Man streicht in F_1 alle Vielfache von 3 außer der 3 selbst. Man erhält so die Folge F_2.

$$F_2 : [2, 3], 5, 7, 11, ..., 47, 49, 53, 55, 59, ...$$

3. Durchgang: Man streicht in F_2 alle Vielfache von 5 außer der 5 selbst. Man erhält so die Folge F_3.

$$F_3 : [2, 3, 5], 7, 11, ..., 47, 49, 53, 59, ...$$

4. Durchgang: Man streicht in F_3 alle Vielfache von 7 außer der 7 selbst. Man erhält so die Folge F_4.

$$F_4 : [2, 3, 5, 7], 11, ..., 47, 53, 59, ...$$

Man macht sich leicht klar, dass für $n \geq 1$ gilt:

Ist $F_n = [2, 3, 5, 7, ..., p_n], m_1, m_2, m_3, ...,$ dann bildet $[2, 3, 5, ..., p_n]$ ein Anfangsstück der Folge $p_1, p_2, p_3, ...p_n, ...$ der nach wachsender Größe gordneten Primzahlen; $m_1, m_2, m_3, ...$ sind natürliche Zahlen größer als p_n, von denen keine durch eine Primzahl kleiner oder gleich p_n teilbar ist.

Diese Aussage lässt sich anschaulich so umschreiben:
Das Eratosthenes-Verfahren siebt aus der Fogle der natürlichen Zahlen größer 1 genau die Primzahlen aus.

Wie hat nun Leonhard Euler die mit (3) behauptete arithmetische Beziehung zwischen π und den Primzahlen hergeleitet?

Sein Ausgangspunkt war die Leibniz-Reihe (2), die wir R_1 nennen und so schreiben:

$$R_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... \pm \frac{1}{t} \pm ...,$$

mit $+\frac{1}{t}$, falls $t = 4n+1$, sowie $-\frac{1}{t}$, falls $t = 4n-1$. Dabei sei $t \geq 1$ ungerade.

Euler hatte bemerkt, dass bis auf eine Ausnahme die Reziproken der Zahlen der Eratosthenes-Folge F_1 genau die Bruchzahlen der Reihe (2) sind. Das brachte ihn dazu, das folgende Eratosthenes-Verfahren auf R_1 anzuwenden:

1. Durchgang: Aus R_1 entfernte Euler alle Brüche, deren Nenner Vielfache der Primzahl 3 sind. Er erreicht dies, indem er zu R_1 die Reihe $\frac{1}{3}R_1$ so addiert*:

$$\begin{array}{rl} R_1 = & +\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} \pm ... + \tfrac{1}{49} - \tfrac{1}{51} + \tfrac{1}{53} - \tfrac{1}{55} \pm ... \\ +\tfrac{1}{3}R_1 = & \qquad + \tfrac{1}{3} \qquad\qquad - \tfrac{1}{9} \qquad \pm ... \qquad + \tfrac{1}{51} \qquad\qquad \pm ... \\ \hline R_2 = (1+\tfrac{1}{3})R_1 = & +\tfrac{1}{1} \qquad + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} \qquad - \tfrac{1}{11} \pm ... + \tfrac{1}{49} \qquad + \tfrac{1}{53} - \tfrac{1}{55} \pm ... \end{array}$$

2. Durchgang: Aus R_2 werden alle Brüche entfernt, deren Nenner Vielfache der Primzahl 5 sind, indem man zu R_2 die Reihe $-\frac{1}{5}R_2$ addiert. Man erhält die Reihe R_3:
$R_3 = R_2(1 - \frac{1}{5}) = \frac{1}{1} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \pm ... + \frac{1}{49} + \frac{1}{53} - \frac{1}{59} \pm ...$
3. Durchgang: Entfernung aller Brüche aus R_3, deren Nenner Vielfache der Primzahl 7 sind, durch Addition der Reihe $\frac{1}{7}R_3$ zu R_3 ergibt die Reihe R_4:

$$R_4 = R_3(1 + \frac{1}{7}) = \frac{1}{1} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \pm ... - \frac{1}{47} + \frac{1}{53} - \frac{1}{59} \pm ...$$

So fortfahrend (vollständige Induktion) erhält man aufeinander folgende Reihen $R_1, R_2, R_3, ..., R_{n-1}, R_n$ für $n \geq 2$, wobei für R_n gilt:

* Mit der Reihenlehre lässt sich beweisen, dass die an den Reihen $R_1, R_2, R_3, ...$ ausgeführten Operationen sämtlich zulässig sind.

$R_n = R_{n-1}(1 \pm \frac{1}{p_n}) = \frac{1}{1} \pm \frac{1}{p_{n+1}} \pm ...$ Dabei meinen p_n und p_{n+1} die n-te und (n+1)-te Primzahl. Es ist $1 + p_n$ falls $p_n = 4k - 1$ sowie $1 - p_n$ falls $p_n = 4k + 1$ und $\frac{1}{1} + \frac{1}{p_{n+1}}$ falls $p_{n+1} = 4m + 1$ ist sowie $\frac{1}{1} - \frac{1}{p_{n+1}}$ falls $p_{n+1} = 4m - 1$ ist.

Ersetzt man nun in der Gleichung für R_n der Reihe nach R_{n-1} durch R_{n-2}, dann R_{n-2} durch R_{n-3}, ... und schließlich R_2 durch R_1, so folgt:

$$R_n = R_1(1 + \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{1}{5})(1 + \tfrac{1}{7})...(1 \pm \tfrac{1}{p_n}) = \tfrac{1}{1} \pm \tfrac{1}{p_{n+1}} \pm ...$$

Von hier aus hat Euler vielleicht so weiter überlegt:
Es ist $\frac{1}{1} \pm \frac{1}{p_{n+1}} \pm ... = 1 + R_1 - (\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \pm ... \pm \frac{1}{p_n})$
Damit gilt für $n \to \infty$:
Wegen (2) ist $1 + R_1 - (\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \pm ... \pm \frac{1}{p_n}) \to 1 + R_1 - R_1 = 1$; folglich ist auch $\frac{1}{1} \pm \frac{1}{p_{n+1}} \pm ... \to 1$ und deshalb auch $R_n \to 1$.
Das Letzte bedeutet aber mit $R_1 = \frac{\pi}{4}$, dass dann wegen
$\frac{\pi}{4}(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7})...(1 \pm \frac{1}{p_n}) \to 1$ Eulers Behauptung (3) zutrifft.

Selbst heute im Zeitalter der Computer sind die Formeln (1),(2) und (3) nur von geringem praktischen Nutzen:
Um auch nur einige wenige sichere Stellen des π-Wertes zu erhalten, muss man unverhältnismässig riesige Anzahlen von Summanden bzw. Faktoren berücksichtigen, weil die Ausdrücke (1),(2) und (3) äußerst langsam konvergieren.

Hättest Du es gewusst?

Was ist ein unendlicher Abstieg

von Hartwig Fuchs

Eine der ältesten Beweisstrategien, die wir kennen, ist ein bemerkenswert strukturierter *Umöglichkeitsbeweis*, den die Mathematiker des alten Griechenland – vermutlich die Pythagoreer, eine von etwa 550 bis 350 v. Chr. bestehende Gruppe von Philosophen und Mathematikern – entwickelt haben. Er geriet nach dem Untergang der griechisch-römischen Zivilisation lange in Vergessenheit, bis ihn Pierre de Fermat (1601–1665) wiederentdeckte. Fermat war so stolz auf „sein“ Beweisverfahren, dass er später behauptete, alle seine schönen mathematischen Erfolge alleine damit errungen zu haben.
Er war es auch, der dieser Beweisstrategie ihren heutigen Namen gab: *descente infinie* – was mit *unendlicher Abstieg* und manchmal auch mit *unendlicher Regress* übersetzt wird.

Die Methode des unendlichen Abstiegs funktioniert anschaulich so: Ein logischer Prozess führt von Stufe zu Stufe hinab in einen mathematischen Abgrund – in einen Widerspruch. Aber dieser Widerspruch ermöglicht es – erstaunlicher Weise – die Wahrheit einer zu beweisenden Aussage herzuleiten.*

Algorithmische Beschreibung eines unendlichen Regresses

Es sei A eine Aussage, in der natürliche Zahlen n eine Rolle spielen– solche Aussagen bezeichnen wir mit Hinweis auf die Abhängigkeit der Aussage A von n mit $A(n)$.
Die mit einem unendlichen Abstieg beweisbaren Behauptungen sind nun im einfachsten Fall typischer Weise von der Art:

(1) Die Aussage $A(n)$ trifft für keine natürliche Zahl n zu.

Man beginnt den Beweis von (1) mit einem unerwarteten logischen Zug, indem man das Gegenteil von (1) – also die Negation (Verneinung) von (1) – für ein n_1 als wahr annimmt, also:

(2) Die Aussage $A(n_1)$ ist wahr für eine natürliche Zahl n_1.

Aus der Annahme (2) sei nun herleitbar, dass für eine natürliche Zahl n_2 mit $n_2 < n_1$ gilt:

(3) Die Aussage $A(n_2)$ trifft zu für n_2.

Mit (3) befindet man sich nun in der gleichen logischen Situation wie bei (2). Von (3) kann man daher auch mit der gleichen Schlusskette wie (2) $\Rightarrow$ (3) die Behauptung beweisen: Für eine natürliche Zahl n_3 mit $n_3 < n_2$ gilt:

(4) Die Aussage $A(n_3)$ ist wahr für n_3.

Aus $A(n_3)$ leitet man ebenso $A(n_4)$ für ein $n_4 < n_3$ her und so weiter... in einer anscheinend nicht abbrechende Folge von weiteren „Abstiegen“ $A(n_5)$, $A(n_6)$, $A(n_7)$... mit $n_4 > n_5 > n_6 > n_7 >$...
Aber die mit einer unbeschränkt langen Schlusskette (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$... einhergehende, ebenfalls unbeschränkt lange Ungleichungskette $n_1 > n_2 > n_3 >$... von immer kleiner werdenden natürlichen Zahlen n_1, n_2, n_3, ... ist gar nicht möglich, denn sie widerspricht der Tatsache, dass es unterhalb von n_1 nur endlich viele verschiedene natürliche Zahlen gibt.
Aus diesem Widerspruch folgt: Die Annahme (2) muss falsch sein. Dann gilt aber (1), was zu zeigen war.

Anwendung an einem Beispiel

An einem geometrischen(!) Beispiel demonstieren wir, wie der logische Prozess des unendlichen Abstiegs konkret abläuft, indem wir zeigen:

($*$) Es gibt kein regelmäßiges Fünfeck, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind.

* Ludwig Wittgensetin (1889–1951), einer der bedeutendsten Philosophen und Logiker des 20. Jahrhunderts, bemerkt einmal: „Die Logiker und Mathematiker haben eine abergläubige Angst vor dem Widerspruch.“ Unser Bericht wird zeigen, dass diese Angst bei einem unendlichen Regress gänzlich unbegründet ist.

Eine Ebene sei mit einem cartesischen Koordinatensystem versehen. Dann heißt jeder Punkt $(x|y)$ mit ganzzahligen Koordinaten x, y ein *Gitterpunkt*. Um zu zeigen, dass $(*)$ gilt, beweisen wir vorweg:

a) Die quadrierte Länge einer Strecke zwischen zwei Gitterpunkten ist ganzzahlig.

b) Sind drei Eckpunkte eines Parallelogramms Gitterpunkte, so ist es auch der vierte Eckpunkt.

Begründung:

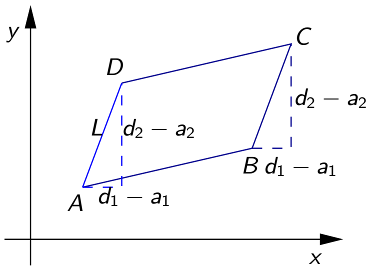


Abbildung 1

$A = (a_1|a_2)$ und $D = (d_1|d_2)$ seien zwei beliebige Gitterpunkte – vergleiche Abbildung 1. Dann ist die quadrierte Länge $L^2 = (d_1 - a_1)^2 + (d_2 - a_2)^2$, da nur mit ganzen Zahlen addiert, subtrahiert und multipliziert wird, ganzzahlig.
$B = (b_1|b_2)$ sei nun ein weiterer Gitterpunkt und $C = (c_1|c_2)$ ein vierter Punkt so, dass der Streckenzug $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Dann ist $c_1 = b_1 + (d_1 - a_1)$ und $c_2 = b_2 + (d_2 - a_2)$. Wie bei der quadrierten Seitenlänge sind demnach c_1 und c_2 ganze Zahlen, also ist C ebenfalls ein Gitterpunkt.

Wir beweisen nun $(*)$ durch einen unendliche Abstieg:

Annahme: Die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 und E_1 eines regelmäßigen Fünfecks F_1 seien Gitterpunkte.

Dann ist die quadrierte Seitenlänge L_1^2 von F_1 ganzzahlig. In das Fünfeck F_1 konstruieren wir fünf Rauten, etwa die Raute $A_1B_1C_1D_2$ mit Gitterpunkten A_1, B_1, C_1 und D_2 – vergleiche Abbildung 2 – sowie die übrigen Rauten $B_1C_1D_1E_2$ und so weiter – vergleiche Abbildung 3. Die fünf Punkte A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 sind als Eckpunkte der Rauten – und somit als Eckpunkte spezieller Parallelogramme – jeweils Gitterpunkte; sie bilden die Eckpunkte eines neuen Fünfecks F_2, welches aus Symmetriegründen regelmäßig ist.

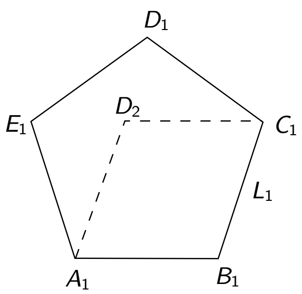


Abbildung 2

Aus der Annahme folgt somit:
Sämtliche Eckpunkte des regelmäßigen Fünfecks F_2 sind Gitterpunkte und deshalb ist die quadrierte Seitenlänge ${L_2}^2$ von F_2 ganzzahlig. Offentsichtlich gilt ${L_2}^2 < {L_1}^2$. Ebenso konstruiert man aus F_2 ein regelmäßiges Fünfeck F_3 mit lauter Gittereckpunkten und ganzzahligen, quadrierten Seitenlängen ${L_3}^2$ mit ${L_3}^2 < {L_2}^2$ und so weiter...

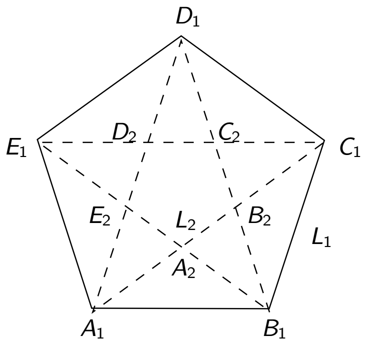


Abbildung 3

Aber eine auf diese Weise erzeugte, nicht abbrechende Folge von natürlichen Zahlen ${L_1}^2, {L_2}^2, {L_3}^2$, ... mit ${L_1}^2 > {L_2}^2 > {L_2}^2$, ist nicht möglich – irgentwann muss es eine kleinste natürliche Zahl geben! Damit ist gezeigt, dass die am Anfang getroffene Annahme auf einen Widerspruch führt, also ist sie falsch. Somit gilt die Behauptung ($*$).

Die besondere Aufgabe

Über die Zerlegung von spitzwinkligen Dreiecken in spitzwinklige Dreiecke

von Hartwig Fuchs

Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn jeder seiner Winkel $< 90°$ ist. Spitzwinklige Dreiecke können nicht immer in spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden. Vielmehr lässt sich zeigen:

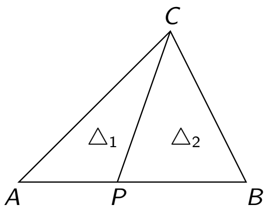
> Ein spitzwinkliges Dreieck kann nicht in zwei oder drei, wohl aber in vier spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden.

Die Lösung

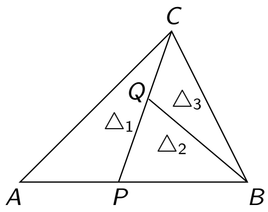
Es sei $\triangle$ ein spitzwinkliges Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C.

(1) Annahme: $\triangle$ sei in zwei spitzwinklige Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$ zerlegt.

Die beiden Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ besitzen eine gemeinsame Seite, bei der ein Endpunkt zugleich Eckpunkt von $\triangle$ sein muss und der andere Endpunkt – er sei P genannt – in einer Seite von $\triangle$ liegt (Figur 1). Dann sind nach Voraussetzung die Winkel von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ bei P zusammen $< 90° + 90°$, also $< 180°$ – ein Widerspruch: $\triangle_1$ und $\triangle_2$ können daher nicht beide spitzwinklig sein.



Figur 1



Figur 2

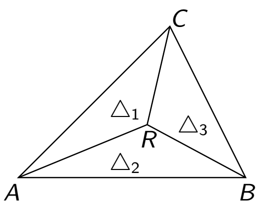
(2) Annahme: $\triangle$ sei in drei Spitzwinklige $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ zerlegt.

1. Fall: Es gebe keinen Punkt R, der ein gemeinsamer Eckpunkt von $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ ist.
Zerlegung von $\triangle$:
Zunächst zertrennt man $\triangle$ wie in Figur 1 in zwei Dreiecke – deren gemeinsame Seite sei CP. Eines der beiden Dreiecke – zu Beispiel $\triangle$ BCP zerlegt man weiter in zwei Dreiecke $\triangle_2$, $\triangle_3$ mit gemeinsamer Seite BQ (vergleiche Figur 2). Wie in (1) folgt für die Winkel von $\triangle_2$ und $\triangle_3$ bei Q, dass sie zusammen $< 180°$ sind – ein Widerspruch. Also tritt der 1.Fall nicht ein.

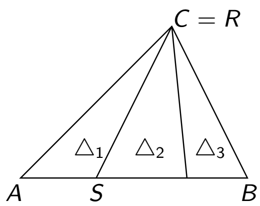
2. Fall: Es gebe einen Punkt R, der gemeinsamer Eckpunkt von $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ ist.

a) R liegt im Inneren von $\triangle$ (Figur 3).
Dann sind die Winkel von $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ beim Punkt R zusammen $< 3 \cdot 90° = 270°$ – ein Widerspruch, da sie ja zusammen $360°$ ergeben müssen.

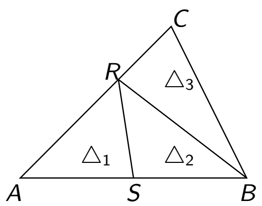
b) R sei ein Eckpunkt von $\triangle$ oder R liege in einer Seite von $\triangle$.
Dann sind nur die in Figur 4 oder Figur 5 skizzierten Zerlegungen möglich. Es gibt daher stets einen Punkt S, $S \neq R$, in einer Seite von $\triangle$, der gemeinsamer Endpunkt zweier Zerlegungsdreiecke ist. Wie in (1) folgt daraus der Widerspruch, dass die Winkel zweier Dreiecke bei S zusammen $< 180°$ sind.



Figur 3



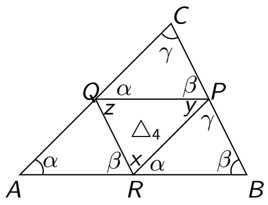
Figur 4



Figur 5

Mit (1) und (2) ist gezeigt: Ein spitzwinkliges Dreieck ist weder in zwei noch in drei spitzwinklige Dreiecke zerlegbar.

(3) Wir zeichnen in $\triangle$ das Mittendreieck PQR ein und zerlegen $\triangle$ in vier kongruente Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ $\triangle_4$, die zu $\triangle$ ähnlich sind, denn die Seitenlängen von $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ und $\triangle_4$ betragen die Hälften der Seitenlängen von $\triangle$, da P, Q, R deren Mittelpunkte sind und weil $PQ \parallel AB$, $QR \parallel BC$, $RP \parallel CA$ (Umkehrung des Strahlensatzes).



Figur 6

Bezeichnet man die Winkel von $\triangle$ mit α, β, γ, dann sind die Winkel von $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ als Stufenwinkel an Parallelen festgelegt (Figur 6).
Für den Winkel x von $\triangle_4$ gilt: $\alpha + \beta + x = 180°$; also $x = \gamma$. Entsprechend findet man: $y = \alpha$ und $z = \beta$.

Wegen α, β, $\gamma < 90°$ sind die vier Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ und $\triangle_4$ spitzwinklig. Daher ist jedes spitzwinklige Dreieck in vier spitzwinklige Dreiecke zerlegbar.

Anregung zum Weiterdenken

Wie steht es mit der Zerlegung eines spitzwinkligen Dreiecks in fünf (in sechs, in sieben, in acht, ...) spitzwinklige Dreiecke?

Die Seiten für den Computer-Fan

Eine Formel zur Erzeugung von Primzahlzwillingen?

Ein Primzahlzwilling ist ein Paar (p, q) von Primzahlen p und q im Abstand 2 wie $(3, 5)$, $(5, 7)$ oder $(11, 13)$. Die Frage, ob es unendlich viele oder nur endlich viele Primzahlzwillinge gibt, ist bislang trotz intensiver Bemühungen der Mathematiker noch nicht entschieden.

Wenn man eine Formel als Funktion einer natürlichen Zahl n finden könnte, die für alle n nur Primzahlzwillinge liefert oder doch mit wachsendem n immer wieder welche, wäre der Nachweis erbracht, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt; denn dies ist die allgemeine Vermutung.

Untersuche unter diesem Aspekt die Folge der Zahlenpaare $(p(n), q(n))$ mit

$$p(n) := 30 \cdot |(2n-27) \cdot (n-15)| - 1 \text{ und } q(n) := 30 \cdot |(2n-27) \cdot (n-15)| + 1$$

für möglichst viele natürliche Zahlen n. Was beobachtest Du? (nach H.F.)

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. Mai 2009 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend dokumentieren durch Einsenden der Programm-Datei (am Besten als E-Mail-Anhang an monoid@mathematik.uni-mainz.de).

Die Lösungen werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Ergebnisse zur Computer-Aufgabe aus Monoid 95

Aufgabe: Ganzzahlige Punkte auf kubischer Kurve

Wir betrachten in einem (x, y)-Koordinatensystem die Kurve k, die durch die kubische Gleichung $y^2 - x^3 = 17$ beschrieben wird.

Falls es in dem Kreisgebiet, das durch die Ungleichung $x^2 + y^2 \leq 10^8$ definiert wird, Kurvenpunkte K auf k mit ganzzahligen Koordinaten gibt, bestimme man diese! (H.F.)

Ergebnisse:

Es genügt zur Auffindung von Lösungen in dem vorgeschlagenen Bereich nur ganzzahlige x mit $-2 \leq x \leq 10^4$ in Betracht zu ziehen; denn für $x \leq -3$ ist $y^2 - x^3 \geq 27$ und für $x > 10^4$ ist $x^2 + y^2 > 10^8$.
Mit dieser Coputer-Aufgabe beschäftigt haben sich **Janosch Gräf** (Georg-Forster-Gesamtschule Wörrstadt) und **Florian Schweiger** (Gymnasium Marktoberdorf) mit eigenen Programmen in *C* beziehungsweise *Visual Basic*. Ihre übereinstimmenden Resultate von 14 ganzzahligen Koordinatenpaaren (x, y) lauten:

$K_1(-2|3)$, $K_2(-2|-3)$, $K_3(-1|4)$, $K_4(-1|-4)$,
$K_5(2|5)$, $K_6(2|-5)$, $K_7(4|9)$, $K_8(4|-9)$,
$K_9(8|23)$, $K_{10}(8|-23)$, $K_{11}(43|282)$, $K_{12}(43|-282)$,
$K_{13}(52|375)$, $K_{14}(52|-375)$.

Florian Schweiger ist mit x noch über 10^4 hinaus gegangen (bis 10^5) und hat dabei noch zwei weitere Punkte entdeckt:

$K_{15}(5234|378661)$ und $K_{16}(5234|-378661)$.

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Zahlen-Trapeze

Schreibe für eine natürliche Zahl $n > 1$ einen beliebig langen Anfang der n-ten Potenzen 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, ... in eine Reihe R_1. Berechne dann die positiven Differenzen D_1, D_2, D_3, ... von jeweils zwei benachbarten Potenzen und schreibe sie wie im Beispiel in einer Reihe R_2 unter die Reihe R_1; danach schreibe die positiven Differenzen von jeweils zwei benachbarten Zahlen D_i, D_{i+1} in einer Reihe R_3 unter die Zeile R_2, und so weiter.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
R_1: & 1^3 & & 2^3 & & 3^3 & & 4^3 & & 5^3 & & 6^3 & \ldots \\
R_2: & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & \ldots \\
R_3: & & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & \ldots \\
R_4: & & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \ldots
\end{array}
$$

Untersuche nun solche Zahlen-Trapeze für verschiedene Werte von n.
Kannst du in ihnen irgendwelche Gesetzmäßigkeiten erkennen?
Wenn ja: Formuliere sie als Vermutung! (H.F.)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15.08.2009 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils drei Hefte später veröffentlicht.

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 96

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

In eigener Sache

Ihr haltet nun das Heft 97 in den Händen, bald können wir also Jubiläum, das 100. feiern.

Bei den Neuen Aufgaben sind wir auch schon weit im 900-er Bereich mit der Aufgabennummerierung, es steht also auch die 1000. Aufgabe kurz bevor.

Doch welches dieser beiden Ereignisse werden wir früher feiern können? Fallen diese Ereignisse vielleicht sogar zusammen?

Hinweis: Wir stellen in der Regel in jedem Heft sieben Neue Aufgaben. – Zusatzfrage für Zusatzpunkte: War es immer so, dass pro Heft sieben Neue Aufgaben gestellt wurden? (MG)

Lösung:

Die Hefte erscheinen alle drei Monate. Daher lässt sich berechnen, dass Heft 100 im Dezember 2009 erscheinen wird.

Im letzten Heft haben wir die Aufgabe 959 gestellt. Daraus lässt sich wiederum hochrechnen, dass bei sieben Aufgaben pro Heft im Jubiläumsheft die Aufgaben 981 bis 987 gestellt werden. Das Jubiläum wird erst später gefeiert werden können, nämlich im Heft 102 im Juni 2010.

Zur Zusatzaufgabe: Da $7 \cdot 100 = 700 < 987$ ist, müssen in früheren Heften schon mehr als „nur“ sieben Aufgaben gestellt worden sein.

Die magische 7 und die auch noch viermal

Simone geht auf Entdeckungsreise durch die Welt der Zahlen. Ihr hat es die magische Sieben angetan. Sie entdeckt:

$$1 = 77 : 77$$
$$2 = 7 : 7 + 7 : 7$$
$$3 = (7 + 7 + 7) : 7$$

Jetzt sucht sie natürlich andere Zahlen, die ebenfalls nur mit Hilfe von genau vier Siebenen, Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, : und Klammem dargestellt werden können. Stelle die Zahlen 4 bis 10 so dar! (WK)

Lösung:

Es gilt zum Beispiel

$$4 = 77 : 7 - 7$$
$$5 = 7 - (7 + 7) : 7$$
$$6 = (7 \cdot 7 - 7) : 7$$
$$7 = (7 - 7) \cdot 7 + 7$$
$$8 = (7 \cdot 7 + 7) : 7$$
$$9 = 7 + (7 + 7) : 7$$
$$10 = (77 - 7) : 7$$

Wie lang ist das Schiff, wie alt der Kapitän?

Seeleute verbringen viel Zeit auf hoher See, und da kommt es schon mal vor, dass sich die Leute gegenseitig kleine Rätsel aufgeben. Ein junger Matrose will von seinem Kapitän wissen, wie lang eigentlich ihr Schiff ist. Der Kapitän testet seinen Mitarbeiter ein wenig und sagt: „Ich habe nicht weniger als drei Kinder. Deren Altersunterschied ist jeweils genau zwei Jahre. Wenn man die Alterszahlen meiner Kinder multipliziert, so kommt mein Alter heraus und das Schiff ist fünfmal so lang, wie ich alt bin.“ Jetzt kann der Matrose berechnen, wie lang das Schiff ist, und er weiß sogar, wie alt der Kapitän ist. (WK)

Lösung:

Wir gehen mal davon aus, dass der Kapitän jünger als das Rentenalter, also 65 oder 67, und älter als 20 Jahre ist. Über seine Kinder wissen wir, dass der Altersunterschied immer genau 2 Jahre beträgt. Wir testen jetzt alle realistischen Möglichkeiten, ausgehend vom Alter des jüngsten Kindes:

Alter der Kinder	Alter des Kapitäns
1; 3; 5	15 (zu jung)
2; 4; 6	48
3; 5; 7	105 (zu alt)

Hätte der Kapitän mehr als drei Kinder, also mindestens vier, so wären diese mindestens 1, 3, 5 und 7 Jahre alt und der Kapitän daher mindestens 105 Jahre. Das ist bereits zu alt.
Wir sehen, dass die einzige realistische Lösung vorliegt, wenn der Kapitän drei Kinder hat und diese 2, 4 und 6 Jahre alt sind. Dann ist der Kapitän 48 Jahre alt und das Schiff $48 \cdot 5 = 240\,\text{m}$ lang.

Staatsflagge

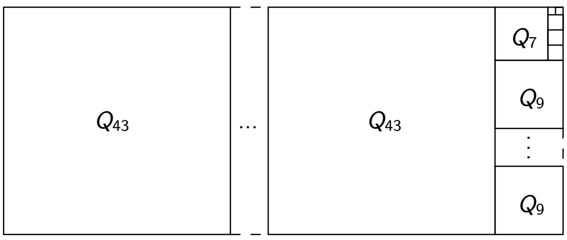
In einem neu gegründeten Staat soll die neue Staatsflagge aus drei horizontalen Streifen bestehen, wobei natürlich benachbarte Streifen nicht gleichfarbig sein dürfen. Für die Streifen stehen sechs Farben zur Auswahl.
Wie viele verschiedene Flaggen sind möglich? (H.F.)

Lösung:
Da bei Staatsflaggen die Reihenfolge der Farben wesentlich ist, werden zwei gleichfarbige Flaggen, bei denen der obere Streifen der einen Flagge farbgleich mit dem unteren Streifen der anderen Flagge ist, als verschieden betrachtet.
Die drei Streifen seien verschieden farbig.
Dann gibt es für einen Streifen 6, für einen anderen Streifen 5 und für den dritten Streifen 4 Wahlmöglichkeiten. Deshalb sind $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ verschiedene Flaggen möglich.
Nun seien der obere und der untere Streifen von gleicher Farbe.
Dann gibt es für den mittleren Streifen 6 Wahlmöglichkeiten und für die beiden äußeren Streifen 5 Wahlmöglichkeiten. In diesem Fall sind daher $6 \cdot 5 = 30$ verschiedene Flaggen möglich.
Insgesamt gibt es $30 + 120 = 150$ mögliche verschiedene Flaggen.

Rechteck-Zerlegung

Zerlege das Rechteck, dessen Seiten 43 cm und 611 cm lang sind, in möglichst wenige Quadrate. (H.F.)

Lösung:
Q_a bezeichne ein Quadrat mit den Seitenlängen a cm, R das gegebene Rechteck. Wir zerlegen das Rechteck nun, indem wir jeweils das größtmögliche Quadrat (an einem Rand!) konstruieren. Es ist klar, dass dadurch die Anzahl der Quadrate minimiert wird.



$$
\begin{aligned}
\text{Es ist: } 611 &= 14 \cdot 43 + 9 && \Longrightarrow R \text{ enthält 14 Quadrate } Q_{43},\\
43 &= \ \ 4 \cdot \ \ 9 + 7 && \Longrightarrow R \text{ enthält vier Quadrate } Q_9,\\
9 &= \ \ 1 \cdot \ \ 7 + 2 && \Longrightarrow R \text{ enthält ein Quadrat } Q_7,\\
7 &= \ \ 3 \cdot \ \ 2 + 1 && \Longrightarrow R \text{ enthält drei Quadrate } Q_2,\\
2 &= \ \ 2 \cdot \ \ 1 && \Longrightarrow R \text{ enthält zwei Quadrate } Q_1.
\end{aligned}
$$

Damit ist R in $14 + 4 + 1 + 3 + 2 = 24$ Quadrate zerteilt.

Den Kennern unter Euch wird sicher aufgefallen sein, dass sich hinter der obigen Berechnung der Euklidische* Algorithmus versteckt, der zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers dient. Hier ist $\text{ggT}(611, 43) = 1$.

(H.F., MG)

Finanzkrise

Jetzt wird es politisch... Euch dürfte aus den Nachrichten nicht entgangen sein, dass überall die Rede von einer weltumspannenden Finanz- oder Bankenkrise ist. Um noch größeren Schaden zu vermeiden, hat die Bundesregierung am 13. Oktober 2008 beschlossen, bis zu 480 Milliarden Euro für Hilfe zur Verfügung zu stellen.

a) Das Geld muss auch irgendwo herkommen und Geld bekommt der Staat in erster Linie vom Steuerzahler. Angenommen die Hälfte aller in Deutschland lebenden 82 Millionen Einwohner zahlt Steuern: Wie viel muss jeder einzelne Steuerzahler aufbringen, um die 480 Milliarden Euro bereit zu halten?

b) Deutsche Jugendämter empfehlen für 13- bis 15-Jährige Taschengeld in Höhe von 20 Euro monatlich. Wie lange muss Elena, die so viel bekommt, sparen, um diesen Pro-Kopf-Betrag zusammen zu haben?

c) Ein 100-Euro-Schein hat die Abmessung $147\,\text{mm} \times 82\,\text{mm}$ und ist 0,11 mm dick. Wie lang wäre die Strecke, wenn die 480 Milliarden Euro in solchen Scheinen (längs) aneinander gelegt würden (vergleiche die Länge mit dem Erdumfang) beziehungsweise wie hoch wäre ein Stapel aus solchen Scheinen übereinander?

d) Ein Bankmanager, Josef Ackermann, verdiente 14 Millionen Euro im Jahr 2007**, ein ausgelernter Bankangestellter nach Tarifvertrag rund 2000 Euro monatlich (brutto). Wie lange muss ein solcher arbeiten, damit er so viel Geld bekommt, wie sein oberster Chef in einem Monat? Was fällt Dir an dieser Zahl auf?

e) Ein Zinssatz von 1 % ist sehr gering. Wie viel Zinsen würde der Bankmanager pro Tag bekommen, wenn er sein Geld trotzdem zu diesem Prozentsatz

* Euklid ($E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$), * um 365 v. Chr. vermutlich in Alexandria oder Athen, † ca. 300 v. Chr.; griechischer Mathematiker. Er stellte in seinem Werk „Die Elemente“ das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen.

** vgl. Vorstandschef Ackermann verdiente 14 Millionen Euro; In: Mitteldeutsche Zeitung, 26. März 2008.

anlegte? (Zum Vergleich: Der Regelsatz bei Hartz IV beträgt für eine alleinstehende Person (Single) 351 Euro im Monat.) (MG)

Lösung:

a) $480 \cdot 10^9 : \frac{82 \cdot 10^6}{2} \approx 11707{,}32$. Jeder Steuerzahler muss etwa 12000 € aufbringen.

b) $11707\,€ : 20 \frac{€}{\text{Monat}} \approx 585$ Monate. Elena muss 585 Monate Taschengeld sparen, das sind fast 49 Jahre!

c) Für 480 Milliarden Euro werden 4,80 Milliarden Scheine zu 100 Euro benötigt. Aneinander gelegt ergibt sich eine Strecke von $4{,}8 \cdot 10^9 \cdot 147\,\text{mm} = 7{,}056 \cdot 10^{11}\,\text{mm} = 705600\,\text{km}$, was etwa dem 17,6-fachen des Erdäquators (40075 km) entspricht. Übereinander ergibt sich ein gigantischer Stapel von $4{,}8 \cdot 10^9 \cdot 0{,}11\,\text{mm} = 528 \cdot 10^6\,\text{mm} = 528\,\text{km}$ Höhe, was etwa dem 59,7-fachen der Höhe des Mount Everest (8848 m) entspricht.

d) $\frac{14 \cdot 10^6 €}{12} : 2000€ \approx 583{,}3$. Ein ausgelernter Bankangestellter muss also über 583 Monate arbeiten, das sind über 48 Jahre. Da aber ein Bankangestellter, bis er ausgelernt hat, schon deutlich über 20 Jahre alt ist, kann er bis zum Rentenalter gar nicht so lange arbeiten.

e) Er bekäme $14 \cdot 10^6\,€ \cdot 0{,}01 \cdot \frac{1}{360} \approx 388{,}89\,€$, also jeden Tag mehr, als ein Hartz-IV-Empfänger im ganzen Monat als Regelsatz erhält!

Mittelwertfolgen

Katrin ist begeisterte Knoblerin und angesporrt vom Artikel „Pappos und die Mittelwerte" aus Monoid 94 entwickelt sie eine Zahlenfolge: Sie beginnt mit den Zahlen 1, 5 und jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zusammen (arithmetisches Mittel!).

a) Wie heißen die nächsten fünf Zahlen von Katrins Folge?

b) Welches ist die 96. Zahl der Folge?

c) Gehören die Zahlen 97 und 2009 zu Katrins Folge?

d) Da Katrin es sehr anstrengend findet, alle Folgenglieder ausrechnen zu müssen, um irgend ein spätes Folgenglied bestimmen zu können, möchte sie eine explizite Formel herleiten, mit der sie direkt das n-te Folgenglied, mit $n \in \mathbb{N}$, berechnen kann. Nach kurzer Überlegung findet sie auch eine solche Formel. Wie lautet diese?

e) Welches Phänomen tritt auf, wenn Katrin nicht „jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zusammen" festgelegt hätte, sondern „jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihre beiden Vorgänger zusammen"? (MG)

Lösung:

a) Die nächsten fünf Folgenglieder sind 9, 13, 17, 21, 25.

d) Die ersten Folgenglieder lassen vermuten, dass jedes neue Folgenglied jeweils um 4 größer ist, als sein Vorgänger. Dann wäre die explizite Folgenvorschrift: $a_n = 4(n-1) + 1 = 4n - 3$.
Diese Formel können wir beweisen, denn aus der Bildungsvorschrift $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ folgt $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ und daraus $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, das heißt die Differenz je zweier Folgenglieder ist konstant von Anfang an, also gleich 4 (siehe Teil *a*)).
Somit gilt die Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_n + 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 = 1$.
Insgesamt gilt damit $a_n = a_1 + 4(n-1) = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$.

b) Mit dieser Formel können wir sehr leicht die übrigen Folgenglieder berechnen. So ist $a_{96} = 4(96-1) + 1 = 381$.

c) Da $97 = 96 + 1 = 4 \cdot 24 + 1$ gilt, ist 97 das 25. Folgenglied und analog ist wegen $2009 = 2008 + 1 = 4 \cdot 502 + 1$ das 503. Folgenglied.

e) Wäre „jede folgende Zahl ist halb so groß wie ihre beiden Vorgänger zusammen“, also $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{2}$, so würden die Folgenglieder sich immer weiter einander annähern, da $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - a_n)$ und am Ende um einen festen Wert liegen, in diesem Fall etwa 3,666. Mathematiker sagen, die Folge *konvergiert*.

Bislang größte Primzahlen gefunden – Teil 1

Wie Ihr im Artikel *Bislang größte Primzahlen gefunden* von Ulrike Müller lesen könnt, wurden vor Kurzem zwei neue, sehr große Primzahlen entdeckt, bei denen es sich um sogenannte Mersenne-Primzahlen handelt.

a) Die damit größte bislang bekannte Primzahl ist die 45. Mersenne-Primzahl. Auf eine Seite in einem Monoid-Heft passen (bei normalem Satz) 43 Zeilen mit 65 Zeichen. Wieviele Seiten werden benötigt, um die komplette Zahl mit allen Ziffern abzudrucken?

b) Ist die Mersenne-Zahl für $n = 3$ und $n = 11$ eine Primzahl?

c) Ist die Mersenne-Zahl für $n = 4$ eine Primzahl?

Zwei weitere Aufgaben zu diesem Thema findet Ihr bei der Neuen Aufgabe 953.

(Marcel Gruner und Ulrike Müller)

Lösung:

a) Auf eine Seite passen $43 \cdot 65 = 2795$ Zeichen. Die 45. Mersenne-Primzahl hat 12 978 189 Stellen, also werden $12978189 : 2795 \approx 4643{,}4$ Seiten benötigt – mehr als 105 Hefte (in der Hand haltet Ihr Heft 97).

b) Die Zahl $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ ist eine Primzahl.
Es ist $2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, also ist die Zahl nicht prim.

c) Es ist $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$, also ebenfalls keine Primzahl.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Geburtstagsmathematik

Bei einem Spaziergang mit ihrem Mann Hans-Werner letztes Jahr (2008) stellte Ute fest: „Meine Schwester ist vom Jahrgang '52 und so alt bin ich jetzt. Meine Schwester ist nun 56 Jahre alt und das ist mein Jahrgang!" Der Geburtsjahrgang besteht aus den letzten beiden Ziffern des Geburtsjahres.*

a) Sie stellt sich nun die Frage: Ist das Zufall oder gibt es bei jedem Paar ein Jahr, in dem dieses Phänomen auftritt? Ihr Mann – ein Mathematiker – stellt wilde Theorien auf. Kannst Du ihnen helfen? Wie lautet die Antwort auf Utes Frage?

b) Ihre Töchter sind in den Jahren 1980 und 1983 geboren. Gibt es für die beiden auch ein solches Jahr? Gib das Jahr an oder begründe, warum es dieses nicht gibt.

c) Ute und Hans-Werner stellen fest, dass es für sie auch ein solches Jahr gibt, nämlich 2009. In welchem Jahr wurde Hans-Werner geboren? (MG)

Größenvergleich

Die Seitenflächen eines Quaders haben die Flächeninhalte $220\,\text{cm}^2$, $264\,\text{cm}^2$ und $270\,\text{cm}^2$; die Flächeninhalte der Seitenflächen eines zweiten Quaders sind $176\,\text{cm}^2$, $198\,\text{cm}^2$ und $450\,\text{cm}^2$.

Welcher der Quader hat das größere Volumen – oder haben sie etwa das gleiche Volumen? (H.F.)

Noch eine Variante der Goldbach-Vermutung**

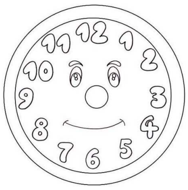
Jede natürliche Zahl $n > 5$ ist die Summe aus einer Primzahl und einer Nichtprimzahl.

(Malte Meyn, Kl. 11, Ohm-Gymnasium, Erlangen)

---

* Für alle, die mit der Schreibweise vertraut sind, dasselbe noch mal mathematisch formuliert: Der Jahrgang j zum Geburtsjahr J ist $J \equiv j \bmod 100$ mit $0 \leq j \leq 99$.

** Nach Christian Goldbach, *18.03.1690 in Königsberg, †20.11.1764 in Moskau (in manchen Quellen steht 01.12.1764 in St. Petersburg). Seine berühmte Vermutung formulierte er 1742 in einem Brief an Leonhard Euler. Diese besagt: Jede gerade natürliche Zahl lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben. Bis heute ist dies nur eine Vermutung und noch nicht bewiesen oder widerlegt!



Uwes Uhr

Uwes Uhr geht $2\frac{1}{2}$-mal so schnell, wie sie sollte. Er stellt sie um Mitternacht. Wann hat sie zum ersten Mal wieder die richtige Zeigerstellung? (WJB)

Noch mehr Flaggen

Ein Verband von Vereinen oder Staaten usw. beschließt, dass jedes seiner Mitglieder eine Flagge mit drei Streifen haben soll. Alle Flaggen sollen längstgestreift sein und jeweils drei verschiedene der vier Farben rot, schwarz, gelb und weiß tragen.

a) Ist es mit dieser Vorschrift möglich, alle derzeitigen Mitglieder der Europäischen Union mit verschiedenen Flaggen auszurüsten?

b) Wie viele verschiedene Flaggen sind möglich, wenn wir lediglich gleiche Farbe benachbarter Streifen verbieten?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Fahnen m verschiedene Streifen aus n verfügbaren Farben haben sollen?

d) Wie viele verschiedene Fahnen sind möglich, wenn wir (wie in Teil b) Farbwiederholungen zulassen, aber nicht gleiche Farbe auf benachbarten Streifen? (WJB)

Einerziffer

Ulrike beschäftigt sich gerne mit Zahlentheorie. So forscht sie im Bereich der Zahlen und geht auch der Frage nach: Welche Einerziffer haben die Zahlen k^{2009} für ganze Zahlen k?
Sie macht dabei auch tatsächlich eine interessante Entdeckung... (MG)

Ungleichungen am Dreieck

Zeige: Die Länge einer Dreiecksseite ist stets kleiner als der halbe Dreiecksumfang.
Hinweis: Versuche es mal mit der sogenannten Dreiecksungleichung: Die Längen zweier Dreiecksseiten sind zusammen stets größer als die Länge der dritten Seite des Dreiecks. (H.F.)

Weitere Mathespielereien findet ihr auf der vorherigen Seite!

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 960: Professor Altermann und alte Hölzchen

Prof. Altermann ist Archäologe. Bei Ausgrabungen findet er ein Kästchen mit Hölzchen paarweise verschiedener Längen. Er stellt fest, dass das kürzeste Hölzchen eine Länge a_1 hat und das jeweils nächstlängere Hölzchen sich vom vorhergehenden jeweils um eine feste Längendifferenz d unterscheidet, also $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$,...

Prof. Altermann und seine Mitarbeiter vermuten, dass mit diesen Hölzchen früher Längen von Strecken gemessen wurden. Außerdem bemerken sie, dass $a_1 + a_2$ die Länge 13 ergibt und $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ die Länge 74.

a) Wie lang ist das n-te Hölzchen?

b) Welche Hölzchen müssen kombiniert werden, um die Längen 67 und 2 zu erhalten? (MG)

Aufgabe 961: Zahlendreiecke

a) Ergänze das folgende Dreieck so, dass jeweils in der nachfolgenden Zeile die Summe zweier benachbarter Zahlen der vorausgehenden Zeile steht.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & & x & & 7 & & x & & 3 \\
& 8 & & x & & x & & x & \\
& & x & & x & & 22 & & \\
& & & x & & x & & & \\
& & & & 92 & & & &
\end{array}$$

b) Dieses Dreieck hat die Seitenlänge 5, und es sind 5 Zahlen vorgegeben. Lässt sich jedes Dreieck richtig ergänzen, wenn Seitenlänge und Anzahl der vorgegebenen Zahlen übereinstimmen?

c) Wenn sich ein Dreieck ergänzen lässt, gibt es dann immer nur eine mögliche Ergänzung? (WJB)

Aufgabe 962: Galileis Gleichungskette

Galileo Galilei (1564–1642) – Physiker, Astronom und Mathematiker – behauptete die Gültigkeit der folgenden bemerkenswerten unendlich langen Gleichungskette:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

Finde einen Beweis dafür! (H.F.)

Aufgabe 963: Meteoriten-Einschlag

Drei Meteoriten fallen auf die Erde.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ihre Einschlagpunkte auf ein und derselben Halbkugel (deren Äquator eingeschlossen) befinden?
Hinweis: Die Erde wird als eine Kugel betrachtet und mit Äquator ist hier jeder Großkreis gemeint; dieser teilt die Kugel in zwei Halbkugeln.
(H.F.)

Aufgabe 964: Summe 2009

Die natürlichen Zahlen a, b, c und d sollen so bestimmt werden, dass für den Ausdruck $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gilt:

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 2009.$$

Ist das möglich? (H.F.)

Aufgabe 965: Mittelwertfolge

Céline ist begeisterte Knoblerin und, angespornt vom Artikel „Pappos und die Mittelwerte" aus Monoid 94, entwickelt sie eine Zahlenfolge: Sie beginnt mit zwei vorgegebenen Werten und jede folgende Zahl ist das geometrische Mittel ihres Vorgängers und ihres Nachfolgers, es gilt also $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

a) Céline beginnt mit 2 und 4. Berechne die nächsten fünf Folgenglieder.

b) Da Céline es sehr anstrengend findet, alle Folgenglieder ausrechnen zu müssen, um irgend ein spätes Folgenglied bestimmen zu können, möchte sie eine explizite Formel herleiten, mit der sie direkt das n-te Folgenglied, mit $n \in \mathbb{N}$ berechnen kann. Nach kurzer Überlegung findet sie auch eine solche Formel. Wie lautet diese?

c) Für die Startwerte 2 und 4 werden die Folgenglieder immer größer. Wie müsste sie die Startwerte wählen, damit die Folgenglieder immer kleiner werden? Kann Céline die Startwerte auch so wählen, dass die Glieder konstant bleiben? (MG)

Aufgabe 966: Das verstopfte Waschbecken

In einem Waschbecken mit dem Volumen $V = 14000\,\text{cm}^3$ fließt aus einem Wasserhahn mit dem Durchmesser $d_H = 2\,\text{cm}$ das Wasser mit einer Geschwindigkeit $v = 0{,}04\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Das Abflussrohr ist aber stark verstopft, sodass nur ein Durchmesser von $d_A = 0{,}5\,\text{cm}$ frei ist. Man nehme an, das Wasser würde trotzdem mit derselben Geschwindigkeit v durch die Abflussöffnung fließen, wie es aus dem Hahn kommt.
Wie lange würde es dauern, bis das Wasser über den Rand des Beckens läuft?
(Alia'a Ahmed Doma, Klasse 11, Deutsche Schule der Borromäerinnen, Kairo)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 96

Klassen 8–13

Aufgabe 953: Bislang größte Primzahlen gefunden – Teil 2

Wie Ihr im Artikel *Bislang größte Primzahlen gefunden* von Ulrike Müller lesen könnt, wurden vor Kurzem zwei neue, sehr große Primzahlen entdeckt, bei denen es sich um sogenannte Mersenne-Primzahlen handelt.

a) Wie lautet die letzte Ziffer der 45. Mersenne-Primzahl?

b) Zeige: Ist $n = rs$ eine zusammengesetzte Zahl, mit $r \neq 1 \neq s$, dann kann die Mersenne-Zahl $2^n - 1$ keine Primzahl sein.

(Marcel Gruner und Ulrike Müller)

Lösung:

a) Die Einerziffern der 2-er-Potenzen sind 2, 4, 8, 6, 2, ... Sie wiederholen sich also mit der Periodenlänge 4.* Also hat die Potenz $2^{43112609} = 2^{4 \cdot 10778152+1}$ dieselbe Einerziffer wie 2^1, nämlich die Ziffer 2. Folglich hat die 45. Mersenne-Primzahl $2^{43112609} - 1$ die Einerziffer 1.

b) Mit Polynomdivision oder rückwärts Ausmultiplizieren können wir folgende Gleichung nachvollziehen, die ähnlich auch schon bei vielen anderen Aufgaben benötigt wurde: $a^{rs} - 1 = (a^r - 1)(a^{r(s-1)} + a^{r(s-2)} + a^{r(s-3)} + ... + a^r + 1)$. Daraus folgt für die Aufgabe mit $a = 2$:

$$2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + ... + 1).$$

Insbesondere ist also $2^r - 1$ ein echter Teiler von $2^n - 1$ und diese Mersenne-Zahl keine Primzahl.

Aufgabe 954: Division mit der Parabel

Im Heft 95 hatten wir Euch im Artikel *Hättest Du es gewusst? – Wie wir mit Parabeln rechnen können* einen Algorithmus vorgestellt, wie mit Hilfe der Normalparabel geometrisch multipliziert und dividiert werden kann. Allerdings hatten wir die Richtigkeit nur für die Multiplikation gezeigt. Als ich Lioba das nächste Mal besuchte, hatte sie zwischenzeitlich auch den Beweis für die Division aufgeschrieben.

Zeige, dass der Algorithmus für die Division das korrekte Ergebnis liefert! (MG)

Lösung:

Für die Division $c : b$ identifizieren wir $c \mapsto (0, c)$ und $b \mapsto (b, b^2)$.

Die Gerade durch diese beiden Punkte hat also die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - c}{b}$ und somit die Geradengleichung $g\colon y = \frac{b^2-c}{b} x + c$.

* Formal ließe sich das so aufschreiben: $2^k \equiv 2^{k+4} \mod 10$ für $k \in \mathbb{N}$.

Diese bringen wir mit der Normalparabel $y = x^2$ zum Schnitt, indem wir die Gleichungen gleichsetzen: $x^2 = \frac{b^2-c}{b}x + c$.

Die quadratische Gleichung $x^2 - \frac{b^2-c}{b}x - c = 0$ lösen wir mit quadratischer Ergänzung und erhalten:

$$x_{1,2} = \frac{b^2-c}{2b} \pm \sqrt{\frac{(b^2+c)^2}{4b^2}} = \frac{b^2-c \pm (b^2+c)}{2b}.$$

Eine Lösung $\frac{2b^2}{2b} = b$ ist der Abszissen-Abschnitt (x-Wert) des bekannten Punktes, durch den die Gerade gelegt wurde, der andere Punkt bei $\frac{-2c}{2b} = -\frac{c}{b}$ liefert wirklich das Ergebnis der Division. q.e.d.

Aufgabe 955: Sudoku mit Fehlern

Steht in einem Sudoku in der gleichen Zeile (oder der gleichen Spalte oder dem gleichen Teilquadrat) eine Ziffer doppelt (und fehlt dafür eine andere), so ist dies ein Fehler.

a) Ist es möglich, ein Sudoku so auszufüllen, dass es in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem Teilquadrat jeweils einen Fehler hat, aber auch nur einen Fehler?

b) Ist es möglich, ein Sudoku so auszufüllen, dass es insgesamt nur einen Fehler enthält, also entweder nur in einer Spalte oder nur in einer Zeile oder nur in einem Teilquadrat?

c) Wie viele Fehler entstehen, wenn die in zwei Positionen stehenden Ziffern vertauscht werden? (WJB)

Lösung:

a) Ja, zum Beispiel indem man jeweils die Ziffer 4 durch die Ziffer 6 ersetzt. Dann enthält jede Zeile, Spalte und jedes Teilquadrat die Ziffer 6 doppelt und die 4 nicht.

b) Nein, enthält eine Zeile zum Beispiel die 3 doppelt und die 8 nicht, so gibt es entweder die 8 insgesamt höchstens achtmal, sie muss also auch in einer Spalte fehlen, oder das Fehlen der 8 wird in einer anderen Zeile ausgeglichen, es gibt dann also eine weitere fehlerhafte Zeile.

c) Hier muss man verschiedene Fälle unterscheiden:

   1. Sind die Ziffern in den beiden Positionen gleich, so entsteht gar kein Fehler.
   2. Bei Vertauschung innerhalb der gleichen Zeile entsteht jeweils ein Fehler in den beiden beteiligten Spalten; liegen die beiden Positionen in verschiedenen Teilquadraten, so entsteht dort ebenfalls jeweils ein Fehler, insgesamt also vier Fehler. Liegen sie im selben Teilquadrat, so sind es insgesamt nur zwei Fehler.
      Ähnlich sieht es aus bei Vertauschung innerhalb einer Spalte.

3. Liegen die beiden Positionen innerhalb eines Teilquadrates, aber nicht in der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte, so entsteht in beiden beteiligten Spalten und in beiden beteiligten Zeilen jeweils ein Fehler, insgesamt also vier.
4. Sind die Positionen in verschiedenen Zeilen, verschiedenen Spalten und verschiedenen Teilquadraten, so entsteht sechsmal je ein Fehler.

Es können also zwei, vier oder sechs Fehler entstehen.

Aufgabe 956: Parallelogrammdiagonale

Im Rechteck mit den Seiten a und b gilt für die Diagonale $d^2 = a^2 + b^2$. Zeige, dass im Parallelogramm mit den Seiten a und b und den Diagonalen d_1 und d_2 gilt:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

(WJB)

Lösung:

Nach Pythagoras gilt: $b^2 = x^2 + h^2$.

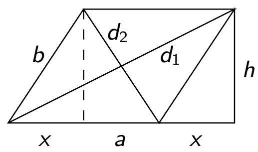
Damit folgt:

$d_1^2 = (a+x)^2+h^2 = a^2+2ax+x^2+h^2 = a^2+2ax+b^2$

und

$d_2^2 = (a-x)^2+h^2 = a^2-2ax+x^2+h^2 = a^2-2ax+b^2$.

Addieren wir beide Gleichungen, so folgt die Behauptung.



Aufgabe 957: Summe reziproker Wurzeln

Bestimme (ohne Computer) ein möglichst kleines ganzzahliges Intervall, in dem die Zahl S liegt, wenn

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1009020}}$$

ist.

Tipp: Ein Lösungsansatz ist, dass Du zunächst beweist, dass für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Mit elementaren Methoden haben wir nur ein Intervall der Länge 2 berechnen können, was wir im Sinne der Aufgabenstellung auch als „möglichst kleines" ansehen.

(nach Martin Mettler†)

Lösung:

Beweis der Ungleichung:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

und weiter

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Wir multiplizieren die eben bewiesenen Ungleichungen mit 2 und addieren die Ungleichungen, bei denen $n = 1, 2, 3, \ldots, 1009020$, wobei wir 1009020 mit z abkürzen:

$$\begin{array}{crcccc}
 & 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) & < & \frac{1}{\sqrt{1}} & < & 2\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right) \\
+ & 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) & < & \frac{1}{\sqrt{2}} & < & 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) \\
+ & 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) & < & \frac{1}{\sqrt{3}} & < & 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+ & 2\left(\sqrt{z+1}-\sqrt{z}\right) & < & \frac{1}{\sqrt{z}} & < & 2\left(\sqrt{z}-\sqrt{z-1}\right) \\
\hline
= & 2\left(-\sqrt{1}+\sqrt{z+1}\right) & < & S & < & 2\sqrt{z}
\end{array}$$

Mit $z = 1009020$ folgt aus der letzten Ungleichung $2007{,}0007\ldots < S < 2008{,}9997\ldots$, so dass S im Intervall $(2007, 2009)$ liegt.

Bemerkung: Die tatsächliche Summe beträgt ungefähr 2007,5399, das wirklich kleinste ganzzahlige Intervall ist also $(2007, 2008)$ – aber dafür haben wir einen Rechner bemüht.

Aufgabe 958: Abstandssumme im Fünfeck

ABCDE sei ein regelmäßiges Fünfeck und P sei ein Punkt im Inneren des Fünfecks. Die Abstände des Punktes P von den Seiten des Fünfecks seien mit d_1, d_2, d_3, d_4 und d_5 bezeichnet.

Zeige, dass gilt: Die Summe $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ hat für jede Position des Punktes P im Inneren des Fünfecks den gleichen Wert. (H.F.)

Lösung:

Die Seitenlängen des regelmäßigen Fünfecks seien s und F sei seine Fläche. Es ist

$$\begin{aligned} F &= |\triangle ABP| + |\triangle BCP| + |\triangle CDP| + |\triangle DEP| + |\triangle EAP| \\ &= \frac{1}{2}sd_1 + \frac{1}{2}sd_2 + \frac{1}{2}sd_3 + \frac{1}{2}sd_4 + \frac{1}{2}sd_5 = \frac{1}{2}s(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5). \end{aligned}$$

Daraus folgt $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = \frac{2F}{s}$.

Weil nun s und F und damit auch $\frac{2F}{s}$ feste Zahlen für ein gegebenes Fünfeck sind, hat die Summe $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ stets den festen Wert $\frac{2F}{s}$ für jede Lage des Punktes P im Inneren des Fünfecks.

Aufgabe 959: Abschätzungs-Problem
Sei $x_1 := 1$ und $2x_n^2 + 1 = 2x_n x_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, dann gilt:

$$n \leq x_n^2 \leq n + \frac{1 + \ln n}{n}, \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

(Mihaly Bencze, Kronstadt, Rumänien; Übersetzung MG)

Lösung:
Wir haben $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n} \Longrightarrow x_{n+1}^2 = x_n^2 + 1 + \frac{1}{4x_n^2}$.
Per Induktion folgt $x_n^2 \geq n$, denn:

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 1 + \frac{1}{4x_n^2} \geq n + 1 + \frac{1}{4x_n^2} \geq n + 1.$$

Per Iteration für die zweite Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_n^2 &= x_{n-1}^2 + 1 + \frac{1}{4x_{n-1}^2} = \ldots \\ &= {x_1}^2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4x_k^2} \leq n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1 + \ln n}{4}, \end{aligned}$$

somit gilt $n \leq x_n^2 \leq n + \frac{1+\ln n}{4}$.

So sollte auch die Behauptung in der Aufgabenstellung lauten. Leider hat sich aber ein Tippfehler eingeschlichen.
Daher ist die Aufgabe korrekt gelöst, wenn durch ein Zahlenbeispiel belegt wird, dass die rechte Ungleichung in der Aufgabenstellung falsch ist. So ist vielen von Euch aufgefallen, dass die Ungleichung ab $n = 6$ nicht mehr gilt, denn dann ist $x_6^2 \approx 6{,}537\ldots > 6{,}465\ldots = 6 + \frac{1+\ln 6}{6}$.
Abschließend noch ein Hinweis von Günter Pickert aus Gießen: Mit der Integralabschätzung

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1 + \ln(n-1) \text{ für } n > 1$$

erhält man für $n > 1$ sogar: $x_n^2 \leq n + \frac{1+\ln(n-1)}{4}$.

Wer forscht mit?

Spiegelbildliche Zahlen mit spiegelbildlichen Quadraten

Zwei natürliche Zahlen n und m heißen spiegelbildlich, wenn n von *rechts* nach *links* gelesen m ergibt und wenn m von *rechts* nach *links* gelesen n ergibt, $n \neq m$.
So bilden etwa $n = 3456$ und $m = 6543$ ein Paar spiegelbildlicher Zahlen.

Unter den spiegelbildlichen Paaren gibt es welche, deren Quadrate ebenfalls spiegelbildlich sind; etwa diese:

$$(12, 21) - (144, 441); \quad (13, 31) - (169, 961); \quad (112, 211) - (12544, 44521).$$

Wenn man nun mit dem Computer zum Beispiel alle spiegelbildlichen Paare (n, m) mit spiegelbildlichen Paaren (n^2, m^2) und n, m kleiner als 1000 ausrechnet, dann wird man feststellen:
In allen gefundenen Paaren (n, m) weisen die Zahlen n und m nur die Ziffern 0, 1, 2 oder 3 auf.
Es ist eine bisher *nicht beantwortete Frage*, ob diese Beobachtung allgemein gilt.

Wir jedenfalls behaupten:

Es sei (n, m) ein spiegelbildliches Paar mit spiegelbildlichem Paar (n^2, m^2).
Dann besitzen die Zahlen n und m in ihrer Zifferndarstellung nur die Ziffern 0, 1, 2 oder 3.

Ein ungelöstes Problem – für unsere zahlentheoretisch interessierten Lo(e)ser als Herausforderung. (H.F.)

Hinweis: Eure Forschungsergebnisse könnt Ihr bis zum 15. August 2009 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils drei Hefte später veröffentlicht.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

„Es ist nicht Wissen, sondern das Lernen,
es ist nicht Besitzen, sondern das Erwerben,
es ist nicht das Dasein, sondern das Hinkommen,
was den großen Genuss gewährt.“

Johann Carl Friedrich Gauß
*30.04.1777 in Braunschweig, †23.02.1855 in Göttingen;
deutscher Mathematiker, Geodät, Physiker und Astronom.

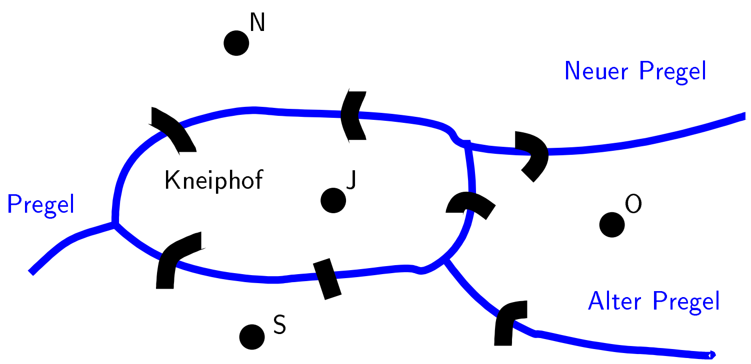
Ein Blick hinter die Kulissen
Der Trick des Topologen – Die Auflösung
von Hartwig Fuchs

In Heft 96 haben wir Euch im Artikel *Ein Blick hinter die Kulissen – Der Trick des Topologen* (Seite 41 f.) den Trick vorgestellt, bei dem der Zauberer, der sich selbst der „Topologe" nennt, einen zusammenhängenden Weg durch ein Liniensystem findet, woran die Zuschauer gescheitert sind. Dabei arbeitet er mit einem Trick.

Als er sich nämlich zur Lösung der Aufgabe seiner Tafel zuwendet, zeichnet er unbemerkt in seine Abbildung eine Verbindungsstrecke zwischen den sehr nahe beieinander liegenden Punkten C und D (Abbildung 2). Genau dieser kleine Unterschied zwischen den beiden Figuren entscheidet über die Lösbarkeit und Unlösbarkeit der Aufgabe. Wieso? Das möchten wir nun (er)klären.

Die Aufgabe des Topologen hat ihren Ursprung im berühmten Königsberger Brücken-Problem.

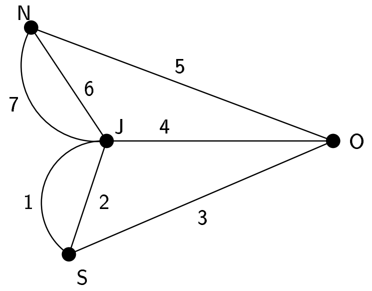
In der nachstehenden Abbildung ist die Innenstadt von Königsberg um 1730 schematisch skizziert. Man sieht, dass zwischen den beiden Flüssen Alter und Neuer Pregel, die im Stadtgebiet fließen, eine Verbindung besteht, bevor sie sich zum Fluss Pregel vereinen und so die Insel Kneiphof bilden. Über dieses Fluss-System führen sieben Brücken.



Schematische Skizze von Königsberg um 1730
(die schwarzen Balken stellen die sieben Brücken dar)

Bereits im 18. Jahrhundert wurde die Frage gestellt: Ist eine Wanderung durch die Innenstadt von Königsberg möglich, bei der jede der sieben Brücken genau einmal überquert wird?

Die folgende Antwort hat Leonhard Euler (1707–1783) gefunden:



Jedes der von dem Fluss-System gebildeten Teilgebiete der Königsberger Innenstadt und ihrer Umgebung denke man sich jeweils in einem der Punkte N, J, S, O konzentriert. Die Wege über die Brücken seien durch die Verbindungslinien jeweils zweier dieser Punkte dargestellt.

Euler überlegte nun, dass für n Brücken, $n \geq 1$ gilt: Wenn man in einer zusammenhängenden Wanderung jede Brücke genau einmal überqueren will, dann ist das nur möglich, wenn zu jedem Wegstück (außer dem ersten und dem letzten), auf dem man zu einem Punkt P gelangt, ein zweites Wegstück vorhanden ist, auf dem man den Punkt P wieder verlässt. Euler hatte damit ein Kriterium für die Lösbarkeit und Unlösbarkeit des Königsberger Brücken-Problems und sogar des n-Brückenproblems, $n \geq 1$, entdeckt.

(1) Für jeden Punkt P eines Wanderweges gilt:
Die Anzahl der Wegstücke, die in P einmünden, muss geradzahlig sein. Davon gibt es nur zwei Ausnahmen: Im Start- und im Zielpunkt der Wanderung dürfen ungeradzahlig viele Wegstücke einmünden.

Das Königsberger Brücken-Problem ist danach unlösbar, denn in den Punkten N, J, S, O münden jeweils ungeradzahlig viele Wegstücke ein.

Zurück zur Aufgabe des Fernsehtopologen – sie stellt ein 30-Brücken-Problem dar, auf das man (1) anwenden darf. Da es in der Abbildung 1 außer dem Punkt A noch drei weitere Punkte gibt (sie sind in Abbildung 1 mit B, C, D bezeichnet) in welche ungeradzahlig viele Wegstücke einmünden, gibt es für die Abbildung 1 keinen Lösungsweg – die Mitspieler des Topologen mussten zwangsläufig erfolglos bleiben. Dagegen führt die Manipulation des Topologen an Abbildung 1 zur Abbildung 2, die nur noch die beiden Punkte A und B mit jeweils ungerader Anzahl einmündender Wegstrecken enthält. In der Abbildung 2 ist also ein Lösungsweg durchaus möglich; und der Topologe hat ja dann auch einen davon angegeben.

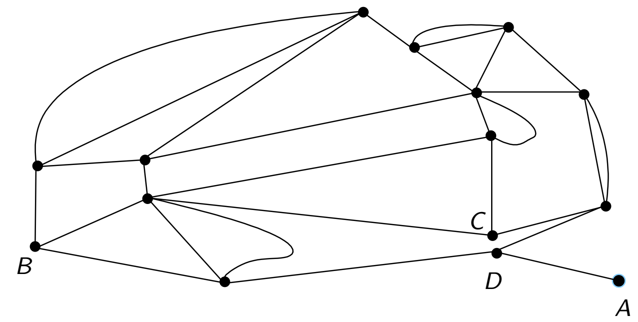


Abbildung 1

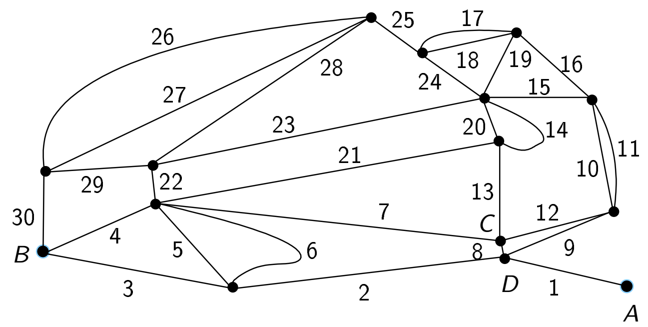


Abbildung 2

Historische Nachbemerkung

Das Sieben-Brücken-Problem war wohl schon am Anfang des 18. Jahrhunderts in Königsberg bekannt und diskutiert und es gab bereits damals die Meinung, es sei unlösbar. Das veranlasste 1735 eine Gruppe von Studenten den zu dieser Zeit noch nicht berühmten Professor der Mathematik an der St. Petersburger Akademie, Leonhard Euler aufzusuchen und ihn zu bitten, nach einer Lösung des Königsberger Brücken-Problems zu suchen; sie selbst waren damit überfordert – sind doch mehrere Millionen Kombinationen von Wegstücken möglich.
Nach einem Jahr legte Euler eine umfangreiche Arbeit vor – 1741 in Band 8 der Annalen der Akademie veröffentlicht – in der er die Bedingung (1) für die Lösbarkeit des n-Brücken-Problems bewies und damit zugleich die Unlösbarkeit des Königsberger Brücken-Problems herleitete. Seit damals heißt ein Weg durch einen Graphen (= eine geometrische Figur aus Punkten und einigen oder alle diese Punkte verbindenden Linien), wenn er die Bedingungen des Fernseh-Topologen erfüllt, ein *Euler-Weg*. Eulers Arbeit stellt die erste systematische Untersuchung eines Graphen dar, so dass Euler als der Begründer der heute weit aufgefächerten Graphentheorie anzusehen ist.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Wolfgang J. Bühler

Christoph Drösser: „Der Mathematik-Verführer. Zahlenspiele für alle Lebenslagen"

Jedes der 17 Kapitel diese Buches ist eine Kurzgeschichte, teils rein fiktiv, teils mit realem Hintergrund, die zu einem mathematischen Problem hinführt und den Leser dazu verführt, sich in die zugehörigen mathematischen Sachverhalte zu vertiefen, die sehr anschaulich und elementar dargestellt werden. Die Diskussion über die Irrationalität der Zahl π und von Methoden zu ihrer näherungsweisen Bestimmung beginnt mit der (wahren) Geschichte über ein Gesetz, das durch das Abgeordnetenhaus von Indiana 1897 einstimmig beschlossen wurde und den Wert von pi mit 3,2 festlegte. Dank des Eingreifens des Mathematikers C. A. Waldo stimmte der Senat dem Gesetz nicht zu. Das Kapitel über Extremwerte behandelt unter anderem die Frage, wie weit man eine Getränkedose austrinken sollte, um sie möglichst standfest zu machen. Einige der Geschichten zeigen, wie leicht besonders im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten Trugschlüsse und Verwirrungen entstehen. Beispiele sind die Berufung auf (bedingte) Wahrscheinlichkeiten beim Versuch, einen Räuber zu überführen, eine (nur scheinbar) sichere Methode, in der Spielbank zu gewinnen, die Tatsache, dass der Bau einer zusätzlichen Schnellstraße das Risiko von Staus auf den bestehenden Straßen erhöhen kann. An der University of California in Berkeley wurde ca. 1972 festgestellt, dass unter den Bewerberinnen für einen Studienplatz ein geringerer Anteil angenommen wurde als unter den männlichen Bewerbern. Eine genauere Analyse zeigte, dass dies in den einzelnen Fächern umgekehrt war. Die Erklärung ist das Yule-Simpson-Paradox (G. U. Yule 1903, E. H.Simpson 1951), das der Autor sehr anschaulich erklärt. Eine der sehr seltenen Nachlässigkeiten ist, dass Drösser es unterlässt, Yule zu erwähnen. Im Anschluss an die einzelnen Kapitel steht jeweils ein kleine Aufgabe, die meisten im Stil der Mathespielereien in Monoid. Die Lösungen finden sich im Anhang und ausführlicher im Internet.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch: Drösser, Christoph: Der Mathematik-Verführer. Zahlenspiele für alle Lebenslagen. rororo 62426, 3. Auflage, 2008, 237 Seiten, broschiert, 8,95 €

Art des Buches:	Kurzgeschichten mit mathematischen Problemen
Mathematisches Niveau:	Überwiegend leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 12 Jahren

Bundeswettbewerb Mathematik 2009

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der ersten Runde

von Stefan Kermer und Volker Priebe

Aufgabe 1

Bei der 202-stelligen Quadratzahl $\underbrace{999\dots99}_{\text{100 Neunen}}z\underbrace{000\dots00}_{\text{100 Nullen}}9$ ist die Ziffer z an der 102-ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermittle eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann!

Lösung: Die Ziffer $z = 4$ ist möglich.

Beweis: Wir betrachten die Quadratzahl n^2 mit $n = 10^{101} - 3$. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} n^2 = (10^{101} - 3)^2 &= 10^{202} - 6 \cdot 10^{101} + 9 \\ &= 1\underbrace{000\dots000}_{\text{101 Nullen}}\underbrace{000\dots000}_{\text{101 Nullen}} - 6 \cdot 1\underbrace{000\dots000}_{\text{101 Nullen}} + 9 \\ &= \underbrace{999\dots99}_{\text{100 Neunen}}\,4\,\underbrace{000\dots00}_{\text{100 Nullen}}9\ ; \end{aligned}$$

die Quadratzahl n^2 hat also, wie in der Aufgabenstellung gefordert, 202 Stellen, stimmt an den 201 lesbaren Dezimalstellen mit der Quadratzahl der Aufgabenstellung überein und enthält an der 102-ten Dezimalstelle von rechts die Ziffer 4. □

Aufgabe 2

Zu zwei positiven reellen Zahlren a und b sei $m(a, b)$ die kleinste der drei Zahlen a, $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{a} + b$.
Für welche der Zahlenpaare (a, b) ist $m(a, b)$ maximal?

Lösung: Wir erhalten den maximalen Wert von m ausschließlich für das Zahlenpaar $(a, b) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, wobei $m(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.

Beweis: Für zwei positive reelle Zahlen a und c sei $M(a, c)$ die kleinste der drei Zahlen a, c und $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$. Die Funktion m der Aufgabenstellung und diese Funktion M stehen in einem engen Zusammenhang, denn für positive reelle Zahlen a und b ist $m(a, b) = M(a, b^{-1})$, und mit $c = b^{-1}$ erreicht man jede positive reelle Zahl c für ein $b > 0$. Es genügt also zur Lösung der Aufgabe die Untersuchung, für welche Zahlenpaare (a, c) die Funktion M ihren maximalen Wert annimmt.

Da $M(a,c) = M(c,a)$ für alle positiven reellen Zahlen a und c, können wir, gegebenenfalls durch Vertauschen von a und c, uns auf Zahlenpaare (a,c) mit $a \leq c$ beschränken. Für diese Zahlenpaare lässt sich abschätzen, dass

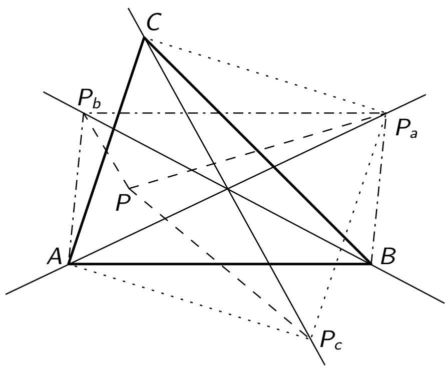
$$M(a,c) = \min\left\{a, c, \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{c}\right\} = \min\left\{a, \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{c}\right\} \leq \min\left\{a, \tfrac{2}{a}\right\} = M(a,a),$$

wir uns also bei der Suche nach dem maximalen Wert von M auf den Sonderfall $a = c$ beschränken können. Mit diesen Vorüberlegungen untersuchen wir also für $a > 0$: maximiere $M(a,a) = \min\{a, \frac{2}{a}\}$.
Es ist $a = \frac{2}{a}$ für $a > 0$ genau dann, wenn $a = \sqrt{2}$; es ist dann $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Einen größeren Wert kann M nicht annehmen: Denn ist $0 < a < \sqrt{2}$, also $\frac{2}{a} > \sqrt{2}$, so ist $M(a,a) = a < \sqrt{2}$. Ist umgekehrt $a > \sqrt{2}$, so ist $\frac{2}{a} < \sqrt{2}$ und dann auch $M(a,a) = \frac{2}{a} < \sqrt{2}$. $\square$

Aufgabe 3

Ein Punkt P im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ wird an den Mitelpunkten der Seiten BC, CA und AB gespiegelt; die Bildpunkte werden mit P_a, P_b bzw. P_c bezeichnet.
Beweise, dass sich die Geraden (AP_a), (BP_b) und (CP_c) in einem gemeinsamen Punkt schneiden!

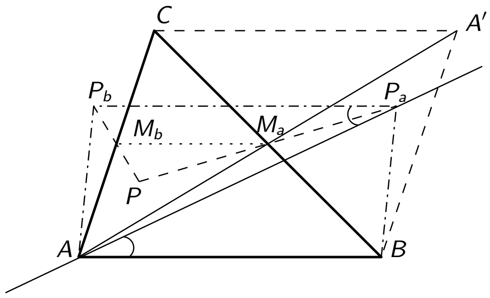
Beweis: Zunächst die Beweisidee: Wir betrachten die beiden Vierecke $\square ABP_aP_b$ bzw. $\square AP_cP_aC$. Wir werden nachweisen, dass sie nicht degeneriert sind und Parallelogramme bilden, vergleiche Skizze 3.1.



Skizze 3.1

Die Diagonalen dieser Vierecke sind die Strecken AP_a und BP_b bzw. AP_a und CP_c. Weil in einem Parallelogramm der Schnittpunkt der Diagonalen die Diagonalen halbiert, ist sofort klar, dass sich die Geraden (AP_a), (BP_b) und (CP_c) in einem gemeinsamen Punkt schneiden, nämlich dem Mittelpunkt der Strecke AP_a. Das beweist die Aufgabe.

Dass das Viereck $\square ABP_aP_b$ ein Parallelogramm ist, wird in mehreren Teilschritten bewiesen. Wir führen über die Aufgabenstellung hinaus die folgenden Bezeichnungen ein: Die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB seien mit M_a, M_b bzw. M_c bezeichnet; die Bildpunkte von A, B bzw. C unter der Spiegelung an M_a, M_b bzw. M_c mögen A', B' bzw. C' heißen, vergleiche Skizze 3.2.
Erster Schritt (Das Viereck $\square ABP_aP_b$ ist nicht degeneriert): Da P im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt, liegen die Bildpunkte P_a bzw. P_b im Inneren der Dreiecke $\triangle A'CB$ bzw. $\triangle ACB'$, die keine gemeinsamen Punkte haben. Im Viereck $\square ABA'C$ halbieren sich die Diagonalen AA' und BC, es ist also ein Parallelogramm, in dem $\sphericalangle A'BA = 180° - \sphericalangle BAC < 180°$ gilt. Der Punkt P_a kann damit nicht auf der Geraden (AB) liegen. Analog weisen wir nach, dass $P_b \notin (AB)$.



Skizze 3.2

Zweiter Schritt (Eigenschaften der Mittelparallele M_bM_a im $\triangle ABC$): Wir betrachten die Strahlen AC und BC durch C. Aus der Umkehrung des ersten Strahlensatzes folgt wegen

$$1 = \overline{AM_b} : \overline{M_bC} = \overline{BM_a} : \overline{M_aC}, \tag{3.1}$$

dass M_bM_a parallel zu AB ist. Damit folgt aus dem zweiten Strahlensatz, dass

$$\overline{AB} : \overline{M_bM_a} = \overline{CA} : \overline{CM_b} = 2, \tag{3.2}$$

also

$$2\overline{M_aM_b} = \overline{AB}. \tag{3.3}$$

Dritter Schritt (Mittelparallele M_bM_a im $\triangle P_aP_bP$): Die Punkte M_a bzw. M_b sind nach Konstruktion auch Mittelpunkte der Strecken PP_a bzw. PP_b. Im Dreieck $\triangle P_aP_bP$ folgt analog zur Herleitung von (3.1), dass P_bP_a parallel zu M_bM_a und damit parallel zu AB ist. Außerdem folgt analog zu (3.2) mit (3.3), dass

$$\overline{P_bP_a} = 2\overline{M_bM_a} = \overline{AB}. \tag{3.4}$$

Vierter Schritt ($\square ABP_aP_b$ ist ein Parallelogramm): Aus der Parallelität von P_bP_a und AB, die wir im dritten Schritt bewiesen haben, folgt, dass die Wechselwinkel $\sphericalangle BAP_a$ und $\sphericalangle P_bP_aA$ gleich groß sind. Damit und wegen (3.4) lässt sich auf die Dereiecke $\triangle ABP_a$ und $\triangle P_aP_bA$ der Kongruenzsatz *SWS* anwenden: Die Dreiecke sind kongruent, und damit sind im Viereck $\square ABP_aP_b$ auch die Seiten AP_b und BP_a parallel zueinander.
Dass das Viereck $\square AP_cP_aC$ ein Parallelogramm ist, wird durch Nachweis von $P_a, P_c \notin (AC)$ und Betrachtung der Mittelparallele M_cM_a in den Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle P_cP_aP$ ganz analog bewiesen. $\square$

Aufgabe 4

Eine positive ganze Zahl heiße *Dezimal-Palindrom*, wenn ihre Darstellung $z_n ... z_0$ mit $z_n \neq 0$ spiegelsymmetrisch ist, das heißt $z_k = z_{n-k}$ für alle $k = 0, ..., n$ gilt. Zeige, dass jede nicht durch 10 teilbare ganze Zahl ein positives Vielfaches besitzt, dass ein Dezimal-Palindrom ist!

Vorbemerkung: Für zwei ganze Zahlen Z und z können wir stets ganze Zahlen u und r finden, so dass

$$Z = u \cdot z + r. \tag{4.1}$$

Die Zahlen u und r sind nicht eindeutig bestimmt, stets ist aber z ein Teiler von $Z - r$. Wir führen eine abkürzende Schreibweise dafür ein, dass Z, z und r die Gleichung (4.1) erfüllen:

$Z \equiv r \bmod z$, in Worten: „Z ist kongruent r modulo z“.

Wie man sich leicht überzeugt, gelten die folgenden Rechenregeln; sie formulieren nur bekannte Tatsachen über Teiler ganzer Zahlen in der neuen Schreibweise:

$$\begin{aligned} Z \equiv r \bmod z \text{ und } Z' \equiv r' \bmod z \Rightarrow (Z + Z') \equiv (r + r') \bmod z, \\ Z \equiv r \bmod z \Rightarrow kZ \equiv kr \bmod z \text{ für } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für $z > 0$ lässt sich r in (4.1) stets so wählen, dass $0 \leq r \leq z - 1$.

Beweis: Wir betrachten eine beliebige nicht durch 10 teilbare ganze Zahl z, die im Folgenden fest gewählt sei und von der wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (gegebenenfalls nach Multiplikation mit -1) voraussetzen können, dass sie positiv ist. Wir unterscheiden drei Fälle, die sich, weil z nicht durch 10 teilbar ist, gegenseitig ausschließen:

- z und 10 sind teilerfremd;
- z ist gerade;
- z ist durch 5 teilbar.

Im *ersten Fall* betrachten wir die z verschiedenen positiven ganzen Zahlen 10^m mit $0 \leq m \leq z-1$, für welche die Reste r_m über $10^m \equiv r_m \bmod z$ definiert seien. Nach Voraussetzung ist $r_m \neq 0$ für alle m; die z Reste r_m nehmen also jeweils einen der $z-1$ verschiedenen Werte $1, 2, ..., z-1$ an. Nach Schubfachprinzip existieren also zwei Indices ℓ, m mit $0 \leq \ell < m$, für die $r_\ell = r_m$. Wegen (4.2) gilt dann auch:

$$10^m - 10^\ell \equiv (r_m - r_\ell) \equiv 0 \bmod z,$$

das heißt $10^m - 10^\ell = (10^{m-\ell} - 1) \cdot 10^\ell$ ist durch z teilbar. Weil nach Voraussetzung im hier betrachteten Fall 10 und z teilerfremd sind, muss sogar

$$10^{m-\ell} - 1 \equiv 0 \bmod z \tag{4.3}$$

gelten, das heißt, $10^{m-\ell} - 1$ ist ein Vielfaches von z. Die Zahl $10^{m-\ell} - 1$ ist ein Dezimal-Palindrom, da in ihrer Dezimaldarstellung jede der $m - \ell$ Ziffern eine 9 ist.

Im *zweiten Fall* können wir z als $z = 2^t \cdot y$ mit $t \geq 1$ und einer zu 10 teilerfremden positiven ganzen Zahl y schreiben. Es sei $x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $x_n,\ x_0 \neq 0$ die Dezimaldarstellung von $x = 2^t$. Es ist stets $n + 1 \leq t$, weil $n = 0$ für $t = 1$ und es sich induktiv leicht nachweisen lässt, dass $2^t \leq 10^{t-1}$ für $t \geq 2$. Wir konstruieren hieraus ein Dezimal-Palindrom durch

$$w = \overline{x} \cdot 10^t + x = \overline{x} \cdot 10^t + 2^t = (\overline{x} \cdot 5^t + 1) \cdot 2^t, \tag{4.4}$$

wobei $\overline{x}$ die Dezimaldarstellung $x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n$ habe (Dezimaldarstellung von 2^t in umgekehrter Reihenfolge); w hat also die $(t+n+1)$-stellige Dezimaldarstellung

$$w_D = x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n \underbrace{00 \dots 00}_{d-\mathrm{mal}} x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0, \text{ wobei } d = t - n - 1. \tag{4.5}$$

Aus (4.4) folgt sofort, dass w durch 2^t teilbar ist; w wird im Allgemeinen jedoch nicht durch y teilbar sein. Aus den Betrachtungen im ersten Fall wissen wir aber, dass eine postive ganze Zahl p existiert, so dass $10^p \equiv 1 \mod y$; vergleiche (4.3). Aus den Rechenregeln in (4.2) ergibt sich, dass dann auch

$$10^{p \cdot q} \equiv 1 \bmod y \text{ für alle positiven ganzen Zahlen } q \geq 1. \tag{4.6}$$

Wir wählen ein q^*, so dass

$$s := p \cdot q^* \geq t + n + 1. \tag{4.7}$$

Dann sind auf Grund von (4.6) alle y Summanden in $1+10^s+10^{2s}+\dots+10^{(y-1)s}$ kongruent 1 modulo y; die Summe ist also auf Grund der Rechenregeln in (4.2) kongruent y modulo y, das heißt die Summe ist durch y teilbar. Für die Zahl

$$w \cdot (1 + 10^s + 10^{2s} + \cdots + 10^{(y-1)s})$$

stellen wir zusammenfassend fest: Sie ist durch $z = 2^t \cdot y$ teilbar, weil w durch 2^t und die Summe in der Klammer durch y teilbar ist. Außerdem ist sie ein Dezimal-

Palindrom, weil sie das Dezimal-Palindrom w, auf Grund von (4.7) ohne Überschneidungen, y-mal hintereinander fügt: Mit der abkürzenden Schreibweise w_D aus (4.5) ergibt sich, mit $e = s - t - n - 1$, die Dezimaldarstellung

$$\underbrace{w_D \underbrace{00\ldots00}_{e-\text{mal}} \ldots w_D \underbrace{00\ldots00}_{e-mal}}_{(y-1)-\text{mal}} w_D.$$

Der *dritte Fall* wird analog zum zweiten Fall bewiesen, indem wir z als $z = 5^t \cdot y$ mit $t \geq 1$ und einer zu 10 teilerfremden positiven ganzen Zahl y schreiben. □

Bemerkung: Für eine positive ganze Zahl z sei

$$\varphi(z) := |\{1 \leq r \leq z \mid \text{ggT}(r, z) = 1\}| \tag{4.8}$$

die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $r \leq z$, die teilerfremd zu z sind; die Funktion φ wird in der Zahlentheorie *Eulersche φ-Funktion* genannt. Die Gleichung (4.3) im obigen Beweis der Aufgabe kann direkt und konstruktiv über den folgenden Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz (Satz von Euler-Fermat)
Die beiden positiven ganzen Zahlen a und z seien teilerfremd, das heißt $\text{ggT}(a, z) = 1$. Dann ist

$$a^{\varphi(z)} - 1 \equiv 0 \bmod z. \tag{4.9}$$

Beweis des Hilfssatzes: Im Fall $z = 1$ ist nichts zu beweisen; es sei daher im Folgenden $z \geq 2$. Es sei R die Menge aus der Definition von $\varphi(z)$ in (4.8), das heißt

$$R := \{1 \leq r \leq z \mid \text{ggT}(r, z) = 1\} =: \{r_1, \ldots, r_{\varphi(z)}\}.$$

Wegen $z \geq 2$ gilt für alle $r \in R$, dass $r < z$. Für jedes $r_i \in R$, $1 \leq i \leq \varphi(z)$, gilt auch $\text{ggT}(a \cdot r_i, z) = 1$, es existieren also nicht-negative ganze Zahlen q_i mit $1 \leq q_i < z$, so dass $a \cdot r_i \equiv q_i \mod z$. Die Reste q_i, $1 \leq i \leq \varphi(z)$, sind paarweise verschieden, denn wäre $q_i = q_j$ mit $i \neq j$, so folgte aus (4.2)

$$0 \neq a \cdot (r_i - r_j) \equiv (q_i - q_j) \bmod z \equiv 0 \bmod z,$$

das heißt, $a \cdot (r_i - r_j)$ wäre ein Vielfaches von z. Weil jedoch $\text{ggT}(a, z) = 1$, müsste $r_i - r_j$ ein Vielfaches von z sein, was aber wegen $|r_i - r_j| < \max\{r_i, r_j\} < z$ nicht sein kann. Daher sind in der Menge $\{q_1, \ldots, q_{\varphi(z)}\}$ alle Reste r_i aus R enthalten, insbesondere gilt Gleichheit beim Produkt

$$q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_{\varphi(z)} = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(z)}. \tag{4.10}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir wegen (4.2) und der Definition der q_i

$$\begin{aligned} a^{\varphi(z)} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(z)} &= (a \cdot r_1) \cdot (a \cdot r_2) \cdot \ldots \cdot (a \cdot r_{\varphi(z)}) \\ &\equiv q_1 \cdot q_2 \ldots q_{\varphi(z)} \bmod z \\ &\equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(z)} \bmod z, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung (4.10) verwendet haben. Durch Subtraktion von $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(z)}$ auf beiden Seiten folgt

$$(a^{\varphi(z)} - 1) \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(z)} \equiv 0 \bmod z;$$

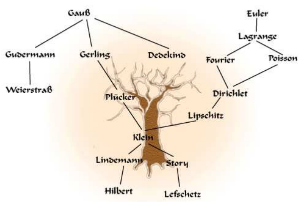
weil aber aus der Definition der r_i folgt, dass auch $\mathrm{ggT}(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(z)}, z) = 1$, muss tatsächlich (4.9) gelten. □

Wir danken Herrn Fegert und Herrn Prof. Quaisser für ihre hilfreichen Hinweise zur Darstellung.

Mathematische Ahnen
Das „Mathematics Genealogy Project“
von Wolfgang J. Bühler

In Deutschland und teilweise auch in anderen Ländern ist es üblich, den Professor, der einen Studenten bei seiner Doktorarbeit betreut, als dessen *Doktorvater* oder *akademischen Vater* zu bezeichen. Entsprechend ist die Bezeichnung *Doktormutter* zu verstehen.

Im Internet gibt es für Mathematiker dazu das *Mathematics Genealogy Project**, in dem zu vielen Mathematikern ihre Doktorväter beziehungsweise -mütter zu finden sind.



Falls Dein Mathematiklehrer oder ein anderer Mathematiker, den Du kennst, den Doktortitel führen, kannst Du dort herausfinden, wer sein Doktorvater und wer seine weiteren akademische Vorfahren sind. Meine eigenen Vorfahren findest Du in dem Stammbaum auf der nächsten Seite.
Manche Mathematiker haben dabei auch zwei Doktorväter, welche die Arbeit gemeinsam betreut haben (hier beispielsweise Sierpinski, der von Zaremba und Vorony betreut wurde).

* deutsch: Mathematischer-Stammbaum-Projekt

Einige dieser Namen werden Dir bekannt sein. In den Ahnenreihen anderer Monoid-Redaktionsmitglieder steht zum Beispiel Carl Friedrich Gauß, ebenfalls ein sehr bedeutender Mathematiker.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 95

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey:
Kl. 5: Anja Förster 12, Julian Langen 8;
Kl. 6: Arne Broszukat 19, Sophie Gatzemeier 4, Juliane Schäfer 4.
Kl. 7: Matthias Blitzer 15, Marc de Zoeten 7, Laura Tabea Galkowski 14, Paul Gantner 9, Sebastian Ludwig 20, Benedikt Maurer 16, Raja Haider Mehmood 10, Alexander Rupertus 10, Julia Scherner 14;
Kl. 8: Lara Bergjohann 4, Eike Broszukat 16, Jochen Dahlem 12, Chantal Graversen 16, Dominik Meier 14, Andreas Pitsch 16, Freya Roth 16, Philipp Scherrer 16;
Kl. 9: Kevin Schmitt 10;
Kl. 10: Philipp Mayer 12.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal:
Kl. 12: Martin Reinhardt 25.

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen: (betreuende Lehrerinnen: Ute Frohs, Marie Claire Farag)
Kl. 6: Mariam Ahmed 9; Rehab Amr 9; Yara Ayman 5; Mona Sophie El Segini 9; Hoda Hazem 5; Malak Khaled 7; Marianne Michel 12; Jessica Nabil 4; Chantal Ragy 8; Mira Hamed 2; Maram Mohamed 9. **Kl. 10:** Nada Moh 6.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 12; **Kl. 12:** Lennart Adam 25;

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum (betreuende Lehrer: Gabriele Täffler, Gerhard Weber)**:**
Kl. 6: Friederike Kienle 4;
Kl. 9: Roberto Rossi 8; Alexander Schneider 7; David Wander 4.
Kl. 11: Rüdiger Bährle 6; Jonathan Bohlen 22.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 8: Frank Schindler 25.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betreuender Lehrer Wolfgang Jakob)**:**
Kl. 7: Katharina Bröhm 4.

Erlangen, Freie Walldorfschule: Kl. 11: Malte Meyn 23.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik:
Kl. 7: Daniel Wilde 18, **Kl. 8:** Janina Müller 6.

Grunheide, Gerhard-Hauptmann-Grundschule
Kl. 5: Sonja Witte 9.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin Frau Irmtrud Niederle)**:**
Kl. 5: Jamal Ageli 12; Sean Brauwers 6; Njomza Krasniqi 8; Nico Oschatz 8 Matthias Trinz 4.
Kl. 6: Philipp Arndt 13; Mara Koch 14; Lars Prepens 18; Joachim Roth 8.
Kl. 7: Rajeththanan Balachandran 10; Thorsten Roth 19.

Hamburg, Gymasium Hochrad: Kl. 10: Connor Röhricht 15.

Herzogenaurach, Gymnasium Herzogenaurach: Kl. 13: Lisa Janker 21.

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen (betr. Lehrer: Christoph Straub):
Kl. 8: Shaima'a Ahmed Doma 8; Nada Zaghloul 10.
Kl. 11: Alia'a Ahmed Doma 25.

Kelkheim, Eichendorffschule: Kl. 6: Maike Stanischewski 18.

Lehrte, Gymnasium Lehrte: Kl. 8: Robin Fritsch 29.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betreuender Lehrer Herr Mattheis)**:**
Kl. 6: Leonhard Conrath 19; Victor Jans 15; Valentina Preuhs 9.
Kl. 7: Niklas Braun 17; Julia Braunschädel 7, Lucas Feringa 4; Jana Veit 8.

Kl. 8: Eva Mülbüsch 6; Niklas Schliesmeier 15.
Kl. 9: Kira Bittner 6; Felix Braun 4.

Mainz, Gymnasium Gonsenheim: Kl. 13: Alexey Tyukin 21.

Mainz, Rabanus-Maurus-Gymnasium: Kl. 6: Magdalena Winkelvoß 13.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Wittekindt)**:**
Kl. 5: Leo Lutz 14.
Kl. 9: Steffen Hettler 1, Tim Lutz 13, Tobias Soldan 1.

Marktoberdorf, Gymnasium: Kl. 11: Florian Schweiger 26.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin Frau Cordula Langkamp)**:**
Kl. 6: Annika Schmitz 11.
Kl. 10: Vivien Kohlhaas 18. **Kl. 11:** Madeline Kohlhaas 19.

Neuss, Quirinus-Gymnasium:
Kl. 5: Kristina Thomsen 3;
Kl. 6: Daniel Linn 8; Nathalie Linn 8; Sarah Linn 8; Paul Nehrig 1.

Oberursel, Gymnasium (betreuende Lehrer Frau Beitlich und Frau Elze)**:**
Kl. 5: Jakob Kuhn 14; Sarah Vogel 16; Leon Wietschorke 10; Julian Zimmer 14. **Kl. 6:** Michael Arasim 7; Julius Asal 9; Andrea Behrent 19; Lutz Bischoff 14; Annika Brinkmann 10; Christina Diel 7; Yannic Döring 11; Marcus Dörner 9; Yasmina Gab 3; Michael Grunwald 13; Anna-Lena Hock 15; Tim Hoh 10; Anna-Maria Klaas 16; Kathi Klauda 12; Heiko Kötzsche 15; Lea Leopold 7; Nataly Lipp 10; Babette Marschner 7; Martin Müller 15; Thi Thao Nguyen 6; Mariam Rahi 8; Jonas Schramm 5; Felix Sobotta 14; Nils Thomas 7; Julian Tjardes 8; Eva-Marie Wagner 13.
Kl. 8: Valentin Kuhn 23;
Kl. 11: Bianca Bellchambers 7; Vita Bellchambers 6.
Kl. 12: Valentin Walther 23. **Kl. 13:** Stefan Albert 22.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betreuender Lehrer Herr Meixner)**:**
Kl. 8: David Feiler 30.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium: Kl. 7: Luis Ressel 15.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium: Kl. 10: Alexander Rettkowski 8.

Wiesbaden, Leibniz-Gymnasium: Kl. 8: Dorothea Winkelvoß 12.

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer Herr Kuntz)**:**
Kl. 6: Sarah Grabelmann 9, Anna Lena Meier 9, Lena Mohr 9;
Kl. 7: Lorena Ritzmann 12.

Wittlich, Peter-Wust-Gymnasium (betr. Lehrerin Frau Elisabeth Maringer)**:**
Kl. 9: Anna Arendt 10.

Mitteilungen

▶ **Herausgeber und Redaktion** begrüßen herzlich alle neuen Leserinnen und Leser, die sich mit dem Jahr 2009 zu der Schar der Monoid-Leser(innen) und -Löser(innen) hinzugesellt haben.

▶ Das Jahr 2008 war das Jahr der Mathematik. Monoid hat hierzu ein Sonderheft beigesteuert, das alle Abonnent(inn)en zusätzlich erhalten haben. - Das Bundesministerium für Bildung und Forschung hat zusammen mit der Initiative Wissenschaft im Dialog das Jahr 2009 unter das Zeichen Forschung gestellt: Forschungsexpedition Deutschland. Monoid ermuntert seine Leser(innen) schon immer, sich forschend mit mathematischen Fragen und Problemen auseinander zu setzen: Die Rubriken „Mathis machen mathematische Entdeckungen“, „Wer forscht mit?“ und „Die Seite(n) für den Computer-Fan“ laden hierzu ein. Entsprechend werden die in diesen Rubriken erzielten Punkte Grundlage für die Vergabe eines Forscherpreises 2009 sein, der 2008 erstmals vergeben wurde.

▶ Forscherinnen hatten es zu früheren Zeiten nicht leicht, den akademischen Weg über eine Habilitation zu beschreiten, da eine solche Frauen nicht gestattet wurde. Der Beitrag von Frau Dr. habil. Margarita Kraus in der Rubrik „Wer war's?“ beschreibt dies eindringlich. Frau Kraus ist Akademische Rätin im Institut für Mathematik und inzwischen Mitglied der Monoid-Redaktion.

▶ Zum Jahreswechsel gab es auch einen Wechsel im Monoid-Büro: Marcel Gruner, bisher zuständig für die Erstellung und das Layout der Monoid-Hefte, legt derzeit sein Staatsexamen ab und wird demnächst in das Referendariat für den gymnasialen Schuldienst wechseln. Die Redaktion dankt Herrn Gruner für seine engagierte und umsichtige Mitarbeit, die deutlich zur Qualität der Hefte beigetragen hat. Von seiner Erfahrung profitieren nun seine Nachfolger Boris Baltes und Steffen Wolf. (E.K.)

Die Redaktion

Jahrgang 29 Heft 97 März 2009

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 8 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID", zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-24389
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid