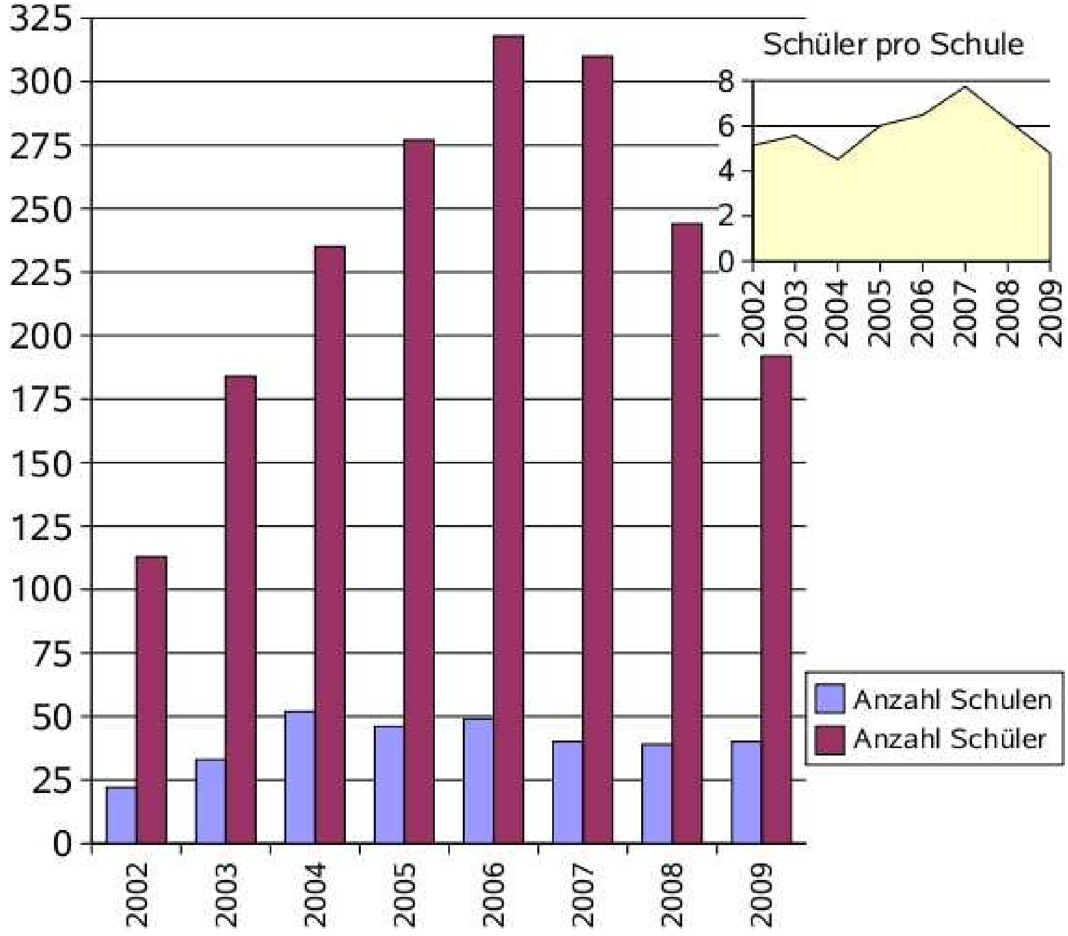
Jahrgang 30 Heft 103 September 2010

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker



Eine mathematische Zeitschrift
für Schüler(innen) und Lehrer(innen)
1980 gegründet von Martin Mettler
herausgegeben vom
Institut für Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität zu Mainz

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Liebe L(o)eserin, lieber L(o)eser!

Die neuen Aufgaben warten auf Lösungen. Nur Mut, auch wenn Du in Mathe keine „Eins“ hast! Die Aufgaben sind so gestaltet, dass Du zur Lösung nicht unbedingt den Mathe-Stoff der Schule brauchst. Vielmehr wirst Du viel mathematische Fantasie und selbstständiges Denken brauchen, aber auch Zähigkeit, Willen und Ausdauer.

Wichtig: Auch wer nur eine Aufgabe oder Teile einzelner Aufgaben lösen kann, sollte teilnehmen; der Gewinn eines Preises ist dennoch möglich. Denkt bei Euren Lösungen daran, auch den Lösungsweg anzugeben!

Für Schüler/innen der Klassen 5–7 sind in erster Linie die *Mathespielereien* vorgesehen; auch Schüler/innen der Klassen 8 und 9 dürfen hier mitmachen, aber nur auf der Basis der halben Punktzahl. **Alle Schüler**, insbesondere aber jene der Klassen 8-13, können Lösungen (mit Lösungsweg!) zu den *Neuen Aufgaben*, abgeben. Schüler/innen der Klassen 5–7 erhalten hierbei die 1,5-fache Punktzahl. Punkte aus den Rubriken *Computer-Fan*, *Mathis machen mathematische Entdeckungen* und *Wer forscht mit?* werden bei der Vergabe des *Forscherpreises* zugrunde gelegt. (Beiträge zu verschiedenen Rubriken bitte auf verschiedenen Blättern.)

Abgabe-(Einsende-) Termin für Lösungen ist der **15.11.2010.**

Zuschriften bitte an folgende Anschrift:

Johannes Gutenberg–Universität
Institut für Mathematik
Monoid-Redaktion
55099 Mainz

Tel.: 06131/3926107
Fax: 06131/3924389
E-Mail: `monoid@mathematik.uni-mainz.de`

An folgenden Schulen gibt es betreuende Lehrer, denen Ihr Eure Lösungen abgeben könnt: am **Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey** bei Herrn Kraft, an der **Lichtbergschule Eiterfeld** bei Herrn Jakob, am **Karolinen-Gymnasium Frankenthal** bei Frau Silke Schneider, an der **F-J-L-Gesamtschule Hadamar** bei Frau Niederle, an der **Alfred-Delp-Schule Hargesheim** bei Herrn Gruner, am **Frauenlob-Gymnasium Mainz** bei Herrn Mattheis, in **Mannheim** bei Herrn Wittekindt, am **Gymnasium Marienberg Neuss** bei Frau Langkamp, am **Gymnasium Oberursel** bei Frau Beitlich, am **Leibniz-Gymnasium Östringen** bei Herrn Ronellenfitsch, am **Gymnasium Nonnenwerth in Remagen** bei Herrn Meixner und am **Wilhelm-Erb-Gymnasium Winnweiler** bei Herrn Kuntz.

Die Namen aller, die richtige Lösungen eingereicht haben, werden in Monoid in der „Rubrik der Löser“ und auf der Monoid-Homepage im Internet erscheinen.

Wir bitten auch um neue Aufgaben, die Du selbst erstellt hast, um sie zu veröffentlichen. Diese Aufgaben sollen aber nicht aus Büchern oder Aufgabensammlungen entnommen sein, sondern Deiner eigenen Fantasie entspringen. Würde es Dich nicht einmal reizen, eine Aufgabe zu stellen, deren Lösung vorerst nur Du kennst?

Am Jahresende werden rund 50 Preise an die fleißigsten Mitarbeiter vergeben. Seit 1993 gibt es noch einen besonderen Preis: das Goldene M.

Außer der Medaille mit dem Goldenen M gibt es einen beachtlichen Geldbetrag für die beste Mitarbeit bei Monoid und bei anderen mathematischen Aktivitäten, nämlich: Lösungen zu den *Neuen Aufgaben* und den *Mathespielereien*, Artikel schreiben, Lösen von Sternchenaufgaben, Erstellen von neuen Aufgaben, etc.

Und nun wünschen wir Euch viel Erfolg bei Eurer Mitarbeit! Die Redaktion

Der Spieler, der Mathematiker und der Jurist

von Hartwig Fuchs

Eine kurze Vorgeschichte

Spiele sind ein uralter Zeitvertreib der Menschen. Am Anfang waren es wohl Geschicklichkeitsspiele, mit denen man zeigen konnte: Ich bin besser als du! Später entdeckte man – und zwar ausnahmslos in allen alten Zivilisationen – noch einen ganz anderen Typ von Spielen, die Glücksspiele. Deren Reiz liegt vor allem darin, dass ihr Ausgang vom Zufall abhängt und so auch der Ungeschickteste die gleichen Gewinnchancen wie der Clevere hat.

Aber bald wird man bemerkt haben, dass Glücksspiele – meist Würfelspiele – trotz der Zufälligkeit ihrer Ausgänge doch gewissen Regelmäßigkeiten unterliegen. Wer diese kennt, ist im Vorteil gegenüber seinen Mitspielern. Deshalb wird man auch nach solchen Gesetzmäßigkeiten gesucht haben – und die ersten Erfolge dabei hatten gewiss diejenigen, die als Erste ihre Würfel fälschten.

Aber die frühesten dokumentierten Untersuchungen von Würfelspielen werden erst zu Beginn der Neuzeit – einer außergewöhnlich spielwütigen Epoche – von italienischen Gelehrten unternommen: Girolamo Cardano (1501 – 1576) schrieb ein Buch „De Ludo alea“ (Vom Würfelspiel) und Galileo Galilei (1564 – 1642) verfasste die Schrift „Dei dadi“ (Von den Würfeln).

Beide Werke blieben den Zeitgenossen unbekannt – sie wurden erst 1663 beziehungsweise 1718 veröffentlicht.

Es war ein Nicht-Mathematiker, von dem dann der entscheidende Impuls zur Grundlegung einer Theorie des Würfelspiels und damit unmittelbar auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausging.

Der Spieler

Antoine Gombaud (1607 – 1684), ein Höfling im Dienste der Herzogin von Lesdiguières, der den Titel Chevalier de Méré trug, war ein landauf und landab bekannter Glücksspieler. Aber er war ein nachdenklicher Spieler, der nicht nur wegen des Reizes von Gewinn und Verlust spielte: Er wollte die Gesetzmäßigkeit entdecken, die er im Würfelspiel vermutete. Dabei stieß er auf Fragen, für die er keine Antwort finden konnte.

Zu einer dieser Fragen kam es möglicherweise so: Des Chevaliers bevorzugtes Spiel war dies:

(1) Ein Würfel wird vier Mal geworfen. Fällt dabei mindestens eine Sechs, hat er gewonnen; fällt keine Sechs, so hat er verloren.

Es wird sich im Laufe der Zeit herumgesprochen haben, dass der Chevalier bei diesem Spiel die größeren Gewinnchancen hatte – er gewann ganz einfach häufiger als seine Mitspieler, so dass er bald niemanden mehr fand, der im Spiel (1) gegen ihn setzen wollte.
Deshalb versuchte er es mit einer Variation seines Spiels:

(2) Ein Würfelpaar wird 24 Mal geworfen. Fällt dabei mindestens eine Doppel-Sechs, so hat er gewonnen – sonst aber verloren.

Nach einer Spielsaison wurde ihm klar: Das Spiel (2) war ungünstig für ihn, denn seine Mitspieler gewannen jetzt etwas häufiger als er. Dieses Phänomen war ihm unerklärlich.
De Méré hatte wohl – so nimmt man an – ganz im Sinne der damaligen maßgeblichen mathematischen Autorität Euklid „geometrisch“, das heißt mit Verhältnisgleichungen, überlegt:
Im Spiel (1) ist die Anzahl der Würfe vier und die Anzahl der möglichen Ergebnisse eines Wurfes ist sechs; im Spiel (2) ist die Anzahl der Würfe $6 \cdot 4 = 24$ und die Anzahl der möglichen Ergebnisse eines Wurfes ist $6 \cdot 6 = 36$.
Da in beiden Spielen das Verhältnis der Anzahl der Würfe zu der Anzahl der möglichen Ergebnisse eines Wurfes gleich ist, nämlich $4 : 6 = 24 : 36$, sollten auch in beiden Spielen des Chevaliers die Gewinnchancen gleich groß, also gleich günstig für ihn sein.

Diese Überlegung und seine Spielerfahrung waren unvereinbar. Da er den offensichtlichen Widerspruch aber nicht selbst auflösen konnte, bat er die Mathematiker Pascal und Roberval[1] um Hilfe bei seinem Problem (zusammen mit einem weiteren, dem so genannten Aufteilungsproblem, auf das wir hier nicht eingehen werden).
Es war Pascal, der sich der Sache annahm.

Der Mathematiker

Blaise Pascal (1623 – 1662), als Mathematiker ein Vorläufer der Infinitesimalrechnung und Physiker, war allein schon deshalb an dem an ihn herangetragenen Würfelproblem interessiert, weil zu dessen Bewältigung völlig neuartige Begriffe entwickelt werden mussten – eine Wahrscheinlichkeitstheorie gab es ja noch nicht einmal in Ansätzen.
Pascal konnte tatsächlich de Mérés Problem lösen. Er war sich jedoch bewusst, dass er sich dabei in mathematisch gänzlich ungesichertem Gelände bewegte. Um daher eine Bestätigung für die Richtigkeit seiner Überlegungen zu erlangen, wandte er sich an einen damals weithin anerkannten Zeitgenossen, der im Hauptberuf gar kein Mathematiker war.

[1] Gilles de Roberval (1602 – 1675), ein Wegbereiter der Differential- und Integralrechnung.

Der Jurist

Pierre de Fermat (1601 – 1665), ein am Gerichtshof von Toulouse in hohen Positionen tätiger Jurist, trieb nebenbei und nur zu seinem Vergnügen – fachlich aber durchaus in Augenhöhe mit Pascal – so erfolgreich mathematische Forschung, dass er als der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit gilt. Sein Werk ist auch in der heutigen Zeit noch gegenwärtig ist: Erst 1993 wurde seine berühmte „Fermat-Vermutung" bewiesen.[2]

Der Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Das Jahr 1654 gilt als das Geburtsjahr der Wahrscheinlichkeitstheorie, denn in diesem Jahr schrieb Pascal einen Brief an Fermat, in welchem er ihm de Mérés Probleme sowie seine eigenen Lösungsvorschläge darstellte.
Fermat fand schnell – auf einem anderen Weg als Pascal – die gleichen Lösungen, die er umgehend Pascal mitteilte. Daraus entwickelte sich ein Briefwechsel, dessen wichtigster Ertrag darin bestand, dass sich Fermat und Pascal darauf verständigten, wie sie den Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Wahrscheinlichkeit, festlegen sollten.[3]
Am Würfelspiel (1) lassen sich ihre Gedankengänge gut nachvollziehen.

Beim Werfen eines unverfälschten Würfels wird man eines der sechs möglichen Ergebnisse E_i, mit E_i : gewürfelte Augenzahl $= i$, $i = 1, 2, \dots, 6$ erhalten. Jedem der möglichen Ergebnisse E_i wird nun die Zahl $\frac{1}{6}$ zugeordnet, kurz:

$$P(E_i) = \frac{1}{6} \text{ für } i = 1, 2, \dots, 6.$$

Die Zahl $P(E_i)$ heißt die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ergebnisse E_i und die E_i nennt man gleichwahrscheinlich.

Beim 2-maligen, 3-maligen, 4-maligen Wurf eines Würfels sind der Reihe nach 6^2, 6^3, 6^4 verschiedene gleich wahrscheinliche Ergebnisse E_iE_j, $E_iE_jE_k$, $E_iE_jE_kE_l$ mit $1 \leq i, j, k, l \leq 6$ möglich, sodass man naheliegender Weise festlegen sollte:

$$P(E_iE_j) = \frac{1}{6^2}, \quad P(E_iE_jE_k) = \frac{1}{6^3}, \quad P(E_iE_jE_kE_l) = \frac{1}{6^4}.$$

Bei einem Würfelspiel ist man jedoch meist weniger daran interessiert, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ergebnis eintritt; es geht eher um die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, die durch bestimmte Bedingungen festgelegt sind – etwa das Würfeln einer vorher festgelegten „Augenkombination" oder einer „Augensumme" oder einer „Doppel-Sechs" und so weiter.

[2] von Andrew Wiles (geb. 1953), einem britischen Mathematiker
[3] Zur Lösung des oben erwähnten Aufteilungsproblems konzipierten Fermat und Pascal korrekt einen weiteren unverzichtbaren Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den Erwartungswert.

Im Spiel (1) des Chevaliers sei der Spielgewinn als das Ereignis E bezeichnet. Dann sind von seinen 6^4 möglichen Ergebnissen $E_iE_jE_kE_l$ nur die mit mindestens einmaligem Vorkommen einer Sechs günstig für das Eintreten von E. Die Anzahl dieser günstigen Ereignisse sei g. Da jedes von ihnen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6^4}$ hat, legt man fest:

(3) $P(E) = g \cdot \frac{1}{6^4}$.

Von dieser Gleichung ist es nur ein kleiner, aber entscheidender Schritt zur Definition des (klassischen) Wahrscheinlichkeitsbegriffs, den die Mathematik Fermat und Pascal verdankt.

Definition
Bei einem Spiel mit zufälligen, gleich wahrscheinlichen möglichen Ergebnissen sei E ein Ereignis. Dann hat E die Wahrscheinlichkeit

(4) $P(E) = \frac{\text{Anzahl } g \text{ der für das Eintreten von } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl } m \text{ der insgesamt möglichen Ergebnisse}}$.

Fermat und Pascal haben in ihrem Briefwechsel mit dieser Definition gearbeitet, sie haben sie aber nirgends schriftlich fixiert. Sie befindet sich jedoch in dem von Laplace[4] im Jahre 1812 veröffentlichten, den damaligen Entwicklungsstand der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammenfassenden Buch „Théorie analytique des probalitités“. Seither spricht man von der Laplace-Definition der Wahrscheinlichkeit – eine der vielen Fehlbezeichnungen in der Mathematik.
Mit (4) konnte Fermat und Pascal die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei den Würfelspielen (1) und (2) berechnen.

Spiel 1

Die Anzahl m der möglichen Ergebnisse ist oben mit $m = 6^4$ angegeben; die Anzahl g der günstigen Ereignisse lässt sich am bequemsten über einen kleinen Umweg ermitteln: Man bestimmt die Anzahl u der ungünstigen Ergebnisse – dann ist $g = m - u$.
Die einzelnen Rechenschritte können übersichtlich und ganz ausführlich so dargestellt werden:

Anzahl der Würfe	m	u	g
1	6	5	$6-5$
2	$6 \cdot 6$	$5 \cdot 5$	$6^2 - 5^2$
3	$6 \cdot 6^2$	$5 \cdot 5^2$	$6^3 - 5^3$
4	$6 \cdot 6^3$	$5 \cdot 5^3$	$6^4 - 5^4$

Für das Spiel (1) ist damit $m = 6^4, g = 6^4 - 5^4$, so dass

(5) $P(\text{Gewinn}) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 0{,}5177$

[4] Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), bedeutender französischer Physiker, Astronom und Mathematiker.

Spiel 2

Ausgehend von 36 möglichen und 35 ungünstigen Ergebnissen (also ohne eine Doppel-Sechs) bei einem Wurf zweier Würfel erhält man (ganz so wie oben) bei 24 Würfen $m = 36^{24}$ mögliche, $u = 35^{24}$ ungünstige und folglich $g = 36^{24} - 35^{24}$ günstige Ergebnisse, so dass für das Spiel (2) gilt:

(6) $P(\text{Gewinn}) = \frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}} = 0{,}5086.$

Übrigens: Hätte der Chevalier de Méré gefragt, wie oft er nach den Regeln von (2) ein Würfelpaar mindestens werfen muss, damit seine Gewinnchance größer als die seines Mitspielers ist, dann hätte er wegen (4) die Antwort aus der Ungleichung

(7) $P(\text{Gewinn}) = \frac{36^{n}-35^{n}}{36^{n}} > 0{,}5.$

erhalten, nämlich: Die Anzahl der Würfe muss größer als 25 sein.

Mit (6) und (7) ist das Würfelproblem des Chevalier de Méré gelöst. Auf dem Weg dahin haben Fermat und Pascal den ersten Grundstein der Wahrscheinlichkeitstheorie gelegt und sie damit als mathematische Disziplin etabliert.

Eine kurze Nachgeschichte

Fermat und Pascal definieren Wahrscheinlichkeit mit (4) nur für gleichwahrscheinliche Ergebnisse, wie sie bei Glücksspielen eintreten können. Erst 1718 mit der Veröffentlichung von Jakob Bernoullis[5] Schrift „Ars conjectandi“ wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung von ihrer ausschließlichen Bindung an Glücksspiele gelöst und es beginnt allmählich die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie zu einer rein mathematischen Disziplin.
Eine endgültige Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie gelingt Kolmogorov[6] mit seinem 1933 erschienenen Buch „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, in welchem er ein heute allgemein akzeptiertes Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung angibt.

Die Ecke für den Computer-Fan

Summe dritter Potenzen

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die Summe

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

wieder eine dritte Potenz ist. Untersuche etwa den Zahlenbereich von 1 bis 5000 beziehungsweise soweit es mit deinem Computer möglich ist! (E.K.)

[5] Jakob Bernoulli (1654-1705), bedeutender Schweizer Mathematiker
[6] Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (1903 – 1987), der als einer der besten russische Mathematiker des 20. Jahrhunderts gilt (Siehe auch den Artikel in Monoid 94, Seite 14

Hinweis: Ihr könnt Eure Lösungen bis zum 15. November 2010 einschicken, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Allerdings müsst Ihr bei der Verwendung eines eigenen Programms dies entsprechend durch Einsenden der Programm-Datei (am besten gezippt als E-Mail-Anhang an `monoid@mathematik.uni-mainz.de`) dokumentieren.

Die Lösungen werden im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Computer-Aufgabe aus Monoid 101

Eine Folge mit ganzzahligen Gliedern?

Die Zahlenfolge n_0, n_1, n_2, ... sei folgendermaßen definiert:

$$n_0 = 1,\ n_1 = \frac{1+n_0^2}{1},\ n_2 = \frac{1+n_0^2+n_1^2}{2}$$

und für $i \geq 3$:

$$n_i = \frac{1+n_0^2+n_1^2+\ldots+n_{i-1}^2}{i}.$$

Formal handelt es sich um Bruchzahlen; beim Ausrechnen der ersten zehn (und mehr) Glieder zeigt sich jedoch, dass diese ganzzahlig sind. Untersuche, ob es in der Folge wirklich nur ganze Zahlen gibt. (nach H.F.)

Ergebnisse

Die ersten elf Folgenglieder sind:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 28,\ 154,\ 3\,520,\ 1\,551\,880,\ 267\,593\,772\,160$$

und schließlich

$$n_{10} = 7\,160\,642\,690\,122\,633\,501\,504.$$

Somit ist die Vermutung naheliegend, dass sich tatsächlich immer ganze Zahlen ergeben. Das Problem der weiteren Untersuchung dieser Folge besteht jedoch darin, dass die Folgeglieder sehr rasch anwachsen; so ist bereits $n_{20} > 10^{13000}$.

Nur Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf) hat uns ein Ergebnis eingereicht. Er schrieb:

Mit meinem Voyage 200 von Texas Instuments habe ich von Hand die Zahlen n_0 bis n_{13} auf Ganzzahligkeit überprüft. Da n_{13} bereits 168 Stellen hat und die Stellenzahl sich bei der Berechnung des nächsten Folgegliedes annähernd verdoppelt, ist eine weitere Berechnung nicht sinnvoll.

Man könnte so zu der Vermutung gelangen, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Dies ist jedoch falsch, denn in der WURZEL*, Ausgabe November 2007, wird auf Seite 253 gezeigt, dass ab n_{43} alle Folgenglieder keine ganzen Zahlen mehr sind.

* Mathezeitung der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Dazu wird zunächst gezeigt, dass, wenn ein Folgenglied nicht ganz ist, dies auch für alle folgenden gilt (was man am leichtesten aus $n_t = \frac{(t-1)\cdot n_{t-1}+n_{t-1}^2}{t}$ sieht). Dann werden alle Folgenglieder n_0 bis n_{42} modulo 43 berechnet, und so folgt, dass der Zähler in $n_{43} = \frac{42\cdot n_{42}+n_{42}^2}{43}$ nicht durch 43 teilbar ist.

Bericht von der Mainzer Mathematik-Akademie vom 26. August bis 29. August 2010

von Kim Vetter

Als Teilnehmerin an der ersten Mathematik-Akademie der Universität Mainz möchte ich gerne berichten, wie ich diese Zeit erlebt und empfunden habe.

Erstmals habe ich von der Akademie durch meinen Lehrer erfahren, der mir vorschlug teilzunehmen und da ich schon andere Akademien besucht hatte und immer begeistert war, hielt ich dies für eine gute Idee. Ich meldete mich also recht zügig an und bekam sofort erste Informationen zum Ablauf und zu einer Homepage, die uns mit allem Wichtigen füttern sollte.

Am Donnerstag, den 26. August 2010, traf ich nachmittags in unserer Herberge ein und wurde direkt von Studenten und Organisatoren empfangen. Den ersten Abend verbrachten wir mit diversen Spielen zum Kennenlernen und ich fühlte mich in der ungezwungenen, offenen Atmosphäre, die sich während der folgenden Zeit noch intensivierte, direkt sehr wohl.

Am Freitag erhielten wir an der Universität eine kurze Einführung in die Kurse, wählten einen aus und begannen sogleich mit der Kursarbeit. Ich selbst hatte den Kurs *Invarianten* gewählt, der neben den Themen *Knotentheorie* und *Die vierte Dimension* angeboten wurde. Wir stiegen mit einigen Beispielen ins Thema ein, anhand derer wir dann klärten, was Invarianten sind, wozu man sie braucht und wie man mit ihnen rechnet. Die weiteren Kurseinheiten beschäftigten sich dann teilweise mit komplexen Zahlen, unser Interesse lag allerdings eher auf den Invarianten und so gab unser Dozent Prof. Dr. Manfred Lehn unserem Wunsch nach.

Neben den Kurseinheiten wurde uns ein buntes Freizeitprogramm geboten, das beispielsweise eine nächtliche Stadtführung durch Mainz, Improvisationstheater und Gesellschaftsspiele umfasste, allerdings gab es auch fachliche Variationen. So hatten wir das Glück, einem Vortrag über Mathematikgeschichte, gehalten von David Rowe, beizuwohnen.
Insgesamt war die Mathematikakademie 2010 eine tolle Erfahrung, bei der ich viele tolle Leute kennenlernen durfte und super viel Spaß hatte.
Die MMA wurde gefördert von

Die besondere Aufgabe

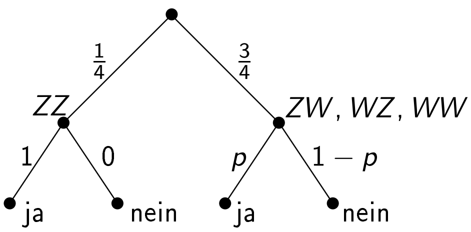
von Hartwig Fuchs

Es wird behauptet, dass der Prozentsatz p der Hauseigentümer, welche schon einmal einen Schwarzarbeiter beschäftigt haben, recht hoch ist. Durch eine Umfrage soll der Wert von p abgeschätzt werden. Da man aber bei einer direkten Frage sicher viele falsche Antworten erhält, können die Befragten ihre Antworten folgendermaßen verschlüsseln:
Jeder Befragte wirft zwei Münzen so, dass der Frager das Ergebnis nicht sehen kann. Erhält er zwei Mal „Zahl", so beantwortet er wahrheitsgemäß die Frage F_1 mit ja oder nein; bei jedem „anderen" Ergebnis – nämlich bei ZW, WZ, WW mit $W =$ „Wappen" – beantwortet er die Frage F_2 wahrheitsgemäß mit ja oder nein.
Die Fragen lauten:
F_1: Ist die Gleichung $1 + 2 = 3$ richtig?
F_2: Haben Sie schon einmal einen Schwarzarbeiter beschäftigt?

Es werden nun 5000 Hausbesitzer befragt; 4011 von ihnen antworten mit ja, 989 mit nein, wobei der Fragende nicht erkennen kann, auf welche der Fragen F_1 oder F_2 sich ein ja oder nein bezieht. Wie kann man aus diesem Ergebnis den Wert von p abschätzen?

Lösung

Die relative Häufigkeit h, mit der die Antwort ja gegeben wird, ist $h = \frac{4011}{5000} = 0{,}8022$.
Wenn man zwei Münzen wirft, dann ist in $\frac{1}{4}$ aller Würfe das Ergebnis ZZ und in $\frac{3}{4}$ aller Würfe ist es ZW, WZ oder WW. Beim Ergebnis ZZ wird dann mit Wahrscheinlichkeit 1 die Antwort ja und mit Wahrscheinlichkeit 0 die Antwort nein sein. Bei jedem anderen Ergebnis wird mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p die Antwort ja und mit der ebenfalls unbekannten Wahrscheinlichkeit $1 - p$ die Antwort nein sein. Das Diagramm veranschaulicht die Möglichkeiten des Ausgangs der Befragung einer Person.



Wenn wir nun $h = 0{,}8022$ als einen geeigneten Näherungswert für das Eintreten der Antwort ja benutzen, dann ergeben die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrech-

nung $h = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot p$. Also ist $p = (0{,}8022 - 0,25) \cdot \frac{4}{3} = 0{,}7363$.
Fazit: Fast drei viertel aller Hausbesitzer haben schon mal einen Schwarzarbeiter beschäftigt.

Mathematische Lese-Ecke
– Lesetipps zur Mathematik –
von Martin Mattheis

Keith Devlin: „Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks“
Wie bereits der Untertitel verrät, lädt uns der Autor zu einer Reise in die Geschichte der Mathematik ein. Keith Devlin, ein britischer Mathematiker, der an Universitäten in den USA und in Deutschland lehrte, hat schon einige populärwissenschaftliche Bücher zur Mathematik geschrieben. Das aktuelle behandelt den Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. Jahrhundert, als der Briefwechsel von Blaise Pascal mit Pierre de Fermat ein neues mathematisches Teilgebiet entstehen ließ. Anlass war die eigentlich banal klingende Frage, wie zwei Spieler, die zum Beispiel darum gewettet hatten, wer bei fünf Münzwürfen am häufigsten Zahl erhält, den Einsatz aufteilen müssten, wenn das Spiel bereits nach drei Runden abgebrochen werden muss.
Devlin stützt sich dabei auf erhaltene Briefe von Blaise Pascal und Pierre de Fermat aus der Zeit zwischen Juli und Oktober des Jahres 1654. Aus diesen zitiert er wörtliche Passagen, die den Leser plastisch mit der zugrundeliegenden Fragestellung in Berührung bringen und damit deutlich machen, dass mathematische Theorien – wie in diesem Falle die Wahrscheinlichkeitsrechnung – immer auf Grund von echten Problemen realer Menschen entstanden sind und niemals einfach nur vom Himmel fallen.
Anhand des Briefwechsels von Pascal und Fermat gelingt es Devlin in gewohnt flüssiger Weise, grundlegende Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung so zu vermitteln, dass sie auch jedem Laien – der eventuell wöchentlich Lotto spielt – verständlich werden und gibt dabei zusätzlich einen guten Einblick in Abschnitte der Lebensläufe bedeutender Mathematiker wie zum Beispiel Galilei, Jakob Bernoulli, Cardano, Tartaglia und Gauß, um nur einige zu nennen.

Fazit: Devlin ist wieder einmal ein Buch gelungen, das danach ruft, in den Herbstferien gemütlich im Sessel sitzend verschlungen zu werden.

Gesamtbeurteilung: sehr gut ☺☺☺

Angaben zum Buch:
Devlin, Keith: Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks. Eine Reise in die Geschichte der Mathematik; Beck 2009, ISBN 978-3406590993, gebunden, 205 Seiten, 17,90 €.

Art des Buches:	Sachbuch zur (Geschichte der) Wahrscheinlichkeitsrechnung
Mathematisches Niveau:	leicht verständlich
Altersempfehlung:	ab 14 Jahren

Hättest Du es gewusst? Wann arbeitet ein Mathematiker rückwärts?

von Hartwig Fuchs

Der Meisterdetektiv Sherlock Holmes* ist berühmt für die Art und Weise, wie er Verbrechen aufklärt. Zunächst hat Holmes zwei gegensätzliche methodische Ansätze, mit denen er an die Lösung eines Kriminalfalls herangehen konnte.

Der eine Ansatz lautet: Jeder ist verdächtig. Hätte Holmes danach gehandelt, dann hätte das für ihn bedeutet: Er musste jeden Verdächtigen außer einen als Täter ausschließen. Bei einem größeren Kreis von Verdächtigen (zum Beispiel alle Einwohner eines Stadtteils) hätte das dann bereits so viele Einzeluntersuchungen erfordert, dass dadurch die Aufklärung des Verbrechens praktisch zum Scheitern verurteilt gewesen wäre.

Deshalb machte es sich Holmes zum Prinzip: Zunächst ist niemand verdächtig. Wie aber löste er dann seine Fälle? Er sammelte Spuren am Tatort in der Erwartung, dass er wenigstens eine von ihnen allein mit logischer Deduktion bis zum Täter hin zurückverfolgen könne. Und er hatte mit dieser Vorgehensweise stets Erfolg!

Da die Back-track-Methode** des Sherlock Holmes auf der Logik basiert, kann es nicht überraschen, dass seine Arbeitsweise auch in dem Gebiet erfolgreich angewendet wird, das ohne Logik nicht denkbar ist: Der Mathematik.

In der Mathematik werden Behauptungen bewiesen. Und das geschieht häufig so: Ausgehend von einer wahren Aussage V, der Voraussetzung, arbeitet man sich zielgerichtet „vorwärts“ längs einer Kette von logischen Schlüssen bis hin zu einer auf diese Weise hergeleiteten Behauptung B.

Es gibt nun aber Situationen, in denen es problematisch ist, einen geeigneten logischen Weg $V \Longrightarrow B$ von V nach B zu finden, während man manchmal „rückwärts“ arbeitend einen Weg $B \Longrightarrow V$ angeben kann, der von B zu einer Aussage V führt, die dann ihrerseits einen Beweis $V \Longrightarrow B$ möglich macht.

* eine literarische Figur aus den Kriminalgeschichten des Autors Arthur C. Doyle

** back track (englisch) – etwa: Spuren zurückverfolgen; wir nennen das „rückwärts“ arbeiten

Zwei typische mathematische Schwierigkeiten, die sich manchmal rückwärts arbeitend überwinden lassen:

a) Man kennt zwar einen Ansatzpunkt V für die Herleitung einer Behauptung B. Aber eine von V nach B führende Schlusskette ist aus so vielen nicht in Frage kommenden Möglichkeiten herauszufiltern, dass damit ein Beweis von B mühsam und zu umfangreich wäre. (Sherlock Holmes würde sagen: „Es gibt zu viele Verdächtige!"). Daher ist es in manchen Fällen effektiver, von B aus nach einer Aussage V^* zu suchen, von der aus dann B herleitbar ist (siehe Beispiel 1).
b) Weit und breit ist unmittelbar kein Ansatzpunkt V zu sehen, von dem aus B zu beweisen ist (Sherlock Holmes würde sagen: „Noch haben wir keinen Verdächtigen"). Hin und wieder aber lassen sich an B logisch verwertbare Spuren entdecken, die man bis zu einer Aussage V zurückverfolgen kann und die dann den Anfang einer Ableitung $V \Rightarrow B$ bildet. Dabei werden wir zwei Fälle unterscheiden: Man vermutet, dass B wahr ist (siehe Beispiel 2), oder man vermutet, dass B falsch ist (siehe Beispiel 3).

Wir veranschaulichen nun die Fälle a) und b) an exemplarischen Situationen.

Beispiel zu a): Eine Spielstrategie

Auf einem Spielbrett liegen m Steine, wobei m eine nicht zu kleine Primzahl ist. Die beiden Spieler Abu und Ibn nehmen im Wechsel mindestens einen Stein, höchstens aber k Steine vom Brett, wobei $1 \leq k < m$ ist. Gewonnen hat, wer das Brett leer räumt. Abu beginnt das Spiel, indem er $m = 37$ wählt. Danach setzt Ibn $k = 11$ fest. Nun nimmt Abu als erster Steine vom Brett und so weiter.

Gibt es eine Taktik, mit der Abu dieses Spiel stets gewinnen kann, wenn er den ersten Spielzug hat?

Sucht man die Antwort vom Spielanfang her, dann gerät man schnell in eine unübersichtliche Situation:
Abu hat elf verschiedene Möglichkeiten, Steine vom Brett zu nehmen, ebenso Ibn, danach wieder Abu und so weiter, sodass zum Beispiel nach drei Spielzügen $11 \cdot 11 \cdot 11$, also bereits mehr als 1000 Fälle in Betracht zu ziehen sind.
Dagegen ist es einfacher, sich vom Ende zum Anfang eines Spiels zurückzuarbeiten. Denn am Ende weiß man ja, mit welcher letzten Zugmöglichkeit das Spiel zu gewinnen war; ebenso kennt man die vorletzten Spielzüge, die den letzten Spielzug erlaubten und so weiter zurück bis zm Spielbeginn.

Deshalb werden wir uns nun mit der „Back-track-Methode" eine Gewinnstrategie für das Spiel „Steine wegnehmen" mit $m = 37$, $k = 11$, herleiten.

Es seien A_n und J_n die Anzahlen der Steine, die sich auf dem Brett befinden, bevor Abu beziehungsweise Ibn den n-ten Spielzug macht – dabei seien die Spielzüge vom Spielende her nummeriert.

Abu gewinnt, wenn vor seinem letzten Spielzug $A_1 = s$ mit $s \in \{1, 2, \dots, 11\}$ war. Das ist aber nur möglich mit $J_1 = 12$ vor Ibns letztem Spielzug, bei dem er ja $1, 2, \dots$ oder 11 Steine vom Brett nehmen muss. Abu kann nun $J_1 = 12$ herbeiführen, wenn für ihn selbst $A_2 = t$ mit $t \in \{13, 14, \dots, 23\}$ galt. Dazu war vorweg $J_2 = 24$ notwendig – was Abu nur aus der Situation $A_3 = u$ mit $u \in \{25, 26, \dots, 35\}$ erreichen konnte. $A_3 = u$ ergibt sich nun zwangsläufig aus $J_3 = 36$. Von $A_4 = 37$ aus kann jedoch Abu die Situation $J_3 = 36$ erzwingen.
Damit besitzt Abu eine Gewinnstrategie: Er muss – und er kann das! – Ibn der Reihe nach in die Situationen $J_3 = 36$, $J_4 = 24$ und $J_1 = 12$ bringen.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet für die Methode des Rückwärtsarbeitens ist das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen. Tatsächlich löst man ja zum Beispiel die Gleichung B, indem man sie durch Umformung schrittweise auf eine Menge V von Lösungskandidaten zurückführt – was sicher eine Form des „back tracking“ ist. Von V ausgehend prüft man dann nach, ob die Elemente aus V die Gleichung B erfüllen.
Wir wollen diese Vorgehensweise, die jedem geläufig ist, dennoch am Beispiel der Lösung eines Ungleichungsproblems demonstrieren.

1. Beispiel zu b): Eine Dreiecksungleichung

In einem beliebigen Dreieck seien a, b und c die Seitenlängen. Evo hat an vielen Dreiecken herausgefunden, dass das Produkt $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ zwar beliebig groß, nicht aber beliebig klein werden kann. Er fragt sich daher:

Kann man eine größte Zahl $d > 0$ angeben, sodass für jedes Dreieck gilt:

(1) $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq d$?

Da Evo unmittelbar keine Ausgangsbasis V sieht, von der aus er vorwärts arbeitend zu einer Antwort gelangen könnte, versucht er in umgekehrter Richtung – „back tracking“ – aus (1) Rückschlüsse zu ziehen, die ihn zu einer für die Lösung des Problems geeigneten Startsituation V führen sollen. Konkret läuft das etwa so ab:

Annahme: Die Ungleichung (1) trifft zu für eine feste, aber noch nicht bestimmte Zahl d, dann werden – beginnend mit (1) – folgende Umformungen (Rückschlüsse) vorgenommen:

(1) $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq d \Longrightarrow$

(2) $(a+b+c)\cdot(bc+ac+ab) \geq d\cdot abc \Longrightarrow$

(3) $a^2c + a^2b + b^2c + b^2a + c^2b + c^2a + 3abc \geq d\cdot abc \Longrightarrow$

(4) $c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + 6abc + 3abc \geq d\cdot abc$?

Wählt man in (1) nachträglich $d = 9$, so gelangt man zu der für jedes $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ wahren Aussage:

(V) $c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 \geq 0$

Die Ungleichung V kann daher als Ausgangsbasis für eine Herleitung von (1) mit $d = 9$ benutzt werden. Da alle Schlüsse von (1) nach V umkehrbar sind, ist $V \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (2) \Rightarrow (1)$ eine solche Herleitung. Damit hat Evo die folgende Dreiecksungleichung bewiesen:
Für jedes Dreieck mit Seitenlängen a, b, c gilt: $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Bei einem Beweis, mit dem eine Behauptung B als falsch nachgewiesen werden soll, ist die Methode des rückwärts Arbeitens beinahe unverzichtbar.
Denn der Versuch, aus einer wahren Aussage V eine falsche Aussage B herzuleiten, muss misslingen, weil das dem logischen Grundsatz widerspräche:

($*$) Aus einer wahren Aussage folgen stets nur wahre Aussagen.

Also bleibt einem oft nur der umgekehrte Weg, der von B ausgeht. Wegen ($*$) wird man dabei zunächst B als wahr annehmen. Wenn es dann gelingt aus B eine Aussage V herzuleiten, die erkennbar falsch ist, so widerspricht das dem Prinzip ($*$) – falls B tatsächlich wahr wäre. Also kann B nicht wahr sein.
Nach dem Grundsatz vom ausgeschlossenen Dritten:

($**$) Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch – ein Drittes gibt es nicht.

gilt daher: B ist falsch – was zu zeigen die Absicht war.

2. Beispiel zu b): Ein Färbeproblem

In einem Vieleck V_1 mit $2n+1$ Ecken, $n \geq 1$, seien n Ecken rot (r) und $n+1$ Ecken blau (b) gefärbt.

Konstruktionsvorschrift für Vielecke: V_2, V_3, V_4 ...

a) Die Mittelpunkte der Kanten von V_1 seien die Eckpunkte eines $(2n+1)$-Ecks V_2. Diejenigen Ecken von V_2 werden rot gefärbt, die zwischen zwei benachbarten gleichfarbigen Ecken von V_1 liegen. Die anderen Ecken von V_2 werden blau gefärbt.

b) Aussgehend von V_2 konstruiert man gemäß der Vorschrift a) ein Vieleck V_3; danach aus V_3 ein Vieleck V_4 und so weiter.

Kann man durch hinreichend häufige Wiederholungen der Konstruktion zu einem Vieleck V_m mit lauter gleichfarbigen Ecken gelangen – wie auch immer die Ecken von V_1 gefärbt waren?

Die Back-track-Methode gibt hier eine unerwartet schnelle Antwort. Wir zeigen dies für ein Siebeneck – die Überlegungen sind jedoch unmittelbar übertragbar auf ein $(2n+1)$-Eck mit beliebigem $n \geq 1$.

Angenommen, in einer Siebeneck-Folge V_1, V_2, V_3, ... besitze V_m, $m > 1$, erstmals lauter gleichefarbige Ecken.

(1) Alle Ecken von V_m seien blau.

Dann sind in V_{m-1} die Ecken im Wechsel rot und blau – das aber ist in einem Vieleck mit ungeradzahlig vielen Ecken nicht möglich – Widerspruch.

(2) Alle Ecken von V_m seien rot.

Dann enthält V_{m-1} nach der Definition von V_m mindestens eine blaue Ecke. Wäre nun auch nur noch eine Ecke in V_{m-1} rot, dann besäße V_{m-1} ein Paar benachbarter, verschiedenfarbiger Ecken und folglich wäre (mindestens) eine Ecke von V_m blau – Widerspruch.
Also enthält V_{m-1} lauter blaue Ecken. Aber das ist nach (1) nicht möglich – erneut ein Widerspruch.

Aus der Folge V_1, V_2, V_3, ... gibt es kein Siebeneck mit lauter gleichfarbigen Ecken.

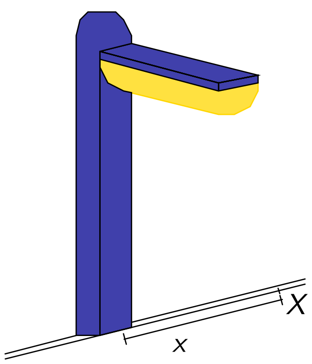
Bemerkung

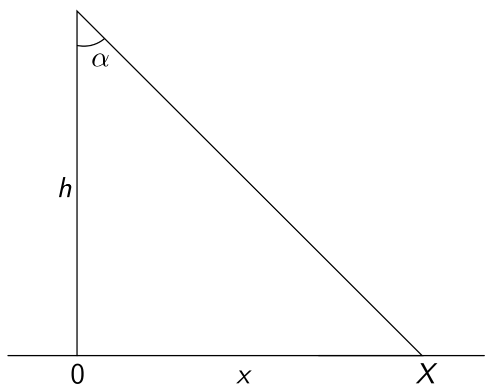
Eine Variante des Widerspruchbeweises, die von den griechischen Mathematikern der Antike entwickelt und von Pierre de Fermat*** als „descente infinie“ (unendlicher Abstieg) wiederentdeckt wurde, ist nur mit der Methode des Rückwärtsarbeitens durchführbar. In MONOID 97 ist dieses Beweisverfahren beschrieben.

Die Cauchy-Verteilung
und das Gesetz der großen Zahlen
von Wolfgang J. Bühler

Wir beginnen mit einer Aufgabe:

Über einer langen geraden Straße hängt eine Straßenlaterne in Form eines oben geschlossenen Halbzylinders.





Die Lampe strahlt gleichmäßig in alle Richtungen. Wie verteilt sich das Licht entlang der Straße?

*** Pierre de Fermat, ∗Ende 1607 oder Anfang 1608 in Beaumont-de-Lomagne, †12.01.1665 in Castres, französischer Mathematiker und Jurist

Uns interessiert also der Anteil $F(x)$ des Lichtes, der die Straße links von X erreicht. Der Einfachheit halber wollen wir dabei für die Höhe der Lampe $h = 1$ annehmen.
Der Anteil des Lichtes zwischen 0 und X ist $\frac{\alpha}{\pi}$ für positive α und $-\frac{\alpha}{\pi}$ für negative α. Der Anteil links von 0 ist offenbar $\frac{1}{2}$. Wegen $x = \tan(\alpha)$ ergibt sich also

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x) \quad \text{und} \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Dies können wir auch anders deuten: Ist X der Punkt, an dem ein zufällig ausgewählter Lichtstrahl die Straße trifft, so ist F die Verteilungsfunktion und f die Dichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.
Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt *Cauchy-Verteilung**. Sie ist symmetrisch um die Null (man sieht das auch daran, dass die Dichte f eine gerade Funktion ist). Der Graph der Dichte ist dem Graphen der Standard-Normalverteilung – der Gaußschen Glockenkurve – sehr ähnlich.
Betrachtet man eine Folge unabhängiger Normalverteilter Zufallsvariablen X_1, $X_2, \ldots$, so kommt man nach dem Gesetz der großen Zahlen zu dem Schluss, dass $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ gegen Null konvergiert. Insbesondere bedeutet das in Schulbüchern und im Schulunterricht behandelte „schwache“ Gesetz der großen Zahlen, dass $P(|Z_n| > c) \to 0$ für jedes $c > 0$. Die Cauchy-Verteilung hat jedoch die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Mittelwerte Z_n die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen wie die einzelnen Variablen X_j (was wir hier leider nicht beweisen können). Demnach gilt also:

$$P(|Z_n| > c) = 1 - P(-c < Z_n < c) = 1 - (F(c) - F(-c)) = (1 - F(c)) + F(-c)$$

hängt nicht von n ab, kann also nicht gegen 0 konvergieren!
Der Widerspruch in den obigen Überlegungen lässt sich auflösen, indem wir zunächst versuchen, den Erwartungswert EX für eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable X zu berechnen:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Substituieren wir $u = -x$ im ersten Integral, so erhalten wir

$$\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{0} \frac{-u}{1+u^2}(-1)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{0} \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Insgesamt erhalten wir also

$$EX = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

* Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, französischer Mathematiker

Dabei haben wir allerdings nicht beachtet, dass für $x \geq 1$ gilt: $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ und daher

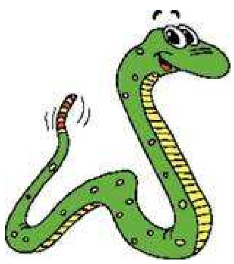
$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \infty$$

ist. Die obige Berechnung liefert also formal $EX = -\infty + \infty$. Dies dürfen wir also **nicht** als 0 interpretieren. Es bedeutet, dass der Erwartungswert nicht existiert. Wir haben hier also eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der Cauchy-Verteilung. Sie ist symmetrisch um die 0; wir dürfen daraus aber nicht schließen, dass sie den Erwartungswert 0 hat!

Lösungen der Mathespielereien aus Monoid 102

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Warteschlange



Stell Dir vor, Du stehst in Deinem Lieblingsfreizeitpark seit 10 Minuten an Deiner Lieblingsachterbahn an, als Du die Noch-20-Minuten-Warten-Marke erreichst. In dem circa 1m breiten Gang herrscht ein reges Gedränge, als Du den bereits vierten und letzten Achterbahnzug für diese Minute an Dir vorbei rauschen siehst. Du registrierst die fünf Wagons mit jeweils vier Personen, wie sie direkt auf den doppelten Looping zurasen und fragst Dich:

a) Wieviele Menschen stehen noch maximal vor Dir?

b) Wie weit ist es noch, wenn sich die Breite des Gangs nicht ändert und sich durchschnittlich vier Personen auf einen Quadratmeter zusammendrängen?

(B.B.)

Lösung:

a) Nach den Beobachtungen nehmen wir an: Alle $\frac{60}{4}$s$= 15$s fährt eine Bahn mit maximal $5 \cdot 4 = 20$ Personen an Bord. Dies bedeutet, dass $\leq \frac{4}{3}$ Personen in einer Sekunde abtransportiert werden. Für eine Restwartezeit von 20min$= 1200$s bedeutet dies, dass noch maximal $\frac{4}{3} \cdot 1200 = 1600$ Personen transportiert werden müssen!

b) Da wir davon ausgehen, dass vier Personen (im Durchschnitt) eine Fläche von 1m^2 beanspruchen (schließlich ist es eng und es gibt große und kleine Personen) und auf die Gesamtfläche A nach a) 1600 Personen passen, ergibt sich: $A = \frac{1600}{4} \frac{\text{Personen}}{\frac{\text{Personen}}{\text{m}^2}} = 400\text{m}^2$.

Der Gang soll gleiche Breite behalten, weshalb wir eine rechteckige Grundfläche für A annehmen, Kurven werden durch rechte Winkel ersetzt. Somit gilt: $A = l \cdot 1\text{m}$, wenn l die gesuchte Länge des Ganges bezeichne. Also ist $l = 400\text{m}$.

Zerlegung einer Menge

Eine Menge M enthalte lauter verschiedene natürliche Zahlen, darunter auch die Zahlen 1, 2, 3, 4.
Kannst du nun M so in zwei Teilmengen A und B zerlegen, dass gilt:
Weder in A noch in B kann man zwei Zahlen finden, deren Summe eine Primzahl ist? (H.F)

Lösung:
A sei die Menge der geraden Zahlen aus M; A enthält also mindestens die Zahlen 2 und 4. Die Summe zweier Zahlen aus A ist stets ≥ 6 und gerade, also keine Primzahl.
B sei die Menge der ungeraden Zahlen aus M. In B befinden sich also mindestens die Zahlen 1 und 3. Die Summe zweier Zahlen aus B ist ≥ 4 und gerade und damit keine Primzahl.
Also ist M auf die verlangte Weise zerlegbar.

Quadratzahlen mit den Endziffern 44

Es gibt unendlich viele Quadratzahlen mit den Endziffern 44. Stimmt das? (H.F.)

Lösung:
Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} 12^2 &= 144 \\ 112^2 &= (100+12)^2 = 100^2 + 2\cdot 12\cdot 100 + 12^2 = 125\cdot 100 + 44 \\ 1112^2 &= (1100+12)^2 = 1100^2 + 2\cdot 12\cdot 1100 + 12^2 = 12365\cdot 100 + 44 \end{aligned}$$

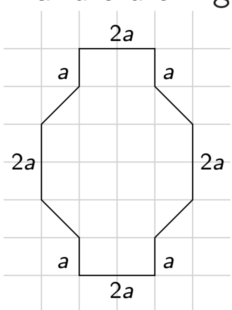
Allgemein gilt:

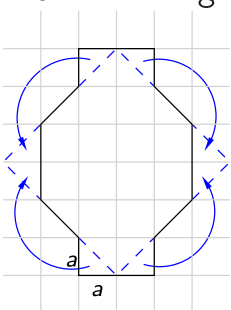
$$\underbrace{1\ldots 1}_{n\text{-mal}}12^2 = (\underbrace{1\ldots 1}_{n\text{-mal}}00+12)^2 = \underbrace{1\ldots 1}_{n\text{-mal}}00^2+2\cdot 12\cdot\underbrace{1\ldots 1}_{n\text{-mal}}00+12^2 = f(n)\cdot 100+44,$$

wobei $f(n)$ von n abhängt.
Da es unendlich viele Zahlen mit den Endziffern 12 gibt, gibt es also auch unendlich viele Zahlen mit den Endziffern 44.

Flächenumwandlung in ein Quadrat

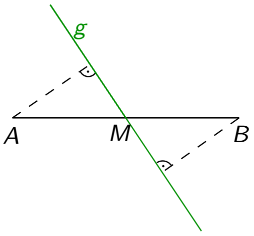
Wandle die Figur in ein flächengleiches Quadrat um. (A.K.)





Lösung:
Durch „Umklappen“ der gestrichelt angedeuteten Dreiecke entlang der Pfeile entsteht ein Quadrat.

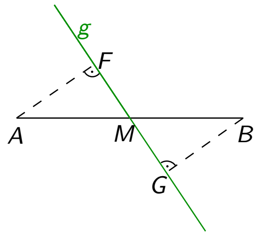
Gleiche Abstände



Wenn man durch den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ eine beliebige Gerade $g \neq \overline{AB}$ legt, dann haben A und B den gleichen Abstand von g. Du siehst es – kannst du es auch begründen? (H.F.)

Lösung:

Es seien $\overline{AF}$ das Lot von A auf g und $\overline{BG}$ das Lot von B auf g. Die Dreiecke $\triangle AMF$ und $\triangle BMG$ sind rechtwinklig; da ihre Innenwinkel bei der Ecke M gleich groß sind, stimmen beide Dreiecke in allen drei Innenwinkeln überein. Zugleich sind die Dreiecke $\triangle AMF$ und $\triangle BMG$ wegen $|\overline{AM}| = |\overline{BM}|$ deckungsgleich. Also gilt: $|\overline{AF}| = |\overline{BG}|$.



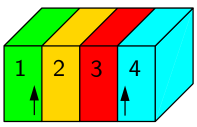
Der Bücherwurm

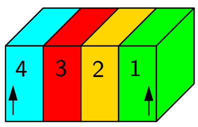
Mathis hat auf dem Speicher seines Großvaters eine sehr alte vierbändige Ausgabe von „Gullivers Reisen" entdeckt. Er stellt sie in seinem Zimmer nach Bandnummern geordnet auf ein Regal und zeigt sie seinem Freund Matheo. Dieser bemerkt, dass sich ein Bücherwurm von der ersten Seite von Band 1 bis zur letzten Seite von Band 4 geradlinig, horizontal durch die Bücher gefressen hat.

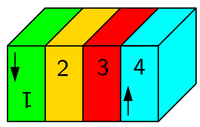
Einige Tage später überrascht Matheo seinen Freund mit der Frage: „Wie lang ist wohl das Wurmloch?" Mathis antwortet: „Selbst, wenn du weißt, dass jedes Buch samt seinen Deckeln 4 cm und ein Buchdeckel 0,5 cm dick ist, kannst du seine Länge vermutlich nicht berechnen. – Ich aber kann es!" Warum ist das so? (H.F.)

Lösung:

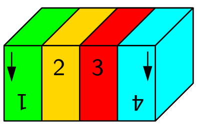
Die Bücher können in verschiedener Weise im Regal aufgestellt sein:

(1) so 

, (2) so 

, (3) so 

, oder

(4) so 

.

Der Pfeil gibt jeweils die Position der ersten Seite im Band 1 und der letzten Seite in Band 4 an. Wenn der Pfeil abwärts zeigt, bedeutet dies, dass der betreffende Band kopfüber im Regal steht. Das Wurmloch hat nun die Länge:

(1) $(0{,}5 + 2 \cdot 4 + 0{,}5)\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$

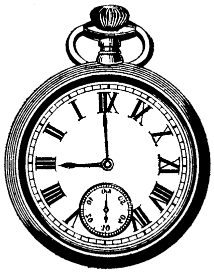
(2) $(3{,}5 + 2 \cdot 4 + 3{,}5)\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$

(3) $(3{,}5 + 2 \cdot 4 + 0{,}5)\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

(4) $(3{,}5 + 2 \cdot 4 + 3{,}5)\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$

Für die Länge des Wurmloches gibt es also drei verschiedene Möglichkeiten und Matheo weiß nach mehreren Tagen sicher nicht mehr, wie die Bücher aufgestellt waren – wohl aber Mathis! Mathis weiß also, welche der oben angegebenen Lösungsmöglichkeiten zutrifft.

Ursulas Uhren



Ursula hat zwei Uhren. Eine davon geht genau, die andere pro Stunde fünf Minuten zu schnell. Um 6 Uhr stellt Ursula beide Uhren gleich ein.
Wann ist der Minutenzeiger der schnellen Uhr zum zweiten Mal an der gleichen Stelle wie der Stundenzeiger der genauen Uhr?

(WJB)

Lösung:
Um 7:30 Uhr ist der Minutenzeiger der schnellen Uhr schon bei 37,5 Minuten, also genau zwischen 7 und 8 Uhr, wo auch der Stundenzeiger der genauen Uhr steht. Also ist 7:30 die gesuchte Zeit. Entsprechend war der Minutenzeiger zum ersten Mal in einer gleichen Stellung um 6:30 Uhr.

Neue Mathespielereien

Für die jüngeren Schüler/innen der Klassen 5–7

Bunte Pullover

Regina Rot, Greta Grün und Beate Braun treffen sich im Café. Sie tragen Pullover in den Farben rot, grün und braun, aber keine den Pullover, der ihrem Namen entspricht. Das Mädchen mit dem grünen Pullover macht die anderen darauf aufmerksam. „Tatsächlich, das stimmt ja!“, antwortet Beate. Welches Mädchen trägt welchen Pullover? (WJB)

Langeweile

Jemandem ist langweilig. Er arbeitet beim Schwach-Verlag, wo gerade keine neuen Bücher gesetzt werden müssen, seine Chefin hat auch keine andere Arbeit für ihn und auf dem Parkplatz, den er vom Fenster aus beobachten kann, passiert auch nichts. Aus purer Langeweile beginnt er, alle (natürlichen) Zahlen in alphabetischer Reihenfolge aufzuschreiben. Für die ersten fünf Zahlen bedeutet das also: Drei, eins, fünf, vier, zwei.

a) Welches ist die erste Zahl in der gesamten Liste? Welches ist die letzte Zahl, wenn er nur die „handlichen“ und „praktischen“ Zahlen aufschreibt, also nur Zahlen bis zur (theoretisch berechneten) maximalen Anzahl der Atome im Universum (etwa 10^{80})?
b) Außerdem fällt ihm etwas auf, als er die Silbenanzahl aller Ziffern miteinander vergleicht. Was ist das? (MG)

Auf Wanderschaft

Zwei Wanderer machen die gleiche Wanderung in entgegengesetzter Richtung. Sie wollen bei ihrer Begegnung die Autoschlüssel austauschen. Ein Wanderer geht die Strecke vom Parkplatz in Adorf leicht bergauf zum Parkplatz in Bedorf mit 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der andere läuft die seine Strecke mit durchschnittlich 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Nach eineinhalb Stunden ruft der erste Wanderer den zweiten auf dem Mobilfunktelefon an. „Ich bin jetzt an der großen Kreuzung.“ und erhält die Antwort: „Dann treffen wir uns in einer Stunde.“

a) Wie weit sind die Wanderer zum Zeitpunkt des Anrufs noch von einander entfernt?
b) Wie lang ist die gesamte Wanderstrecke? (WJB)

Zwischenergebnis bei einem Fußballspiel

Ein Fußballspiel endete mit dem Torverhältnis 5:3. Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Halbzeitstand des Spiels? (H.F.)

Rotweißblaugelb

In vier Schachteln liegt je eine Kugel. Die Kugeln tragen die Mainzer Fastnachts-Farben Rot, Weiß, Blau und Gelb. Die Deckel sind mit den gleichen Farben gekennzeichnet, aber so vertauscht, dass keine Schachtel den richtigen Deckel hat.
Wie viele Deckel musst Du mindestens abnehmen, bis Du genau weißt, welcher Deckel zu welcher Schachtel gehört? (WJB)

Primzahl?

Kann man die 10 Zahlen 2001, 2002, ..., 2010 in irgendeiner Reihenfolge hintereinander schreiben, so dass die entstandene 40-ziffrige Zahl eine Primzahl ist? (H.F)

Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel stets spitze Winkel. Du siehst es – kannst du es auch begründen? (H.F.)

Neue Aufgaben

Klassen 8–13

Aufgabe 1001: Wahr oder falsch?

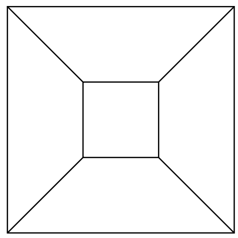
Alle Zahlen $2010^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ sind durch 2009 ohne Rest teilbar. Stimmt das? (H.F.)

Aufgabe 1002: Teilbarkeit durch 7

Frank übt schnelles Kopfrechnen: Er berechnet verschiedene Zweierpotenzen und addiert 5 hinzu: $5 + 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dabei beobachtet er, dass genau diejenigen Resultate durch 7 teilbar sind, bei denen n von der Form $n = 3k + 1$ ist mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Trifft die Beobachtung von Frank zu? (nach WJB)

Aufgabe 1003: Würfelfotografie



Theresa geht am See spazieren. Unterwegs sieht sie viel Interessantes: Sie beobachtet Angler, besteigt Hügel, sieht einen alten Förderturm – und ein großes Kantenmodell eines Würfels (Soll das gar eine Skulptur aus der modernen Kunst sein? Der Sinn ist sehr fragwürdig!). Der Würfel ist 3 m groß und Theresa fotografiert ihn in Zentralperspektive (siehe Abbildung).

Aus welcher Entfernung hat Theresa das Foto gemacht? (MG)

Aufgabe 1004: Dreiecke im Halbkreis

Gegeben sei ein Halbkreis vom Durchmesser AB der Länge $2r$. C sei ein Punkt, den man beliebig auf dem Kreisbogen wählen darf, $C \neq A$ und $C \neq B$. Dann gilt:

a) Unter allen Dreiecken $\triangle ABC$ gibt es eines, das die größte Fläche besitzt;

b) Aber es gibt kein Dreieck $\triangle ABC$ mit einer kleinsten Fläche.

Du siehst es! Kannst Du es auch begründen? (H.F.)

Aufgabe 1005: Gleisarbeit

Johanna hat zu Weihnachten von ihren Großeltern eine Holzeisenbahn bekommen. Neben unzähligen Kisten von geraden Schienen und Kurven hat sie drei Brücken, vier Kreuzungen und sieben Weichen. Nun möchte sie unter Verwendung aller Schienen ein geschlossenes Schienennetz bauen und macht sich ans Werk. Was wird wohl passieren? (Valentin Blomer)

Aufgabe 1006: Nullstellen

a) Bestimme Zahlen b, c und d so, dass die beiden Funktionen $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ und $g(x) = x^2 - 4x + 3$ die gleichen Nullstellen besitzen.

b) Finde eine Funktion $h(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ derart, dass g und h die gleichen Nullstellen haben.

c) Gib alle solche Funktionen h an (a, b, c und d müssen dazu nicht berechnet werden). (WJB)

Aufgabe 1007: Heinrichs Heimweg

Heinrich geht von der Disko nach Hause. Sein Heimweg ist eine lange gerade Straße mit Laternen im Abstand a in der Höhe h. Heinrichs Körpergröße ist z. Er beobachtet die Länge x seines vor ihm liegenden Schattens, verursacht von der letzten Lampe, unter der er vorbeigekommen ist; er geht immer den direkten Weg von Laterne zu Laterne.

a) Wie groß ist x, wenn Heinrich nach der letzten Lampe den Weg s zurückgelegt hat?

b) Wie groß ist dann die Länge y des Schattens, der von der nächsten Laterne nach hinten geworfen wird?

c) Wie lässt sich überraschenderweise über die Gesamtlänge l des Schattens sagen, der von Heinrich auf dem Wege zwischen zwei benachbarten Laternen geworfene wird? Gib auch eine von a) und b) unabhängige geometrische Begründung an. (WJB)

Gelöste Aufgaben aus Monoid 102

Klassen 8–13

Aufgabe 994: Wo steckt der Fehler?

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2x+1}-x &= 5 \\ \sqrt{(x+1)^2}-x &= 5 \\ x+1-x &= 5 \\ 1 &= 5 \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \emptyset$.
Aber: $x = -3$ ist eine Lösung der Gleichung, wie man durch Einsetzen feststellen kann.
Wo steckt der Fehler? (Helmut Ramser)

Lösung:
Da $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ ist, folgt für $\sqrt{(x+1)^2}-x = 5$, dass entweder $x+1-x = 5$ oder $-(x+1)-x = 5$ gilt. Diese zweite Möglichkeit liefert $x = -3$ als einzige Lösung der Gleichung.

Aufgabe 995: $2010 < 1$?

Es sei $N = 1 + 2 + 3 + 4 + ...$ Wenn Du auf der rechten Seite dieser Gleichung alle Summanden wegstreichst, die keine Vielfachen von 2010 sind, erhältst Du: $N' = 2010 + 2 \cdot 2010 + 3 \cdot 2010 + 4 \cdot 2010 + \ldots$. Hieraus sieht man zweierlei:

1. $N' < N$ und
2. $N' = 2010(1 + 2 + 3 + \ldots) = 2010N$.

Was zu folgendem Schluss führt: $2010N < N$, was nach Division durch N schließlich $2010 < 1$ ergibt! Wo steckt der Fehler? (H.F.)

Lösung:

Die Objekte der Arithmetik sind Zahlen und für jeweils nur endlich viele von ihnen gelten die arithmetischen Regeln und Sätze. Obgleich nun N und N' keine arithmetischen Objekte sind, haben wir auf sie folgende Regeln angewendet:
Streicht man in einer Summe S aus endlich vielen positiven Zahlen mindestens eine Zahl, dann gilt für die neue Summe S', dass $S' < S$ ist; ferner gilt das Distributivgesetz: $xa_1 + xa_2 + \ldots + xa_n = x(a_1 + \ldots + a_n)$. Diese Vorgehensweise ist aber im Fall unendlicher vieler Objekte nicht erlaubt.

Genauer gesagt ist in dieser Aufgabe $N = N' = \infty$. Damit gilt weder $N' < N$. noch $2010N < N$. Vor allem anderen darf man natürlich nicht durch ∞ teilen!
Dies erklärt den offensichtlichen Widerspruch $2010 < 1$.

Aufgabe 996: Wahr oder falsch?

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen mit genau 2010 Teilern. Stimmt das? (nach H.F.)

Lösung:

Es gibt unendlich viele Primzahlen p. Folglich gibt es auch unendlich viele Potenzen p^{2009}. Jede dieser Zahlen p^{2009} hat genau 2010 Teiler, nämlich 1, p, p^2, p^3, ..., p^{2009}.
Die Behauptung trifft also zu.

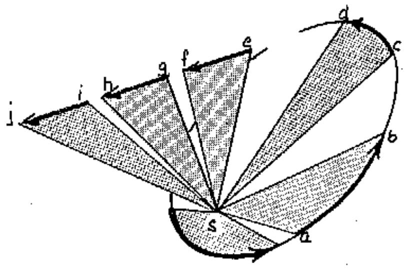
Aufgabe 997: Keplersches Gesetz ohne Gravitation

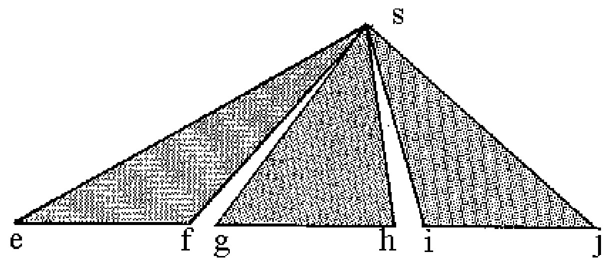
Diana hat den Artikel über die Keplerschen Gesetze in Monoid-Heft 100 gelesen. Sie behauptet nun: „Wenn plötzlich die Gravitation zwischen der Sonne und den Planeten wie mit einem Schalter ausgeschaltet würde und die Planeten sich nicht länger auf Bahnen bewegen würden, dann würde das zweite Keplersche Gesetz trotzdem noch gelten.“ – Peter entgegnet: „Das kann doch gar nicht sein!“
Wer von beiden hat recht?

Bemerkung: Nach dem Abschalten der Gravitation fliegt der Planet mit der Geschwindigkeit in der aktuellen Richtung, die er im Moment des Abschaltens hat, weiter. (MG)

Lösung:

Keplers zweites Gesetz besagt, dass der Fahrstrahl zwischen einem Planeten und der Sonne in gleicher Zeit auch gleiche Flächen überstreicht. Nach dem Abschalten der Gravitation fliegt der Planet mit der Geschwindigkeit, die er in diesem Moment hat, in der aktuellen Richtung weiter. Er bewegt sich also entlang der Linie e-f-g-h-i-j (siehe linke Abbildung) mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn der Planet für die Abstände zwischen e und f, g und h, i und j jeweils die gleiche Zeit benötigt, müssen diese Strecken auch gleich lang sein.





Dann haben die Dreiecke *efs* und *ghs* und *ijs* alle den selben Flächeninhalt, da ihre Grundseiten gleich lang sind und sie die gleiche Höhe haben; beachte, dass er nicht mehr mit dem der Dreiecke *abs* und *cds* übereinstimmt, muss er aber auch nicht.
Also gilt das Keplersche Gesetz weiterhin, wenngleich die Flächen vorher und nacher unterschiedlich groß sind.

Aufgabe 998: Fibonacci in Echternach

Den Hintergrund zu dieser Aufgabe findet Ihr im Artikel Fibonacci in Echternach in Monoid 102 auf Seite 31 dargestellt.

a) Zeige, dass die Rekursion $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ Lösungen der Form $x_n = Ar^n$ besitzt und bestimme die möglichen Werte r_1, r_2 (dabei sei r_1 der größere Wert).

b) Bestimme A und B so, dass $Ar_1^n + Br_2^n = F_n$ mit $n = 0, 1, 2, ...$, wobei F_n, $n \geq 0$, die Fibonacci-Folge ist.

$\star$) Sei $a_n = F_0 + F_1 + ... + F_{n-1}$ und $b_n = a_0 + a_1 + ... a_{n-1}$. Zeige, dass $\frac{a_n}{F_n}$ und $\frac{b_n}{a_n}$ konvergieren und bestimme die Grenzwerte.

(WJB)

Lösung:

a) $Ar^{n+1} = Ar^n + Ar^{n-1}$ bedeutet (nach Division durch Ar^{n-1}) $r^2 = r + 1$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $r_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ und für $x_n = Ar_j^n$ ($j = 1, 2$) gilt die Rekursion, was man mittels Induktion beweisen kann.

b) Das Gleichungssystem

$$1 = F_0 = A + B \qquad (1)$$
$$1 = F_1 = Ar_1 + Br_2 \qquad (2)$$

hat die Lösung $A = \frac{1}{\sqrt{5}} r_1$, $B = -\frac{1}{\sqrt{5}} r_2$, denn aus (1) erhält man $B = 1 - A$. Setzt man dies in (2) ein und löst dann nach A auf, so ergibt sich

$$A = \frac{1 - r_2}{r_1 - r_2} \underset{\text{siehe } a)}{=} \frac{r_1}{r_1 - r_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} r_1.$$

Daher ist $B = 1 - A$:

$$B = 1 \frac{1}{\sqrt{5}} r_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} r_2.$$

$\star$) Betrachte zunächst die Folge a_n:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} r_1^{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} r_2^{j+1} \right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{5}} \left(r_1 \frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1} - r_2 \frac{r_2^n - 1}{r_2 - 1} \right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^2 (r_1^n - 1) - r_2^2 (r_2^n - 1)) \\ =& \frac{1}{\sqrt{5}} r_1^{n+2} \left(\left(1 - \frac{1}{r_1^n} \right) - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n - \frac{1}{r_1^n} \right) \right) \end{aligned}$$

Damit folgt für $\frac{a_n}{F_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618$.

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{2} =& \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(r_1^2 \frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1} - r_2^2 \frac{r_2^n - 1}{r_2 - 1} - n \left(r_1^2 - r_2^2 \right) \right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^3 (r_1^n - 1) - r_2^3 (r_2^n - 1)_n (r_1 - r_2)) \\ =& \frac{1}{\sqrt{5}} r_1^{n+3} \left(\left(1 - \frac{1}{r_1^n} \right) - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 \left(\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n - \frac{1}{r_1^n} \right) - \frac{n}{r_1^n} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1^3} \right) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $\frac{b_n}{a_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 2r_1 = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}236$.

(WJB mit freundlicher Unterstützung von Giovanni-Giorgio Scarpa)

Aufgabe 999: Große Tiere

Heute war Kim mit ihrer Klasse im Naturhistorischen Museum und hat dort eine Führung über Tiere der Urzeit gehört. Der Museums-Führer hat unter anderem erzählt, dass Tiere, die in der Kälte leben, beispielsweise während der Eiszeit, im Vergleich zu Verwandten, die in der Wärme leben, beispielsweise während der Warmzeiten, größer seien: „Auch die große Körpergröße ist ein guter Schutz vor der Kälte. Denn große Tiere haben im Verhältnis zur Körpergröße relativ wenig Oberfläche, also Haut, an der sie Wärme abgeben. Bei kleineren Tieren ist dieses

Verhältnis schlechter.“ So wurde ihnen erklärt. Diese Erklärung des Museums-Führers klang plausibel, doch Kim möchte es ganz genau wissen – und rechnet es selbst nach.
Führe auch eine entsprechende Rechnung aus. Die Tiere darfst Du dabei als geometrische Körper (Würfel, Kugel, ...) annehmen. Berechne Volumen und Oberfläche in Abhängigkeit der Körpergröße und vergleiche die Quotienten! (MG)

Lösung:
Kim rechnet mit einer Kugel. Die Kugeloberfläche ist $O = 4\pi r^2$, das Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Für ein warmblütiges Tier der Körpergröße h, was dem Kugeldurchmesser entspricht, ergeben sich somit $O = 4\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \pi h^2$ und $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$. Das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen beträgt also für das Tier: $\frac{O}{V} = \frac{\pi h^2}{\frac{1}{6}\pi h^3} = \frac{6}{h}$. Also wird $\frac{O}{V}$ kleiner, wenn h größer wird.
Für einen Würfel ergibt sich das gleiche Ergebnis:
Für ein Tier der Körpergröße h sind $O = 6 \cdot h^2$ und $V = h^3$, also $\frac{6h^2}{h^3}$. Für andere Körper erhält man ähnliche Ergebnisse, allerdings nicht präzise $\frac{6}{h}$ – der Museums-Führer hatte also Recht.

Aufgabe 1000: Zum Jubiläum

Zu unserem Jubiläum, der 1000. Aufgabe, die wir Euch bei den „Neuen Aufgaben“ stellen, gibt es folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 998x + 999y &= 1000 \\ 999x + 1000y &= 1001 \end{aligned}$$

a) Bestimme die Lösung dieses Gleichungssystems.
b) Addiere nun zum ersten Koeffizienten der ersten Gleichung $\frac{1}{1000}$. Dadurch ändert sich die Lösungsmenge schlagartig – das Gleichungssystem hat nämlich plötzlich keine Lösung mehr. Rechne dies nach und gib eine geometrische Erklärung! (MG)

Lösung:

a) Wir wenden den Gauß*-Algorithmus auf das Gleichungssystem an, indem wir die untere Gleichung durch $999 \cdot (\text{Gleichung } 1) - 998 \cdot (\text{Gleichung } 2)$ ersetzen, und erhalten

$$\begin{aligned} 998x + 999y &= 1000 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die obere Gleichung erhalten wir $x = \frac{1000-998\cdot 2}{998} = -1$. Damit ist $(x, y) = (-1, 2)$ die eindeutige Lösung des Systems.

* Johann Carl Friedrich Gauß, * 30.04.1777 in Braunschweig, † 23.02.1855 in Göttingen; Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker mit einem breit gefächerten Feld an Interessen.

b) Nun ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 998{,}001x + \quad 999y &= 1000 \\ 999 \qquad x + 1000y &= 1001 \end{aligned}$$

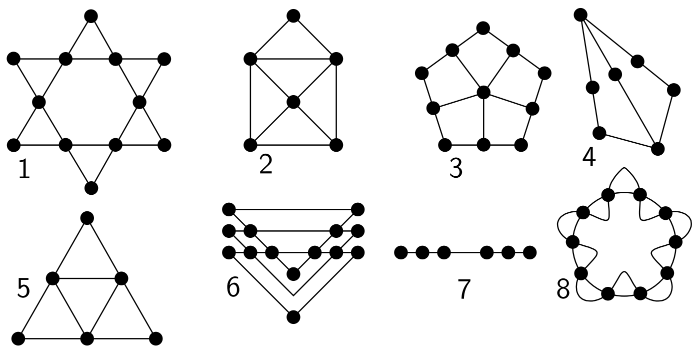
zu betrachten. Diesmal multiplizieren wir die untere Gleichung mit 0,999, wodurch sich

$$\begin{aligned} 998{,}001x + 999y &= 1000 \\ 998{,}001x + 999y &= 999{,}999 \end{aligned}$$

ergibt. Dies kann offensichtlich nicht sein und folglich ist die Lösungsmenge leer.
Dies bedeutet, dass die beiden Geraden $g_1: 998{,}001x + 999y = 1000$ und $g_2: 999x + 1000y = 1001$ parallel und verschieden sind (wie sich auch leicht mittels Nachrechnen über die identische Steigung $m = \frac{999}{1000}$ und die verschiedenen Ordinatenabschnitte zeigen lässt).

Mathis machen mathematische Entdeckungen

Das Haus des Nikolaus



Die Figuren, die du siehst, sind aus Punkten und Strecken oder gekrümmten Linien aufgebaut. Sie haben die Eigenschaft, dass man von jedem Punkt der Figur längs eines Weges, der aus Strecken/ Linien der Figur besteht, zu jedem anderen Punkt gelangen kann. Die Figur 2 heißt das Haus des Nikolaus.

a) Untersuche, welche der Figuren 1-8 so durchlaufen werden können, dass jede Strecke/Linie genau einmal benutzt wird und man wieder am Startpunkt endet.

b) Konstruiere nun weitere Figuren wie 1-8 und versuche an ihnen und den Figuren 1-8 zu klären, unter welchen Bedingungen man eine solche Figur „in einem Zug" vollständig durchlaufen kann, ohne eine Strecke/Linie mehrfach zu benutzen, und der Startpunkt zugleich Endpunkt ist. (H.F)

Hinweis: Eure mathematischen Entdeckungen könnt Ihr bis zum 15. November 2010 an die Monoid-Redaktion einsenden, denn auch hierbei gibt es Punkte zu ergattern. Eure Ergebnisse werden jeweils im übernächsten Heft erscheinen.

Lösung der Aufgabe aus Heft 101

In Heft 101 stellten wir Euch folgende Aufgabe:

Produkt aus den Teilern natürlicher Zahlen

Für jede natürliche Zahl n, $n > 1$, sei $P(n)$ das Produkt aller ihrer verschiedenen echten Teiler t, also $t \mid n$ und $t < n$. Zwei Beispiele:

$$P(25) = 1 \cdot 5 = 5; \quad P(30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 = 27000.$$

Finde heraus, ob es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, mit:

a) $P(n) = 1$.

b) $P(n) = n$.

c) $P(n) = n^2$, $P(n) = n^3$, $P(n) = n^4$ und so weiter. (nach H.F.)

Ergebnisse

Offensichtlich fanden viele unserer Leserinnen und Leser die Aufgabenstellung reizvoll; denn es gab zwölf Einsendungen, nämlich von Stella Brytanchuk (Willstätter-Gymnasium Nürnberg, Kl. 9e), Philipp Delhougne (Otto-Hahn-Schule Hanau, Kl. 11), Alia'a Ahmed Doma (Deutsche Schule der Borromäerinnen Kairo, Kl. 12), Shaima'a Ahmed Doma (gleiche Schule, Kl. 9), Annika Enß (Theodor-Heuß-Gymnasium Ludwigshafen, Kl. 8d), Robin Fritsch (Gymnasium Lehrte, Kl. 9), Julia Hennig (Gymnasium Marienberg Neuß, Kl. 11), Katharina Münster (Gymnasium Markt Indersdorf, Kl. 10), Christopher Patzanovsky (Johann-Michael-Fischer-Gymnasium Burglengenfeld, Kl. 7a), Martina Schlenker (Gnadenthal-Gymnasium Ingolstadt, Kl. 10), Florian Schweiger (Gymnasium Marktoberdorf, Kl. 12), Markus Voelckel (Gymnasium Casimirianum Coburg, Kl. 9a).
Gemäß der Aufgabenstellung genügt es, jeweils durch ein Beispiel zu zeigen, dass es Zahlen gibt, welche die jeweils gestellte Bedingung erfüllen:

a) $P(2) = 1$;

b) $P(6) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

c) $P(20) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 = (2 \cdot 10) \cdot (4 \cdot 5) = 20^2$
$P(30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 = (2 \cdot 15) \cdot (3 \cdot 10) \cdot (5 \cdot 6) = 30^3$
$P(48) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 24 = (2 \cdot 24) \cdot (3 \cdot 16) \cdot (4 \cdot 12) \cdot (6 \cdot 8) = 48^4$

Ein Teil unserer Löser(innen) hat sich mit der Angabe solcher Beispiele begnügt; aber beim Teil c) soll es ja weitergehen: Für welches n gilt $P(n) = n^5$ und allgemeiner: für welches n gilt $P(n) = n^k$ bei vorgegebenem Exponenten k?

Fast alle Löser(innen) haben bei Teil a) erkannt, dass die Bedingung $P(n) = 1$ von allen Primzahlen und nur von diesen erfüllt wird; denn eine solche Zahl n darf nur den echten Teiler 1 haben und somit als weiteren Teiler nur sich selbst.

Wegen der Voraussetzung $n > 1$ handelt es sich also um alle natürlichen Zahlen mit genau zwei Teilern, also alle Primzahlen. (Leider wurde hier manchmal die Bedingung, dass $P(n)$ das Produkt der echten Teiler von n sein soll, überlesen und daher $P(n) = 1$ für $n > 1$ für unmöglich gehalten.)

Beim Teil b) zeigt das Beispiel $P(6)$, wie weitere Beispiele gewonnen werden können. Ist nämlich $n = 1 \cdot p \cdot q$ mit verschiedenen Primzahlen p und q, dann gilt $P(n) = 1 \cdot p \cdot q = n$. Das ist aber nicht die einzige „Bauform" für n, um die Bedingung $P(n) = n$ zu erfüllen, wie wir gleich sehen werden.

Um in c) die unendlich vielen Bedingungen $P(n) = n^k$ für $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$ zu erfüllen, muss man zu jedem vorgegebenen Exponenten k eine (von k abhängige) Lösung angeben. Dazu kann man sich zunächst auf den Fall zurückziehen, dass n eine Primzahlpotenz p^m ist. Dann lautet die Bedingung $P(n) = p^{m \cdot k}$. Die verschiedenen echten Teiler von p^m sind $1, p, p^2, p^3, \ldots, p^{m-1}$.
Somit ist $P(n) = 1 \cdot p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot \ldots \cdot p^{m-1} = p^e$ mit $e = 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) = m \cdot \frac{m-1}{2}$. Aus $p^{m \cdot k} = p^e$ folgt $m \cdot k = m \cdot \frac{m-1}{2}$, also $2 \cdot k = m - 1$ oder $m = 2 \cdot k + 1$. Im Falle $k = 1$ erhalten wir $m = 3$ und daher sind $P(p^3) = p^3$ für alle Primzahlen p weitere Lösungsbeispiele für b): $P(8) = 8$, $P(27) = 27$ usw. Im Falle $k = 2, 3, 4, \ldots$ ist $m = 5, 7, 9, \ldots$; somit gilt: $P(p^5) = (p^5)^2$, $P(p^7) = (p^7)^3$, $P(p^9) = (p^9)^4, \ldots$ Aber das sind noch nicht alle Möglichkeiten. Ist zum Beispiel $n = p \ldots q^2$ mit zwei verschiedenen Primzahlen p und q, so gilt $P(n) = 1 \cdot p \cdot q \cdot (p \cdot q) \cdot q^2 = p^2 \cdot q^4 = (p \cdot q^2)^2 = n^2$. Ist dagegen $n = p \cdot q \cdot r$ mit drei verschiedenen Primzahlen p, q und r, so hat n die echten Teiler 1, p, q, r, $p \cdot q$, $p \cdot r$ und $q \cdot r$, deren Produkt $P(n) = p^3 \cdot q^3 \cdot r^3 = n^3$ ist. Um c) – und darin eingeschlossen auch a) für $k = 0$ und b) für $k = 1$ – systematisch zu behandeln, verwendet man zweckmäßigerweise einen ganz allgemeinen Ansatz für Primfaktorzerlegungen. Das haben Robin Fritsch und Florian Schweiger getan. Hier die Ausführungen von Florian Schweiger:

Es sei n eine natürliche Zahl. Falls n keine Quadratzahl ist, ist jeder Teiler von n verschieden von seinem Komplementärteiler, und das Produkt von Teiler und Komplementärteiler ist n.

Wenn $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n (einschließlich n) ist, so gibt es genau $\frac{\tau(n)}{2}$ solche Paare, und das Produkt aller Teiler von n ist also $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$. Wenn n Quadratzahl ist, kommt noch der Teiler $\sqrt{n}$ zu den $\frac{\tau(n)-1}{2}$ Paaren,und man erhält wieder $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ für das Produkt aller Teiler von n.

Offenbar ist damit $P(n) = n^{\tau(n)2-1}$. Nun ist $P(n) = n^k$ äquivalent zu $\tau(n)2 - 1 = k$ oder $\tau(n) = 2k + 2$. Alle Zahlen mit dieser Eigenschaft findet man wie folgt: Es sei $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von m. Dann ist bekanntlich $\tau(m) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$. Man schreibt also $2k + 2$ als Produkt von Faktoren größer als 1,

$2k + 2 = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\nu$ und setzt $n = p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2-1} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{a_\nu-1}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i. Nach obiger Formel ist dann $\tau(n) = 2k + 2$, und damit auch $P(n) = n^k$. Es gibt also für jedes k unendlich viele n mit $P(n) = n^k$. Die einfachste Lösung erhält man, wenn man $a_1 = 2k+2$ setzt, nämlich $n = p^{2k+1}$ mit p prim, was $P(n) = n^k$ erfüllt.

Das Benfordsche Gesetz

oder: Die Wahrscheinlichkeiten der ersten (signifikanten) Ziffer

von Hans-Jürgen Schuh

Nehmen wir einen empirischen Datensatz von positiven Zahlen, wie zum Beispiel alle Zahlen auf der ersten Seite einer Tageszeitung, Flächen von Ländern, Seen, Inseln und so weiter (egal ob in m^2, Quadratmeilen oder Quadratfuß), Einwohnerzahlen, Aktienkurse (egal welche Währung), Firmengrößen oder die Zahlen in einer (nicht manipulierten!) Steuererklärung und betrachten wir die jeweils erste signifikante Ziffer, das heißt die erste von 0 verschiedene Ziffer der Dezimalbruchdarstellung (für 357,9 ist dies die „3“, für 0,00795 ist dies die „7“). Gefragt, wie häufig diese Ziffer die Werte 1, 2, 3, …, 9 annimmt, würde wohl jeder spontan antworten: „In jeweils $\frac{1}{9}$ aller Fälle.“
Überraschender Weise treten die kleinen Zahlen aber sehr viel häufiger auf als die großen, genauer: Es gilt das *Benfordsche* – besser Newcomb-Benfordsche – *Gesetz*!

Entdeckt wurde dieses seltsame Verhalten zuerst von dem amerikanischen Mathematiker und Astronomen *Simon Newcomb*[1]. Zu Zeiten als noch keine Computer

[1] Simon Newcomb, * 12.04.1819 in Wallace (Kanada),† 11.07.1909 Washington D.C.

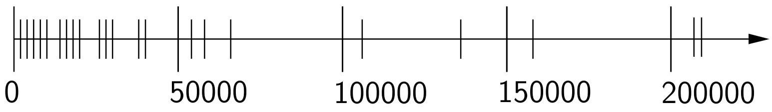
und elektronischen Taschenrechner zur Verfügung standen, war die Logarithmentafel das wichtigste Hilfsmittel für das praktische Rechnen, also insbesondere für die Auswertung astronomischer Daten, weil der Logarithmus Rechenoperationen um eine Stufe erniedrigt, also zum Beispiel die Multiplikation in eine Addition und die Division in eine Subtraktion überführt. Aufgrund unseres Dezimalsystems haben wir es hier mit 10er-Logarithmen zu tun, die wir mit lg ($= \log_{10}$) bezeichnen wollen.

Newcomb ist aufgefallen, dass die vorderen Seiten seiner Logarithmentafel sehr viel stärker abgegriffen und verschmutzt waren als die hinteren. Die Seiten der Logarithmentafel sind so aufgebaut, dass in der linken Spalte die *Numeri*, das heißt die Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma, stehen und rechts davon die Mantissen[2] ihrer Logarithmen. Da die Numeri auf den ersten Seiten mit der ersten Ziffer 1, dann 2 und so weiter starten und schließlich auf den hinteren Seiten mit der ersten Ziffer 9 enden, schloss Newcomb, dass in seinen Datensätzen die 1 sehr viel häufiger auftritt als die 9. Zur Quantifizierung dieser Beobachtung sucht man nach einer Größe, die gleichverteilt ist. Hierzu definieren wir den Begriff der Mantisse: x sei eine positive, reelle Zahl. Ihre Mantisse $\langle x \rangle$ ist $\langle x \rangle := x - [x]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl z mit $z \leq x$ ist, das heißt $\langle x \rangle$ ist der gebrochene Anteil von x. Offensichtlich gilt $\langle x \rangle \in [0{,}1) = \{u \mid 0 \leq u < 1\}$. Zum Beispiel ist $\langle \pi \rangle = 0{,}1415926\ldots$.

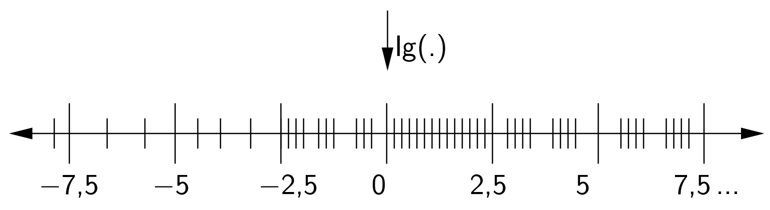
Newcomb postulierte das

Mantissengesetz von Newcomb
Die Häufigkeit der beobachteten Daten sind so, dass die Mantissen ihrer Logarithmen auf dem Intervall [0,1) gleichverteilt sind.

Newcomb rechtfertigte sein Gesetz heuristisch: Ordnen wir hierzu den Datensatz auf der positiven Halbachse an.

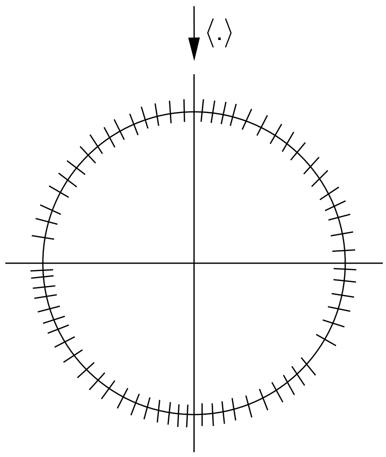


Von diesen Zahlen nehmen wir nun den (10er-)Logarithmus



und betrachten dann die Mantissen hiervon. Man kann sich dies so vorstellen, dass obige Gerade auf einem Kreis mit Umfang 1 aufgewickelt wird.

[2] Nachkommastellen



Wenn sich die Logarithmen der empirischen Daten über einen hinreichend großen Bereich erstrecken, mischen sich die Mantissen zu einer Gleichverteilung auf dem Kreis, das heißt auf dem Intervall [0,1).

Nun zur *Herleitung des Benfordschen Gesetzes:* X sei eine Zufallsvariable, die dem Mantissengesetz genügt, das heißt $\langle \lg(x) \rangle$ ist gleichverteilt auf [0,1). Für $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ betrachten wir die Klassen:

$$K_k := \{x > 0 \mid \text{erste Ziffer von } x \text{ ist } k\} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} [k \cdot 10^\ell, (k+1) \cdot 10^\ell),$$

wobei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen ist. Da offensichtlich

$$\dots \left\langle \lg(10^{-1}x) \right\rangle = \langle \lg(x) \rangle = \langle \lg(10x) \rangle \dots,$$

ergibt sich

$$\langle \lg(K_k) \rangle = [\lg(k), \lg(k+1)), \quad k = 1, 2, \dots, 9.$$

Man erhält deshalb, für $k = 1, 2, \dots, 9$, folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(\text{die erste signifikante Ziffer von } X \text{ ist } k) &= P(X \in K_k) \\ &= P(\langle \lg(X) \rangle \in [\lg(k), \lg(k+1))) \\ &= \lg(k+1) - \lg(k) \\ &= \lg(1 + \tfrac{1}{k}). \end{aligned}$$

Dies ist das *Benfordsche Gesetz*. Newcomb hat es 1881 in einem kurzen (zweiseitigen) Artikel veröffentlicht. Kurz darauf geriet dieses Gesetz für 60 Jahre in Vergessenheit.

Der amerikanische Physiker *Frank Benford*[3] hat dieses Gesetz (unabhängig von Newcomb) mit denselben Argumenten wiederentdeckt. In seinem Artikel „The Law of Anomalous Numbers" von 1938 hat er neben heuristischen Argumenten an 20 Datensätzen aus den unterschiedlichsten Gebieten (insgesamt 20.229 Daten) empirisch untersucht, inwieweit jeweils das Benfordsche Gesetz erfüllt ist.

[3] Frank Benford, * 29.05.1883 in Johnstown, Pensylvania, USA; † 4.12.1948 in Schenectady, New York

Am verblüffendsten ist die Erkenntnis, dass die Vereinigung aller dieser bunt zusammengewürfelten Datensätze das Benfordsche Gesetz besser erfüllt als jeder einzelne Datensatz, und das, obwohl einige der Datensätze dem Benfordschen Gesetz offensichtlich nicht gehorchen.

Newcomb konnte aus dem Mantissengesetz in analoger Weise auf das Verhalten zum Beispiel der ersten beiden führenden Ziffern schließen. Definiert man bespielsweise

$$K_{27} := \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} [27 \cdot 10^{\ell}, 28 \cdot 10^{\ell}),$$

dann ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} P(\text{die ersten beiden signifikanten Ziffern von } X \text{ sind } 27) &= P(X \in K_{27}) \\ &= \lg(1 + \tfrac{1}{27}) \end{aligned}$$

oder schließlich:

> **Allgemeines Benfordsches Gesetz**
> Für $N \in \mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen) ist die Wahrscheinlichkeit, dass X mit der signifikanten Ziffernfolge N beginnt, gleich $\lg(1 + \frac{1}{N})$.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass aus dem allgemeinen Benfordschen Gesetz das Newcombsche Mantissengesetz folgt, das heißt also

Newcombsches Mantissengesetz
$\Longleftrightarrow$
allgemeines Benfordsches Gesetz

Das Benfordsche Gesetz scheint immer dann erfüllt zu sein, wenn die Daten als Messgröße realer Objekte oder Prozesse auftreten und sich über einen hinreichend großen Bereich erstrecken. Das Benfordsche Gesetz ist insbesondere dann falsch, wenn Zahlen lediglich zur Nummerierung benutzt werden und genauso gut durch Namen ersetzt werden können, wie zum Beispiel beim Datensatz $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Benford spricht aus diesem Grund von dem „Gesetz der abnormalen Zahlen“.

Inzwischen gibt es viele mathematisch fundierte Untersuchungen, die zeigen, warum das Benfordsche Gesetz so häufig auftritt und so stabil ist. Theodore P. Hill[4] hat 1995 bewiesen, dass sich die Mischung unterschiedlichster Datensätze besonders gut an die Benford-Verteilung hält, wie Benford bereits empirisch beobachtet hatte.

Da empirische Datensätze, wie sie bei Steuererklärungen, Forschungsstudien, Bilanzen von Betrieben und Wahlergebnissen auftreten, vorausgesetzt, dass sie nicht

[4] Theodore P. Hill, amerikanischer Mathematiker

manipuliert sind, dem Benfordschen Gesetz unterliegen, kann man mit geeigneten Tests Fälscher und Betrüger entlarven. Solche Tests wurden von Mark J. Nigrini[5] entwickelt. Sie werden in den USA erfolgreich von Steuerbehörden, Betrieben, Wirtschaftswissenschaftlern etc. eingesetzt. Im Auftrag einer Hotelkette kam Nigrini einem millionenschweren Versicherungsbetrug auf die Spur:
Eine Angestellte hatte Schecks der firmeneigenen Krankenversicherung gefälscht und Herzoperationen, die nie stattgefunden hatten, zu jeweils 6500$ abgerechnet. Die beiden ersten Ziffern 6 und 5 stachen aus Nigrinis Analyse heraus.
Gründe, warum Betrüger schlechte Karten haben, sind zum Einen, dass der Mensch ein miserabler Zufallsgenerator ist, und zum Anderen, dass selbst dann, wenn dem Fälscher das Benfordsche Gesetz bekannt ist, er nicht weiß, welcher Aspekt gerade mit diesem Gesetz getestet wird.

Schließlich noch drei Bemerkungen:

a) *Skaleninvarianz* ist äquivalent zum Benfordschen Gesetz:
X sei eine positive Zufallsvariable. Wegen $\langle \lg(\lambda X) \rangle = \langle \lg \lambda + \lg X \rangle$, $\lambda > 0$, ergibt sich, dass das Benfordsche Gesetz für X genau dann gilt, wenn es für jedes $\lambda \cdot X$, $\lambda > 0$, erfüllt ist. Außerdem ist die Benford-Verteilung die einzige mit dieser Eigenschaft. Anschaulich heißt dies, dass das *Benfordsche Gesetz nicht von der gewählten Maßeinheit abhängt*.

b) *Basisunabhängigkeit* ist äquivalent zum Benfordschen Gesetz:
Die Basis 10 unseres Dezimalsystems zeichnet sich in keiner Weise relevant vor anderen Basen $b \geq 2$ aus. Betrachten wir unseren Datensatz im System der Basis b, so gilt das Benfordsche Gesetz mit $\log_b$ anstelle von $\lg = \log_{10}$. Für eine subtiler gefasste Form der Basisunabhängigkeit hat Hill 1995 gezeigt, dass das Benfordsche Gesetz auch hierzu äquivalent ist.

c) *Die Verteilung späterer Ziffern:*
Aus dem allgemeinen Benfordschen Gesetz ergibt sich unmittelbar für die n-te (signifikante) Ziffer, dass

$$P(n\text{-te Ziffer } = k) = \sum_{j=10^{n-2}}^{10^{n-1}-1} \lg\left(1 + \frac{1}{j \cdot 10 + k}\right),$$

mit $k = 0, 1, 2, \dots, 9$. Für $n \to \infty$ konvergiert diese Verteilung gegen die *Gleichverteilung* auf $\{0,1,2,\dots,9\}$. Bei einer Genauigkeit von $\frac{1}{100}$ kann man bereits die Verteilung der dritten Ziffer nicht mehr von der Gleichverteilung unterscheiden.
Beweis: Wir zeigen, dass $P(n\text{-te Ziffer} = 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0{,}1$:

$$P(n\text{-te Ziffer} = 0) = \sum_{j=10^{n-2}}^{10^{n-1}-1} \lg\left(1 + \frac{1}{j \cdot 10}\right).$$

[5] Mark J. Nigrini, amerikanischer Mathematiker

Für große n unterscheidet sich diese Summe beliebig wenig von

$$\int\limits_{10^{n-2}}^{10^{n-1}} \lg\left(1+\frac{1}{x\cdot 10}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 10}\int\limits_{10^{n-2}}^{10^{n-1}} \ln\left(1+\frac{1}{x\cdot 10}\right)\mathrm{d}x.$$

Da $\lim\limits_{\eta\to 0}\frac{\ln(1+\eta)}{\eta} = 1$ liegt dieses Integral für großes n beliebig nahe bei

$$\frac{1}{10\cdot\ln 10}\int\limits_{10^{n-2}}^{10^{n-1}} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}[\lg x]_{10^{n-2}}^{10^{n-1}} = \frac{1}{10} = 0{,}1,$$

da $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Zum Schluss soll noch bemerkt werden, dass es sich beim Benfordschen Gesetz nicht um einen mathematischen Satz, sondern um ein phänomenologisches Gesetz handelt, das durch die Art und Weise zustande kommt, wie wir Größen unserer Beobachtung mit Hilfe von Zahlen beschreiben. So besagt das Weber-Fechnersche Gesetz, dass wir physikalische Reize auf einer logarithmischen Skala wahrnehmen, wofür der Vergleich der Tonleiter mit den zugehörigen Frequenzen ein wohlbekanntes Beispiel ist.

Der Beweis eines Elfjährigen

von Hartwig Fuchs

Eine der ältesten geometrischen Erkenntnisse, die keineswegs offensichtlich ist, ist der berühmte Satz, welcher traditionell nach Pythagoras von Samos benannt wird, den aber schon lange vor ihm bereits die Babylonier gekannt haben.

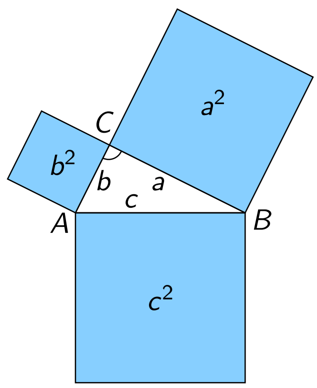


Abbildung 1

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b sowie mit der Hypotenusenlänge c gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dieses Theorem ist von grundlegender Bedeutung für die Geometrie und so hat man es immer wieder auf jeweils anderen Wegen neu bewiesen.

Es soll inzwischen mehr als 300 verschiedene Herleitungen geben, die von großen Mathematikern bis hin zu mathematischen Amateuren und in einem Fall sogar von einem elfjährigen Schüler entwickelt wurden.

Dieser elfjährige Junge war Albert Einstein, dessen schöner und durchsichtiger Beweis so aussieht:

Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, mit den Kathetenlängen a und b, sowie mit der Hypotenusenlänge c. Das von C auf die Hypotenuse $\overline{AB}$ gefällte Lot sei $\overline{CD}$.

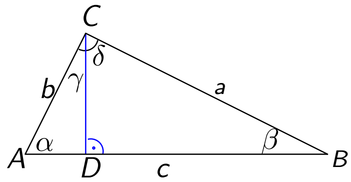


Abbildung 2

Mit den Winkelbezeichnungen der Abbildung 2 gilt dann:
Wegen $\gamma = 90^\circ - \alpha$ und $\gamma = 90^\circ - \delta$ ist $\alpha = \delta$;
Wegen $\delta = 90^\circ - \beta$ und $\delta = 90^\circ - \gamma$ ist $\beta = \gamma$.
Deshalb stimmen die Dreiecke $\triangle_1 := \triangle ACD$, $\triangle_2 := \triangle BCD$ und $\triangle_3 := \triangle ABC$ in ihren drei Innenwinkeln überein – also sind $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ ähnliche Dreiecke.

Es sei nun $\triangle_0$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Innenwinkeln α, β, 90° und der Hypotenusenlänge 1. $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ sind ähnliche Dreiecke.
Wir bringen nun $\triangle_0$ und $\triangle_1$, $\triangle_0$ und $\triangle_2$ sowie $\triangle_0$ und $\triangle_3$ in eine „Ähnlichkeitslage".

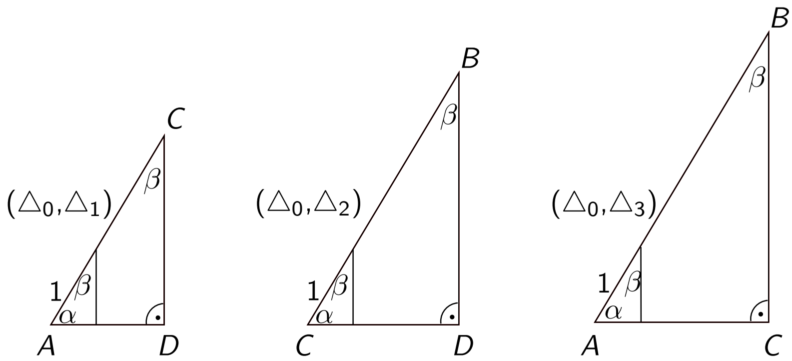


Abbildung 3

Nach dem Strahlensatz gilt dann zum Beispiel im Fall $(\triangle_0, \triangle_1)$ der Abbildung 3: Die Länge jeder Strecke im Dreieck $\triangle_1$ ist das b-fache der Länge der zugehörigen Strecke in $\triangle_0$. Daraus folgt, dass die Fläche $|\triangle_1|$ von $\triangle_1$ das b^2-fache der Fläche $|\triangle_0|$ von $\triangle_0$ ist. Entsprechendes gilt in den Fällen $(\triangle_0, \triangle_2)$ und $(\triangle_0, \triangle_3)$ der Figur. Man hat also: $|\triangle_1| = b^2 \cdot |\triangle_0|$, $|\triangle_2| = a^2 \cdot |\triangle_0|$ und $|\triangle_3| = c^2 \cdot |\triangle_0|$.
Damit erhält man für die aus Abbildung 2 ablesbare Gleichung $|\triangle_3| = |\triangle_2| + |\triangle_1|$ die neue Gleichung $c^2 \cdot |\triangle_0| = a^2 \cdot |\triangle_0| + b^2 |\triangle_0|$, woraus $c^2 = a^2 + b^2$ folgt.

Mitteilungen

- Der 20.10.2010 ist *World Statistics Day*. An diesem Tag werden weltweit die Erfolge der Statistik unter dem Motto *Service – Professionalität – Integrität* gefeiert. Daher hat Monoid dieses September-Heft als Themenheft zur Wahrscheinlichkeitstheorie gefasst.

20.10.2010
World Statistics Day
Service · Professionalism · Integrity

- Auf der Titelseite seht ihr anlässlich des „World Statistics Day“ eine Monoid-Statistik der letzten acht Jahrgänge. Das Balkendiagramm zeigt die Anzahl der Schüler, die in dem entsprechenden Jahrgang mit mindestens einer abgegebenen Lösung an unserem Wettbewerb teilgenommen haben (die großen Balken). Die kleineren Balken geben die Anzahl der Schulen wieder, die mit Schülerlösungen vertreten waren. Das Diagramm oben rechts setzt die beiden Balken in Relation.
- Kim Vetter hat im August an der ersten Mainzer Mathematik-Akademie teilgenommen und für dieses Monoid-Heft ein paar ihrer Eindrücke aufgeschrieben. Kim besucht derzeit die 11. Klasse der Alfred-Delp-Schule in Hargesheim und gehört auch zu unseren Aufgaben-Lösern.
- Bitte denkt daran, den Abo-Beitrag für das Schuljahr 2010/11 rechtzeitig auf das Monoid-Konto, Nummer 505 948 018 bei der Mainzer Volksbank (BLZ 551 900 00) zu überweisen!

An alle Freunde und Förderer von Monoid:

Einladung zur Monoid-Feier 2010

mit der Preisvergabe
an die erfolgreichen Löserinnen und Löser des Schuljahres 2009/2010
am Samstag, dem 27. November 2010, Beginn 10 Uhr,
im Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Frankenstraße 17, 55232 Alzey.

Den Festvortrag wird Herr Prof. Dr. Valentin Blomer aus Göttingen halten.
Die Preisträgerinnen und Preisträger werden noch gesondert eingeladen.
Weitere Informationen demnächst auf der Monoid-Internetseite
`www.mathematik.uni-mainz.de/monoid`.

Rubrik der Löser und Löserinnen

Stand nach Heft 101

Alexandria, Deutsche Schule der Borromäerinnen
(betr. Lehrerinnen: Frau Frohs, Frau Farag)**:**
Kl. 5: Assil Hady 4; **Kl. 6:** Farah Ashraf 6, Iman Seif Al-Islam 6;
Kl. 7: Mona-Sophie El-Regini 8, Mariam Ahmed 3, Marianne Michel 29, Chantal Ragy 28;
Kl. 8: Farieda Gaber 38;
Kl. 11: Nada Mohamed ElAttar 38.

Alzey, Elisabeth-Langgässer-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kraft)**:**
Kl. 6: Katja Goldschmidt 6, Johanna Pitzer 4, Amany Ramadan 6, Laura Christin Schmidt 6;
Kl. 7: Arne Broszukat 24;
Kl. 8: Marc de Zoeten 32, Lena Ehrenhard-Dickescheid 9, Laura Tabea Galkowski 56, Lara Geldsetzer 8, Sebastian Ludwig 70, Alexander Rupertus 43, Julia Scherner 60;
Kl. 9: Eike Broszukat 12, Andreas Pitsch 62 Sören Rathgeber 12;
Kl. 10: Kevin Schmitt 50.
Kl. 11: Lilian Maus 23.

Alzey, Gymnasium am Römerkastell:
Anna Katharina Lange 25;
Kl. 12: Lennart Adam 5.

Aschaffenburg, Friedrich-Dessauer-Gymnasium:
Kl. 8: Hauke Mewes 13.

Bad Bergzabern, Gymnasium im Alfred-Grosser-Schulzentrum :
Kl. 10: Katharina Albert 6, Belinda Müller 6.

Bad Neuenahr-Ahrweiler, Peter-Joerres-Gymnasium:
Kl. 9: Frank Schindler 79.

Burglengenfeld, Johann-Michael-Fischer-Gymnasium:
Kl. 7: Christopher Patzanovsky 69.

Calw-Stammheim, Maria von Linden-Gymnasium:
Kl. 9: Marcella Beck 50.

Coburg, Gymnasium Casimirianum:
Kl. 9: Markus Voelckel 24.

Eiterfeld, Lichtbergschule (betr. Lehrer: Herr Jakob)**:**
Kl. 8: Lukas Vogel 11.

Erkner, Carl-Bechstein-Gymnasium:
Kl. 9: Wanda Witte 13.

Erlangen, Gymnasium Fridericianum: Kl. 7: Nadja Motova 20.

Karolinen-Gymnasium Frankenthal (betr. Lehrerin: Frau Silke Schneider)**:**
Kl. 5: Christoph Hemmer 22, Marion Misiewicz 5;
Kl. 6: Larissa Kießling 12, Marcel Wittmann 25;
Kl. 7: Arthur Schalk 15;
Kl. 8: Jana Ballweber 33;
Kl. 9: Henning Ballweber 82.

Friedrichsdorf, Rhein-Main International Montessori School (betr. Lehrerin: Frau Elze):

Kl. 6: Antonia Binnewies 2, Julia Häger 20, Niklas Heß 22, Hut Antonia 7, Jelaletdin Japarov 1, Lars Matthesen 5, Julius Panreck 10, Anastasia Reiß 20, Yasmin Sode 3;

Kl. 7: Luca Gladiator 14.

Fulda, Hochbegabten-AG Mathematik (betr. Lehrer: Herr Nüchter):

Kl. 6: Sabrina Hucke 20;

Kl. 7: Sophie Eckerscham 6, Magdalena Kött 4.

Grünheide, Gerhard-Hauptmann-Grundschule

Kl. 6: Sonja Witte 23.

Hadamar, Fürst-Johann-Ludwig-Gesamtschule (betr. Lehrerin: Frau Niederle):

Kl. 4: (Oranienschule Elz) Nils Prepens 17;

Kl. 5: Daniel Albers 6, Kim Cimander 15, Steffi Langer 6, Lea Stiehl 22, Justin Wunderlich 21, Emily Zollmann 12;

Kl. 7: Mara Koch 25, Lars Prepens 54.

Hanau, Otto-Hahn-Gymnasium:

Kl. 9: Michael Delhougne 37; **Kl. 11:** Philipp Delhougne 44.

Hargesheim, Alfred-Delp-Schule (betr. Lehrer: Herr Gruner):

Kl. 10: Paulina Braun 4, Leonard Gerharz 4, Johanna Gmeiner 4, Kirstin Heinl 3, Marie-Theres Hertel 4, Julia Hesse 6, Julia Homann 5, Thomas Kettel 3, Lea Marie Kirchhof 4, Carolin Klein 3, Julia Peitz 4, Felix Poss 5, Tom Rosenbaum 3, Ines Scheuffele 2, Alexander Schuch 4, Emily Selz 1, Florian Süß 4, Julian Sutor 2, Madlena Sutor 4, Kim Vetter 30 .

Ingolstadt, Gnadenthal-Gymnasium:

Kl. 10: Martina Schlenker 13 ,

Kairo, Deutsche Schule der Borromäerinnen :

Kl. 6: Mariam Ayman 23, Mariam Baher 30, Mariam El-Shiaty 7, Jennifer Radi 4;

Kl. 9: Shaima'a Ahmed Doma 36;

Kl. 12: Alia'a Ahmed Doma 59.

Kelkheim, Eichendorffschule:

Kl. 5: Leonard Röhl 2;

Kl. 6: Robert Holla 8 Nathalie Neubert 47, Björn Stanischewski 61;

Kl. 7: Florian Papdopulos 34, Maike Stanischewski 64.

Lehrte, Gymnasium Lehrte:

Kl. 9: Robin Fritsch 48.

Limburg, Tilemannschule:
Kl. 7: Maximilian Arens 6, Trung Ba Pham 21, Michael Von Baeckmann 21; .

Ludwigshafen, Theodor-Heuss-Gymnasium:
Kl. 11: Annika Enß 11.

Mainz, Frauenlob-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Mattheis)**:**
Kl. 5: Sophia Keller 3, Enrico Heppler 8, Annika Kunz 7, Ivan Mijokovic 4, Laura Nikolay 13, Alina Peters 6, Celine Raddatz 2, Melanie Weibrich 4, Marina Witte 8;
Kl. 7: Patrick Bierle 3, Fabian Bommer 9, Tobias Glaszner 3, Marcel Ghazi 5, Lea Happ 4, Alina Heihoff 7, Victor Jans 25, Gesa Jonat 6, Daniel Koziolek 2, Philipp Krimmel 5, Clara Licht 4, Marius Martinez 3, Suna Mazlaim 6, Lara Mrse 4, Tamara Schmoll 4, Luca Seibert 2, Max Thomann 3;
Kl. 8: Niklas Braun 17, Julia Braunschädel 14, Lucas Feringa 4;
Kl. 9: Niklas Schliesmeier 3;
Kl. 10: Kira Bittner 2, Felix Braun 7, Nabil Hagag 3, Jannik Lang 2, Marco Rudolf 19, Malik Wagner 4, Ines Zatonski 4.

Mainz, Theresianum:
Kl. 7: Inga Valentiner-Branth 11.

Mannheim, Peter-Petersen-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Wittekindt)**:**
Kl. 6: Leo Lutz 43;
Kl. 7: Ruben Hamann 15, Betül Kurtaran 34, Benedikt Przybilla 14, Leonhard Wagner 42;
Kl. 10: Tim Lutz 30, Katharina Müller 21.

München, Max-Planck-Gymnasium:
Kl. 7: Greta Sandor 32.

Neuss, Gymnasium Marienberg (betr. Lehrerin: Frau Langkamp)**:**
Kl. 7: Sophie Hagedorn 9, Ira Löffler 7, Olivia Malik 2, Prisca Napp-Saarbourg 5, Naira Von Stosch 7 ;
Kl. 11: Julia Henning 3,
Vivien Kohlhaas 13.

Nürnberg, Willstätter Gymnasium:
Kl. 9: Stella Brytanchuk 52.

Oberursel, Gymnasium (betr. Lehrer: Frau Beitlich)**:**
Kl. 6: Simon Elborg 5, Katharina Kiefer 19, Jakob Kuhn 55;
Kl. 7: Andrea Behrent 18, Lutz Bischoff 62, Heiko Kötzsche 87;
Kl. 9: Yun Yeong-Chul 31.

Oppenheim, St. Katharinen-Gymnasium :
Kl. 7: Daniel Blankenburg 46.

Pfaffenhofen a. d. Ilm, Schyren-Gymnasium:
Kl. 6: Johannes Kowalewicz 29.

Remagen, Gymnasium Nonnenwerth (betr. Lehrer: Herr Meixner)**:**
Kl. 6: Malte Bayer 3, Juliane Brenner 2, Lucas Diegmann 8, Yannick Dillmann 2, Christina Durwen 2, Anna Lia Eichen 2, Catherina Falkenstein 3, Chiara Fanslau 5, Isabelle Geis 4, Leon Häring 3, Lisa Heiden 3, Marvin Höhner 3, Sina Job 3, Rebecca Kantorek 5, Cornelia Kirch 2, Karola Manns 2, Laura Mauel 3, Leonard Ohnesorge 6, Christian Reinprecht 3, Lena Schäfer 2, Jasmin Schmitz 3, Julius Schwering 4, Philipp Sperker 2, Maximilian von Münster 8, Edna Weiß 2, Christine Wolscht 2, Lea Zimmermann 4.

Reutlingen, Friedrich-List-Gymnasium:
Kl. 8: Luis Ressel 36.

Schwerte, Friedrich-Bährens-Gymnasium:
Kl. 7: Jonas Gerigk 23.

Speyer, Speyer-Kolleg:
Kl. 12: Christoph Stiefel 9, Caroline Vester 7, Martin Vollmann 3.

Stendal, Winckelmann-Gymnasium:
Kl. 11: Alexander Rettkowski 29.

Templin, Egelpfuhlschule:
Kl. 4: Ronja Gantzke 6 .

Winnweiler, Wilhelm-Erb-Gymnasium (betr. Lehrer: Herr Kuntz)**:**
Kl. 5: Lena Broichhausen 5, Pascal Grabowsky 26, Denise Lembrich 14.
Kl. 7: Anna Lena Meier 8 .

Die Redaktion

Leitung: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Mitglieder: Angelika Beitlich, Prof. Wolfgang J. Bühler, Ph. D., Markus Dillmann, Christa Elze, Dr. Hartwig Fuchs, Dr. Klaus Gornik, Marcel Gruner, Arthur Köpps, Wolfgang Kraft, PD Dr. Margarita Kraus, Dr. Ekkehard Kroll, Susanne Kunz, Martin Mattheis, Helmut Ramser, Silke Schneider, Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Anke Sperber, Prof. Dr. Duco van Straten, Dr. Siegfried Weber.
Weitere Mitarbeiter: Dr. Valentin Blomer, Dr. Volker Priebe, Dr. Stefan Kermer
Zusammenstellung und Satz: Boris Baltes, Steffen Wolf mit freundlicher Unterstützung von Marcel Gruner
Internet und Korrektur der eingesandten Lösungen: Juliane Gutjahr
Betreuung der Abonnements: Katherine Pillau

Jahrgang 30 | Heft 103 | September 2010

Inhalt

Abonnementbestellungen per Post oder über die Homepage.
Ein Jahresabo kostet 10 € (4 Ausgaben/Jahr inkl. Porto), im Voraus auf das Konto Nr. 505948018 bei der Mainzer Volksbank, BLZ 55190000, Stichwort „MONOID“, zu überweisen; Adresse bitte nicht vergessen.
Für Auslandsüberweisungen gelten IBAN: DE28 5519 0000 0505 9480 18 und BIC: MVBMDE55.
Herausgeber: Institut für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität mit Unterstützung durch den Verein der Freunde der Mathematik an der Universität Mainz und durch folgende Schulen:

Elisabeth-Langgässer-Gymnasium Alzey,
Karolinen-Gymnasium Frankenthal,
Gymnasium Oberursel.

Anschrift: Institut für Mathematik, MONOID-Redaktion,
Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz
Telefon: 06131/39-26107, **Fax:** 06131/39-21295
E-Mail: monoid@mathematik.uni-mainz.de
Homepage: http://www.mathematik.uni-mainz.de/monoid