# Errata

In MONOID 117 sind uns leider in der Lösung zur Aufgabe 1091 auf den Seiten 32 und 33 zwei Fehler unterlaufen.

- So muss es im letzten Satz lauten:

  Dann beweist man mit $\frac{a}{b} = x$ die Ungleichung $\frac{x+n}{x+1} + x > 2\sqrt{n}$ wie im 1. Fall, wobei die zu (4) und (5) analogen Teile nicht auftreten, woraus dann die Behauptung $\frac{a}{b} - \sqrt{n} > \sqrt{n} - \frac{a+nb}{a+b}$ folgt.

- Des Weiteren ist im ersten Fall zunächst zu zeigen, dass aus $\frac{a}{b} < \sqrt{n}$ sofort $\frac{a+bn}{a+b} > \sqrt{n}$ folgt, denn nur dann ist die Ungleichung $\frac{a+bn}{a+b} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \frac{a}{b}$ gleichbedeutend mit $\left|\frac{a+bn}{a+b} - \sqrt{n}\right| < \left|\sqrt{n} - \frac{a}{b}\right|$ und $\frac{a+bn}{a+b}$ also eine bessere Näherung für $\sqrt{n}$ als $\frac{a}{b}$.

  Diese Ungleichung sieht man mit $x = \frac{a}{b}$ wie folgt:

$$\frac{a+bn}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}+n}{\frac{a}{b}+1} = \frac{x+n}{x+1} > \sqrt{n} \iff \frac{x^2+2xn+n^2}{x^2+2x+1} = \frac{(x+n)^2}{(x+1)^2} > n$$
$$\iff x^2+2xn+n^2 > nx^2+2xn+n \iff n^2-n > nx^2-x^2$$
$$\iff (n-1)n > (n-1)x^2 \iff n > x^2.$$

  Dabei wurde in der letzten Umformung $n \geq 2$ benutzt.

  Im zweiten Fall folgt aus $\frac{a}{b} > \sqrt{n}$ entsprechend $\frac{a+bn}{a+b} < \sqrt{n}$.

Bemerkung zur Aufgabe:
Die Äquivalenz $c = \sqrt{n} \Leftrightarrow c^2 - 1 = n - 1 \Leftrightarrow (c-1)(c+1) = n-1$ motiviert die Rekursionsformel $(n_{k+1} - 1)(n_k + 1) = n - 1 \Leftrightarrow n_{k+1} = \frac{n_k+n}{n_k+1}$ für die Folge der Näherungswerte $n_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Schreibt man nun $n_k = \frac{a}{b}$, so folgt daraus $n_{k+1} = \frac{a+nb}{a+b}$.
Man kann nun immer mit $n_1 = \frac{a}{b}$ so beginnen, dass $n_1 < \sqrt{n} < n_1 + 1$ gilt. Nach Fall 1 erhält man $n_2 = \frac{n_1+n}{n_1+1}$ mit $0 < n_2 - \sqrt{n} < \sqrt{n} - n_1 < 1$. Nach Fall 2 erhält man dann $n_3 = \frac{n_2+n}{n_2+1}$ mit $0 < \sqrt{n} - n_3 < n_2 - \sqrt{n}$. Alternierende Anwendung der beiden Fälle liefert so eine aufsteigende Folge $n_1, n_3, n_5, \ldots$ und eine absteigende Folge $n_2, n_4, n_6, \ldots$ mit $\sqrt{n}$ als gemeinsamen Grenzwert und $0 < \ldots < n_4 - \sqrt{n} < \sqrt{n} - n_3 < n_2 - \sqrt{n} < \sqrt{n} - n_1 < 1$.

Eine alternative Lösung ohne Fallunterscheidung in aller Kürze:
Mit den bisher verwendeten Abkürzungen ist

$$\frac{x+n}{x+1} - \sqrt{n} = \frac{x+n-\sqrt{n}(x+1)}{x+1} = -\frac{\sqrt{n}-1}{x+1} \cdot (x - \sqrt{n}).$$

Hieraus folgt, dass $x$ und $\frac{x+n}{x+1}$ auf verschiedenen Seiten von $\sqrt{n}$ liegen und schließlich, dass $\left|\frac{x+n}{x+1} - \sqrt{n}\right| < \left|x - \sqrt{n}\right|$ genau dann gilt, wenn $\frac{\sqrt{n}-1}{x+1} < 1$, das heißt $x > \sqrt{n} - 2$ ist.